

В.І. ЖДАНОВ

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

викривлений простір-час
плоский простір-час
темна енергія
темна матерія
чорна діра

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В.І. ЖДАНОВ

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Навчальний посібник

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
фізичних факультетів університетів*

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73
Ж42

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, акад. НАН України В.М.Локтєв,
д-р фіз.-мат. наук, чл.-кор. НАН України П.І.Фомін,
д-р фіз.-мат. наук, проф. С.Й.Вільчинський,
д-р фіз.-мат. наук, проф. А.О.Мінаков

*Затверджено Вченою радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
5 березня 2007 року*

Жданов, В.І.

Ж42 Вступ до теорії відносності : навчальний посібник / В.І. Жданов. – К.:
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 287 с.
ISBN 978-966-439-050-4

Викладено базові постулати теорії відносності (спеціальної та загальної) та основні її висновки з урахуванням нових досягнень за останнє десятиріччя. Розглянуто рівняння електродинаміки й гідродинаміки у плоскому та викривленому просторі-часі, рівняння гравітаційного поля, їх найважливіші розв'язки та спостережувані ефекти.

Для студентів фізико-математичних спеціальностей – астрономів і фізиків, а також для всіх зацікавлених сучасною теорією відносності та її астрономічними застосуваннями.

**УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73**

**Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(лист № 1.4/18-Г-112 від 17.01.08)**

ISBN 978-966-439-050-4

© В.І. Жданов, 2008
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2008

ЗМІСТ

Передмова	7
Зауваження до використаних позначень	8
Вступ	12
Частина 1	
СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ.....	15
1. Перетворення Лоренца	
як наслідок постулатів Ейнштейна.....	15
1.1. Простір-час, системи відліку.....	16
1.2. Перетворення Лоренца	
для одновимірних рухів систем відліку	18
1.3. Власний час.....	25
1.4. Квадрат інтервалу.....	26
1.5. Перетворення довжини та об'єму	28
2. Співвідношення спеціальної теорії відносності	
в просторі Мінковського	32
2.1. Загальні та власні перетворення Лоренца	32
2.2. Вектори та тензори в просторі Мінковського	35
2.3. Світові лінії та 4-вектор швидкості	40
3. Електродинаміка в просторі Мінковського	42
3.1. Чотиривимірна форма рівнянь Максвелла	42
3.2. Трансформаційні властивості $F_{\mu\nu}$	45
3.3. Рівняння руху зарядженої частинки.....	47
3.4. Плоскі хвилі.....	49
3.5. Ефект Доплера	50
3.6. Вектор-потенціал	51
4. Варіаційний принцип для рівнянь електродинаміки	54
4.1. Заряд у зовнішньому електромагнітному полі.....	55
4.2. Дія для електромагнітного поля	58
5. Тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля	
та закони збереження	62
5.1. 4-імпульс системи тіл	62
5.2. Енергія-імпульс електромагнітного поля.....	64
5.3. Тензор моменту-імпульсу електромагнітної системи	66
5.4. Тензор енергії-імпульсу загальної фізичної системи.....	68
5.5. Тензор енергії-імпульсу вільних частинок.....	70

6. Релятивістська гідродинаміка	73
6.1. Рівняння руху ідеальної рідини.....	73
6.2. Релятивістські ударні хвилі.....	77
7. Спеціальна теорія відносності: історична довідка.....	81
Література	83

Частина 2

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ	85
1. Невідворотність релятивістської теорії тяжіння	86
1.1. Принцип еквівалентності та нульові експерименти	86
1.2. Перевірки загальної теорії відносності у слабких полях	89
2. Роль гравітаційно-релятивістських ефектів у астрономії	93
2.1. Астрометричні системи відліку.....	93
2.2. Гравітаційні-лінзи	93
2.3. Релятивістські зорі	94
2.4. Чорні діри в ядрах галактик і квазарів.....	95
2.5. Космологія	95
2.6. Гравітаційні хвилі	96
3. Тензори на багатовиді	97
4. Спеціальна теорія відносності	
в криволінійних координатах	106
5. Ріманів багатовид і коваріантні диференціальні операції..	110
5.1. Квадрат інтервалу в рімановому багатовиді.....	111
5.2. Символи Крістоффеля	
та локально-геодезична система координат	112
5.3. Коваріантне диференціювання	115
5.4. Вправи та корисні співвідношення	120
6. Геодезичні в рімановому багатовиді.....	123
7. Тензор кривини	128
7.1. Тензор кривини і плоский багатовид.....	128
7.2. Властивості тензора кривини	130
7.3. Відносне відхилення геодезичних.....	132
8. Основні положення метричної теорії тяжіння.....	134
8.1. Вихідні положення	134
8.2. Спостережувані величини у викривленому просторі-часі	141
8.3. Суцільне середовище та пробні частинки.....	145
8.4. Електродинаміка.....	147

9. Феноменологічна теорія слабого гравітаційного поля	151
9.1. Слабке гравітаційне поле острівної системи тіл	151
9.2. Ньютонівське наближення в рівняннях руху пробного тіла	153
9.3. Гравітаційне зміщення частоти	155
9.4. Сферично-симетричний простір-час	156
9.5. Параметризований постньютонівський формалізм для гравітаційного поля сферично-симетричної маси.....	159
9.6. Рух фотонів	160
9.7. Гравітаційне зміщення перицентра орбіти пробного тіла....	169
10. Рівняння гравітаційного поля в загальній теорії відносності	171
10.1. Принцип найменшої дії	172
10.2. Тензор енергії-імпульсу	179
10.3. Константа κ і космологічна стала.....	183
11. Наближення слабого поля та гравітаційне випромінювання	187
11.1. Фізична довільність у розв'язках рівнянь поля	187
11.2. Рівняння Ейнштейна в лінійному наближенні.....	188
11.3. Калібрувальні перетворення	190
11.4. Розклад поля за плоскими хвилями.....	191
11.5. Гравітаційне випромінювання.....	193
12. Сферично-симетричне гравітаційне поле обмеженої системи мас. Чорні діри.....	194
12.1. Метрика Шварцшильда	195
12.2. Рух пробних тіл.....	200
12.3. Спостережувані величини при радіальному падінні	206
12.4. Простір-час під сферою Шварцшильда	209
12.5. Чорні діри та метрика Керра	212
13. Розв'язки Фрідмана та глобальна будова Всесвіту	215
13.1. Умови просторової однорідності та ізотропії	216
13.2. Метрика однорідної ізотропної моделі Всесвіту.....	220
13.3. Елементи релятивістської космології	225
14. Загальна теорія відносності: історико-бібліографічна довідка	239
14.1. Розробка основ	239
14.2. Досягнення.....	241
14.3. Рекомендації щодо додаткового вивчення загальної теорії відносності.....	244
Література	246

ДОДАТКИ	249
Додаток. 1. Факторизація матриці перетворення Лоренца	250
Додаток. 2. Властивості ударних адіабат	253
2.1. Рівняння стану нормальної речовини	253
2.2. Ентропія і тиск уздовж ударної адіабати	254
2.3. Теорема Цемплена	258
Література	260
Додаток. 3. Умови інтегровності системи рівнянь у частинних похідних	261
Додаток. 4. Тетрадний формалізм	264
Література	268
Додаток. 5. Розв'язки рівняння ейконалу	269
Додаток. 6. Симетрії простору-часу	271
6.1. Групи рухів у рімановому просторі та вектори Кіллінга	271
6.2. Сферична симетрія	275
Література	277
Додаток. 7. Алгебраїчна класифікація гравітаційних полів за Петровим	278
7.1. Локальна класифікація тензора Вейля	278
7.2. Теорема Сакса	280
Література	281
Додаток. 8. Енергія гравітаційного поля	282
8.1. Ізольовані системи	282
8.2. Енергія-імпульс ізольованої системи	284
8.3. Додатність маси-енергії	286
Література	287

ПЕРЕДМОВА

На сьогодні важко уявити розвиток науки без двох геніальних відкриттів – спеціальної теорії відносності (СТВ) і загальної теорії відносності (ЗТВ). Ці дві ейнштейнівські теорії стали основою сучасного наукового світогляду та породили нові напрями фізики та астрономії. Зокрема, ЗТВ стала основою релятивістської астрофізики та космології; її ефекти необхідно враховувати при побудові систем відліку, які використовуються при створенні надточних систем навігації та астроорієнтації. Варто нагадати, що дослідження руху планети Меркурій виявили аномалію в зміщенні перигелію (43" за сто років), і саме цей ефект був першою перевіркою ЗТВ¹. Після цього численні дослідження протягом минулого століття свідчили на користь цієї теорії².

Час – одна із загадкових категорій і водночас основних спостережуваних величин у теорії відносності – невпинно йде вперед і з його плином виникають нові наукові дані, для розуміння яких використовується ЗТВ. У кінці ХХ і на початку ХХІ ст. широкого розголосу набули результати астрономічних досліджень, які принципово змінили уявлення про будову та еволюцію Всесвіту. Виникли в космології такі поняття, як "темна матерія", "темна енергія", що стали надбанням широкого наукового загалу та предметом найсучасніших досліджень. Ці тенденції відображено в програмі "Дослідження структури та складу Всесвіту, прихованої маси і темної енергії" (шифр "Космомікрофізика"), нещодавно прийнятої Президією НАН України, яка передбачає поряд з іншою діяльністю, публікацію навчальних видань зазначеного напрямку. У цьому контексті видання навчального посібника В.І. Жданова, "Вступ до теорії відносності", написаного на високому науковому рівні та доступною мовою, є дуже своєчасним. Ця книга буде корисною як для студентів, так і науковців – астрономів і фізиків і всіх зацікавлених сучасною теорією відносності та її астрономічними застосуваннями.

**Акад. НАН України
Я.С. Яцків**

¹ Слід також відзначити, що в 2007 р. виповнилось 100 років із часу першої спроби А. Ейнштейна в побудові релятивістської теорії тяжіння, коли він вперше поширив принцип відносності на неінерціальні системи за допомогою принципу еквівалентності.

² Сучасний стан перевірок ЗТВ відображено в книзі Яцківа Я.С. та ін., 2005 р. [50, ч. 2].

ЗАУВАЖЕННЯ ДО ВИКОРИСТАНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

Деякі з позначень, які використовують у спеціальній теорії відносності (СТВ) і загальній теорії відносності (ЗТВ), обумовлені вимогами зручності, деякі – історичними та інколи суб'єктивними причинами. Починаючи вивчати теорію відносності, можна розгубитися через різноманіття позначень у різних посібниках, щодо вибору індексів (грецькі чи римські у відповідних ситуаціях), сигнатури метричного тензора, а також означення тензорів кривини та Річчі, які відрізняються знаком. Тому в даній книзі будемо використовувати позначення, зауваження до яких наведено. Рекомендуємо звернути особливу увагу на ті формули та позначення, які відмічено знаком оклику.

1! *Індекси.* Якщо не зазначено інакше, в обох частинах посібника грецькі індекси $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu, \nu$, пробігають значення 0,1,2,3. Римські індекси i, j, k, l, m, n, \dots пробігають значення 1,2,3.

2! *Координати.* Індекс у координат пишемо зверху, наприклад x^α . Набори диференціалів dx^α утворюють контраваріантний вектор. У СТВ, як правило, $x^0 = ct$, де t – координатний час інерціальної системи відліку; x^i – просторові координати. Якщо треба виділити просторову частину координат (при інтегруванні тощо) пишемо $x \equiv \{x^\alpha\} \equiv (x^0, \mathbf{x})$.

3. *Похідні.* Частинні похідні за відповідними координатами:

$$\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \equiv \phi_{,\mu}.$$

Якщо ϕ – скалярна функція, то набори цих похідних у різних координатних системах утворюють коваріантний вектор. Похідні від вектора чи тензора, наприклад

$$\partial_\mu T_\beta^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_\beta^\alpha \equiv T_{\beta, \mu}^\alpha,$$

уже не утворюють тензорних величин при загальних перетвореннях. Якщо обмежитися групою лінійних перетворень координат (напр.,

групою Лоренца), при диференціюванні тензорні властивості зберігатимуться.

Якщо задано зв'язність (символи Крістоффеля $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$), можна ввести коваріантну операцію, застосування якої приводить до тензора більшої валентності, зокрема для векторів:

$$\nabla_{\alpha} A_{\beta} \equiv \frac{\delta A_{\beta}}{\delta x^{\alpha}} \equiv A_{\beta;\alpha} = \partial_{\alpha} A_{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} A_{\gamma},$$

$$\nabla_{\alpha} A^{\beta} \equiv \frac{\delta A^{\beta}}{\delta x^{\alpha}} \equiv A^{\beta}{}_{;\alpha} = \partial_{\alpha} A^{\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} A^{\gamma}.$$

Аналогічно позначаємо

$$\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} A_{\gamma} \equiv A_{\gamma;\beta\alpha}, \quad \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \nabla_{\gamma} A^{\delta} \equiv A^{\delta}{}_{;\gamma\beta\alpha}, \quad B_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\gamma} \equiv \nabla_{\gamma} B_{\alpha}{}^{\beta} \text{ тощо.}$$

4. *Правило підсумовування.* Якщо маємо два однакові індекси – обов'язково один верхній і один нижній – це означає суму за цими індексами (якщо немає інших застережень). Ці індекси називають *німими*, наприклад:

$$A_{\alpha}{}^{\alpha} \equiv \sum_{\alpha=0}^3 A_{\alpha}{}^{\alpha}, \quad A^{\alpha} B_{\alpha} \equiv \sum_{\alpha=0}^3 A^{\alpha} B_{\alpha}, \quad A^{\mu} \partial_{\mu} \varphi \equiv \sum_{\alpha=0}^3 A^{\mu} \partial_{\mu} \varphi, \quad C^{\mu}{}_{;\mu} \equiv \sum_{\alpha=0}^3 \nabla_{\nu} C^{\nu}.$$

Останній вираз називають *коваріантною дивергенцією*.

Зауважимо, що у фізичній літературі, де не йдеться про теорію відносності, часто відходять від цього правила і пишуть обидва німих індекси знизу чи зверху.

5. *Запис правил перетворення векторів і тензорів.* Нехай координатні системи $\{x\}$ і $\{x'\}$ пов'язані взаємно-однозначним диференційовним зв'язком $x = x(x')$, $x' = x'(x)$. Розглянемо контраваріантний вектор, заданий у точці m чотиривимірного багатовиду¹, який має координати x_m, x'_m у цих координатних системах, причому набори $\{A^{\alpha}(x)\}$ і $A'^{\alpha}(y)$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) є компонентами цього вектора в $\{x\}$ та $\{x'\}$, тобто

$$A'^{\alpha} = \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right)_{x_m} A^{\beta} \quad \text{або} \quad A^{\alpha} = \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} \right)_{x'_m} A'^{\beta},$$

¹ Сукупність таких векторів утворює дотичний простір у точці m .

де похідні обчислюються в точці m у відповідних координатних системах. Це зручно переписати, замінивши деякі індекси на штриховані, що пробігають ті самі значення:

$$A'^{\alpha'} = \left(\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \right)_{x_m} A^\alpha \quad \text{або} \quad A^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \right)_{x'_m} A'^{\alpha'}.$$

Таким чином, штрихованим координатам, як правило, відповідають штриховані індекси.

Звертаємо увагу, що в деяких підручниках штрих у A опускають, залишаючи його лише в індексах. Це може викликати непорозуміння у початківців. При розгляді векторного поля ці співвідношення мають виконуватися в будь-якій точці. Здебільшого за контекстом зрозуміло, у якій точці обчислюються похідні, тому відповідну позначку, як правило, опускаємо. Наприклад, для одноразово коваріантного та двічі контраваріантного тензорного поля

$$T'^{\alpha'\beta'}_{\mu'}(x') = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} T^{\alpha\beta}_\mu(x).$$

Контраваріантні індекси – завжди верхні, коваріантні – нижні. Звертаємо увагу на розташування верхніх і нижніх індексів. Для запобігання плутанини та помилок при опусканні й підніманні індексів слід зберігати їх порядок:

$$T^\alpha_\beta \equiv g^{\alpha\gamma} T_{\gamma\beta}, \quad A_{\alpha\beta}{}^\gamma \equiv g_{\beta\mu} A_\alpha{}^{\mu\gamma}, \quad R_{\alpha\beta}{}^\gamma{}_\delta \equiv g^{\gamma\sigma} R_{\alpha\beta\sigma\delta}.$$

6. Тензор Мінковського спеціальної теорії відносності:

$$\|\eta\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

У ч. 1, якщо не зазначено інше, позначаємо $\eta_{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu}$, сукупність цих компонент утворює водночас і коваріантний, і контраваріантний тензор відносно перетворень Лоренца; $\eta_{00} \equiv 1$, $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$, де δ – символ Кронекера.

7. Сигнатуру метричного тензора $g_{\mu\nu}$ у рімановому багатовиді визначаємо як у тензора Мінковського СТВ: у фіксованій точці $g_{\mu\nu}$ зво-

диться до $diag(1, -1, -1, -1)$ за допомогою лінійних координатних перетворень.

8. Альтернація за двома індексами (приклад):

$$A_{[\alpha\beta]\delta} := \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta\delta} - A_{\beta\alpha\delta}), \quad A_{[\alpha|\delta\gamma|\beta]} := \frac{1}{2}(A_{\alpha\delta\gamma\beta} - A_{\beta\delta\gamma\alpha}).$$

9. Символи Кристоффеля, асоційовані з метрикою $g_{\alpha\beta}$,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\beta\sigma,\gamma} + g_{\gamma\sigma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma}).$$

10! Тензор кривини (тензор Рімана) –

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta},$$

відповідно комутатор двох коваріантних похідних –

$$2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}A^{\alpha} \equiv (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})A^{\alpha} \equiv 2A^{\alpha}_{;[\nu\mu]} \equiv R^{\alpha}_{\sigma\mu\nu}A^{\sigma}$$

або

$$2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}A_{\alpha} \equiv (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})A_{\alpha} \equiv 2A_{\alpha;[\nu\mu]} \equiv R^{\sigma}_{\alpha\nu\mu}A_{\sigma}.$$

11! Тензор Річчі: $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$, скалярна кривина $R = R^{\mu}_{\mu}$. У деяких виданнях, на відміну від цього, тензор Річчі утворюють шляхом згортки за першим і четвертим індексами, що впливає на знак цього тензора та скалярної кривини, а також і на знак у рівняннях Ейнштейна

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu},$$

де Λ – космологічна стала (її також вводять по-різному!), $T^{\mu\nu}$ – тензор енергії-імпульсу негравітаційних полів. Наш вибір Λ відповідає зв'язку з енергією космологічного вакууму ("темної енергії") у вигляді $\varepsilon_{\Lambda} = \Lambda c^4 / (8\pi G)$.

12. Як правило, через Ω_3 позначаємо область тривимірного простору, Ω_4 – область чотиривимірного простору; $\partial\Omega$ – межа області Ω .

ВСТУП

Із часу свого створення спеціальна теорія відносності (СТВ) і загальна теорія відносності (ЗТВ) завжди були об'єктом зацікавленості як науковців, так і широкого загалу. Проте варто відзначити суттєве збільшення цієї зацікавленості протягом останнього десятиріччя завдяки новим досягненням у галузі космології. Зростає й практична потреба в застосуванні теорії відносності, зокрема для правильної інтерпретації прецизійних вимірювань часу та координат. Саме тому й виникає необхідність відобразити нові результати та тенденції в навчальній літературі.

Традиційно СТВ викладається в університетських дисциплінах з електродинаміки та теорії поля, хоча перше знайомство з елементами СТВ починається ще у школі. Щодо ЗТВ і релятивістської гравітації, то не так давно цей предмет викладався переважно для студентів старших курсів, але на сьогодні можна ставити питання про викладання ЗТВ одразу після засвоєння СТВ, доки у студентів ще свіжі спогади про відомості з диференціальної геометрії та математичного аналізу. Для цього рівень математичної підготовки перших курсів університетів є цілком достатнім.

Автор намагався дати доступний для початківця опис базових понять і висновків теорії відносності, який може слугувати дороговказом на шляху до більш спеціальних тем. Перша частина книги містить основи спеціальної теорії відносності та електродинаміки у чотиривимірному формулюванні. Цей матеріал охоплює відповідні розділи загальних університетських дисциплін. Окремий розділ присвячено релятивістській гідродинаміці. Викладення основ ЗТВ побудовано на принципі локальної лоренцовості, що дозволяє з єдиних позицій вводити рівняння негравітаційних полів і співвідношення для спостережуваних величин у викривленому просторі-часі. Сформульовано умови, що визначають вигляд рівнянь гравітаційного поля з точністю до двох констант – гравітаційної та космологіч-

ної. Розглянуто найбільш важливі розв'язки й спостережувані ефекти та застосування до сучасних проблем астрофізики й космології. Більш спеціальні питання, а також рекомендації щодо подальшого вивчення, винесено в додатки, де розгляд є, як правило, більш конспективним і вимагає певної підготовки. У цілому матеріал призначено студентам третіх-четвертих курсів фізико-математичних спеціальностей і може слугувати місцем до більш фахових питань ЗТВ, релятивістської астрофізики та космології.

Автор щиро вдячний акад. НАН України Я.С. Яцківу за підтримку в написанні книги, канд. фіз.-мат. наук О.М. Александрову та канд. фіз.-мат. наук Ю.М. Кудрі за корисні поради і зауваження щодо рукопису. Окрема подяка акад. НАН України В.М. Локтеву, чл.-кор. НАН України П.І. Фоміну, проф. С.Й. Вільчинському та проф. А.О. Мінакову за рецензування книги.

Робота частково підтримана програмою НАН України "Дослідження структури та складу Всесвіту, прихованої маси і темної енергії" (шифр "Космомікрофізика").

1

ЧАСТИНА

СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ

**Наука – це спроба привести хаотичне різноманіття
нашого чуттєвого досвіду з деякою
єдиною системою мислення.**

А. Ейнштейн

Дана частина посібника містить виведення перетворень Лоренца з принципу відносності та чотиривимірний варіант рівнянь електродинаміки і гідродинаміки СТВ, необхідні для подальшого переходу до викривленого простору-часу (ч. 2). Розглянуто варіаційний принцип для рівнянь електродинаміки та введено тензор енергії-імпульсу. Зауважимо, що досі не знайдено жодних порушень СТВ.

1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОРЕНЦА ЯК НАСЛІДОК ПОСТУЛАТІВ ЕЙНШТЕЙНА

У цьому розділі викладено основні поняття СТВ та її найважливіші наслідки, що охоплюють діапазон від субатомних до міжгалактичних масштабів. Спираючись на базові принципи СТВ, виведено перетво-

рення Лоренца згідно з оригінальною роботою А. Ейнштейна (1905), показано інваріантність квадрата інтервалу, розглянуто перетворення довжини та об'єму.

1.1. Простір-час, системи відліку

Спеціальна теорія відносності переглянула фундаментальні поняття класичної фізики. Для розуміння цього нового погляду необхідно почати з базових уявлень про вимірювання часу та відстаней. Виявляється, що не всі припущення ньютонівської теорії наповнені фізичним змістом.

Одним з вихідних у теорії відносності є поняття *події*, яку характеризують однією часовою та трьома просторовими координатами. Поняття події аналогічне поняттю точки в геометрії. Уявлення про простір-час як множину подій, що має властивості багатovidу¹, дозволяє розглядати в ньому кількісні співвідношення. Будемо казати, що *система відліку* (СВ) є визначеною, якщо відома фізична процедура, яка дозволяє однозначно зіставити будь-якій події четвірку координат (часову й три просторові). Практично СВ реалізують за допомогою певних технічних засобів і алгоритмів, що дозволяють визначати координати за даними спостережень, як це роблять в астрометричних СВ – геоцентричній і геліоцентричній тощо. Поняття СВ співзвучне з поняттям системи координат, але відрізняється від нього, оскільки припускає конкретні фізичні вимірювання, що підлягають певним обмеженням.

Далі будемо вважати, що *простір-час є однорідний, а простір – ізотропний*. Однорідність простору і часу означає, що результати будь-яких фізичних експериментів не залежать ні від розташування лабораторії, ні від часу їх проведення. Ізотропія визначає таку незалежність від просторової орієнтації лабораторії.

Наступна ідеалізація – *інерціальні системи відліку*, тобто такі, у яких виконується закон інерції. Відоме припущення полягає в тому, що такі системи існують, і просторові співвідношення в інерціальних СВ відповідають аксіомам евклідової геометрії. Евклідова аксіоматика, за відсутності гравітаційних ефектів, які вивчає ЗТВ, підтверджується високоточними експериментами. У кожній інерціальній СВ інтервали часу та відстані між будь-якими двома подіями визначені, а відповідні вимірювальні процедури не призводять до суперечностей.

¹ Поняття багатovidу буде роз'яснено в розд. 3, ч. 2 при розгляді загальної теорії відносності. На даному етапі достатньо припущення, що в просторі-часі існують системи координат, пов'язані між собою взаємно однозначними та диференційованими перетвореннями.

Евклідовість простору дозволяє, зокрема, застосовувати прямокутні декартові системи координат у інерціальних СВ, де квадрат довжини відрізка прямої дорівнює, за теоремою Піфагора, сумі квадратів проєкцій відрізка на координатні осі. Закон інерції полягає в тому, що декартові координати матеріальної точки, на яку не діють зовнішні сили (або сума сил дорівнює нулю), є лінійними функціями часу.

Інерціальну систему відліку в СТВ можна уявити як сукупність спостерігачів з годинниками, які щільно заповнюють простір і є нерухомими один відносно одного, причому їх годинники синхронізовані¹. Нерухомість спостерігачів один відносно одного можна перевірити за допомогою сигналів, які генерують передавачі біля кожного спостерігача. Це також дає змогу визначити відстань між спостерігачами, знаючи швидкість світла у вакуумі c , яка є однаковою в усіх інерціальних системах – це один з базових постулатів СТВ, перевірений численними експериментами. Проте це не означає, що числове значення відстані між спостерігачами буде одне й те саме в різних СВ, що рухаються одна відносно іншої. У СТВ усі СВ вважаємо інерціальними². При розгляді СТВ у ч. 1 завжди вважаємо, що просторові координати подій у інерціальних СВ визначені в прямокутній декартовій системі.

Однакові нерухомі відносно деякої СВ годинники вважаються синхронізованими, якщо в них визначено спільний початок відліку. Синхронізацію в заданій СВ можна провести, наприклад, за допомогою електромагнітних сигналів. Розглянемо одну з можливих процедур синхронізації (за Ейнштейном). Нехай події P_1 і P_2 супроводжуються світловими спалахами, а спостерігач, який перебуває в стані нерухомості відносно СВ, розташований на прямій, посередині³ між просторовими точками подій і реєструє ці спалахи. Тоді події P_1 і P_2 є одночасними в даній СВ, якщо цей спостерігач реєструє сигнали від спалахів одночасно.

Розглянемо інший, еквівалентний спосіб синхронізації за допомогою світлових сигналів. Нехай спостерігачі A та B зі своїми годинниками нерухомі відносно СВ S . Щоб зіставити показання годинників A і B , спостерігач A в точці x_A надсилає світловий сигнал у момент t_{A1}

¹ Робимо припущення, що існують добре визначені процедури, які визначають відносну нерухомість спостерігачів і синхронізацію (див. далі). Це припущення нетривіальне; ці процедури, наприклад, не завжди можливі в ЗТВ.

² Тим не менше, рівняння СТВ можна узагальнити на довільні СВ і координатні системи, однак при цьому вигляд рівнянь може змінитися.

³ Як зазначено вище, спостерігач може вимірювати відстані за допомогою світлових сигналів і порівнювати їх між собою.

(за своїм годинником). Цей сигнал відбивається від дзеркала біля спостерігача B (подія Π_1). Спостерігач A реєструє відбитий сигнал у своєму оточенні в момент t_{A2} . Позначимо $t_{A0} = (t_{A1} + t_{A2})/2$. За визначенням вважатимемо, що подія Π_1 є одночасною з подією Π_2 .

Досі ніде не фігурували показання годинника спостерігача B , але тепер можна встановити початок відліку цього годинника так, щоб за його показаннями події Π_2 відповідав час t_{A0} . Описана процедура дає змогу встановити однаковий початок відліку годинників усіх спостерігачів, нерухомих один відносно одного. Підкреслимо, що *процедура синхронізації стосується тільки однієї СВ*.

Щодо деяких важливих відмінностей СТВ від ньютонівської теорії, які втрачають силу в СТВ: а) у СТВ події, що є одночасними в одній інерціальній СВ, можуть бути неодноточасними в іншій інерціальній СВ; б) якщо два спостерігача рухаються один відносно одного, їх годинники неможливо синхронізувати. Це суттєво відрізняє СТВ, яка узгоджується із фізичним досвідом, від ньютонівського підходу з абсолютним часом, загальним для усіх систем відліку.

1.2. Перетворення Лоренца для одновимірних рухів систем відліку

Перейдемо до перетворень, що пов'язують координати події (x, y, z, t) і (x', y', z', t') у двох інерціальних системах S та S' . Як зазначено вище, вважаємо, що просторові координати (x, y, z) і (x', y', z') у S та S' визначені в прямокутній декартовій системі. Нехай осі абсцис у S та S' збігаються. Для початку обмежимося одновимірним випадком, коли події відбуваються на осях OX, OX' , тобто перетворюються лише x і t ($y' = y = 0, z' = z = 0$):

$$x' = f(x, t), \quad t' = g(x, t) \quad (1.1)$$

Для малих змін координат dx і dt :

$$dx' = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt, \quad dt' = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial t} dt.$$

Величини dx, dt, dx', dt' можна вимірювати відповідно в S та S' . Це дає принципову можливість експериментально визначити частинні похідні від f та g . Наприклад, розглядаючи дві близькі події з коор-

динатами (x, t) і $(x + dx, t)$ у S , одночасні в цій системі, і вимірюючи dx' та dt' у S' , з рівнянь для диференціалів визначимо $f_x(x, t)$ та $g_x(x, t)$ і т. д. Результати такого визначення можуть залежати від відносної швидкості систем відліку, але не повинні залежати від положення та часу вимірювань згідно з гіпотезою про однорідність простору-часу. Тому ці похідні є константами і **перетворення (1.1) є лінійним**. Запишемо його у вигляді

$$x' = ax + bt + c_1, \quad (1.2)$$

$$t' = ex + ht + c_2, \quad (1.3)$$

де a, b, e, h, c_1, c_2 – константи.

Очевидно, цілком аналогічні міркування доводять лінійність і в більш загальному випадку, ніж одновимірний. Лінійність перетворень, що пов'язують координати подій у інерціальних СВ, є наслідком однорідності простору-часу.

Проаналізуємо зв'язок (1.2), (1.3), постулюючи принцип відносності:

• **усі інерціальні системи рівноправні; неможливо виявити рівномірний прямолінійний рух спостерігача за допомогою експериментів у замкненій лабораторії**¹. Це означає, що всі фізичні процеси виглядають однаково для різних інерціальних спостерігачів, які рівномірно рухаються зі сталими швидкостями і перебувають у різних просторово-часових областях, тобто **усі фізичні процеси в різних інерціальних системах відліку можна описати одними й тими самими рівняннями незалежно від швидкості цих систем**. Неможливо встановити "абсолютну" СВ, відносно якої загальні фізичні закони мали б якусь специфіку, якої немає в інших СВ. За умови узгодження принципу відносності з усіма спостереженнями сама постановка задачі про пошук "абсолютної" СВ беззмістовна, як і поняття про абсолютний рух.

Сформульований принцип дуже загальний і для просування далі необхідна додаткова інформація, яка, зокрема, може міститися в рівняннях динаміки полів чи частинок. Сам по собі принцип відносності можна узгодити навіть з ньютонівськими уявленнями про єдиний час для всіх інерціальних систем. При цьому, якщо рівняння ньютонівської динаміки були б правильними, тоді б перетворення, які пов'язують різні системи відліку, мали б вигляд перетворень Галілея, а не перетворень Лоренца, які будуть виведені далі. Додаткову інформацію,

¹ Космонавт може визначити швидкість і напрямок руху відносно планет, виглядаючи в ілюмінатор космічного корабля або сприймаючи зовнішні сигнали, тобто проводячи вимірювання в незамкненій лабораторії.

яка конкретизує зв'язок інтервалів часу та відстаней найбільш просто, дає другий постулат – умова інваріантності швидкості світла в усіх інерціальних системах:

• **швидкість світла у вакуумі є універсальною сталою, вона однакова в усіх інерціальних системах відліку і не залежить від швидкості джерела.** Як побачимо далі, спираючись на цей постулат і принцип відносності, гіпотезу про однорідність простору-часу та ізотропію простору, можна отримати зв'язок координат у різних інерціальних системах, не звертаючись до рівнянь Максвелла чи яких-небудь інших рівнянь теорії поля. Однак спочатку перетворення, що описують цей зв'язок, виникли в роботах Г. Лоренца та А. Пуанкаре саме на основі аналізу рівнянь Максвелла. А. Ейнштейн запропонував розглядати принцип відносності одночасно з вимогою інваріантності швидкості світла й надав цим твердженням загального змісту. Постулати відносності та інваріантності швидкості світла, якщо їх розглядати разом, будемо називати спеціальним принципом відносності Ейнштейна.

Твердження про інваріантність швидкості світла заперечує існування виділеної системи відліку, пов'язаної з ефіром – особливим середовищем, збудження якого обумовлюють поширення електромагнітних хвиль. За уявленнями, що панували ще на початку ХХ ст., до створення СТВ: система спокою ефіру займає виділене положення, час, визначений у цій "абсолютній" СВ, є однаковим у всіх інерціальних СВ, а події, що є одночасними в одній інерціальній системі, є одночасними в усіх таких системах. Гіпотеза про існування ефіру була спростована багатьма експериментами. Ньютонівська механіка не узгоджується зі спостереженнями, хоча для швидкостей, малих порівняно зі швидкістю світла, ця механіка працює досить точно, а відповідні релятивістські поправки (тобто поправки СТВ) до ньютонівських розрахунків спостережуваних величин мають порядок $O(v^2/c^2)$. Щодо рівнянь Максвелла, які самі по собі не вимагають наявності ефіру, то вони чудово узгоджуються зі спеціальним принципом відносності.

Використаємо спеціальний принцип відносності для встановлення явного вигляду координатних перетворень (1.2), (1.3), які пов'язують інерціальні системи. Обмежимося однорідними перетвореннями, коли подія з координатами $(0,0)$ у S має також координати $(0,0)$ у S' , тобто $c_1 = c_2 = 0$. Цього можна завжди домогтися перевизначенням початку відліку часу та просторових координат.

Нехай система S' рухається відносно S зі швидкістю v у додатному напрямку осі x . Якщо в S' траєкторія точки, що перебуває в стані спокою в цій системі, визначається співвідношенням $x' = 0$ при всіх t' , то в S маємо $x = vt$. Звідси з (1.2) маємо $b = -av$, і замість (1.2) можна записати

$$x' = a(v)(x - vt). \quad (1.4)$$

Аналогічно, сукупність подій з координатою $x = 0$ у S (траєкторія частинки, що не рухається відносно S') відповідає траєкторії $x' = -vt'$ у S' ; звідси визначаємо $h = a$ і замість (1.3) маємо

$$t' = ex + at. \quad (1.5)$$

Врахуємо, що швидкість світла в S та S' однакова. Це означає, що траєкторія світлового сигналу, задана рівнянням $x(t) = ct$ у S , матиме такий самий вигляд $x'(t') = ct'$ у S' . Підставимо це в (1.4), (1.5), звідки $e = -va/c^2$.

Таким чином, для будь-якої події (x, t) її координати в S' визначаються із формул

$$\left. \begin{aligned} x' &= a(v)(x - vt) \\ t' &= a(v)\left(t - xv/c^2\right) \end{aligned} \right\}. \quad (1.6)$$

Обернений зв'язок отримуємо, розв'язуючи ці рівняння відносно x, t :

$$\left. \begin{aligned} x &= a'(x' + vt') \\ t &= a'(t' + vx'/c^2) \end{aligned} \right\}, \quad (1.7)$$

де

$$a' = \left[a(v)\left(1 - v^2/c^2\right) \right]^{-1}. \quad (1.8)$$

Зауважимо, що $a'(v) = a(-v)$, оскільки перетворення (1.6) повинні мати загальний характер, а перехід від координат у S' до S відповідає оберненому знаку швидкості v , але поки що невідомо, чи $a(-v)$ збігається з $a(v)$. Для з'ясування, згадаємо припущення про ізотропію простору. Змінимо напрямок просторових осей (OX у S та OX' у S'), тобто введемо систему \tilde{S} з координатами $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = -x$ і систему \tilde{S}' , де $\tilde{t}' = t'$, $\tilde{x}' = -x'$. Взаємне розташування \tilde{S} відносно \tilde{S}' таке саме, як

і S' відносно S , тому вигляд координатних перетворень $\tilde{S}' \rightarrow \tilde{S}$ такий самий, як (1.6):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= a(v)(\tilde{x}' - v\tilde{t}') \\ \tilde{t} &= a(v)(\tilde{t}' - \tilde{x}'v/c^2) \end{aligned} \right\}.$$

Підставляючи $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = -x$ і $\tilde{t}' = t'$, $\tilde{x}' = -x'$, отримуємо перехід від S' до S :

$$\left. \begin{aligned} x &= a(v)(x' + vt') \\ t &= a(v)(t' + vx'/c^2) \end{aligned} \right\}.$$

Порівнюючи це з (1.7), маємо $a' = a(v)$, звідки, враховуючи (1.8),

$$a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.9)$$

Формально існує ще одна можливість, коли $a(v) = -(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Цей варіант перетворення координат є добутком перетворення з фактором (1.9) та інверсії часової й просторової координат. Нас цікавить насамперед перетворення, які неперервно переходять у тотожне при $v = 0$, тому варіант з від'ємним a відкидаємо.

Дамо більш наочний аналіз умови ізотропії на прикладі процесу випромінювання, що виникає внаслідок квантових переходів у атомі водню, з погляду спостерігачів, пов'язаних з S та S' . Отримаємо зв'язок між a, a' , виходячи з (1.6), (1.7). Відраховуючи певну кількість періодів коливань, можна створити еталон одиниці часу та атомний годинник. Нехай цей годинник перебуває в стані спокою в системі S' ; розглянемо дві події, що відбуваються біля нього, з координатами (t'_1, x'_1) у S' та $(t'_1 + T_0, x'_1)$, де x'_1 – положення годинника, T_0 – інтервал часу, що вимірює спостерігач, який також перебуває в стані спокою в S' . Остання величина визначається певною кількістю періодів коливань у системі спокою. Для спостерігача в S інтервал часу між цими подіями визначається згідно з (1.7):

$$T = a'(t'_1 + T_0 + vx'_1/c^2) - a'(t'_1 + vx'_1/c^2) = a'T_0$$

Таким чином, відношення $a' = a(-v) = T/T_0$ можна визначити експериментально.

Розглянемо аналогічне вимірювання в S' та S , але нехай тепер годинник перебуває в стані спокою в S ; інтервал T_0 у цій системі визначається тією самою кількістю коливань, що й раніше. Цей експеримент відрізняється від попереднього лише напрямком швидкості між системами, який за вимогою ізотропії є несуттєвим. Враховуючи (1.6), аналогічно матимемо $a = a(v) = T/T_0$, тобто $a = a(v) = a' = a(-v)$.

Запишемо остаточний результат

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - xv/c^2), \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \quad (1.10)$$

а також обернене перетворення

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma(t' + x'v/c^2). \quad (1.11)$$

Досі розглядалися лише події, що відбуваються на осях абсцис систем S та S' , хоча всі міркування легко поширити на довільні події; однак відносну орієнтацію систем S і S' , просторові осі яких паралельні, поки що залишимо як раніше. Прямою підстановкою легко перевірити, що внаслідок (1.10) або (1.11): $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$. Завдяки інваріантності швидкості світла та ізотропії простору фронт світлової хвилі повинен мати однакову сферичну форму в обох системах, S та S' :

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2,$$

звідки $y^2 + z^2 = y'^2 + z'^2$ для довільних y, z . Звідси випливає, що координати, осі яких перпендикулярні напрямку відносного руху, залишаються незмінними:

$$y = y', \quad z = z', \quad (1.11, a)$$

де ми аналогічно попередньо викладеному відкидаємо варіант з інверсією просторових осей. Перетворення (1.10) і (1.11) називають *перетвореннями Лоренца*, оскільки саме він отримав їх, вивчаючи інваріантність рівнянь Максвелла. Ейнштейн надав їм нового змісту, виходячи з принципу відносності. Далі називатимемо перетворення (1.10) і (1.11) *одновимірними перетвореннями Лоренца*¹, щоб відрізнити їх від загальних перетворень, які пов'язують інерціальні системи відліку з довільною орієнтацією просторових осей і довільним напрямком відносного руху.

¹ У літературі одновимірні перетворення Лоренца також називають бустами (від англ. *boost*).

Вправа 1.1. Розгляньте інший спосіб, що дозволяє виразити $a(v)$ через вимірювання часу в S та S' . Нехай джерело світлових сигналів є нерухомим генерує спалахи з періодом T_0 у власній системі S . Спостерігач, що рухається (разом із системою S') зі швидкістю v відносно S , сприймає світлові сигнали з періодом T_1 , що відрізнятиметься від T_0 (ефект Доплера). Знайдіть відношення T_1/T_0 , виходячи з (1.6) або (1.7). Розглядаючи обернений випадок, коли спостерігач і джерело є нерухомими відносно S і S' , покажіть, що $a(v) = a(-v)$.

Відносність одночасності. Покажемо, що одночасні події в S з координатами (t, x_1) , (t, x_2) , які відбуваються в різних просторових точках ($x_1 \neq x_2$), не є одночасними в S' . Підставляючи координати подій в (1.10), маємо

$$t'_1 = \gamma(t - x_1 v / c^2) \neq t'_2 = \gamma(t - x_2 v / c^2),$$

$$t'_2 - t'_1 = \gamma[(x_1 - x_2)v / c^2] \neq 0.$$

Таким чином, події з різними значеннями координати x одночасні в одній інерціальній системі S , не є одночасними в іншій системі S' , що рухається відносно першої вздовж OX з ненульовою швидкістю v . Однак одночасність зберігається для подій з однаковими x , але різними координатами y або z . Дійсно, у перетворення часової змінної y', z' чи y, z не входять, тому, наприклад, одночасні події на осі OY у S є одночасними й у S' .

Додавання швидкостей. Перетворення Лоренца пов'язують координати будь-яких подій у інерціальних СВ S та S' , де S' рухається відносно S зі сталою швидкістю v . Якщо розглядається рух частинки вздовж осі OX системи S з деякою швидкістю $u = dx/dt$, то в системі S' , яка рухається відносно S зі швидкістю v , маємо

$$dx' = a(v)(dx - vdt) = a(v)(u - v)dt,$$

$$dt' = a(v) \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right) dt,$$

звідки швидкість у S' :

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

Аналогічно

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

це формула релятивістського додавання швидкостей при русі вздовж однієї осі.

Нехай тепер деяке тіло A рухається зі швидкістю u_A відносно спостерігача, а тіло B – зі швидкістю u_{BA} відносно A (в одному напрямку). Рухи вважаємо інерціальними. За формулою релятивістського додавання швидкостей тіло B рухається відносно спостерігача зі швидкістю

$$u_B = \frac{u_A + u_{BA}}{1 + \frac{u_A u_{BA}}{c^2}}.$$

Розглянемо добуток

$$\frac{1 + u_A/c}{1 - u_A/c} \cdot \frac{1 + u_{BA}/c}{1 - u_{BA}/c} = \frac{1 + \frac{u_A + u_{BA}}{c} + \frac{u_A u_{BA}}{c^2}}{1 - \frac{u_A + u_{BA}}{c} + \frac{u_A u_{BA}}{c^2}} = \frac{1 + u_B/c}{1 - u_B/c}.$$

Звідси видно, що у випадку одновимірних рухів величина $\ln \frac{1 + u/c}{1 - u/c}$ є адитивною, подібно для звичайної швидкості в ньютонівській теорії.

1.3. Власний час

Система відліку, у якій тіло перебуває в стані спокою, називають *власною* для даного тіла. *Власний час* – це час, виміряний годинниками власної СВ, відносно яких тіло є нерухомим. Нехай точкове тіло рухається інерціально, (t_0, x_0) і $(t_0 + dt, x_0)$ – координати подій на його траєкторії у власній системі S_0 ; за визначенням, dt – інтервал власного часу. Нехай S_0 разом з тілом рухається зі швидкістю u відносно СВ S , а осі абсцис обох систем збігаються. Координатами зазначених подій у S , очевидно, є (t, x) , $(t + dt, x + udt)$. Записуючи зв'язок між координатами подій у S_0 і S згідно з (1.11), маємо

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \text{ або } d\tau = \sqrt{1 - u^2/c^2} \cdot dt.$$

Числове значення величини $\sqrt{1 - u^2/c^2} \cdot dt = d\tau$ визначається у власній системі, тобто є *інваріантом*. Якщо розглянути іншу систему S' , відносно якої швидкість тіла буде $u' = dx'/dt'$, отримаємо

$$\sqrt{1 - u'^2/c^2} dt' = \sqrt{1 - u^2/c^2} dt = d\tau. \quad (1.12)$$

Ця формула дає змогу обчислювати власний час за траєкторією частинки, що задана в будь-якій інерціальній СВ. Виникає питання: чи застосовна формула (1.12) у випадку неінерціальних рухів? Цей результат не впливає із СТВ. Адже, якби формула для власного часу містила поправку, пропорційну прискоренню, яка зникає при інерційних рухах, це не суперечило б наведеним вище міркуванням, що привели до (1.12). Відповідь дають численні експерименти, які показують, що **власний час не залежить від прискорення**, тому для будь-якої ділянки траєкторії частинки $\{t, \mathbf{r}(t)\}$, $t \in [t_1, t_2]$, її власний час обчислюється за формулою

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2/c^2} dt, \quad |\dot{\mathbf{r}}| < c, \quad (1.13)$$

яка застосовна у випадку неінерціальних рухів. Підкреслимо, що в (1.13) рух частинки може бути прискореним, але траєкторія частинки має описуватися в інерціальній СВ. У неінерціальних СВ (1.13) слід узагальнити.

Переписуючи (1.13) для диференціалів $ds = cd\tau$, маємо

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2.$$

Цю величину називають *квадратом інтервалу*; тут він записаний для подій, що мають місце на траєкторії частинки.

1.4. Квадрат інтервалу

Узагальнимо твердження про інваріантність квадрата інтервалу на довільні відносні рухи інерціальних систем. Нехай (t_1, x_1) , (t_2, x_2) – координати будь-яких двох подій у СВ S , а (t'_1, x'_1) , (t'_2, x'_2) – відповідні координати в S' , яка рухається в напрямку осі OX відносно S . Позначаючи $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$ у S та $\Delta x' = x'_2 - x'_1$, $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ у S' , маємо за (1.10):

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \Delta x \cdot v/c^2), \quad \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t).$$

Ураховуючи цей зв'язок, отримаємо

$$c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2. \quad (1.14)$$

У більш загальному тривимірному випадку, коли S' рухається відносно S зі швидкістю \mathbf{v} у довільному напрямку, розглянемо події з координатами (t_1, x_1, y_1, z_1) , (t_2, x_2, y_2, z_2) у S і відповідними їм (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1) , (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2) у S' . Порівняємо в обох системах квадрат інтервалу, який, за визначенням дорівнює

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2, \\ \Delta s'^2 &= c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Очевидно, $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$, а значить і Δs^2 не змінюється при просторових обертаннях декартової системи координат, тобто при переході в систему відліку \tilde{S} , що рухається разом із S , але декартові просторові осі якої повернуті відносно S . Це саме справедливо й для S' і системи \tilde{S}' , що рухається разом із S' , але з іншим напрямком декартових просторових осей. Можна зорієнтувати просторові координати в \tilde{S}' та \tilde{S} так, щоб обидві осі абсцис були колінеарні напрямку швидкості відносного руху. При переходах $S \rightarrow \tilde{S}$ чи $S' \rightarrow \tilde{S}'$ відповідні квадрати інтервалу (1.15) залишаються незмінними, а зв'язок між квадратами інтервалу для систем \tilde{S}' та \tilde{S} у разі колінеарності їх осей $O\tilde{X}$ та $O\tilde{X}'$ можна встановити за формулами одновимірних перетворень (1.14). Таким чином, величина квадрата інтервалу є незмінною для довільних відносних рухів інерціальних систем відліку

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2.$$

Кажуть, що дві події пов'язані *часоподібним інтервалом*, якщо $\Delta s^2 > 0$, і *просторовоподібним*, якщо $\Delta s^2 < 0$. Видно, що нескінченно близькі події вздовж 4-траєкторії частинки (світової лінії) пов'язані часоподібним інтервалом, оскільки

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = (c^2 - \dot{\mathbf{r}}^2) dt^2 > 0$$

унаслідок умови $|\dot{\mathbf{r}}| < c$. Таку траєкторію відповідно називають *часоподібною*. Якщо частинка рухається зі швидкістю c , маємо $\Delta s^2 = 0$ і траєкторію називають *світлоподібною* чи *ізотропною*.

1.5. Перетворення довжини та об'єму

Повернемося знову до систем, пов'язаних перетвореннями (1.10) і (1.11). Нехай S' є власною системою для деякого стрижня довжиною Δl . Порівняємо довжину стрижня в різних системах, вважаючи його орієнтованим уздовж осі абсцис.

Стрижень рухається відносно лабораторної системи S , тому події, що відповідають вимірюванням координат його кінців у цій системі, мають відбуватися одночасно. Позначимо відповідні координати (t, x_1) , (t, x_2) , $x_2 - x_1 = \Delta l$ – довжина стрижня в S . У власній системі кінці стрижня мають завжди постійні координати, тому можна не турбуватися, що події вимірювання є неодноразовими. Просторові координати подій у S' : $x'_1 = \gamma(x_1 - vt)$, $x'_2 = \gamma(x_2 - vt)$, звідси

$$\Delta l = \Delta l_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c. \quad (1.16)$$

Обчислення нагадують виведення формули для інтервалів часу

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.17)$$

однак у випадку (1.16) розглядаються події з однаковими часовими координатами в лабораторній системі, відносно якої стрижень рухається, а при виведенні (1.17) розглядаються події з однаковими просторовими координатами у власній системі годинника.

Нехай S' з координатами $\{x', y', z'\}$ є власною системою для паралелепіпеда:

$$x' \in [x'_0, x'_0 + \Delta x'], \quad y' \in [y'_0, y'_0 + \Delta y'], \quad z' \in [z'_0, z'_0 + \Delta z'];$$

відповідний елемент об'єму $\Delta \tilde{V} = \Delta x' \Delta y' \Delta z'$. Враховуючи, що $\Delta y' = \Delta y$, $\Delta z' = \Delta z$, маємо в лабораторній системі, відносно якої об'єм рухається зі швидкістю v :

$$\Delta V = \Delta V_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (1.18)$$

У зарядженому середовищі отримаємо зв'язок густин заряду в різних інерціальних системах. Нехай ρ_p – густина заряду у власній системі, відносно якої заряди перебувають у стані спокою, dV_0 – об'єм у цій системі із сумарним зарядом q , dV – об'єм цього самого заряду в

системі, відносно якої він рухається зі швидкістю v . Нагадаємо, що заряд має одну й ту саму величину в різних системах¹. Це дає

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{dq}{dV_0} = \frac{\rho_p}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (1.19)$$

звідси випливає інваріантність величини $\rho \sqrt{1-v^2/c^2} = \rho_p$.

Вправа 1.2. Покажіть прямим обчисленням, що добуток одини-
мірних перетворень Лоренца, що відповідають швидкостям v_1, v_2 , є
також перетворенням Лоренца з новою швидкістю $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$.

Вправа 1.3. Частинки рухаються в одному напрямку вздовж пря-
мої; кожна k -та частинка рухається зі швидкістю v відносно $(k-1)$ -ї;
 $k = 2, \dots, N$. Знайти швидкість N -ї частинки відносно першої.

Вказівка: скористайтесь адитивністю величини $\ln \frac{1+u/c}{1-u/c}$ при од-

новимірних перетвореннях Лоренца.

Вправа 1.4. Відносно інерціальної системи S з координатами
 $\{x, y, z, t\}$ рухається зі швидкістю \mathbf{v} інша інерціальна система S' з ко-
ординатами $\{x', y', z', t'\}$. Запишіть відповідне перетворення $S \rightarrow S'$.
Напрямок тривимірного вектора \mathbf{v} – довільний.

Вказівка: Тривимірний вектор $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ розбийте на поздовжню
та поперечну відносно \mathbf{v} частини: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$, $\mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})/\mathbf{v}^2$ (перетво-
рюється за одновимірним перетворенням Лоренца), $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})/\mathbf{v}^2$
(залишається незмінною). Відповідно

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t' = \frac{t - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}.$$

Вправа 1.5. Покажіть прямим обчисленням, що перетворення ко-
ординат $S \rightarrow S'$ з попередньої вправи зберігає квадрат інтервалу.

Вправа 1.6. Знайдіть закон перетворення прискорення для одно-
вимірних рухів.

Відповідь: перехід у систему $\{t', x'\}$, що рухається зі швидкістю v
відносно системи $\{t, x\}$:

¹ Фундаментальний закон інваріантності заряду перевіряється з високою точністю.

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - vx'/c^2)^3} \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

і навпаки,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 + vx'/c^2)^3} \frac{d^2 x'}{dt'^2}, \quad \dot{x}' = \frac{dx'}{dt'}$$

Вправа 1.7. Швидкість ракети, що рухається вздовж прямої, завжди менша від c . Чи можлива з погляду СТВ ситуація, коли радіосигнал, що поширюється за ракетою в тому самому напрямку, не наздоганяє її? Розгляньте приклад, коли космонавт у ракеті має завжди сталу вагу, як на Землі; за початкові умови візьміть $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Розв'язання: прискорення в інерціальній системі, швидкість якої в деякий момент збігається зі швидкістю ракети ($v = \dot{x}$), дорівнює прискоренню вільного падіння поблизу земної поверхні g . Згідно з результатом впр. 1.6:

$$g = \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 - vx'/c^2)^3} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{(1 - \dot{x}^2/c^2)^{3/2}} \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

Інтегруючи це рівняння з урахуванням початкових умов, отримаємо

$$\frac{\dot{x}}{(1 - \dot{x}^2/c^2)^{1/2}} = gt$$

(очевидно, завжди швидкість менша від c !), звідки

$$x(t) = \frac{c^2}{g} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2} - 1 \right].$$

Із графіка функції $x(t)$, що має асимптоту $ct - \frac{c^2}{g}$, видно, що траєкторії радіосигналів $x = c(t - t_0)$, випромінених з точки $x = 0$ у момент $t_0 > \frac{c}{g}$, не перетинають траєкторію ракети.

Вправа 1.8. Спостерігач вимірює кут θ між зірками А та Б. Знайдіть кут θ' між А та Б, який вимірює космонавт, що рухається зі сталою швидкістю v відносно спостерігача в напрямку зірки Б.

Розв'язання: нехай вісь Ox напрямлена на зірку Б. Спостерігач і космонавт вимірюють траєкторії променів, що йдуть від А. Швидкість світла однакова в усіх інерціальних системах, тому проекція на вісь

ОХ променя є $x = -ct \cos \theta + \text{const} \rightarrow v_x = -c \cos \theta$ у системі нерухомого спостерігача, і $x' = -ct' \cos \theta' + \text{const} \rightarrow v'_{x'} = -c \cos \theta'$ у системі космонавта. За допомогою формули додавання швидкостей отримуємо відповідь:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}, \quad \beta = v/c.$$

Звідси видно, що з точки зору космонавта зірки зміщуються до зірки Б.

Вправа 1.9. Розподіл далеких зірок на небесній сфері в системі спостерігача є ізотропним. Знайдіть розподіл зірок, що бачить космонавт, який рухається зі швидкістю v відносно спостерігача.

Відповідь:
$$\frac{dN}{d\Omega'} = \frac{N_0}{4\pi} \frac{d\cos \theta}{d\cos \theta'} = \frac{N_0}{4\pi} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta')^2}, \quad N_0 - \text{повна кількість}$$

зірок, $\beta = v/c$.

Вправа 1.10. Розподіл далеких зірок у системі спостерігача є ізотропним. Космонавт рухається зі сталою швидкістю v відносно спостерігача. Знайдіть відношення кількості зірок, що спостерігає космонавт у передній півсфері, до кількості зірок у задній півсфері.

Вказівка: скористайтесь безпосередньо результатом впр. 1.8.

Відповідь:
$$\frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad \beta = v/c.$$

Вправа 1.11. Розпад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ відбувається ізотропно у власній системі π^0 -мезонів, що рухаються зі швидкістю v відносно лабораторної системи. Знайдіть відношення γ -квантів, що реєструються в лабораторній системі в передній півсфері, до кількості γ -квантів у задній півсфері.

Застереження: на відміну від впр. 1.8 фотони рухаються в напрямку від спостерігача, тому тут, навпаки, $\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}$ (штрих

позначає систему π^0 -мезона).

Відповідь:
$$\frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad \beta = v/c.$$

2. СПІВВІДНОШЕННЯ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ В ПРОСТОРІ МІНКОВСЬКОГО

Рівняння СТВ набувають найбільш елегантної форми в чотиривимірному формулюванні. Для цього використовується апарат тензорного аналізу, елементи якого подано в цьому розділі разом з основними співвідношеннями для загальної групи Лоренца.

2.1. Загальні та власні перетворення Лоренца

Далі всі грецькі індекси (штриховані та нештриховані) пробігають значення 0,1,2,3; латинські індекси – 1,2,3; наявність двох однакових індексів – обов'язково одного верхнього та одного нижнього – означає суму (правило Ейнштейна). Позначатимемо координати подій у інерціальних системах таким чином: $x^0 = ct$, t – час, $\{\mathbf{x}\} \equiv \{x^i\} \equiv (x^1, x^2, x^3)$ – просторові декартові координати або $\{x^\alpha\} \equiv (x^0, \mathbf{x}) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Інколи, де це не викликає проблем, індекси в координатах подій не пишемо. Множина всіх подій утворює чотиривимірний *простір Мінковського*.

З урахуванням нових позначень можна записати квадрат інтервалу між довільними точками x_1^α та x_2^α чотиривимірного простору-часу таким чином:

$$(x_1^0 - x_2^0)^2 - (x_1^1 - x_2^1)^2 - (x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_1^3 - x_2^3)^2 \equiv \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu,$$

де $\Delta x^\alpha = x_1^\alpha - x_2^\alpha$, а матриця

$$\|\eta_{\mu\nu}\| \equiv \|\eta\| \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

має назву *тензор Мінковського*. Матриця $\eta_{\mu\nu}$ збігається зі своєю оберненою, останню пишуть з верхніми індексами $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Як побачимо далі, компоненти цієї матриці утворюють одночасно і коваріантний, і контраваріантний тензор відносно перетворень Лоренца.

Як було з'ясовано в попередньому розділі, при переході від однієї інерціальної системи з координатами $\{x^\alpha\}$ до іншої з координатами $\{x'^\alpha\}$ ці координати пов'язані лінійними співвідношеннями, причому числове значення квадрата інтервалу залишається тим самим в обох системах. Інваріантність квадрата інтервалу при перетворенні координат $x \rightarrow x'$:

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu'\nu'} \Delta x'^{\mu'} \Delta x'^{\nu'} = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (2.1)$$

нагадує умову інваріантності квадрата відстані між точками при просторових поворотах у тривимірному просторі. Тому кажуть, що перехід від однієї інерціальної системи до іншої індукує поворот у чотиривимірному просторі.

Якщо розглядаються інерціальні системи зі спільним початком координат, зв'язок між ними дається однорідним перетворенням¹:

$$x'^{\mu'} = L^{\mu'}_{\mu} x^\mu. \quad (2.2)$$

Підстановка (2.2) у (2.1) дає

$$\eta_{\mu'\nu'} \Delta x'^{\mu'} \Delta x'^{\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} L^{\mu'}_{\mu} L^{\nu'}_{\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu.$$

Оскільки квадратична форма $\eta_{\mu'\nu'} L^{\mu'}_{\mu} L^{\nu'}_{\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$ з коефіцієнтами $\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'} L^{\mu'}_{\mu} L^{\nu'}_{\nu} = \tilde{\eta}_{\nu\mu}$ збігається з $\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$ для довільних Δx^μ , з умови рівності квадратичних форм маємо $\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ або

$$\eta_{\alpha\beta} = L^{\alpha'}_{\alpha} L^{\beta'}_{\beta} \eta_{\alpha'\beta'}. \quad (2.3)$$

Групу² всіх лінійних однорідних перетворень, що залишають інваріантним квадрат інтервалу (2.1), називають загальною групою Лоренца (ГЛ). Очевидно, кожний елемент цієї групи однозначно представлений матрицею $L^{\alpha'}_{\beta}$, що задовольняє (2.3), тобто можна вважати, що елементами групи є матриці, які задовольняють (2.3). Перетворення із цієї групи називатимемо **(загальними) перетвореннями Лоренца**. Одновимірні перетворення (1.10), (1.11) також належать до загальної

¹ Введення штрихованих індексів (відповідно до штригованих координат) не є принциповим, але це зручно при обчисленні.

² Множина елементів є групою, якщо в ній задано асоціативний добуток з одиницею, причому кожний елемент має обернений (див. дод. 3). Легко показати, що перетворення Лоренца дійсно утворюють групу.

групи Лоренца й утворюють її підгрупу. Як було показано в попередньому розділі, збереження квадрата інтервалу властиве всім перетворенням, що пов'язують координати в інерціальних системах відліку. При цьому просторові координати мають бути декартовими; очевидно, що в криволінійних координатах співвідношення (2.1) втрачає силу, хоча його можна певним чином узагальнити.

Оскільки праву частину (2.3) можна подати як добуток матриць¹, тобто (2.3) подати як $\|\eta\| = \|\mathbf{L}^T\| \circ \|\eta\| \circ \|\mathbf{L}\|$, то, розглядаючи визначник обох частин цієї рівності, отримаємо $1 = \det\|\mathbf{L}^T\| \det\|\mathbf{L}\| = (\det\|\mathbf{L}\|)^2$, звідки $\det\|\mathbf{L}\| = \pm 1$.

Якщо розписати (2.3) з урахуванням явного виду

$$\|\eta_{\mu\nu}\| = \text{diag} (1, -1, -1, -1)$$

і покласти $\alpha = \beta = 0$, дістанемо

$$1 = (L^0_0)^2 - (L^1_0)^2 - (L^2_0)^2 - (L^3_0)^2,$$

звідки $|L^0_0| \geq 1$.

Звідси видно, що не всі матриці з групи Лоренца (Γ) можна отримати з одиничної матриці за допомогою неперервної зміни компонент, не виходячи з цієї групи. Наприклад, перетворенню часової інверсії ($t \rightarrow -t$) відповідає $L^0_0 = -1, L^0_i = 0 = L^i_0, L^i_j = \delta^i_j$, вона задовольняє умову (2.3), але її не можна неперервно отримати з одиничної матриці, не порушуючи умову $|L^0_0| \geq 1$. Аналогічно, усередині Γ з одиничної матриці не можна отримати неперервною зміною параметрів матрицю, яка відповідає зміні напрямку однієї з просторових осей на протилежний (напр., $x^1 \rightarrow -x^1$) і також є елементом загальної Γ . Іншими словами, загальна Γ є незв'язною. **Власною групою Лоренца** (або групою власних перетворень Лоренца) називають зв'язну підгрупу загальної Γ , яка містить одиницю, тобто таку підгрупу загальної Γ , кожний елемент якої можна отримати шляхом неперервної зміни коефіцієнтів матриці $\|\mathbf{L}\|$, починаючи від одиничної матриці та залишаючись усередині підгрупи. Для елементів власної Γ $\det\|\mathbf{L}\| = 1, L^0_0 \geq 1$.

¹ \mathbf{L}^T – транспонована матриця.

Оскільки $\det\|\mathbf{L}\|$ є якобіаном переходу $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, звідси випливає **інваріантність елементу об'єму** $d^4x = d^4x'$ при перетвореннях власної групи Лоренца.

Приклад власного перетворення Лоренца в одновимірному випадку дають формули (1.10). Якщо система $\{x'^\mu\}$ рухається відносно системи $\{x^\mu\}$ зі швидкістю v уздовж осі x^1 , ці формули мають такий вигляд:

$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3;$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \beta = v/c.$$

Відповідна *матриця одновимірного перетворення Лоренца* має вигляд

$$\|L^{\mu'}_{\mu}\| = \left\| \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right\| = \begin{vmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Можна показати, що будь-яке перетворення власної ГЛ можна подати як добуток просторових поворотів і одновимірного перетворення Лоренца (див. дод. 1). *Таким чином, усі перетворення, що пов'язують різні інерціальні системи відліку, без просторових і часових інверсій – це перетворення власної групи Лоренца, і навпаки.*

Загальна ГЛ містить власну ГЛ як підгрупу, решта перетворень загальної ГЛ є добутками перетворень власної ГЛ та інверсій простору і часу. Якщо доповнити перетворення групи Лоренца просторовими та часовими зміщеннями, маємо *групу Пуанкаре*, перетворення якої мають вигляд $x'^{\mu'} = L^{\mu'}_{\mu} x^\mu + a^{\mu'}$.

2.2. Вектори та тензори в просторі Мінковського

Нагадаємо деякі базові поняття та співвідношення з тензорного аналізу. Нижченаведені два означення застосовні при довільних перетвореннях координат.

Коваріантним вектором¹ у точці m називають сукупність компонент $\{A_\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, які задані, за певним законом, у кожній системі

¹ У СТВ і ЗТВ вжито терміни: чотиривимірний вектор (або 4-вектор).

координат, причому для довільних систем $\{x\}, \{x'\}$ ці компоненти $\{A_\mu\}$ та $\{A'_\mu\}$ пов'язані співвідношенням

$$A_\mu = \left(\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right)_m A_{\mu'},$$

де похідні беруть у точці m .

Контраваріантним вектором у точці m називають сукупність компонент B_μ , які задані в усіх системах координат, причому для довільних таких систем $\{x\}, \{x'\}$ ці компоненти пов'язані співвідношенням

$$B'^{\mu'} = \left(\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right)_m B^\mu,$$

де похідні беруть у точці m .

Коваріантні індекси прийнято писати знизу, а контраваріантні – зверху. Вектори відповідного типу, задані в кожній точці певної області простору-часу, утворюють **векторні поля**.

У СТВ розглядають векторні поля, що мають зазначені трансформційні властивості *відносно перетворень Лоренца* (а не довільних перетворень). Відповідно **коваріантним векторним полем відносно групи Лоренца** називатимемо сукупності функцій $\{A_\mu\}$, які задані за певним законом у кожній системі координат, причому для кожної точки m , що має координати x і x' у деяких системах $\{x\}$ і $\{x'\}$, пов'язаних перетворенням (2.2), відповідні компоненти $\{A_\mu\}$ та $\{A'_\mu\}$ пов'язані співвідношенням

$$A_\mu(x) = \left(\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right)_x A_{\mu'}(x') = L^{\mu'}_\mu A_{\mu'}(x').$$

Для **контраваріантного вектора** $\{B^\mu\}$ **відносно групи Лоренца** компоненти пов'язані оберненим перетворенням

$$B'^{\mu'}(x') = \left(\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right)_x B^\mu(x) = L^{\mu'}_\mu B^\mu(x).$$

Визначення векторів відносно групи Пуанкаре цілком аналогічне.

Введемо операцію піднімання та опускання індексів: за допомогою тензора Мінковського з коваріантного вектора U_α можна отримати

контраваріантний вектор¹ $U^\mu = \eta^{\mu\alpha} U_\alpha$ (покомпонентно це буде $U_0 = U^0$, $U_i = -U^i$, $i = 1, 2, 3$). Легко довести, що U^μ дійсно має властивості контраваріантного вектора при перетвореннях Лоренца. Аналогічно, $U_\alpha = \eta_{\alpha\beta} U^\beta$ – коваріантний вектор, якщо U^μ – контраваріантний.

Вектор A_α (або A^α) називають **часоподібним**, якщо $A_\alpha A^\alpha > 0$, **просторовоподібним**, якщо $A_\alpha A^\alpha < 0$, та **ізотропним** або **світлоподібним**, якщо $A_\alpha A^\alpha = 0$.

Оскільки $\det\|\mathbf{L}\| \neq 0$, існує обернена матриця L^{-1} , що також відповідає перетворенню з групи Лоренца:

$$L^{\alpha'}_{\alpha} (L^{-1})^{\alpha}_{\gamma'} = \delta^{\alpha'}_{\gamma'}$$

Якщо L^{-1} – обернена до L матриця, тобто

$$(L^{-1})^{\mu}_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}, \quad L^{\beta'}_{\mu} (L^{-1})^{\mu}_{\alpha'} = \delta^{\beta'}_{\alpha'} \quad \text{та} \quad (L^{-1})^{\mu}_{\alpha'} L^{\alpha'}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu},$$

тоді очевидно, що $A'_{\mu'} = (L^{-1})^{\mu}_{\mu'} A_{\mu}$, $B^{\mu} = (L^{-1})^{\mu}_{\mu'} B'^{\mu'}$. Помножимо (2.3) на обернену матрицю

$$\eta_{\alpha\beta} (L^{-1})^{\alpha}_{\gamma'} = (L^{-1})^{\alpha}_{\gamma'} L^{\alpha'}_{\alpha} L^{\beta'}_{\beta} \eta_{\alpha'\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\gamma'} L^{\beta'}_{\beta} \eta_{\alpha'\beta'} = \eta_{\gamma'\beta'} L^{\beta'}_{\beta},$$

звідси, після помноження на $\eta^{\beta\mu}$:

$$(L^{-1})^{\mu}_{\gamma'} = \eta_{\gamma'\beta'} L^{\beta'}_{\beta} \eta^{\beta\mu}. \quad (2.4)$$

Тензори визначаються набором чисел (компонент), які перетворюються як прямий добуток відповідної кількості коваріантних і контраваріантних векторів. Наприклад, двічі коваріантний і контраваріантний один раз тензор $T_{\alpha\beta}^{\gamma}$ при переході відповідно до (2.2) в іншу систему відліку перетворюється за правилом

$$T'_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = (L^{-1})^{\alpha}_{\alpha'} (L^{-1})^{\beta}_{\beta'} L^{\gamma'}_{\gamma} T_{\alpha\beta}^{\gamma}.$$

¹ Результат піднімання (опускання) індексів позначають тим самим символом, що й тензор до цієї операції, підкреслюючи, що це один і той самий геометричний об'єкт.

Нагадаємо **основні властивості тензорів** і операції, які можна здійснювати над ними. З тензорів однакової будови можна утворювати **лінійну комбінацію**. Із довільних тензорів можна утворювати **прямий добуток**. Із формули для перетворення тензорів очевидно: *коли всі компоненти тензора дорівнюють нулю в одній системі, то вони є нульовими в усіх системах. Якщо всі компоненти двох тензорів збігаються в одній системі, то вони збігаються в усіх системах.*

Тензор визначений однозначно, якщо задані його компоненти в одній системі координат; компоненти в інших системах обчислюємо за правилами тензорного перетворення.

У силу (2.3) матриця $\|\eta_{\alpha\beta}\|$ також становить двічі коваріантний тензор – тензор Мінковського, причому компоненти цього тензора зберігають свої числові значення при перетвореннях. Специфічною його властивістю є також те, що компоненти матриці $\|\eta_{\alpha\beta}\|$ водночас утворюють двічі контраваріантний тензор ($\|\eta^{\mu\nu}\| \equiv \|\eta_{\mu\nu}\|$, $\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$): $\eta^{\alpha'\beta'} = L^{\alpha'}_{\alpha} L^{\beta'}_{\beta} \eta^{\alpha\beta}$, що впливає безпосередньо з (2.3).

За допомогою тензора Мінковського можна опускати й піднімати індекси тензорів, подібно до аналогічної операції над векторами. Наприклад, $F^{\mu}_{\nu} = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}$; $F^{\mu}_{\nu\rho} = \eta_{\nu\alpha} F^{\mu\nu}_{\rho}$. Із фізичної точки зору піднімання та опускання індексів не приводить до якихось нових об'єктів. *Зверніть увагу на положення індексів після піднімання та опускання.* Наприклад, у тензорі T^{μ}_{ν} після піднімання індекс t залишаємо на першому місці, якщо дивитися по горизонталі від T . Невиконання цього правила може призвести до плутанини, коли $T_{\mu\nu}$ не є симетричним за своїми індексами.

Якщо тензор має один коваріантний і один контраваріантний індекс, прирівнюючи їх і підсумовуючи за ними, отримуємо тензор, що має на два індекси менше. Цю операцію називають *згорткою*. Наприклад, згортка $T_{\alpha\beta}^{\beta}$ є коваріантним вектором. Конструкцію типу $A_{\alpha} B_{\beta} \eta^{\alpha\beta}$ також називають згорткою векторів A_{α} та B_{β} , оскільки тут відбувається згортка після підняття індексу в першому або другому векторі. Аналогічно, $T_{\alpha\beta} A^{\beta}$ є згорткою тензора $T_{\alpha\beta}$ з вектором A^{β} за певними індексами тощо.

Завдяки лінійності перетворень Лоренца, при диференціюванні тензора отримуємо новий тензор. Наприклад, $T_{\beta}^{\alpha} = \partial_{\beta} A^{\alpha}$ – тензор, оскільки

$$\frac{\partial A'^{\alpha'}}{\partial x'^{\beta'}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\beta'}} \left(\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \right) = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}},$$

де використано, що $\partial x'^{\alpha'} / \partial x^{\alpha}$ є константами завдяки лінійності перетворень Лоренца.

Окрім тензора Мінковського маємо ще один тензор, компоненти якого не змінюються при власних перетвореннях Лоренца. Це **абсолютно антисиметричний символ (Леві-Чівіта)** $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, що змінює знак при перестановках будь-яких двох індексів, причому $\varepsilon^{0123} = 1$. Очевидно, усі компоненти $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ дорівнюють або 1, якщо впорядкована сукупність індексів $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ становить парну перестановку чисел $\{0, 1, 2, 3\}$, або -1 у разі непарної перестановки. Якщо ж хоча б два індекси набувають однакових значень, маємо 0.

Знайдемо закон перетворення $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$. За означенням визначника

$$\det \left\| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right\| = \frac{\partial x'^0}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^1}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^2}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^3}{\partial x^{\delta}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

а після перестановки верхніх індексів $\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{\alpha', \beta', \gamma', \delta'\}$ отримаємо

$$\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \det \left\| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right\| = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\delta'}}{\partial x^{\delta}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Сукупність величин, що перетворюються таким чином, називають тензорною густиною. Але відносно власних перетворень Лоренца $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ є чотириіндексним контраваріантним тензором, оскільки для цих перетворень визначник в останній формулі завжди дорівнює одиниці.

Легко бачити, що *коваріантний* символ Леві-Чівіта дорівнює

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} \eta_{\gamma\rho} \eta_{\delta\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

і має аналогічні властивості ($\varepsilon_{0123} = -1$).

2.3. Світові лінії та 4-вектор швидкості

Траєкторії точкових тіл у чотиривимірному просторі-часі, що також називають *світловими лініями*, зручно записувати в параметричному вигляді $x^\mu = f^\mu(p)$, де p – деякий неособливий параметр, який монотонно зростає із часом $t = x^0/c$. Зважаючи на те, що швидкості фізичних тіл не перевищують швидкість світла, маємо вздовж світової лінії тіла з ненульовою масою

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv c^2(dt)^2 - (d\mathbf{x})^2 > 0.$$

У цьому разі вектор дотичної dx^μ/dp часоподібний, а траєкторію $x^\mu(p)$ називають *часоподібною*. Якщо знак протилежний, $ds^2 < 0$, маємо *просторовоподібну* криву. На траєкторії фотонів та інших частинок нульової маси, що рухаються зі швидкістю світла, $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$, тоді траєкторію називають *ізотропною*, або *світлоподібною*.

Якщо на часоподібній траєкторії як параметр p виберемо часову координату $t = x^0/c$, маємо

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 = c^2 dt^2 \left[1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 \right], \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

За формулою (1.13)

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2} dt, \quad t_1 = \frac{1}{c} x^0(p_1), \quad t_2 = \frac{1}{c} x^0(p_2).$$

Із цих співвідношень видно, що власний час можна обчислити за формулою

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{p_1}^{p_2} \left(\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{1/2} dp. \quad (2.5)$$

Вона дає змогу обчислити інтервал власного часу між точками $x^\mu = x^\mu(p_i)$ ($i = 1, 2$) для довільної параметризації часоподібної траєкторії. Як зазначено в підрозд. 1.3, формула (2.5) зберігає свій вигляд у разі довільних часоподібних траєкторій, у тому числі й для тих, що описують неінерціальні рухи точкових тіл. Однак система відліку, у якій зберігає

свій вигляд формула (2.5), має бути інерціальною. Оскільки dx^μ є контраваріантним вектором, а $\eta_{\mu\nu}$ – двічі коваріантний тензор відносно перетворень Лоренца, величина

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} dp^2$$

є інваріантом відносно цих перетворень. Тому власний час тіла, обчислений згідно з (2.5), як і належить бути числовому значенню спостережуваної величини, не залежить від вибору системи відліку. Зазначимо також, що вигляд формули (2.5) не залежить від вибору допустимого параметра p .

Часоподібну траєкторію зручно параметризувати за допомогою величини $s = ct + \text{const}$, де вибір константи визначається початком відліку власного часу. На світовій лінії тіла $x(s)$ введемо контраваріантний **4-вектор швидкості** (або **4-швидкість**) $u^\mu = dx^\mu / ds$, а також відповідний коваріантний вектор $u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu$; ця величина є безрозмірною. Із формули $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, поділивши на ds^2 , маємо співвідношення

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1 \quad \text{або} \quad u^\mu u_\mu = 1, \quad (2.6)$$

яке називатимемо умовою нормування 4-швидкості. Звідси видно, що з чотирьох компонент u^μ незалежними є лише три. У власній системі відліку, де тіло на даний момент нерухоме, просторові компоненти швидкості дорівнюють нулю ($u^i = 0$, $i = 1, 2, 3$) і $u^0 = 1$, що задовольняє умову нормування. Інколи цю систему називають також системою спокою тіла.

Якщо $x^\mu(p)$ – світлоподібна (наприклад, траєкторія руху фотонів), то в цьому разі замість (2.6) маємо, для будь-якої параметризації

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = 0.$$

Вправа 2.1. Запишіть перетворення Лоренца для контраваріантного 4-вектора (A^0, \mathbf{A}) у тривимірному векторному вигляді для довільного напрямку швидкості \mathbf{v} нової системи відліку.

Вказівка. Компоненти контраваріантного вектора в СТВ перетворюються так само, як і координати. Подайте \mathbf{A} у вигляді суми паралельної та перпендикулярної до \mathbf{v} складових (див. впр. 1.4).

Вправа 2.2. Контраваріантний вектор $\{A^\mu\} = \{A^0, \mathbf{A}\}$ – часоподібний. Користуючись результатом впр. 2.1, знайдіть перетворення Лоренца до системи координат, де просторові компоненти цього вектора дорівнюють нулю.

3. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА В ПРОСТОРІ МІНКОВСЬКОГО

Рівняння Максвелла, встановлені задовго до створення СТВ, чудово узгоджуються з принципом відносності. Тому їх можна використати для знаходження зв'язку між напруженостями електричного та індукціями магнітного полів у різних системах відліку, що й буде зроблено далі. Щодо рівнянь руху зарядів, то вони вимагають істотної модифікації порівняно з ньютонівською теорією.

3.1. Чотиривимірна форма рівнянь Максвелла

Згідно з експериментом, рівняння Максвелла чудово описують електродинамічні явища в класичній¹ області. Головними фігурантами рівнянь Максвелла є електричні заряди та напруженості полів². Як відомо, однією з головних властивостей заряду є його інваріантність: величина заряду ізолюваного тіла не залежить від руху, вона однакова в усіх інерціальних системах. Тепер треба з'ясувати, як перетворюються напруженості полів. Для цього враховуватимемо, що за принципом відносності рівняння електромагнітного поля зберігають свій вигляд у всіх інерціальних системах.

Перепишемо рівняння Максвелла в чотиривимірних позначеннях, більш зручних для використання в теорії відносності. Нехай ρ – густина електричного заряду деякого елемента середовища; $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ –

¹ Тут "класичній" означає "неквантовій".

² Точніше, напруженість електричного поля та індукція магнітного.

звичайний тривимірний вектор густини струму; $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ – тривимірний швидкість зарядів у точці, що розглядається. Знайдемо трансформаційні властивості величини

$$J^\mu = \rho \frac{ds}{dt} \frac{dx^\mu}{ds} \text{ або } \{J^\mu\} \equiv \{J^0, \mathbf{J}\}, J^0 = c\rho, j^i = \rho dx^i/dt.$$

Із формули для перетворення густини заряду (1.19), яку легко узагальнити за довільного напрямку швидкості, випливає, що величина $c\rho\sqrt{1-\mathbf{V}^2/c^2} = \rho \frac{ds}{dt}$ є інваріантом – це густина заряду у власній системі елемента середовища. Тоді J^μ має ті самі трансформаційні властивості, що й dx^μ/ds , тобто це контраваріантний вектор. Його називають **4-вектором густини струму**. Цей вектор введено для середовища з неперервним розподілом зарядів і швидкостей, але його можна означити й для точкових зарядів q_i з траєкторіями $x^\alpha = x^\alpha_{(i)}$ (тут індекс $i = 1, 2, \dots$ нумерує заряди) таким чином:

$$J^\mu = c \sum_i q_i \int ds_i \delta^{(4)}(x - x_{(i)}(s_i)) \frac{dx^\mu_{(i)}}{ds_i},$$

де інтегрування проводиться вздовж траєкторій зарядів, $\delta^{(4)}(x)$ – чотиривимірний δ -функція Дірака¹.

Для опису електромагнітного поля введемо антисиметричну матрицю

$$\|F_{\mu\nu}\| = \begin{vmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{vmatrix},$$

де $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$; E_i – компоненти напруженості електричного поля B_i – індукції магнітного поля в декартових координатах x^i ($i = 1, 2, 3$). Цю матрицю називають тензором електромагнітного поля. Компоненти цього тензора можна означити ще й таким чином:

$$F_{0i} = -F_{i0} = E_i, \quad F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k,$$

¹ За визначенням, $\int d^4x f(x) \delta^{(4)}(x) = f(0)$ для будь-якої неперервної функції $f(x)$.

де в останній рівності береться сума за k , причому індекси i, j, k набувають значень 1, 2, 3. Як буде видно далі, $F_{\mu\nu}$ дійсно є двічі коваріантним тензором відносно перетворень групи Лоренца та групи Пуанкаре; відповідно $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$ є двічі контраваріантним тензором.

Рівняння Максвелла в гауссовій системі одиниць, переписані за допомогою $F_{\mu\nu}$, мають вигляд

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c}J^\mu, \quad (3.1)$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.2)$$

де $\partial_\mu f \equiv df / \partial x^\mu$. Зауважимо, що (3.2) можна записати також у вигляді $\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0$, де $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ – абсолютно антисиметричний символ Леві-Чівіта.

З антисиметрії $F_{\mu\nu}$ і з (3.1) випливає **закон збереження заряду**

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (3.3)$$

як необхідна умова існування розв'язку рівнянь електромагнітного поля. Оскільки J^μ є 4-вектором, а $\partial_\alpha J^\beta$ – тензором, згортка $\partial_\mu J^\mu$ є інваріантом. Рівняння (3.3) є інваріантним при перетвореннях Лоренца.

Вправа 3.1. Установіть прямим обчисленням еквівалентність рівнянь Максвелла в тривимірній і чотиривимірній формі.

Відповідь: рівняння (3.1) при $v = 0$ еквівалентне рівнянню $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$, рівняння (3.1) при $v = 1, 2, 3$ еквівалентне рівнянню

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

рівняння (3.2) при $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ еквівалентне рівнянню $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, а інші три комбінації α, β, γ , що містять індекс "0", відповідають рівнянню

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Вправа 3.2. Установіть тривимірний аналог рівняння (3.3), користуючись означенням J^μ .

Відповідь: рівняння (3.3) є іншим записом рівняння неперервності:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

3.2. Трансформаційні властивості $F_{\mu\nu}$

Досі ми не з'ясували трансформаційні властивості величин $F_{\mu\nu}$, які є розв'язками рівнянь електродинаміки (3.1), (3.2). За певних граничних умов розв'язок цих рівнянь визначений єдиним чином. Для подальшого досить розглянути будь-яку одну постановку задачі для (3.1), (3.2), яка забезпечує єдиність, зокрема відповідає розгляду ізольованої системи. Адаже загальні властивості поля, у тому числі, і трансформаційні співвідношення, що пов'язують різні інерціальні системи, не залежать від того, яка конфігурація зарядів створює це поле.

За відсутності зовнішнього випромінювання рівняння (3.1), (3.2) визначають електромагнітне поле $F_{\alpha\beta}$ (а також і $F^{\alpha\beta}$) обмеженої системи зарядів і струмів *однозначно в усьому просторі*, якщо ці рівняння розглядають, починаючи з нескінченного минулого. Відповідний розв'язок для поля ізольованої системи можна подати за допомогою загальних потенціалів (див. далі (3.13) і представлення (3.10) електромагнітного поля через 4-вектор потенціалу), за допомогою яких $F_{\alpha\beta}$ однозначно виражається через 4-вектор струму. Ці формули дають змогу явно дослідити трансформаційні властивості $F_{\alpha\beta}$ при переході в іншу інерціальну систему відліку. Але тут ми вчинимо інакше, виходячи безпосередньо з рівнянь Максвелла.

Нехай $F_{\alpha\beta}$, що подає напруженості полів, є розв'язком рівнянь Максвелла в інерціальній системі S з координатами $\{x\}$, а $\tilde{F}_{\alpha\beta}$ – розв'язком в інерціальній системі S' з координатами в системі $\{x'\}$: $x'^{\alpha} = L^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}$. Маючи компоненти $F_{\alpha\beta}$ та $F^{\alpha\beta}$ у системі S , можна формально ввести тензор у всіх системах координат відомими співвідношеннями, зокрема у системі S' це будуть компоненти

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= (L^{-1})^{\alpha}_{\mu} (L^{-1})^{\beta}_{\nu} F_{\alpha\beta}, \\ F'^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F'_{\alpha\beta} = L^{\mu}_{\alpha} L^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

За властивостями тензорів ці величини можна диференціювати, утворюючи нові тензори, утворювати лінійні комбінації з тензорами аналогічної будови тощо. Оскільки, за припущенням, $F_{\alpha\beta}$ є розв'язком рівнянь Максвелла (3.1), (3.2) у системі S :

$$\frac{\partial F^{\alpha\nu}}{\partial x^\nu} + \frac{4\pi}{c} J^\alpha = 0, \quad \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0,$$

аналогічне співвідношення маємо для тензорів у лівій частині рівнянь і в системі S' :

$$\frac{\partial F'^{\mu\nu}}{\partial x'^\nu} + \frac{4\pi}{c} J'^\mu = L^\mu_\alpha \left(\frac{\partial F^{\alpha\nu}}{\partial x^\nu} + \frac{4\pi}{c} J^\alpha \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \partial'_\alpha F'_{\beta\gamma} + \partial'_\beta F'_{\gamma\alpha} + \partial'_\gamma F'_{\alpha\beta} = \\ = (L^{-1})^\mu_\alpha (L^{-1})^\nu_\beta (L^{-1})^\lambda_\gamma (\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu}) = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, тензор $F'_{\alpha\beta}$, що подається співвідношеннями (3.4), є розв'язком рівнянь електромагнітного поля в системі S' . Завдяки єдиності розв'язку цих рівнянь компоненти тензора $F'_{\alpha\beta} = \tilde{F}'_{\alpha\beta}$ подають електромагнітне поле в новій системі відліку S' . Таким чином, зв'язок компонент тензора електромагнітного поля в різних системах дійсно можна подати формулами (3.4). Співвідношення, аналогічні (3.4), можна отримати між будь-якими системами відліку. Сукупність компонент $F_{\alpha\beta}$ у всіх системах утворює двічі коваріантний тензор.

Вправа 3.3. Відносно інерціальної системи відліку S з координатами $\{t, \mathbf{r}\}$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ рухається зі сталою швидкістю \mathbf{v} інша інерціальна система S' з координатами $\{t', \mathbf{r}'\}$, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$. У деякий момент початки координат збіглися. Відповідне перетворення координат $S \rightarrow S'$ є

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp},$$

де позначки \parallel та \perp відповідають поздовжнім і поперечним компонентам тривимірних векторів. За допомогою закону перетворення для тензора електромагнітного поля покажіть, що перетворення поперечних і поздовжніх компонент напруженості електричного поля та індукції магнітного поля, мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}, \\ \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

Вправа 3.4. За допомогою формул перетворення електричного та магнітного полів при переході $S \rightarrow S'$ з попередньої вправи покажіть прямим обчисленням, що величини $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ та $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ залишаються незмінними.

Вправа 3.5. Виходячи з 4-вектора густини струму, покажіть, що перетворення густини заряду та густини струму відповідні переходу $S \rightarrow S'$ із впр. 3.3, мають вигляд

$$\rho' = \frac{\rho - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{v})/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{J}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{J}_{\parallel} - \rho \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{J}'_{\perp} = \mathbf{J}_{\perp}.$$

3.3. Рівняння руху зарядженої частинки

Як було зазначено, рівняння Максвелла задовольняють принцип відносності, тому при створенні СТВ вони не потребували жодної корекції. Навпаки, рівняння руху ньютонівської динаміки, зокрема для зарядженої частинки, мали бути модифіковані: можна показати, вони не задовольняють принципи СТВ і призводять до нефізичних наслідків, коли швидкості руху наближаються до швидкості світла. Цю модифікацію можна отримати, якщо врахувати принцип відносності й те, що рівняння руху не містять якихось додаткових фізичних величин, окрім швидкості, прискорення, компонент $F_{\mu\nu}$, а також маси частинки m та її заряду q . Отримаємо ці рівняння з урахуванням *принципу відповідності до класичної теорії*: за малих швидкостей у деякій системі відліку можна користуватися ньютонівськими рівняннями руху

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\}.$$

Основна ідея полягає в тому, що якщо ми знаємо співвідношення між тензорними величинами в одній системі відліку, то ці співвідношення можна поширити на будь-які системи (див. основні властивості тензорів з розд. 2). Розглянемо коваріантний 4-вектор

$$R^{\mu} = mc^2 \frac{du^{\mu}}{ds} - qF^{\mu}_{\nu} u^{\nu},$$

де $s = c\tau$, τ – власний час уздовж світової лінії частинки, $u^{\mu} = dx^{\mu}/ds$.

Зафіксуємо деякій момент t_1 і подію A з координатами $(t_1, \mathbf{x}(t_1))$ і розглянемо інерціальну систему відліку S_1 таку, де швидкість частин-

ки в цей момент дорівнює нулю: $\mathbf{v} = 0$. Тоді за принципом відповідності в цій системі в момент події A можна використати ньютонівські співвідношення (у декартових координатах):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} = q\mathbf{E}, \text{ а також } m \frac{d(v^2/2)}{dt} = 0.$$

Завдяки цьому легко обчислити всі компоненти в S_1 : $R^\mu = 0$ у момент події A . Оскільки за побудовою R^μ – це вектор, то згідно з властивостями векторів (підрозд. 2.2) він дорівнює нулю в довільній інерціальній системі. Звідси маємо рівняння руху в момент події A :

$$mc^2 \frac{du^\mu}{ds} = qF^\mu{}_\nu u^\nu. \quad (3.5)$$

Ці міркування можна повторити для будь-якої події на траєкторії частинки, тому рівняння (3.5) є шуканим релятивістським узагальненням рівняння руху зарядженої частинки.

Звернемо увагу, що серед чотирьох рівнянь (3.5) лише три є незалежними, якщо врахувати зв'язок (2.6) між компонентами 4-швидкості. Навпаки, можна показати, що вони не суперечать (2.6): якщо помножити (3.5) на u_μ , у силу антисиметрії $F^{\mu\nu}$ у правій части-

ні маємо $F^\mu{}_\nu u^\nu u_\mu \equiv F^{\mu\nu} u_\mu u_\nu \equiv 0$, звідки $u_\mu \frac{du^\mu}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(u_\mu u^\mu)}{ds} = 0$, тобто з рівнянь (3.5) випливає $u^\mu u_\mu = \text{const}$. Кількість ступенів вільності, що визначається кількістю незалежних початкових умов для рівнянь руху, тут така сама, як і в класичній механіці.

Із рівнянь руху отримаємо формулу для енергії та імпульсу частинки. Запишемо тривимірну форму рівнянь руху, яка еквівалентна трьома компонентам (3.5) при $\mu = i = 1, 2, 3$:

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right) = q \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\}.$$

Права частина – це сила Лоренца, що визначає швидкість передачі імпульсу від поля до зарядженої частинки. Звідси випливає вираз для релятивістського (тривимірного) імпульсу:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}},$$

тут покладаємо, що нульовий імпульс відповідає нульовій швидкості.

Компонента $\mu = 0$ рівняння (3.5) дає

$$mc^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right) = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}).$$

Права частина – це звичайна потужність, яку витрачає електричне поле, діючи на частинку. Звідси випливає *релятивістський вираз для енергії рухомого тіла*

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}. \text{ Тут зроблено вибір константи інтегрування, що відповідає експериментальним даним щодо власної енергії частинок.}$$

тегрування, що відповідає експериментальним даним щодо власної енергії частинок.

3.4. Плоскі хвилі

За відсутності зарядів і струмів ($J^\mu = 0$) розв'язок однорідних рівнянь Максвелла $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$, $\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0$ можна шукати у вигляді суперпозиції плоских хвиль $F_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu} \exp[-i\Omega]$, де компоненти тензора $f_{\mu\nu}$ – сталі, а скаляр Ω – лінійна функція координат, $\Omega(x) = k_\mu x^\mu \equiv k^0 x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x}$, $k_\mu = \partial_\mu \Omega$ – хвильовий (коваріантний) 4-вектор.

Далі вважаємо $k^0 > 0$.

Частота коливань електромагнітного поля, яка сприймається спостерігачем на світовій лінії $x_{\text{obs}}^\mu(\tau)$, – це швидкість зміни фази – величини $\Omega(x_{\text{obs}}^\mu(\tau))$ – з власним часом спостерігача:

$$\omega = \frac{d}{d\tau} \Omega(x_{\text{obs}}^\mu(\tau)) = c \frac{d}{ds} \Omega = ck_\mu u_{\text{obs}}^\mu, \quad (3.6)$$

де $u_{\text{obs}}^\mu = \frac{dx_{\text{obs}}^\mu}{ds_{\text{obs}}}$ – 4-швидкість спостерігача, $s_{\text{obs}} = c\tau_{\text{obs}}$.

Вектор $K^\mu = k^\mu - k_\alpha u_{\text{obs}}^\alpha u_{\text{obs}}^\mu$, ортогональний до u_{obs}^μ , визначає (у звичайному, тривимірному розумінні) напрямок руху електромагнітних хвиль відносно спостерігача. Дійсно, у власній системі спостерігача 4-швидкість має лише одну ненульову компоненту

$\{u_{\text{obs}}^\mu\} = \{1, 0, 0, 0\}$, звідки $K^0 = 0$, а тривимірні компоненти векторів K^μ і k^μ збігаються: $K^i = k^i$.

Підстановка тензора електромагнітного поля для плоских хвиль у (3.1) та (3.2) дає

$$f^{\mu\nu}k_\nu = 0, \quad (3.7)$$

$$f_{\alpha\beta}k_\gamma + f_{\beta\gamma}k_\alpha + f_{\gamma\alpha}k_\beta = 0. \quad (3.8)$$

Перше рівняння (3.7) становить умову поперечності електромагнітних хвиль у вакуумі. Згортаючи (3.8) з k^γ , після підсумовування за індексом γ з урахуванням (3.7) отримуємо $f_{\alpha\beta}k_\gamma k^\gamma = 0$ і, для ненульової амплітуди $f_{\alpha\beta}$,

$$k_\gamma k^\gamma = 0 \quad \text{або} \quad \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.9)$$

Звідси випливає $k^0 = |\mathbf{k}|$. Згортаючи (3.8) з $f^{\alpha\beta}$, з урахуванням (3.7) дістанемо $f^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta} = 0$ або $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0$, що еквівалентне $\mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2$. Згорнемо (3.8) з $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}$ і врахуємо, що (3.8) можна записати як $\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}k_\alpha f_{\beta\gamma} = 0$. Після такої операції зникають доданки

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}(f_{\beta\gamma}k_\alpha + f_{\gamma\alpha}k_\beta) \equiv (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}k_\alpha)f_{\beta\gamma} + (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}k_\beta)f_{\gamma\alpha} = 0$$

і залишається $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}f_{\alpha\beta} = 0$ або $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = 0$, що еквівалентне $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Як і слід було очікувати, отримано звичайні співвідношення для плоских хвиль у вакуумі.

3.5. Ефект Доплера

Отримаємо формулу ефекту Доплера, який полягає у зміні спостережуваної частоти випромінювання залежно від руху джерела відносно спостерігача. Аналогічно (3.6) власна частота коливань випромінювача з траєкторією $x_0^\mu(\tau_0)$ і 4-швидкістю $u_0^\mu = dx_0^\mu/ds_0$ є $\omega_0 = \frac{d}{d\tau} \Omega(x_0^\mu(\tau_0)) = ck_\mu u_0^\mu$. Ця формула інваріантна, її можна використовувати в будь-якій системі (напр., рис. 5.1):

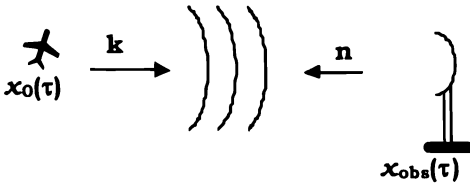


Рис. 5.1. Вектор \mathbf{n} показує напрямок на джерело сигналів, який бачить спостерігач

Далі усі величини розглянемо в системі спостерігача, де його 4-швидкість $u_c^\mu = \{1, 0, 0, 0\}$, а виміряна ним частота

$$\omega_{\text{obs}} = ck_\mu u_{\text{obs}}^\mu = ck_0 = ck^0.$$

Напрямок поширення хвиль, що приймає спостерігач, визначається просторовою частиною 4-вектора k^μ , він протилежний напрямку від спостерігача на джерело випромінювання $\mathbf{n} = -\mathbf{k} / |\mathbf{k}| = -\mathbf{k} / k^0$.

Після переходу в систему спостерігача маємо

$$\frac{\omega_{\text{obs}}}{\omega_0} = \frac{k_\mu u_{\text{obs}}^\mu}{k_\mu u_0^\mu} = \frac{k_0}{k_\mu u_0^\mu} = \frac{1}{u_0^0 (1 + \mathbf{n}\mathbf{v}/c)} = \frac{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}{(1 + \mathbf{n}\mathbf{v}/c)},$$

де \mathbf{v} – швидкість джерела відносно спостерігача. За не релятивістських швидкостей корінь у чисельнику можна наближено замінити на одиницю.

Нехай спостерігач і джерело розташовані весь час на одній прямій. Коли джерело віддаляється від спостерігача, то

$$\frac{\omega_{\text{obs}}}{\omega_0} = \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{1/2} < 1, \quad v = |\mathbf{v}|.$$

Коли, навпаки, джерело наближається до спостерігача, маємо

$$\frac{\omega_{\text{obs}}}{\omega_0} = \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right)^{1/2} > 1.$$

3.6. Вектор-потенціал

Унаслідок рівнянь (3.2) можна ввести 4-вектор потенціалу A_μ (або 4-потенціал):

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.10)$$

Ми не доводимо це твердження, оскільки далі буде видно, що при належному виборі A_μ ми отримуємо розв'язок рівнянь Максвелла в явному вигляді. Наразі лише зауважимо, що підстановка (3.10) у рівняння (3.2) дає тотожний нуль. Далі буде отримано 4-вектор A_μ , що реалізує розв'язок (3.1). Очевидно, фізичні поля, що їх описує тензор $F_{\mu\nu}$, залишаться незмінними при перетворенні виду $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$, де χ – довільна функція. Це перетворення 4-потенціалу називають *калібрувальним* (або *градієнтним*). Завдяки калібрувальній інваріантності можна накласти умову Лоренца¹

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \quad (3.11)$$

Цю умову також далі перевіримо явно, коли отримаємо потрібний розв'язок.

За умови (3.11) підстановка (3.10) у рівняння Максвелла (3.1) дає

$$\square A^\nu = (4\pi/c)J^\nu, \quad (3.12)$$

де $\square \equiv \partial_\nu \partial^\nu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ – оператор Д'Аламбера (хвильовий оператор).

Розв'язок (3.12), що задовольняє також (3.11), породжує розв'язок рівнянь Максвелла для тензора електромагнітного поля за формулою (3.10). Далі ми знову звернемося до постановки задачі, що відповідає *ізолюваній системі за відсутності зовнішнього випромінювання*. Розглянемо розв'язок (3.12), починаючи з нескінченного минулого і припускаючи, що 4-вектор $J^\nu(x) \equiv J^\nu(x^0, \mathbf{x})$ відмінний від нуля лише в обмеженій області просторових координат \mathbf{x} , а будь-які джерела на нескінченності відсутні. Як відомо з курсу математичної фізики, цим умовам відповідає розв'язок рівняння (3.12) у вигляді загаяних потенціалів, що можна подати за допомогою фундаментального розв'язку $D_{ret}(x)$ оператора Д'Аламбера:

$$D_{ret}(x) = \frac{1}{2\pi} \theta(x^0) \delta[(x^0)^2 - \mathbf{x}^2], \quad x \equiv \{x^\alpha\} \equiv (x^0, \mathbf{x}),$$

$\theta(t) \equiv \{0, x < 0; 1, x > 0\}$ – функція Хевісайда, δ – функція Дірака; цей розв'язок, за визначенням, задовольняє рівняння

$$\square D_{ret}(x) = \delta^4(x) \equiv \delta(x^0) \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3).$$

¹ Якщо б ця умова не виконувалася, можна підібрати функцію χ так, щоб забезпечити (3.11) для нового 4-потенціалу.

Відповідний розв'язок рівняння (3.12) має вигляд згортки¹:

$$A^\nu = \frac{4\pi}{c} D_{ret} * J^\nu. \quad (3.13)$$

Формально це можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} A^\nu(x) &= \frac{2}{c} \int d^4x \theta(x^0 - x'^0) \delta[(x^0 - x'^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2] J^\nu(x') = \\ &\quad (\text{після інтегрування за } x^0) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{x}' \frac{J^\nu(x'_{ret}, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \text{ де } x'_{ret} \equiv x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \end{aligned}$$

Розв'язок описує електромагнітне поле обмеженої системи з 4-вектором густини струму J^ν . Функція $D_{ret}(x)$ є скаляром відносно власних перетворень Лоренца, оскільки тут аргумент δ -функції залежить від квадрата інтервалу, а в $\theta(x^0)$ аргумент не змінює знак при цих перетвореннях. Тому з (3.13) випливає, що A^ν є 4-вектором відносно перетворень власної групи Лоренца, якщо J^ν – 4-вектор.

Формула (5.13), що явно гарантує властивості A^ν як 4-вектора, дозволяє прямо обчислити за допомогою (3.10) закон перетворення компонент $F_{\mu\nu}$ при переході в іншу систему відліку. Це дає змогу встановити, що $F_{\mu\nu}$ – двічі коваріантний тензор.

Користуючись рівнянням (3.13), перевіримо також калібрувальну умову (3.11). Маємо

$$\begin{aligned} \partial_\nu A^\nu &= \frac{4\pi}{c} \partial_\nu \{D_{ret} * J^\nu\} \equiv \frac{4\pi}{c} \int \frac{\partial}{\partial x^\nu} D(x - x') J^\nu(x') d^4x' = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int D(x - x') \frac{\partial}{\partial x'^\nu} J^\nu(x') d^4x' \equiv \frac{4\pi}{c} D_{ret} * \partial_\nu J^\nu = 0 \end{aligned}$$

унаслідок закону збереження заряду (3.3).

Таким чином, тензор $F_{\mu\nu}$, обчислений за формулами (3.10), (3.13), задовольняє рівняння (3.1), (3.2).

¹ Згортокою функцій (відрізняти від згортки тензорів!) є $(f * g)(x) = \int d^4y f(y)g(x - y)$.

Вправа 3.6. Покладаючи $\{A^\mu\} = \{A^0, \mathbf{A}\}$ (зверніть увагу на положення індексів!), де $A^0 = \varphi$ – скалярний і \mathbf{A} – векторний потенціали класичної електродинаміки відповідно, встановіть тривимірну форму рівнянь: а) $\partial_\nu A^\nu = 0$; б) $\square A^\nu = (4\pi/c)J^\nu$.

Вправа 3.7. Частинка із зарядом q і масою m рухається в однорідному сталому електромагнітному полі, причому електричне \mathbf{E} і магнітне \mathbf{H} поля паралельні. У початковий момент $t = 0$ частинка була в початку координат і мала швидкість v , перпендикулярну до полів. Знайдіть залежності координат зарядженої частинки від власного часу τ .

Відповідь: нехай вісь OZ напрямлена вздовж вектора напруженості електричного поля, а вісь OX – уздовж напрямку швидкості в початковий момент, тоді

$$ct = \frac{c\gamma}{\omega_E} \operatorname{sh}(\omega_E \tau), \quad z = \frac{c\gamma}{\omega_E} (\operatorname{ch}(\omega_E \tau) - 1), \quad x = \frac{v\gamma}{\omega_H} \sin(\omega_H \tau), \quad y = \frac{v\gamma}{\omega_H} (\cos(\omega_H \tau) - 1),$$

де $\omega_E = \frac{qE}{mc}$, $\omega_H = \frac{qH}{mc}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

4. ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП ДЛЯ РІВНЯНЬ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

Рівняння динаміки частинок і полів можна пов'язати з певними варіаційними принципами, які широко використовують у теоретичній фізиці. Ці принципи пов'язані з поняттями дії та лагранжіана. У цьому розділі варіаційний принцип найменшої дії проілюстровано на прикладі рівнянь електродинаміки. Буде подано функціонали дії, з яких можна отримати рівняння руху заряджених частинок і рівняння електромагнітного поля. У сучасній теорії, навпаки, принцип найменшої дії часто виступає як відправна точка для пошуку базових рівнянь для зіставлення з експериментом: як правило, простіше шукати функціонал дії, що задовольняє певні фізичні вимоги, ніж безпосередньо підбирати відповідні динамічні рівняння. Цей розділ потребує знання основ варіаційного числення.

4.1. Заряд у зовнішньому електромагнітному полі

Розглянемо траєкторію (світову лінію) точкової частинки $x^\mu = x^\mu(p)$, де p – деякий неособливий параметр. На ділянці траєкторії між точками $a = x^\mu(p_1)$ та $b = x^\mu(p_2)$ розглянемо інтеграл

$$S_0 = -mc \int_a^b ds = -mc \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}} dp, \quad (4.1)$$

що має назву дії для вільної частинки; вибір коефіцієнтів забезпечує відповідність з нерелятивістським наближенням для дії. Також розглянемо інтеграл

$$S_{int} = -\frac{q}{c} \int_a^b A_\mu dx^\mu = -\frac{q}{c} \int_a^b A_\mu \frac{dx^\mu}{dp} dp, \quad (4.2)$$

що описує взаємодію частинки з електромагнітним полем; тут A_μ – 4-вектор потенціалу, q – заряд частинки. Легко перевірити, що параметр p можна вибрати довільно; при будь-якій заміні $p \rightarrow p' = p'(p)$ вигляд (4.1) і (4.2) не змінюється.

Введемо дію для частинки в зовнішньому полі $S = S_0 + S_{int}$. Дія S є функціоналом, що зіставляє кожній траєкторії певне число. Далі ми розглянемо першу варіацію S по траєкторії частинки. Зауважимо (як буде видно далі), що повний функціонал дії є сумою дій для окремих частинок плюс дія для поля. Проте при обчисленні варіацій S траєкторії різних частинок вважаються незалежними, тому на цьому етапі досить розглянути дію для однієї частинки. Дія для поля не залежить від змінних частинок і не впливає на варіацію S при варіаціях траєкторії частинки $x_0^\mu(p) \rightarrow x_0^\mu(p) + \delta x^\mu(p)$.

Варіаційний принцип найменшої дії для частинки в зовнішньому полі можна сформулювати таким чином: перша варіація $\delta S = \delta S_0 + \delta S_{int}$ дорівнює нулю на траєкторії $x_0^\mu(p)$, тоді й тільки тоді, якщо ця траєкторія задовольняє рівняння руху. Траєкторію $x_0^\mu(p)$ називають опорною. Зауважимо, як відомо з варіаційного числення, що умова $\delta S = 0$ є лише необхідною умовою мінімуму функціоналу дії¹. Аналіз достатніх умов мінімуму потребує додаткового розгляду.

¹ Фактично далі ми обмежуємося розглядом умови стаціонарності дії, а не її мінімуму.

Розглянемо траєкторії в околі опорної світової лінії $x_0^\mu(p)$. При малих змінах траєкторії $x_0^\mu(p) \rightarrow x_0^\mu(p) + \delta x^\mu(p)$ числове значення функціоналу S змінюється. Нас цікавитимуть малі зміни дії

$$S(x_0^\mu + \delta x^\mu) - S(x_0^\mu),$$

при довільних $\delta x^\mu(p)$ за стандартної умови

$$\delta x^\mu(p_1) = \delta x^\mu(p_2) = 0 \quad (4.3)$$

(так звана варіація із закріпленими кінцями). Малі зміни дії розглядаємо з точністю до лінійних за δx^μ членів, тобто розгляд обмежується першою варіацією $\delta S \approx S(x_0^\mu + \delta x^\mu) - S(x_0^\mu)$.

Дію S запишемо у вигляді $S = \int L(x(p), \dot{x}(p)) dp$, де

$$L(x, \dot{x}) = -mc \left(\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right)^{1/2} - \frac{q}{c} A_\mu(x) \dot{x}^\mu; \text{ тут позначено } \dot{x}^\alpha \equiv dx^\alpha / dp.$$

Покажемо, що з умови $\delta S = 0$ випливають рівняння руху зарядженої частинки

$$mc^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = q F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{ds}, \text{ де } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.4)$$

За стандартною процедурою варіаційного числення умова $\delta S = 0$ з урахуванням (4.3) приводить до рівнянь Ейлера – Лагранжа для функції $L(x, \dot{x})$:

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu},$$

або, обчислюючи похідні від L ,

$$\frac{d}{dp} \left\{ mc \frac{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{ds/dp} + \frac{q}{c} A_\mu \right\} = \frac{q}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \dot{x}^\nu,$$

де $ds/dp = \left(\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right)^{1/2}$.

Перейдемо від параметра p до $s = \int_{p_1}^p \frac{ds}{dp} dp$:

$$\frac{d}{ds} \left\{ mc\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + \frac{q}{c} A_\mu \right\} = \frac{q}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{ds}.$$

Розкриваємо похідну в лівій частині:

$$mc\eta_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} = \frac{q}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{q}{c} \frac{d}{ds} A_\mu = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds}.$$

Результатом є рівняння, які збігаються з (4.4) після підняття індексу μ .

Звернемо увагу, що хоча в лагранжіані L фігурує 4-вектор-потенціал A_μ , він з'являється в явному вигляді в рівняннях руху лише через тензор електромагнітного поля $F_{\alpha\beta}$, який і є спостережуваною величиною.

Вправа 4.1. Релятивістська заряджена частинка з масою m і зарядом q рухається в полі нерухомого заряду Q . Отримайте рівняння для тривимірної траєкторії частинки.

Розв'язання: коваріантний 4-вектор-потенціал нерухомого заряду в початку координат є $\{A_\mu\} = \{\alpha r^{-1}, 0, 0, 0\}$, $\alpha = Qq$. Якщо у виразі для дії перейти до параметра t , підінтегральний вираз дає тривимірну функцію Лагранжа зарядженої частинки в зовнішньому полі:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2 / c^2} - \frac{\alpha}{r}.$$

Звідси маємо інтеграл енергії

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2 / c^2}} + \frac{\alpha}{r} = E. \quad (\text{P.1})$$

У сферичних координатах у площині $\theta = \pi/2$ інтеграл моменту є

$$\frac{mr^2 \dot{\phi}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2 / c^2}} = l. \quad (\text{P.2})$$

Комбінуючи (P.1) і (P.2), позбавимось $\sqrt{1 - \mathbf{v}^2 / c^2}$ та отримаємо

$$r^2 \dot{\phi} \left(E - \frac{\alpha}{r} \right) = lc^2. \quad (\text{P.3})$$

З урахуванням цього співвідношення, позначаючи $u = r^{-1}$, $u' = du/d\phi$,

$$\mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = (r'^2 + r^2) \dot{\phi}^2 = \frac{l^2 c^4 (r'^2 + r^2)}{r^4 (E - \alpha/r)^2} = \frac{l^2 c^4 (u'^2 + u^2)}{(E - \alpha/r)^2}.$$

Звідси та з (Р.1) маємо

$$m^2 c^4 = \left(E - \frac{\alpha}{r} \right)^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right) = \left[(E - \alpha u)^2 - (u'^2 + u^2) l^2 c^2 \right]$$

або

$$u'^2 + \omega_0^2 u^2 + \frac{2\alpha E}{l^2 c^2} u = \frac{m^2 c^4 - E^2}{l^2 c^2}, \quad \omega_0^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{l^2 c^2}.$$

За $\omega_0^2 > 0$ рівняння має вигляд закону збереження енергії для осцилятора зі зміщеним центром; його розв'язками є тригонометричні функції. За $\omega_0^2 < 0$ розв'язками є гіперболічні функції; тут можливе падіння на центр $r \rightarrow 0$.

4.2. Дія для електромагнітного поля

Мета цього підрозділу – сформулювати варіаційний принцип, з якого випливають рівняння електромагнітного поля Максвелла. Згідно із сучасними уявленнями, дія для системи "поле + джерела" має складатися із суми функціоналів дії для поля, для зарядів і доданка, що описує взаємодію поля із зарядами:

$$S = S_0 + S_{int} + S_f. \quad (4.5)$$

Оскільки поля задано в усьому просторі, функціонал дії має містити інтегрування по чотиривимірному об'єму, а не тільки по траєкторіях, як у випадку частинок. Тому подаватимемо $S_{int} + S_f$ у вигляді такого інтегралу:

$$S_{int} + S_f = \int_{\Omega} d^4 x L_{tot} (A_{\mu}(x), A_{\mu,\nu}(x)), \quad L_{tot} = L_{int} + L_f, \quad (4.6)$$

де L_{int} відповідає за взаємодію поля із зарядами, L_f описує суто польовий внесок.

Незалежними змінними, відносно яких обчислюватиметься варіація, вважаємо компоненти 4-вектора потенціалу A_{μ} . Область інтегрування Ω може охоплювати весь простір, а може бути скінченною. Варіацію функціоналу дії розглядаємо за умови, що зміни польових функцій обертаються на нуль на межі області інтегрування $\partial\Omega$.

Зауваження: якщо змінити підінтегральний вираз у (4.6), додавши до нього повну 4-дивергенцію $L_{tot} \rightarrow L_{tot} + \partial_\mu f^\mu$, де f – будь-яка функція від польових змінних (але не від їх похідних), то при обчисленні варіації додається вираз $\int \partial_\mu (\delta f^\mu) d^4x = 0$, що обертається на нуль у силу граничних умов на $\partial\Omega$ після застосування формули Остроградського – Гаусса. Тому додавання повної 4-дивергенції до L_{tot} не впливає на рівняння, що випливають з варіаційного принципу.

Вирази для S_0 та S_{int} отримуємо з (4.1), (4.2) за допомогою підсумовування дій для окремих частинок.

$$S_0 = -\sum mc \int ds, \quad S_{int} = -\sum \frac{q}{c} \int A_\mu dx^\mu. \quad (4.7)$$

Як було зазначено, ці вирази слід подати у вигляді інтегралів. Зробимо це лише для S_{int} , оскільки S_0 не впливає на виведення рівнянь поля при обчисленні варіації δS за δA_μ . Для неперервного розподілу ми зіставляємо кожному елементу заряду dq його траєкторію $x_q^\mu(t)$; відповідно

$$dq \frac{dx_q^\mu}{dt} = (\rho(x) d^3x) \frac{dx_q^\mu}{dt} = J^\mu(x) d^3x,$$

де ρ – об'ємна густина заряду, $x = x_q(t)$, $J^\mu = \rho dx^\mu / dt$ – 4-вектор густини струму. Тоді, переходячи в S_{int} до інтегралу по області Ω чотиривимірного простору маємо

$$\begin{aligned} S_{int} &= -\frac{1}{c} \int dq \int A_\mu(x_e) \frac{dx_q^\mu}{dt} dt = -\frac{1}{c} \int_\Omega dt d^3\mathbf{x} A_\mu(x) J^\mu(x) = \\ &= -\frac{1}{c^2} \int_\Omega d^4x A_\mu(x) J^\mu(x). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Виникає питання, чи не втратимо ми калібрувальну інваріантність теорії завдяки тому, що в (4.8) явно входить 4-потенціал? Відсутність тут якихось непорозумінь впливає насамперед з того, що з принципу найменшої дії буде отримано правильні рівняння поля, які є калібрувально інваріантними. Проте навіть на даному етапі можна пересвідчитися, що вираз (4.8) є калібрувально інваріантним, якщо врахувати закон збереження заряду. Покажемо, що (4.8) не змінюється при калі-

брувальних перетвореннях $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$, де $\chi|_{\partial\Omega} = 0$ на межі області Ω . При такому перетворенні інтеграл (4.8) отримує доданок

$$-\frac{1}{c^2} \int d^4x \frac{\partial \chi}{\partial x^\mu} J^\mu = -\frac{1}{c^2} \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\chi J^\mu) + \frac{1}{c^2} \int d^4x \chi J_{,\mu}^\mu.$$

Інтеграл від дивергенції зникає на межі $\partial\Omega$, а другий доданок дорівнює нулю завдяки закону збереження заряду $J_{,\mu}^\mu = 0$. Це свідчить про зв'язок калібрувальної інваріантності зі збереженням заряду.

Підберемо вираз для S_f , що приводить до рівнянь класичної електродинаміки. Поле для пошуків L_f значно звужується, якщо врахувати такі обставини: по-перше, рівняння електромагнітного поля мають однаковий вигляд у всіх інерціальних системах відліку, тому доцільно конструювати L_f як скаляр за допомогою згортки вектора A_μ і його похідних $A_{\mu,\alpha}$; по-друге, у рівняннях руху фігурує не безпосередньо A_μ , а величини $F_{\mu\nu}$. Як було зазначено раніше, саме $F_{\mu\nu}$ мають фізичний зміст як величини, які можливо вимірювати, причому вони інваріантні відносно калібрувальних перетворень. Щоб зберегти калібрувальну інваріантність у рівняннях поля, будемо конструювати L_f саме з величин $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Ці величини задовольняють рівняння (3.2), які запишемо у вигляді

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot F_{\beta\gamma,\delta} = 0. \quad (4.9)$$

Щоб отримати лінійні рівняння поля, природно обмежитися лише квадратичними комбінаціями $F^{\mu\nu}$, що є скалярами відносно групи Лоренца. Таких комбінацій, з точністю до сталого множника, лише дві:

$$I_1 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \text{ та } I_2 = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}.$$

Точніше, I_2 – псевдоскаляр; він змінює знак при інверсіях координат, це скаляр лише відносно власної групи Лоренца. Ця величина зводиться до повної дивергенції:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} (\partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma) = \\ &= 2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} \partial_\gamma A_\delta = 2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\gamma [F_{\alpha\beta} A_\delta], \end{aligned}$$

де було враховано антисиметрію $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}$ і рівняння (4.9). Інтеграл від I_2 по області Ω зводиться до інтегралу по межі $\partial\Omega$ і не дає внеску в рівняння поля всередині Ω . Таким чином, у нас залишається лише інваріант I_1 , тому можна вибрати

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x. \quad (4.10)$$

Вибір сталого множника зроблено заздалегідь для забезпечення відповідності гауссовій системі одиниць. Можна показати, що вибір іншого множника вплине лише на визначення одиниці заряду. Враховуючи внесок взаємодії поля і зарядів, покладемо

$$L_{tot} = -\frac{1}{16\pi c} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} A_\mu J^\mu. \quad (4.11)$$

Нагадаємо, що незалежними польовими змінними в (4.11) вважаємо A_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$. Обчислимо $\delta(S_f + S_{int}) = \int d^4x \delta L_{tot}$ за умови $\delta A_\mu(x)|_{\partial\Omega} = 0$,

маємо

$$\begin{aligned} \delta S_{int} &= -\frac{1}{c^2} \int d^4x J^\nu(x) \delta A_\nu(x); \\ \delta \int d^4x I_1 &= 2 \int d^4x F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = 2 \int d^4x F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) = \\ &= 4 \int d^4x F^{\mu\nu} \delta A_{\nu,\mu} = 4 \int d^4x [\partial_\mu (F^{\mu\nu} \delta A_\nu) - \partial_\mu (F^{\mu\nu}) \delta A_\nu] = \\ &= -4 \int d^4x \partial_\mu (F^{\mu\nu}) \delta A_\nu, \end{aligned}$$

де застосовано формулу Остроградського – Гаусса і враховано умову на $\partial\Omega$. Звідси

$$\delta(S_f + S_{int}) = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4\pi c} \partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} J^\nu \right\} \delta A_\nu(x).$$

Згідно з принципом стаціонарної дії, цей вираз має дорівнювати нулю для довільних варіацій $\delta A_\nu(x)$ усередині Ω . Це можливо лише тоді, коли вираз у фігурних дужках дорівнює нулю:

$$\frac{1}{4\pi c} \partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} J^\nu = 0, \text{ або остаточно } \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \quad (4.12)$$

Разом з (4.9) ці рівняння утворюють повну систему рівнянь Максвелла (3.1), (3.2) для тензора електромагнітного поля $F^{\mu\nu}$.

5. ТЕНЗОР ЕНЕРГІЇ-ІМПУЛЬСУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ТА ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

У цьому розділі отримаємо закони збереження енергії-імпульсу та моменту-імпульсу як наслідок рівнянь електродинаміки в коваріантній формі. Введемо тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля з наступним узагальненням на довільні системи.

5.1. 4-імпульс системи тіл

Перепишемо рівняння руху частинки в зовнішньому електромагнітному полі за допомогою вектора 4-імпульсу, який означимо таким чином: $p^\mu = m c u^\mu$. Завдяки співвідношенню $u^\mu u_\mu = 1$, маємо

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2. \quad (5.1)$$

Рівняння руху зарядженої частинки мають вигляд

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{ds}.$$

Вибираючи час системи відліку як незалежну змінну, перепишемо це співвідношення у вигляді

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{dt}, \quad (5.2)$$

з якого випливає фізичний зміст компонент p^μ . Дійсно, при $\mu = 0$, враховуючи представлення $F_{\mu\nu}$ через електричне й магнітне поля, маємо

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = q(\mathbf{E}\mathbf{v}), \quad \text{де} \quad \varepsilon = c p^0 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}},$$

де $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ – звичайна швидкість. Права частина цього рівняння – потужність, що витрачає електромагнітне поле, діючи на частинку, тому ε має зміст енергії рухомої частинки.

При $\mu = i = 1, 2, 3$ з (5.2) у тривимірних позначеннях дістанемо

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\},$$

де $\mathbf{p} = m\mathbf{v}(1 - \mathbf{v}^2/c^2)^{-1/2}$ – тривимірна частина 4-імпульсу. Це рівняння описує обмін імпульсом між зарядженим тілом та електромагнітним полем, причому права частина рівняння дає значення сили, що діє на тіло. Таким чином, \mathbf{p} має зміст імпульсу рухомого тіла.

Із рівняння (5.1) випливає зв'язок між енергією та імпульсом:

$$\varepsilon^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2.$$

Узагальнимо енергетичні співвідношення на випадок неперервного розподілу зарядів. Обмін 4-імпульсом між полем і системою N точкових тіл в області¹ Ω_3 звичайного тривимірного простору описується рівнянням, яке випливає з (5.2):

$$\frac{dP^\mu}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{c} F^\mu{}_\nu(x_k) \frac{dx_k^\nu}{dt},$$

де $P^\mu = \sum_{k=1}^N p_k^\mu$ – 4-імпульс системи тіл.

У випадку неперервного розподілу перейдемо від сум до інтегрування

$$\frac{dP^\mu}{dt} = \frac{1}{c} \int dq \cdot F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{1}{c} \int d^3x \rho \frac{dx^\nu}{dt} F^\mu{}_\nu = \frac{1}{c} \int d^3x F^\mu{}_\nu J^\nu. \quad (5.3)$$

Права частина (5.3) визначає 4-імпульс, який поле передає системі частинок за одиницю часу.

¹ Тут вважаємо, що частинки не перетинають меж цієї області. Якщо це не виконується, у рівняннях збереження треба враховувати потік частинок через межу області (підрозд. 5.5).

5.2. Енергія-імпульс електромагнітного поля

Введемо, за означенням, тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля:

$$T_{emf}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right\}. \quad (5.4)$$

Обчислимо величину $\partial_{\nu} T_{emf}^{\mu\nu}$ з урахуванням рівнянь Максвелла для $F_{\mu\nu}$. Із рівнянь (3.2) з урахуванням антисиметрії $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta,\nu} &= -F^{\alpha\beta} (F_{\beta\nu,\alpha} + F_{\nu\alpha,\beta}) = -F^{\alpha\beta} (-F_{\nu\beta,\alpha} + F_{\nu\alpha,\beta}) = \\ &= -F^{\alpha\beta} (F_{\nu\alpha,\beta} + F_{\nu\alpha,\beta}) = -2F^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta,\nu} = -4F^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha,\beta}.$$

Ураховуючи це співвідношення та беручи до уваги першу групу рівнянь Максвелла (3.1), дістаємо

$$\begin{aligned} \partial_{\nu} T_{emf}^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ -F^{\mu\alpha} \partial_{\nu} F^{\nu}_{\alpha} - F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha,\nu} - \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\nu\alpha,\beta} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ F^{\mu}_{\alpha,\nu} F^{\alpha\nu} - F^{\mu\alpha} F^{\nu}_{\alpha,\nu} - F^{\alpha\beta} F^{\mu}_{\alpha,\beta} \right\} = \\ &\quad (\text{перший і останній доданки скорочуються}) \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\alpha} \partial_{\nu} F^{\nu}_{\alpha} = -\frac{1}{c} F^{\mu\alpha} J_{\alpha}, \end{aligned}$$

тобто

$$\partial_{\nu} T_{emf}^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\alpha} J_{\alpha}. \quad (5.5)$$

Права частина цього рівняння згідно з (5.3) визначає 4-імпульс, що переходить від поля до зарядів в одиниці об'єму за одиницю часу. Проінтегруємо (5.5) за тривимірним об'ємом Ω_3 , тоді права частина дасть втрати енергії поля всередині об'єму Ω_3 за одиницю часу. Ліва частина дає змогу отримати явний вираз для втрат 4-імпульсу (або його збільшення – залежно від знака) через польові функції:

$$\int_{\Omega_3} d^3x (\partial_\nu T_{emf}^{\mu\nu}) = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_3} T_{emf}^{\mu 0} d^3x + \int_{\Omega_3} d^3x \frac{\partial T_{emf}^{\mu i}}{\partial x^i} =$$

$$= \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_3} T_{emf}^{\mu 0} d^3x + \oint_{\partial\Omega_3} T_{emf}^{\mu i} d\sigma_i,$$

де $d\sigma_i$ – елемент площини поверхні $\partial\Omega_3$, що обмежує просторову область Ω_3 , ($d\sigma_1 = dydz$, $d\sigma_2 = dxdz$, $d\sigma_3 = dxdy$), причому інтеграл за $\partial\Omega_3$ описує потік 4-імпульсу через межу цієї області. Інтегральний закон збереження енергії та імпульсу всієї системи "поле + частинки" в цій області має такий вигляд:

$$\frac{dP^\mu}{dt} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_3} T_{emf}^{\mu 0} d^3x + \oint_{\partial\Omega_3} T_{emf}^{\mu j} d\sigma_j = 0, \quad (5.6)$$

де враховано (5.3), (5.5), причому вважаємо, що частинки не перетинають межі області Ω_3 . Звідси T_{emf}^{00} можна інтерпретувати, як густину енергії електромагнітного поля, T_{emf}^{i0}/c – як густину імпульсу. Останній доданок у (5.6) описує потік 4-імпульсу через поверхню $\partial\Omega_3$, відповідно $cT_{emf}^{0i} = \Pi^i$ описує компоненти тривимірного вектора густини потоку енергії, де $\mathbf{\Pi} = \{\Pi^i\}$ – вектор Пойнтінга.

Запишемо явні вирази для густини енергії поля

$$T_{emf}^{00} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (5.7)$$

і для густини потоку енергії

$$\mathbf{\Pi} = \{\Pi^i\} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (5.8)$$

Як видно, з (5.6) при $\mu = 0$, $\oint_{\partial\Omega_3} \mathbf{\Pi} d\mathbf{\Sigma}$ – це енергія, що витікає через $\partial\Omega_3$ за одиницю часу. Водночас $T_{emf}^{0i}/c = T_{emf}^{i0}/c = \Pi^i/c^2$ – густина імпульсу поля, причому рівняння (5.6) при $\mu = i$ описує збереження імпульсу. Доданок $\oint_{\partial\Omega_3} d\sigma_j T_{emf}^{ij}$ описує потік імпульсу (імпульс, що витікає за одиницю часу) через поверхню $\partial\Omega_3$. Відповідно $\{T_{emf}^{k1}, T_{emf}^{k2}, T_{emf}^{k3}\}$ можна інтерпре-

тувати як густину потоку k -ї компоненти імпульсу. Для просторової частини тензора енергії-імпульсу маємо $T_{emf}^{ij} = -t_{ij}$, де тривимірний тензор

$$t_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left\{ E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right\} \quad (5.9)$$

називають максвеллівським тензором натягів.

Наведемо також співвідношення, що випливає з явного вигляду (5.4) тензора енергії-імпульсу електромагнітного поля:

$$T_{emf}^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = 0.$$

5.3. Тензор моменту-імпульсу електромагнітної системи

У нерелятивістській теорії компоненти векторного добутку $[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$, що складають момент імпульсу, можна записати як $x^i p^j - x^j p^i$. Розглянемо узагальнення цього виразу

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, \quad (5.10)$$

яке називають 4-тензором моменту-імпульсу. Обчислимо, як змінюється ця величина вздовж траєкторії зарядженої частинки:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M^{\mu\nu} &= \left\{ \frac{dx^\mu}{dt} p^\nu - \frac{dx^\nu}{dt} p^\mu \right\} + x^\mu \frac{dp^\nu}{dt} - x^\nu \frac{dp^\mu}{dt} = \\ &= \frac{q}{c} \left\{ x^\mu F^\nu{}_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt} - x^\nu F^\mu{}_\alpha \frac{dx^\alpha}{dt} \right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Тут враховано співвідношення $p^\nu = m c u^\nu$, $\frac{dx^\mu}{dt} = u^\mu \frac{ds}{dt}$, а також рівняння руху (5.2). Для системи частинок

$$\frac{d}{dt} \sum_{\Omega} M^{\mu\nu} = \sum_{\Omega} \frac{q}{c} (x^\mu F^\nu{}_\alpha - x^\nu F^\mu{}_\alpha) \frac{dx^\alpha}{dt},$$

індекс під сумою означає, що вона береться за усіма частинками в області Ω .

При переході до неперервного розподілу обмін 4-моментом імпульсу між системою частинок і полем можна записати таким чином:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\Omega} M^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int (x^{\mu} F^{\nu}{}_{\alpha} - x^{\nu} F^{\mu}{}_{\alpha}) J^{\alpha} dV, \quad (5.12)$$

де враховано, що для частинок у деякому об'ємі ΔV :

$$\sum_{\Delta V} q \frac{dx^{\alpha}}{dt} \rightarrow \rho \frac{dx^{\alpha}}{dt} \Delta V = J^{\alpha} \Delta V.$$

Перейдемо до визначення моменту-імпульсу електромагнітного поля. Розглянемо вираз

$$\partial_{\alpha} (x^{\mu} T^{\nu\alpha} - x^{\nu} T^{\mu\alpha}) = \delta_{\alpha}^{\mu} T^{\nu\alpha} - \delta_{\alpha}^{\nu} T^{\mu\alpha} + x^{\mu} T^{\nu\alpha}{}_{,\alpha} - x^{\nu} T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}. \quad (5.13)$$

Використовуючи рівняння (5.5) з урахуванням симетрії $T_{emf}^{\alpha\beta}$, дістанемо

$$\partial_{\alpha} (x^{\mu} T_{emf}^{\nu\alpha} - x^{\nu} T_{emf}^{\mu\alpha}) = -\frac{1}{c} (x^{\mu} F^{\nu}{}_{\alpha} - x^{\nu} F^{\mu}{}_{\alpha}) J^{\alpha}. \quad (5.14)$$

Проінтегруємо це співвідношення по області Ω_3 ($\mu = i$) із застосуванням формули Остроградського – Гаусса:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \int_{\Omega_3} d^3x \frac{\partial}{\partial t} (x^{\mu} T_{emf}^{\nu 0} - x^{\nu} T_{emf}^{\mu 0}) + \int_{\Omega_3} d^3x \frac{\partial}{\partial x^i} (x^{\mu} T_{emf}^{\nu i} - x^{\nu} T_{emf}^{\mu i}) = \\ & = \frac{dM_{emf}^{\mu\nu}}{dt} + \oint_{\partial\Omega_3} d\sigma_i (x^{\mu} T_{emf}^{\nu i} - x^{\nu} T_{emf}^{\mu i}) = -\frac{1}{c} \int_{\Omega_3} d^3x (x^{\mu} F^{\nu}{}_{\alpha} - x^{\nu} F^{\mu}{}_{\alpha}) J^{\alpha}, \end{aligned}$$

де величину $M_{emf}^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int (x^{\mu} T_{emf}^{\nu 0} - x^{\nu} T_{emf}^{\mu 0}) d^3x$ назвемо тензором моменту-імпульсу поля, і врахуємо (5.12):

$$\frac{dM_{emf}^{\mu\nu}}{dt} + \oint_{\partial\Omega_3} d\sigma_i (x^{\mu} T_{emf}^{\nu i} - x^{\nu} T_{emf}^{\mu i}) + \frac{d}{dt} \sum_{\Omega_3} M^{\mu\nu} = 0. \quad (5.15)$$

Це співвідношення виражає збереження 4-моменту-імпульсу, причому $x^{\mu} T_{emf}^{\nu 0} - x^{\nu} T_{emf}^{\mu 0}$ дає густину цієї величини, а другий доданок у (5.15) дає її потік через $\partial\Omega_3$. При просторових значеннях індексів μ, ν це співвідношення виражає закон збереження компонент звичайного моменту-імпульсу.

5.4. Тензор енергії-імпульсу загальної фізичної системи

Співвідношення СТВ зручно розглядати в системі одиниць¹, де швидкість світла $c = 1$. Це означає, що за одиницю довжини ми вибираємо відстань, яку світло проходить за секунду (чи іншу одиницю часу)², тоді довжину можна вимірювати в секундах. При такому виборі енергія та імпульс мають однакову розмірність.

Нехай $T^{\alpha 0}$ – компоненти густини α -ї складової 4-імпульсу всіх фізичних полів, а компоненти $\{T^{\alpha 1}, T^{\alpha 2}, T^{\alpha 3}\}$ – складають тривимірний вектор густини потоку цієї складової. Згідно із цим означенням, зміни 4-імпульсу всередині просторової області Ω_3 дорівнюють потокам відповідних величин через межу області $\partial\Omega_3$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_3} d^3x T^{\alpha 0} = - \int_{\partial\Omega_3} d\sigma_i T^{\alpha i}.$$

За допомогою формули Остроградського – Гаусса маємо

$$\int_{\Omega_3} d^3x \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0,$$

а оскільки це співвідношення має виконуватися для будь-якої області, то звідси випливає диференціальний закон збереження енергії-імпульсу:

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (5.16)$$

Інтегральну форму закону збереження також можна записати в коваріантному вигляді. Проінтегруємо (5.16) по області Ω_4 чотиривимірного простору (рис. 5.2), обмежену гіперповерхнею $\Sigma = \partial\Omega_4$, що складається з бічної часоподібної гіперповерхні Σ_b , і двома просторовоподібними³ гіперповерхнями ω_1, ω_2 . За теоремою Остроградського – Гаусса

$$\int_{\omega_2} T^{\alpha\beta} d\Sigma_\beta - \int_{\omega_1} T^{\alpha\beta} d\Sigma_\beta + \int_{\Sigma_b} T^{\alpha\beta} d\Sigma_\beta = 0, \quad (5.17)$$

¹ Далі ми використовуємо цю систему одиниць до кінця розд. 5

² Еквівалентно, за одиницю часу можна вибирати інтервал, за який світло проходить одиницю довжини.

³ Поверхня просторовоподібна, якщо її вектор нормалі в кожній точці часоподібний, і навпаки.

де при інтегруванні по гіперповерхні ω_1 замінено зовнішню нормаль на протилежну їй нормаль, спрямовану в майбутнє¹ (нормаль майбутнього). Це співвідношення – загальна інтегральна форма закону збереження. За відсутності потоків через бічну поверхню маємо

$$\int_{\omega_2} T^{\alpha\beta} d\Sigma_\beta = \int_{\omega_1} T^{\alpha\beta} d\Sigma_\beta. \quad (5.18)$$

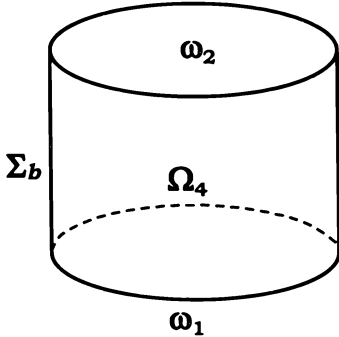


Рис. 5.2. Область Ω_4 з тривимірною межею $\Sigma = \partial\Omega_4$

Як ω_1, ω_2 можуть бути вибрані два перерізи чотиривимірного простору при $t = t_1$ та $t = t_2$ у середині сфери $|\mathbf{x}| = R$, тобто області звичайного тривимірного простору, взяті у відповідні моменти t , а бічна гіперповерхня є $\Sigma_b = \{t \in [t_1, t_2], |\mathbf{x}| = R\}$, причому $d\Sigma_i = dt d\sigma_i$. Нормаль майбутнього для $\omega_1, \omega_2 \in (1, 0, 0, 0)$. Тоді (5.17) можна переписати таким чином:

$$\int_{|\mathbf{x}| \leq R} T^{\alpha 0} \Big|_{t=t_2} d^3x - \int_{|\mathbf{x}| \leq R} T^{\alpha 0} \Big|_{t=t_1} d^3x + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{|\mathbf{x}|=R} T^{\alpha i} d\sigma_i = 0.$$

Звідси також легко отримати

$$\frac{d}{dt} \int_{|\mathbf{x}| \leq R} T^{\alpha 0} d^3x + \int_{|\mathbf{x}|=R} T^{\alpha i} d\sigma_i = 0. \quad (5.19)$$

За відсутності випромінювання, коли потоків через поверхню сфери $|\mathbf{x}| = R$ немає, із (5.19) випливає збереження енергії-імпульсу системи $\int T^{\alpha 0} d^3x$.

Аналогічно випадку електромагнітного поля, для загальної системи можна отримати аналогічні співвідношення щодо моменту-імпульсу, якщо $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$. У цьому разі за допомогою (5.13) і (5.16) дістанемо

$$\partial_\alpha (x^\mu T^{\nu\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}) = \delta_\alpha^\mu T^{\nu\alpha} - \delta_\alpha^\nu T^{\mu\alpha} + x^\mu T^{\nu\alpha}_{,\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}_{,\alpha} = 0,$$

звідки аналогічно (5.15) маємо закон збереження ($c = 1$):

¹ Часоподібний вектор A^μ напрямлений у майбутнє, якщо A^0 .

$$\frac{d}{dt} \int (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) d^3x + \oint_{\partial\Omega_3} d\sigma_i (x^\mu T^{\nu i} - x^\nu T^{\mu i}) = 0. \quad (5.20)$$

Підкреслимо, що закон збереження моменту-імпульсу (5.20) отримано в припущенні, що *тензор* $T^{\alpha\beta}$ *є симетричним*.

5.5. Тензор енергії-імпульсу вільних частинок

Розглянемо систему вільних частинок з неперервним розподілом швидкості та густини маси. У кожній точці визначена ейлерова 4-швидкість частинок $u^\alpha = u^0(1, \mathbf{v})$, де $\mathbf{v} = \{v^i\}$ – звичайна швидкість. Введемо *інваріантну густину маси спокою* $\mu^*(x)$ – густину маси у власній системі елемента середовища; ця величина є скаляром і пов'язана зі звичайною густиною кількості частинок $n(x)$ співвідношенням $\mu^* = nm\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$, (нагадаємо, що $c = 1$), m – їхня маса спокою. Якщо частинки не беруть участі в реакціях, пов'язаних зі зміною їх будови, їхня кількість зберігається, тому в області Ω_3

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_3} n d^3x = - \oint_{\partial\Omega_3} n(\mathbf{v} \cdot d\Sigma) = - \int_{\Omega_3} \text{div}(n\mathbf{v}) d^3x.$$

Звідси

$$\int_{\Omega_3} \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}) \right) d^3x = 0 \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}) = 0.$$

Останнє співвідношення (рівняння неперервності) можна переписати у коваріантній формі за допомогою μ^* :

$$\partial_\alpha (\mu^* u^\alpha) = 0, \quad (5.21)$$

де враховано, що $n = \mu^* u^0 / m$.

Розглянемо тензор

$$T_p^{\alpha\beta} = \mu^* u^\alpha u^\beta, \quad (5.22)$$

який назвемо тензором енергії-імпульсу вільних частинок. Дійсно, компонентами цього тензора є густина енергії та густина імпульсу частинок:

$$T_p^{00} = \mu * (u^0)^2 = \frac{nm}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}, \quad T_p^{0i} = \mu * u^0 u^i = \frac{nmv^i}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}},$$

і густини потоків цих величин у j -му напрямку:

$$T_p^{j0} = \mu * u^j u^0 = \frac{nmv^j}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}, \quad T_p^{ji} = \mu * u^j u^i = \frac{nmv^i v^j}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}.$$

Вектор 4-імпульсу частинок у просторовій області Ω_3 є

$$P^\alpha = \int_{\Omega_3} T_p^{\alpha 0} d^3x = \int_{\Omega_3} \mu * u^\alpha u^0 d^3x.$$

Відповідно до міркувань, наведених у підрозд. 5.4, для повного тензора енергії-імпульсу неперервної системи "електромагнітне поле + частинки" має виконуватися співвідношення

$$\partial_\beta (T_p^{\alpha\beta} + T_{emf}^{\alpha\beta}) = 0. \quad (5.23)$$

Це ж саме співвідношення можна отримати, як і інтегральний закон збереження (5.6), безпосередньо з рівнянь руху та рівнянь Максвелла. Покажемо це. Обчислимо

$$\partial_\beta (\mu * u^\alpha u^\beta) = \partial_\beta (\mu * u^\beta) u^\alpha + \mu * u^\beta \partial_\beta u^\alpha = \mu * \frac{du^\alpha}{ds} = nm_0 \frac{du^\alpha}{dt},$$

де враховано рівняння неперервності (5.21); похідна за s береться вздовж траєкторії окремої частинки середовища, тому

$$\frac{du^\alpha}{ds} \equiv \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{ds} \equiv u^\beta \partial_\beta u^\alpha.$$

В одиниці об'єму середовища з рівняння (5.2) чи (3.5)

$$nm \frac{du^\alpha}{dt} = \rho F^\mu \quad \nu \frac{dx^\nu}{dt},$$

де $\rho = ne$ – густина заряду частинок, e – їхній заряд. Звідси

$$\partial_\beta T_p^{\alpha\beta} = \rho F^\alpha \quad \beta \frac{dx^\beta}{dt} \equiv F^\alpha \quad \beta J^\beta,$$

а в силу (5.5) отримуємо диференціальну форму закону збереження енергії-імпульсу (5.23). Звідси також випливає інтегральна форма (5.19). Зазначимо, що цей розгляд, на відміну від виведення формули (5.6), враховує випадки, коли частинки перетинають область Ω_3 .

Наприкінці запишемо тензор енергії-імпульсу точкової частинки, виходячи із формули (5.22)

$$T_p^{\alpha\beta}(x) = \frac{m\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\mathbf{x}_m}{dt}\right)^2}} \frac{dx_m^\alpha}{dt} \frac{dx_m^\beta}{dt},$$

де $\{x_m^\mu\} = \{t, \mathbf{x}_m(t)\}$ – траєкторія частинки з масою m . У коваріантному записі

$$T_p^{\alpha\beta}(x) = m \int ds_m \delta^{(4)}(x - x_m) u_{(m)}^\alpha u_{(m)}^\beta,$$

де

$$u_{(m)}^\alpha = \frac{dx_m^\alpha}{ds_m}, \quad ds_m = dt \sqrt{1 - \left(\frac{d\mathbf{x}_m}{dt}\right)^2}.$$

Вправа 5.1. π^0 -мезон, що рухається зі швидкістю $v < c$ ($c = 1$), розпадається на два γ -кванти. Знайдіть мінімальний кут θ_{\min} між напрямками розлітання квантів.

Вказівка: із законів збереження енергії та імпульсу отримайте

$$\sin^2(\theta_{\min}/2) = \frac{m^2}{4\hbar^2\omega_1\omega_2} \geq 1 - v^2, \quad \text{де } \omega_1, \omega_2 - \text{частоти фотонів.}$$

Відповідь: $\sin^2(\theta_{\min}/2) = 1 - v^2$.

Вправа 5.2. Дві елементарні частинки перетворюються на дві інші за схемою $a + b = c + d$. Позначимо

$$s = (p_{a\mu} + p_{b\mu})(p_a^\mu + p_b^\mu), \quad t = (p_{a\mu} - p_{c\mu})(p_a^\mu - p_c^\mu), \quad u = (p_{a\mu} - p_{d\mu})(p_a^\mu - p_d^\mu),$$

де p_i^μ – 4-імпульси частинок ($i = a, b, c, d$).

Доведіть, що $s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$, де m_i – маси частинок.

Вправа 5.3. При зіткненні частинки з масою спокою m з нерухомою частинкою масою спокою m_1 відбувається реакція, після якої народжуються частинки із загальною масою спокою M . Знайдіть мінімальне значення кінетичної енергії частинки, що налітає (енергетичний поріг реакції).

Вказівка: покажіть, що за умовою задачі кінетична енергія частинок у системі центра мас є монотонною функцією лабораторної енергії та імпульсу частинки, що налітає. У цій системі мінімальне значен-

ня енергії відповідає випадку, коли продукти реакції перебувають у стані спокою. У лабораторній системі всі народжені частинки мають однакову швидкість.

$$\text{Відповідь: } T_{\min} = \frac{c^2}{2m_1} [M^2 - (m + m_1)^2].$$

6. РЕЛЯТИВІСТСЬКА ГІДРОДИНАМІКА

Релятивістська гідродинаміка вивчає рухи суцільного середовища, швидкості яких порівняні зі швидкістю світла. Гідродинамічні моделі застосовують у релятивістській астрофізиці та космології для опису стаціонарних і нестаціонарних надгустих зірок, γ -спалахів, рентгєнівських джерел, астрофізичних ударних хвиль тощо, а також у фізиці високих енергій при вивченні процесів множинного народження елементарних частинок.

6.1. Рівняння руху ідеальної рідини

Гідродинамічний опис стає можливим, коли локальна термодинамічна рівновага у фізичній системі, що розглядається, встановлюється значно швидше, ніж відбуваються суттєві зміни таких макроскопічних параметрів, як швидкість, тиск і густина енергії. У гідродинаміці припускається можливість ейлерового опису, коли ці параметри однозначно визначені в кожній точці суцільного середовища. У релятивістській динаміці часто використовують модель ідеальної рідини. Рівняння руху ідеальної рідини – це рівняння збереження енергії та імпульсу. Запишемо їх через симетричний тензор енергії-імпульсу $T^{\mu\nu}$, вигляд якого визначається законом Паскаля: рідина є ізотропною в системі спокою кожного свого малого елемента (інакше, тиск рідини буде однаковим у всіх напрямках). Перейдемо до системи спокою деякого елемента рідини. У цій системі компонента T^{00} є густиною енергії ε , компоненти $T^{0i} = T^{i0}$ – проекції густини імпульсу на просторові координатні осі – дорівнюють нулю. Решта компонент T^{ij} , як відомо з розд. 5, становить тривимірний тензор густин потоку компонент імпульсу. Сила, з якою елемент рідини

тисне на сусідні елементи через поверхню $d\sigma_i = n^i d\sigma$ із зовнішньою нормаллю n^i , визначається потоком імпульсу через цю поверхню:

$$dF^i = T^{ij} d\sigma_j = \sum_j T^{ij} n^j d\sigma.$$

Ця сила тиску компенсується тиском сусідніх елементів рідини. З іншого боку, за визначенням тиску $dF^i = p n^i d\sigma$. Оскільки тиск p за припущенням не залежить від напрямку, то $\sum_j T^{ij} n^j = p n^i$ для довіль-

ного одиничного вектора n^i . Записуючи це рівняння для трьох різних ортів $n_{(k)}^j \equiv \delta^{jk}$, $k = 1, 2, 3$, легко отримати $T^{ij} = \delta^{ij} p$. Таким чином, у системі спокою елементу рідини тензор енергії-імпульсу має вигляд

$$\|T^{\mu}_{\nu}\| = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} \quad (6.1)$$

Узагальнюючи (6.1) на довільні системи відліку, маємо тензор енергії-імпульсу

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)U^{\mu}U^{\nu} - p\eta^{\mu\nu}, \quad (6.2)$$

де скаляри ε, p – це відповідно *густина енергії й тиск у власній системі*, а $U^{\mu} = U^{\mu}(x)$ – це 4-швидкість елементу рідини, що задовольняє співвідношення нормування

$$U_{\nu}U^{\nu} = 1. \quad (6.3)$$

Щоб пересвідчитися, що (6.2) дійсно відповідає (6.1), досить вибрати малий елемент середовища в околі деякої точки та перейти до його системи спокою, де $\{U^{\mu}\} = \{1, 0, 0, 0\}$; тоді з (6.2) отримуємо (6.1).

Динаміка руху релятивістської ідеальної рідини визначається законом збереження енергії-імпульсу

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} T^{\mu\nu} = 0. \quad (6.4)$$

З урахуванням (6.2) отримуємо

$$U^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} [(p + \varepsilon)U^\mu] + (p + \varepsilon)U^\mu \frac{\partial U^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial p}{\partial x^\mu} \eta^{\mu\nu} = 0. \quad (6.5)$$

Згорнемо це рівняння з U_ν з урахуванням (6.3) і тотожності $U_\nu \frac{\partial U^\nu}{\partial x^\mu} = 0$, яку отримуємо, диференціюючи (6.3). Результатом є релятивістський аналог рівняння неперервності

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} [(p + \varepsilon)U^\mu] = U^\mu \frac{\partial p}{\partial x^\mu}. \quad (6.6)$$

За відсутності тиску $p = 0$ це рівняння тотожне рівнянню неперервності для вільних частинок (5.21). Підстановка (6.6) у (6.5) після простих перетворень дає релятивістське узагальнення рівнянь Ейлера для ідеальної рідини

$$(p + \varepsilon)U^\mu \frac{\partial U^\nu}{\partial x^\mu} = (\eta^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu) \frac{\partial p}{\partial x^\mu}. \quad (6.7)$$

Між чотирма рівняннями (6.7) існує лінійна залежність; це очевидно, якщо утворити лінійну комбінацію цих рівнянь таким чином: помножити (6.7) на U_ν і підсумувати за ν , отримуючи тотожний нуль. Таким чином, незалежних рівнянь тут лише три.

Для опису гідродинамічної течії до рівнянь (6.6), (6.7) слід додати рівняння стану рідини, тобто визначити тиск як функцію двох інших термодинамічних параметрів, що визначають локальний термодинамічний стан речовини. Один з таких можливих параметрів – густина енергії – вже фігурує в рівняннях руху. У класичній гідродинаміці за другий параметр часто править кількість частинок на одиницю об'єму рідини. За високих густин енергії, з якими часто має справу релятивістська гідродинаміка, кількість частинок не зберігається в процесах народження та знищення. Часто зручніше користуватися густиною деякого заряду, що зберігається, наприклад, кількістю баріонів N_B . Аналогічно підрозд. 5.5 запишемо рівняння збереження

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_3} n_B d^3x = - \oint_{\partial\Omega_3} n_B (\mathbf{v} \cdot d\Sigma) = - \int_{\Omega_3} \operatorname{div}(n_B \mathbf{v}) d^3x,$$

де $n_B = \frac{dN_B}{d^3x}$ – концентрація баріонів. Тут фігурує $n_B \mathbf{v}$ – густина потоку N_B . Звідси

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (n^* U^\mu) = 0, \quad (6.8)$$

де скаляр $n^* = n_B / U^0$ є концентрацією баріонів у власній системі елемента середовища, а $n^* U^\mu$ становить 4-вектор густини потоку кількості баріонів. Рівняння (6.8) і рівняння стану $p = p(\varepsilon, n^*)$ замикають систему рівнянь релятивістської гідродинаміки (6.6), (6.7).

Завдяки припущенню про локальну термодинамічну рівновагу можна записати перше начало термодинаміки для питомих величин

$$TdS = pd(1/n^*) + d(\varepsilon/n^*), \quad (6.9)$$

де T – температура, а S – ентропія на один баріон. Очевидно, ця величина має зберігатися вздовж лінії струму, що визначаються рівнянням

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = U^\alpha(x).$$

Дійсно, уздовж лінії струму у силу (6.9)

$$\begin{aligned} T \frac{dS}{d\tau} &= T \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} U^\alpha = p \frac{\partial(1/n^*)}{\partial x^\alpha} U^\alpha + \frac{\partial(\varepsilon/n^*)}{\partial x^\alpha} U^\alpha = \\ &\text{(після елементарних перетворень)} \\ &= -\frac{(p + \varepsilon)}{(n^*)^2} \frac{\partial(n^* U^\alpha)}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{n^*} \left[\frac{\partial[(p + \varepsilon)U^\alpha]}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} U^\alpha \right]. \end{aligned}$$

Перший доданок дорівнює нулю завдяки (6.8), а другий – завдяки (6.6). Таким чином,

$$\frac{dS}{d\tau} \equiv \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} U^\alpha = 0, \quad (6.10)$$

що відповідає адіабатичності руху за відсутності дисипативних ефектів. Якщо ввести ентропію одиниці власного об'єму $s = S n^*$, з (6.10) маємо

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (s U^\alpha) = 0. \quad (6.11)$$

6.2. Релятивістські ударні хвилі

Рівняння (6.4) застосовні в разі неперервної течії та їх треба узагальнити на випадок, коли гідродинамічні функції мають розриви. Нехай розрив має місце на гладкій часоподібній¹ гіперповерхні. Розглянемо малий елемент гіперповерхні розриву з 4-вектором нормалі N^α , $N^\alpha N_\alpha = -1$. У системі відліку, де $N^0 = 0$, три компоненти N^i утворюють тривимірний вектор, нормальний до поверхні розриву. Будемо припускати, що на розриві не відбуваються втрати енергії-імпульсу² і потоки через розрив з обох боків є однаковими. Це приводить до співвідношення, яке легко записати в коваріантному вигляді в довільній системі відліку:

$$T_{(1)}^{\alpha\beta} N_\beta = T_{(2)}^{\alpha\beta} N_\beta, \quad (6.12)$$

де індекси в дужках відповідають різним бокам розриву в околі елементу, що розглядається. Помножимо (6.12) на N_α :

$$T_{(1)}^{\alpha\beta} N_\beta N_\alpha = T_{(2)}^{\alpha\beta} N_\beta N_\alpha \quad (6.13)$$

і врахуємо явний вигляд тензора енергії-імпульсу (6.2):

$$\omega_1 V_{(1)}^2 - \omega_2 V_{(2)}^2 = p_2 - p_1, \quad (6.14)$$

де $V_{(1)} = U_{(1)}^\alpha N_\alpha$, $V_{(2)} = U_{(2)}^\alpha N_\alpha$ – нормальні складові 4-швидкості, а $\varepsilon_1, p_1, \varepsilon_2, p_2$ – значення власної густини енергії та тиску з різних боків розриву, $\omega = \varepsilon + p$. Наступне рівняння отримуємо, підносячи до скалярного квадрата обидві частини (6.12)

$$T_{(1)}^{\alpha\beta} N_\beta \eta_{\alpha\mu} T_{(1)}^{\mu\nu} N_\nu = T_{(2)}^{\alpha\beta} N_\beta \eta_{\alpha\mu} T_{(2)}^{\mu\nu} N_\nu,$$

або підставляючи (6.2)

$$(\varepsilon_1^2 - p_1^2) V_{(1)}^2 - (\varepsilon_2^2 - p_2^2) V_{(2)}^2 = p_1^2 - p_2^2. \quad (6.15)$$

Аналогічно до (6.12), запишемо умову збереження кількості баріонів на розриві

¹ Тобто 4-вектор нормалі до поверхні є просторовоподібним.

² Це припущення вимагає, щоб на фронті ударної хвилі були відсутні випромінювання або реакцій, які змінюють структуру рідини та впливають на баланс енергії-імпульсу.

$$(n * U^\beta) \Big|_{(1)} N_\beta = (n * U^\beta) \Big|_{(2)} N_\beta.$$

Це означає, що проекції густини потоку кількості баріонів на напрямки нормалі однакові з обох боків поверхні розриву:

$$J \stackrel{def}{=} n_1^* V_{(1)} = n_2^* V_{(2)}. \quad (6.16)$$

Якщо $V_{(1)} = V_{(2)} = 0$ і відповідно $J = 0$, маємо так званий *контактний розрив*. У цьому випадку (6.14) дає умову

$$p_1 = p_2; \quad (6.17)$$

речовина не перетинає розрив і може рухатися лише паралельно до його поверхні.

Нехай тепер $V_{(1)}, V_{(2)}$ відмінні від нуля і $J \neq 0$. Тоді в нетривіальному випадку $p_1 \neq p_2$ маємо *ударну хвилю*, або *ударний перехід*. Нехай для визначеності $J > 0$, індекс (1) відповідає речовині перед розривом, (2) – після нього. Тоді маємо ударний перехід $(\varepsilon_1, p_1) \rightarrow (\varepsilon_2, p_2)$ (або просто "1" → "2") у напрямку, що визначений просторовоподібним вектором N^α .

Поділивши (6.15) на (6.14) враховуючи $n_i^* = J/V_{(i)}$, $i = 1, 2$, після елементарних перетворень дістанемо

$$\frac{(\varepsilon_1 + p_1)(\varepsilon_1 + p_2)}{(n_1^*)^2} = \frac{(\varepsilon_2 + p_2)(\varepsilon_2 + p_1)}{(n_2^*)^2}. \quad (6.18)$$

Це співвідношення можна переписати ще таким чином:

$$\frac{w_1^2}{(n_1^*)^2} - \frac{w_2^2}{(n_2^*)^2} + (p_2 - p_1) \left(\frac{w_1}{(n_1^*)^2} + \frac{w_2}{(n_2^*)^2} \right) = 0, \quad (6.18, a)$$

де $w = \varepsilon + p$. Нехай відомо стан (ε_1, p_1) перед фронтом ударної хвилі; тоді, якщо задати одну з термодинамічних змінних за фронтом, наприклад, n_2^* , то рівняння (6.18) разом з рівнянням стану $p = p(\varepsilon, n^*)$ неявно визначає $\varepsilon = \varepsilon_2$, а з ним і всі інші термодинамічні параметри. Таким чином, для фіксованого стану перед ударною хвилею (ε_1, p_1) рівняння (6.18) разом з рівнянням стану задають множину всіх допустимих станів після ударного переходу $(\varepsilon_1, p_1) \rightarrow (\varepsilon_2, p_2)$. Відповідну криву $p = p_T(\varepsilon)$ на площині термодинамічних змінних ε, p (або в будь-

яких інших змінних, що визначають стан речовини) називають *ударною адіабатою* (адіабатою Тауба¹) із центром у точці (ε_1, p_1) .

Із рівнянь (6.14) і (6.15) отримуємо:

$$V_{(1)}^2 = \left(U_{(1)}^\alpha N_\alpha \right)^2 = \frac{p_1 + \varepsilon_2}{p_1 + \varepsilon_1} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - p_1 + p_2}, \quad (6.19, \text{ а})$$

$$V_{(2)}^2 = \left(U_{(2)}^\alpha N_\alpha \right)^2 = \frac{p_2 + \varepsilon_1}{p_2 + \varepsilon_2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - p_1 + p_2}. \quad (6.19, \text{ б})$$

Отримаємо звідси співвідношення для абсолютних величин звичайних швидкостей рідини $v_{(i)}, i = 1, 2$, з обох боків розриву. Згорнемо (6.12) з вектором t_α , ортогональним до N^α . Ураховуючи явний вигляд $T^{\alpha\beta}$ (6.2), маємо

$$(\varepsilon_1 + p_1)(U_{(1)}^\alpha t_\alpha V_{(1)}) = (\varepsilon_2 + p_2)(U_{(2)}^\alpha t_\alpha V_{(2)}).$$

Звідси видно, що в ударній хвилі тангенціальні до гіперповерхні розриву компоненти 4-швидкості $(U_\alpha t^\alpha)|_{(1)}, (U_\alpha t^\alpha)|_{(2)}$ можуть обертатися на нуль лише одночасно. Розглянемо малу ділянку гіперповерхні розриву, де її можна вважати плоскою, тоді можна вибрати систему відліку (СВ), де розрив є нерухомим і рідина перетинає його ортогонально. Дійсно, серед сукупності СВ, де розрив є нерухомим, залишається можливість рухів СВ паралельно його поверхні і можна додатково накласти умову, щоб тангенціальна до поверхні складова 4-швидкості рідини з боку "1" зникала. Як зазначено вище, при цьому зникатиме тангенціальна складова і з боку "2". У цій СВ $(U_\alpha \tau^\alpha)|_{(1)} = (U_\alpha \tau^\alpha)|_{(2)} = 0$, а вектори звичайних швидкостей рідини ортогональні до (тривимірної) нерухомої поверхні розриву. Легко бачити, що в цій СВ абсолютні величини $v_{(i)}, i = 1, 2$, цих швидкостей пов'язані з $V_{(i)}$:

$$V_{(i)}^2 = \frac{(v_{(i)}/c)^2}{1 - v_{(i)}^2/c^2}.$$

Підставляючи це в (6.19) і розв'язуючи відносно $v_{(i)}$, дістанемо

¹ Уживаними є також терміни "адіабата Гюгоніо – Тауба" або "Ренкіна – Гюгоніо – Тауба".

$$\frac{v_{(1)}^2}{c^2} = \frac{p_2 - p_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \cdot \frac{p_1 + \varepsilon_2}{p_2 + \varepsilon_1}, \quad \frac{v_{(2)}^2}{c^2} = \frac{p_2 - p_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \cdot \frac{p_2 + \varepsilon_1}{p_1 + \varepsilon_2}. \quad (6.20)$$

Рівняння (6.18), (6.19) гарантують збереження енергії-імпульсу та кількості баріонів на розривах, що моделюють ударні хвилі. Однак цих рівнянь ще недостатньо для повного опису розривів. Можна навести приклади неоднозначних розв'язків задачі Коші для рівнянь гідродинаміки, коли початкові дані містять розриви й при цьому виконані всі рівняння (6.4), (6.11) в області неперервної течії та рівняння збереження на розривах¹. Тому для коректного опису розривних гідродинамічних течій необхідні певні додаткові умови. Для цього застосовують умову зростання ентропії у фізичних процесах. При переході $(\varepsilon_1, p_1) \rightarrow (\varepsilon_2, p_2)$ питома ентропія (на один баріон) $S = S(\varepsilon, p)$ також стрибком змінюється $S_1 = S(\varepsilon_1, p_1) \rightarrow S_2 = S(\varepsilon_2, p_2)$.

Необхідною умовою фізично прийняттого ударного переходу зі стану "1" у стан "2" є

$$S_2 > S_1. \quad (6.21)$$

У релятивістській області ентропійний критерій є достатнім для коректного розгляду розривних течій за умови опуклості рівняння стану

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial p^2} \right)_S > 0, \quad (6.22)$$

де $X = \frac{\varepsilon + p}{(n^*)^2}$ – узагальнений питомий об'єм². При (6.22), ентропійний

критерій (6.21) дозволяє, для низки широковживаних рівнянь стану, відкинути нефізичні розв'язки рівнянь гідродинаміки, що виникають за наявності розривів³. Нерівність (6.22) виконується у випадку типових середовищ, але вона не є наслідком якихось загальних термодинамічних міркувань. Зокрема, ця умова може порушуватися в околі фазових переходів, і тоді необхідно проводити додатковий розгляд умов існування ударних хвиль і переглянути властивість (а), про яку йдеться нижче.

¹ Ця ситуація досить типова для квазілінійних рівнянь у частинних похідних.

² У релятивістській гідродинаміці ця величина відіграє роль звичайного питомого об'єму.

³ Прикладом такого нефізичного розв'язку є ударний перехід розрідження, у якому ентропія спадає.

Наведемо низку найбільш важливих наслідків ентропійного критерію, що мають місце для типових¹ рівнянь стану за умови (6.22) (доведення див. дод. 2); вони цілком аналогічні класичній гідродинаміці:

а) допустимі ударні хвилі завжди є хвилями стиснення, тобто в допустимому ударному переході $(\varepsilon_1, p_1) \rightarrow (\varepsilon_2, p_2)$ мають місце нерівності

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_1, p_2 > p_1;$$

б) в ударному переході $(\varepsilon_1, p_1) \rightarrow (\varepsilon_2, p_2)$ швидкість фронту відносно речовини перед фронтом більша за швидкість звуку в цій речовині, а швидкість фронту відносно речовини за фронтом менша від швидкості звуку в цій речовині². У системі спокою фронту це означає

$$c^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right)_{S|_{(1)}} < v_{(1)}^2, \quad c^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \right)_{S|_{(2)}} > v_{(2)}^2.$$

Відзначимо, що введення в'язкості в рівняння гідродинаміки дозволяє уникнути розривів. За наявності в'язкості ударна хвиля має скінченну товщину. Однак, як відомо ще з класичної гідродинаміки, для більшості реальних газів товщина ударної хвилі має порядок довжини пробігу молекул, тобто втрачає зміст гідродинамічне наближення. Таким чином, або доводиться обмежитися моделюванням ударної хвилі у вигляді рухомого розриву – причому такий підхід виявляється ефективним у досить широкому колі задач, або у вузькій зоні ударного переходу треба проводити більш складний розгляд з урахуванням нерівноважних мікроскопічних процесів.

7. СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ: ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Спеціальна теорія відносності (СТВ) була створена завдяки працям Альберта Ейнштейна, Анрі Пуанкаре та Генріка Антона Лоренца. Слід також відзначити внесок Германа Мінковського, який створив загальноприйняте уявлення про чотиривимірний простір-час.

¹ Йдеться про низку умов математичного характеру, що, як правило, виконуються у випадку реальних рівнянь стану і разом з умовою опуклості визначають так звану нормальну речовину.

² У нерелятивістській гідродинаміці це твердження відоме як *теорема Цемплена*.

Г. Лоренц [9, С. 67–87], не відкидаючи гіпотези про існування нерухомого ефіру, розробив теорію, з якої випливало, що визначити абсолютну швидкість тіл (відносно ефіру) неможливо. Він знайшов перетворення, вони названі його ім'ям (їх пізніше уточнив А. Пуанкаре [10, С. 90–93]), за якими можна визначити спостережувані довжини та інтервали часу в рухомій системі відліку. Проте вирішальну роль у становленні СТВ відіграла робота Ейнштейна "До електродинаміки рухомого тіла" [11], де він дав простий і наочний аналіз понять простору й часу, у яких немає місця "світлоносному ефіру", і дав виведення перетворень Лоренца виходячи з мінімуму загальних постулатів. Як пише відомий популяризатор теорії відносності Д. Бом [18], лише на фоні труднощів, до яких призводили старі уявлення, можна зрозуміти, що "головна заслуга Ейнштейна була не стільки у відкритті нових формул, скільки в радикальній зміні наших основних уявлень про простір, час, матерію і рух". Незалежно і практично одночасно, Пуанкаре у двох роботах "Про динаміку електрона" [10; 12, С. 118–161] сформулював принцип відносності й подав свої результати щодо властивостей групи Лоренца, як групи інваріантності рівнянь електродинаміки, що описує обертання в просторі чотирьох вимірів, а також окреслив важливі положення щодо побудови рівнянь релятивістської механіки¹.

Видатний внесок Лоренца, Пуанкаре та Ейнштейна у створення СТВ беззаперечний. Інколи виникають дискусії (див., напр., [8]), хто з них має пріоритет у побудові СТВ. Однак, як не існує абсолютної системи координат, так немає й абсолютних критеріїв "вирішального внеску" чи "першості" в науковому пошуку, який завдячує тривалим зусиллям багатьох вчених. Оскільки ми не ставимо за мету історичні дослідження, обмежимося тим, що наведемо висловлювання авторитетних вчених.

"Г.А. Лоренц знайшов теорему відносності та створив постулат відносності, як гіпотезу, що електрони й матерія внаслідок руху зазнають скорочення за певними законами. Досі найбільш чітко А. Ейнштейн [11] висловив думку про те, що цей постулат не є штучною гіпотезою, а радше за все зовсім новим розумінням часу, що виникає з явищ" (Г. Мінковський, [13, С. 187–189]).

¹ У роботі [10] записано скореговане перетворення Лоренца (вихідна робота Лоренца містила помилку) і стисло анонсовано основні положення роботи [12]. У [12] також зроблена оригінальна спроба, хоча й невдала, побудувати релятивістські рівняння гравітаційної взаємодії тіл.

"... спеціальна теорія відносності була відкриттям у кінцевому рахунку не однієї людини. Робота Ейнштейна була тим останнім і вирішальним елементом у фундаменті, закладеним Лоренцем, Пуанкаре та іншими, на якому могла триматися будова, споруджена потім Мінковським" (М. Борн, [14, С. 232–239]).

"Основоположником теорії відносності є Альберт Ейнштейн (1879–1955). Попередниками Ейнштейна слід вважати Пуанкаре і Лоренца" (В.А. Фок, [15]).

"Ці твердження (*принципи СТВ – авт.*), зрозуміло, впливають із формул Лоренца та Пуанкаре. Оригінальність теорії Ейнштейна полягає в показі того, як вони пов'язані з більш глибоким аналізом понять про простір й час і приводять до загальної правильності формул Лоренца, що виявляються пов'язаними не з уявними явищами, а з основними властивостями простору-часу" ((М.-А. Тонелла, [16]).

"Вперше перетворення такого роду отримав Лоренц, тому їх звичайно називають лоренцовськими правилами перетворень або перетвореннями Лоренца, але вся їх важливість була оцінена лише Ейнштейном..." (Р. Толмен, [17]).

"Сама по собі постановка питання про те, кого слід "вважати творцем теорії", беззмістовна, оскільки наука створюється трудом багатьох людей. Добре відомо, що в роботах Лоренца, Лармора, Пуанкаре та інших містилося багато ідей та результатів, що лягли в основу теорії відносності. Назви завжди містять дещо умовне, але, коли йдеться про теорію відносності Ейнштейна, фізики віддають належне значенню зробленого їм кроку – саме він зрозумів, що принцип відносності пов'язаний з відносністю часу та довжини. Це було переломним моментом тривалого розвитку теорії та експерименту та тим "теоретико-пізнавальним подвигом Ейнштейна, що ставить його ім'я нарівно з ім'ям Коперника", про що писав Герман Вейль..." (І.Ю. Кобзарев, 1974 [18]).

Література

1. Ландау А.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1967.
2. Сугаков В.Й. Электродинамика. – К.: Вища шк., 1974.
3. Федорченко А.М. Теоретична фізика. – Т.1. – К.: Вища шк., 1992.
4. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. – М., Наука, 1973.
5. Меллер К. Теория относительности. – М.: Атомиздат, 1975.

6. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. – М.: Физматгиз. – 1958.
7. Федоров Ф.И. Группа Лоренца. – М.: Наука, 1979.
8. Принцип относительности : Сб. работ по специальной теории относительности. – М.: Атомиздат, 1973.
9. Лоренц Г.А. Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света : там же. – С. 67–87.
10. Пуанкаре А. О динамике электрона : там же. – С. 90–93.
11. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел // Труды : В 4 т. – М.: Наука, 1967. – Т. 1.
12. Пуанкаре А. О динамике электрона : там же. – С. 118–161.
13. Минковский Г. Теория Лоренца; теорема, постулат, принцип относительности : там же. – С. 187–189.
14. Борн М. Физика и относительность : там же. – С. 232–239.
15. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: ГИТТЛ, 1955.
16. Тонелла М.-А. Основы электромагнетизма и теории относительности. – М.: ИЛ, 1962.
17. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. – М.: 1974.
18. Кобзарев И.Ю. Доклад А. Пуанкаре и теоретическая физика // УФН. – 1974.– Т. 113. – Вып. 4.
19. Бом Д. Специальная теория относительности. – М.: Мир, 1967.

Збірники задач

20. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – М.: Наука, 1970.
21. Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. – М.: Мир, 1979.
22. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. – К.: Высшая шк., 1984.

2

частина

ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ

Усе наше знання часу й простору відносне.

Дж. Максвелл

Загальна теорія відносності (ЗТВ) – релятивістська теорія тяжіння, простору та часу – є узагальненням спеціальної теорії відносності з урахуванням властивостей гравітаційної взаємодії й може бути застосована для опису сильних гравітаційних полів. У перших двох розділах цієї частини подано короткий огляд експериментальних основ релятивістської гравітації та її застосувань. За традицією викладенню ЗТВ передують розділи, присвячені математичному апарату релятивістської теорії тяжіння (розд. 2–7). При розгляді тензорного аналізу та ріманової геометрії ми намагалися не втратити зв'язок із фізичною основою, яка досить жорстко обмежує засоби математичної фізики для опису явищ у викривленому просторі-часі. Зокрема, коваріантна похідна в розд. 5 визначена за допомогою переходу в локально-геодезичну систему координат; це цілком відповідає принципу локальної лоренцевості (розд. 8), який деталізує ейнштейнівський принцип еквівалентності. Принцип локальної лоренцевості постає одним з основних при введенні рівнянь фізичних полів (окрім гравітаційного) у викривленому просторі-часі (розд. 8, 9). У розд. 10 введено рівняння гравітаційного поля Ейн-

штейна як наслідок варіаційного принципу. Розглянуто умови, які фіксують вигляд цих рівнянь з точністю до двох констант – гравітаційної та космологічної, які в кінцевому рахунку визначаються експериментом. Наступні розділи містять застосування цих рівнянь до задач релятивістської астрофізики та космології.

1. НЕВІДВОРОТНІСТЬ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ТЕОРІЇ ТЯЖІННЯ

Існують незаперечні спостережні факти та теоретичні міркування, які свідчать про потребу докорінного перегляду уявлень СТВ за наявності гравітаційного поля. Припущення про однорідний простір-час, що базуються на можливості синхронізувати годинники нерухомих спостерігачів, які здавалися цілком очевидними в класичній теорії та ще зберігалися у СТВ, виявляються хибними за наявності гравітації. Далі стисло розглянуто найбільш важливі експериментальні дані, які використовують для обґрунтування й тестування ЗТВ.

1.1. Принцип еквівалентності та нульові експерименти

Безрозмірною величиною, що визначає потребу в релятивістських узагальненнях теорії тяжіння (ТТ), є параметр $\mu = \Delta U / c^2$, де ΔU – характерна різниця ньютонівського гравітаційного потенціалу у фізичній системі, що розглядається; c – швидкість світла. Наприклад, якщо $\mu \sim 1$, тобто коли гравітаційне поле спроможне розігнати тіло до швидкості, порівняної із c , ньютонівська теорія незастосовна. У Сонячній системі $\mu \ll 1$, але сучасні вимірювання впевнено реєструють релятивістські ефекти під час руху планет і поширенні електромагнітного випромінювання.

Основи ЗТВ розроблялися А. Ейнштейном приблизно від 1907 до 1916 р., переважну роль при цьому відігравали теоретичні міркування. Протягом десятиліть ЗТВ цікавила лише обмежене коло теоретиків, а точність спостереження гравітаційно-релятивістських ефектів була невисокою.

Зростання зацікавленості ЗТВ, у ретельнішому визначенні її експериментального та теоретичного підґрунтя, припадає на 1960–1970-ті рр. Цьому сприяли відкриття квазарів, пульсарів, рентгенівських джерел, реліктового випромінювання, а наприкінці 70-х рр. цей список доповнили перші гравітаційні лінзи. Для розуміння будови та еволюції цих об'єктів необхідна ЗТВ, тому для астрофізиків необхідна цілковита впевненість щодо цієї теорії. Ця зацікавленість була обумовлена також і технологічними можливостями: для зазначеного періоду характерне істотне підвищення точності вимірювання часу та положення об'єктів завдяки використанню квантових годинників і стандартів частоти, радіолокаційних і лазерних методів вимірювання астрономічних відстаней, розробці техніки радіоінтерферометрії з наддовгими базами.

Велику увагу було приділено іншим ТТ, що конкурують із ЗТВ (їх іноді називають альтернативними). Хоча саме ЗТВ займає положення лідера серед усіх ТТ, розробка конкуруючих ТТ також доцільна, хоча б для того, щоб ЗТВ було із чим зіставляти при експериментальних перевірках. Справа ще й у тому, що таких перевірок існує небагато, і вони проводяться лише у слабких гравітаційних полях. Експериментальне підґрунтя ЗТВ не є таким всеохоплюючим, як наприклад, у класичній електродинаміці. Це робить доцільним загальний аналіз будови релятивістської ТТ, який об'єднує в єдину систему всі прямі та непрямі перевірки й дозволяє зіставляти різні ТТ з єдиної точки зору. Принципи життєздатності ТТ включають повноту та самоузгодженість теорії, відповідність ньютонівській теорії тяжіння у випадку нерелятивістських швидкостей і слабких полів тяжіння, і спеціальній теорії відносності (СТВ), коли гравітацією можна знехтувати. Навіть ці, дуже загальні, вимоги відбракували деякі недосконалі теорії.

Перелік вимог до ТТ продовжують постулати про локальну еквівалентність гравітації та інерції. Принцип еквівалентності (ПЕ) проводить паралель між фізичними процесами в полі тяжіння та в неінерційних системах відліку за відсутності гравітації. Він має кілька формулювань різної сили. За "слабким" ПЕ *траєкторія незарядженого пробного тіла в гравітаційному полі залежить лише від його початкових положення та швидкості, але не залежить від його маси, внутрішньої будови та складу*. Тут пробне тіло – це таке, власною енергією якого можна знехтувати, причому його розміри значно менші від масштабів неоднорідностей зовнішнього поля.

Ще з експериментів Галілея було відомо, що прискорення тіл у гравітаційному полі є однаковим для точкових тіл різної маси. Цю цікаву обставину враховано в теорії тяжіння Ньютона, де гравітаційна сила, що діє на тіло, пропорційна його інертній масі. Інертна маса – це ко-

ефіцієнт при прискоренні в другому законі Ньютона у випадку нерелятивістських швидкостей, вона характеризує реакцію тіла на різні зовнішні сили й є мірою власної енергії тіла. Згідно з ПЕ можна сказати, що *інертна маса пропорційна гравітаційній масі*, яка фігурує у виразі для гравітаційної сили й відіграє роль гравітаційного заряду, аналогічно електричному заряду в електромагнітній взаємодії. Отже, після слушного вибору одиниць, інертну та гравітаційну маси можна ототожнити. Звідси випливає тотожність руху тіл з різними масами в однорідному гравітаційному полі з рівняннями в прискореній системі відліку за відсутності гравітації. Саме завдяки цьому, яблуко в кабіні космічного корабля, що вільно рухається в полі тяжіння, є невагомим незалежно від того, як далеко він перебуває від джерел гравітації. Навпаки, коли кабіна прискорює свій рух під впливом негравітаційних сил, тіла в ній отримують вагу, як за наявності поля тяжіння. Слабкий ПЕ знаходить підтвердження в дуже точних дослідах типу Етвеша з крутильними вагами¹.

Спираючись на аналіз механічних рухів, Ейнштейн надав ПЕ більш фундаментального змісту, узагальнивши його для всіх негравітаційних процесів. За сучасним формулюванням "ейнштейнівського" ПЕ *результат будь-якого негравітаційного експерименту в локальній лабораторії, що вільно рухається в полі тяжіння, не залежить ані від часу, ані від місця проведення експерименту*.

Зауважимо, що поняття локальності необхідно деталізувати; це було зроблено в розд. 8. Інколи твердження "ейнштейнівський" ПЕ доповнюють принципом універсальності гравітаційного червоного² зміщення частоти монохроматичного випромінювання завдяки різниці гравітаційного потенціалу на шляху від передавача до приймача випромінювання. За принципом універсальності ці ефекти не повинні залежати від часу та засобу вимірювання, що й підтверджується експериментами. Обидва принципи узгоджуються з дослідом у межах сучасної точності й виконуються в так званих метричних ТТ, у яких вводиться метрика³ ріманового простору-часу. Правила обчислення спостережуваних величин і рівняння еволюції негравітаційних полів у всіх метричних теоріях збігаються з відповідними рівняннями ЗТВ, а відрізняються ці теорії лише рівняннями, що визначають метрику.

¹ Сучасна відносна похибка експерименту оцінюється величиною, меншою від 10^{-12} .

² Зрозуміло, зміщення насправді може бути і фіолетовим, залежно від знака різниці потенціалів у точках прийому та випромінювання.

³ Тобто метричний тензор.

Інколи подають інше формулювання "ейнштейнівського" ПЕ: у локальній лабораторії, що вільно рухається в полі тяжіння, діють закони спеціальної теорії відносності. Це формулювання дещо менш загальне, ніж попереднє, але воно є достатньо широким і буде використано для викладення основ ЗТВ.

Перевірки ПЕ дають приклад так званих нульових експериментів, коли на користь ЗТВ свідчить саме відсутність деякого ефекту. Ще одним таким прикладом є перевірка так званого *сильного* ПЕ. Якщо *слабкий* і *ейнштейнівський* ПЕ обмежуються лише тими явищами в локальній лабораторії, для яких гравітаційна енергія не відіграє ніякої ролі, то більш жорстким є формулювання *сильного* ПЕ, який поширює вимоги попередніх принципів також на гравітаційні експерименти, тобто досліди з тілами із суттєвим гравітаційним дефектом маси, помітним у випадку планет. Цей принцип виконується в ЗТВ, але йому задовольняють не всі метричні ТТ. У випадку невиконання *сильного* ПЕ, Земля й Місяць мали б дещо різні прискорення під впливом сили тяжіння Сонця. Це викликало б певні аномальні коливання відстані Земля – Місяць (так званий ефект Нордтведта), але лазерні вимірювання цієї відстані показують відсутність такого ефекту.

Інші нульові експерименти пов'язані з перевірками незмінності з часом гравітаційної константи та відсутності ефектів привілейованої системи відліку (зокрема, "системи спокою Всесвіту", пов'язаної з реліктовим випромінюванням). Ці перевірки базуються на астрометричних і геофізичних спостереженнях; вони також не показують жодних відхилень від ЗТВ.

1.2. Перевірки загальної теорії відносності у слабких полях

Розглянемо доступні спостереженням "ненульові" ефекти релятивістської гравітації. Метричні теорії передбачають зміщення частоти випромінювання, що вимірює спостерігач у гравітаційному полі, порівняно з власною частотою джерела сигналів. Цей ефект гравітаційного зміщення частоти тотожний відносному уповільненню (прискоренню) часу: спостерігач інтерпретуватиме зміну частот як відповідну

зміну ходу часу. Величина гравітаційного зміщення в першому наближенні за параметром μ є однаковою для всіх метричних ТТ¹.

Дійсно, формулу ефекту можна отримати із загальних міркувань. Розглянемо фотон, що випромінюється в точці з гравітаційним потенціалом U_0 із частотою ω_0 і реєструється в точці з потенціалом U_1 із частотою ω_1 , яка дещо відрізняється від ω_0 . Маса фотона (інертна²):

$$m_f = \hbar\omega_0 / c^2 \approx \hbar\omega_1 / c^2.$$

За принципом еквівалентності гравітаційне поле діє однаково на всі тіла, а гравітаційна маса фотона дорівнює його інертній масі, тому зміна потенціальної енергії фотона при переносі в іншу точку обчислюється аналогічно зміні класичної потенціальної енергії звичайного тіла: $\Delta W = m_f(U_1 - U_0) \approx \hbar\omega_0(U_1 - U_0)/c^2$. Якщо б це було не так, можна було б побудувати вічний двигун першого роду.

За законом збереження енергії $\hbar\omega_1 - \hbar\omega_0 + \Delta W = 0$ і з (1.1) легко отримати

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{U_1 - U_0}{c^2}. \quad (1.2)$$

Формула (1.2) є наближеною, оскільки її виведення використовувало напівкласичні міркування (ньютонівський потенціал тощо).

Експериментальні перевірки формули (1.2) проводилися як шляхом вимірювання зміщення частоти при передачі сигналів, так і за допомогою зіставлення показань годинників на різних висотах над рівнем Землі. Ця формула чудово узгоджується з експериментом³.

У постньютонівському наближенні всіх метричних теорій гравітаційні ефекти можна описати в загальному вигляді за допомогою скінченого набору сталих коефіцієнтів. Це робиться за допомогою розкладу метричного тензора за величинами, аналогічними параметру μ . Виявляється, що за відсутності ефектів привілейованого положення або привілейованої системи відліку та при виконанні закону збереження енергії-імпульсу загальний аналіз залишає лише два парамет-

¹ Тут йдеться лише про *перше* наближення, лінійне за гравітаційною константою, яке на сьогодні доступне експериментальній перевірці.

² Інертна маса фотона є мірою його власної енергії. Гравітаційна маса – це гравітаційний заряд, що фігурує у виразі для потенціальної енергії (аналогічно електричному заряду в електростатиці).

³ Сучасна точність вимірювання ефекту становить соті частки відсотка.

ри: параметр γ , що описує складові метричного тензора, лінійні за масою тіл, що створюють гравітаційне поле, і параметр β , що відповідає за нелінійні внески. Вибір параметрів можна зробити так, щоб значення $\alpha = 1, \beta = 1$ відповідали ЗТВ, а відхилення цих параметрів від одиничних значень (якщо вони б існували) характеризували б міру відхилення від ЗТВ.

Розглянемо ефекти, що виникають у постньютонівському наближенні:

а) під дією гравітації напрямок руху променів світла змінюється, що призводить до зміщення зображення джерела світла. Ефект спостерігають при дослідженні позагалактичних джерел випромінювання, він є найбільшим, коли Сонце перебуває недалеко від променя зору на таке джерело;

б) при реєстрації відлуння радіолокаційних сигналів від планет і космічних апаратів має місце гравітаційна затримка – додатковий внесок у час проходження сигналів у полі тяжіння Сонця.

З обома ефектами пов'язують один і той самий постньютонівський параметр γ . Ефекти мають спільну природу, проте другий з них є більш зручним для визначення параметра γ з радіолокаційних спостережень планет і космічних апаратів;

в) релятивістська прецесія перицентра дає змогу визначити інший постньютонівський параметр – β . Перицентр – це точка орбіти, відстань від якої до центра є найменшою. Якщо йдеться про орбіту навколо Сонця, відповідну точку називають *перигелієм*. У ньютонівській теорії тяжіння пробне тіло рухається у сферично-симетричному полі важкого тіла за замкненою орбітою (по еліпсу), перицентр якої є незмінним. Вплив постньютонівської поправки, пропорційної параметру β , робить орбіту незамкненою: ньютонівський еліпс "прецесує", тобто повільно обертається в напрямку руху. Серед планет Сонячної системи найбільше значення прецесії перигелію має Меркурій. Окрім релятивістського ефекту суттєві внески в прецесію перигелію Меркурія дають збурення завдяки полям інших планет, але їх можна врахувати на ньютонівському рівні. При вимірюванні з точністю до $\sim 1\%$ треба також враховувати квадрупольні поправки до поля Сонця.

Зазначені три ефекти разом з перевіркою гравітаційного червоного зміщення є класичними для релятивістської теорії гравітації. Вони вимірюються сучасними приладами з похибкою, меншою від 1% і в межах цієї точності узгоджуються з передбаченнями ЗТВ;

г) ще одну можливість перевірки гравітаційної теорії дають пульсари в подвійних зоряних системах. Пульсар – це нейтронна зірка, що швидко обертається навколо своєї осі та випромінює електромагнітні хвилі у вузький тілесний кут. Цей об'єкт можна порівняти з маяком, прожектор якого обертається, завдяки чому спостерігач бачить періодичні спалахи випромінювання. Частота повторення імпульсів-спалахів пульсара, яка відповідає періоду власного обертання, дуже стабільна. Періодичні ж зміни у частоті імпульсів деяких пульсарів свідчать про їх рух у подвійних системах. Вимірювання таких змін дозволяє визначити орбітальний період та інші параметри подвійної зірки.

У пульсара PSR 1913+16, який відкрили Р. Халс і Дж. Тейлор у 1974 р., середня швидкість ~ 300 км/с досить значна, щоб була відчутною зворотна реакція гравітаційного випромінювання подвійної системи на її рух. Цей тонкий вплив спричинює спостережні зміни орбітального періоду, з якими узгоджуються розрахунки ЗТВ у межах експериментальної похибки. За відкриття та дослідження першого подвійного радіопульсара PSR 1913+16 Р. Халсу та Дж. Тейлору присуджено Нобелівську премію із фізики (1993);

д) в останні роки виникла принципово нова можливість тестування ЗТВ: вимірювання прецесії Лензе – Тіррінга під час руху супутника навколо Землі. Ефект Лензе – Тіррінга в русі пробного тіла навколо маси, що обертається, обумовлений так званими гравімагнітними доданками в метриці простору-часу, і проявляється в обертанні площини орбіти навколо центрального тіла.

Досі ЗТВ з успіхом витримувала всі експериментальні перевірки, які допомогли відсіяти велику кількість конкуруючих ТТ. Виявляється, що одразу узгодити базові принципи та експериментальні дані не просто, і коло життєздатних ТТ є досить обмеженим. Завбачення ЗТВ підтверджуються на сьогодні з великою точністю. Однак існують деякі життєздатні ТТ, які неперервно переходять у ЗТВ за певних значень вільних параметрів. Формально такі теорії ніколи не можуть бути відокремлені від ЗТВ: їх завжди можна підігнати до експерименту, доки останній узгоджуються із ЗТВ. Однак порівняно із ЗТВ, яка є найбільш красивою та економною, такі теорії саме й програють наявністю цих додаткових параметрів і теоретичних конструкцій, необхідність яких фізично не обґрунтована.

2. РОЛЬ ГРАВІТАЦІЙНО-РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ ЕФЕКТІВ В АСТРОНОМІЇ

У попередньому розділі йшлося про різноманітні перевірки, що підтверджують ЗТВ, проте існує багато проблем, де ЗТВ виступає не стільки як об'єкт дослідження, скільки як необхідний елемент, який треба враховувати при вивченні астрономічних явищ. У даному розділі дано короткий перелік таких застосувань ЗТВ.

2.1. Астрометричні системи відліку

Фундаментальна система відліку, яка є основою для побудови систем відліку в астрометрії, геодинаміці, навігації та геодезії, оснований на визначенні положень позагалактичних джерел на небі. Найбільш точні вимірювання положень астрономічних об'єктів здійснюються за допомогою радіоінтерферометрів з наддовгою базою (РНДБ). Основною спостережуваною величиною в РНДБ є відносна затримка сигналів від радіоджерела, які приймають дві чи більше антен, розділених певною відстанню (базою). Чим більша база, тим більшою є точність інтерферометра, тому в існуючих схемах РНДБ антени розносять на глобальні відстані; зараз розробляють також проекти космічного радіоінтерферометра. Зі збільшенням бази збільшується і внесок гравітаційних ефектів, про які йшлося в підрозд. 1.2, у затримку сигналів. Залежно від конфігурації антен диференціальні гравітаційні внески за рахунок поля Сонця в час відносної затримки можуть на два-три порядки перебільшувати точність вимірювання; суттєвими є й внески поля Землі.

2.2. Гравітаційні лінзи

У позагалактичних гравітаційно-лінзових системах викривлення траєкторії світла приводить до появи кількох зображень одного й того самого квазара. Випромінювання від джерела в цих системах поширюється до нас різними шляхами, що відповідають різним зображенням. Тут спрацьовують обидва гравітаційно-релятивістські ефекти, відзначені в підрозд. 1.2; вони виступають як перевірений допоміжний засіб для розв'язання проблем астрофізики. Гравіта-

ційне поле астрономічних об'єктів може діяти як гігантський природний телескоп, що дає можливість отримувати унікальну астрофізичну інформацію, зокрема про будову позагалактичних джерел випромінювання. Завдяки змінним полям рухомих зірок у нашій та інших галактиках важливу роль відіграють ефекти гравітаційного мікролінзування. Унаслідок мікролінзування відносний блиск окремих зображень квазара в позагалактичних гравітаційно-лінзових системах може збільшуватися на десятки й сотні відсотків. Гравітаційне лінзування дає шанс вивчати розподіл темної матерії у Всесвіті, знаходити планети в інших зоряних системах, оцінювати маси галактик, зір нашої Галактики, зоряних скупчень тощо.

2.3. Релятивістські зорі

Урахування ЗТВ є суттєвим при вивченні холодних зір, що використали своє ядерне паливо. Представниками об'єктів, де ефекти ЗТВ досить суттєві, є нейтронні зірки та чорні діри зоряної маси. Для пульсарів (нейтронних зірок, що швидко обертаються) з масою в $(2 \div 3) M_{\odot}$ і радіусом у десятки кілометрів параметр μ може бути порівняним з одиницею. Коли ж маса холодної зірки перебільшує кілька сонячних мас, виникає принципово новий об'єкт – чорна діра, для опису якої застосування ньютонівської теорії неможливе навіть на якісному рівні. Існування чорних дір і пульсарів, як завершальних стадій зоряної еволюції, було теоретично передбачено досить давно. У спостережному плані серед кандидатів у чорні діри зоряної маси найбільш дослідженим є рентгенівське джерело Cyg X-1, що є членом подвійної системи. Рентгенівське випромінювання виникає внаслідок акреції речовини із зорі-компаньона, що перетікає на чорну діру. Супутником чорної діри в Cyg X-1 є видима зоря дев'ятої величини. Вимірювання періодичних змін при зміщенні її спектральних ліній і поляриметричні вимірювання дають змогу оцінити параметри системи, у тому числі, масу невидимого компаньона, що виявляється більшою за $5M_{\odot}$. Це дозволяє вважати невидимий об'єкт чорною дірою. На відміну від кандидатів у чорні діри, кількість яких відносно невелика, нейтронних зір – пульсарів – відкрито досить багато. Вони, як правило, проявляють себе характерною періодичністю випромінювання в рентгенівському чи в радіодіапазоні.

2.4. Чорні діри в ядрах галактик і квазарів

Важливий клас об'єктів, де релятивістська гравітація виступає в повному обсязі – це надмасивні чорні діри (НМЧД) з масою $\sim 10^6 \div 10^9 M_{\odot}$, що існують в ядрах галактик і квазарів. Як свідчать спостережні та теоретичні дослідження, НМЧД – це поширене явище, яке можна виявити за рухом навколишніх зірок. За наявності достатньої густини газу, що падає на чорну діру, маємо потужне джерело випромінювання – квазар або активне галактичне ядро. За сучасними уявленнями, квазари та активні галактичні ядра – це різні прояви одного й того самого явища, пов'язаного з НМЧД. Зазначимо, що вивчення багатьох характеристик квазарів, обумовлених наявністю потужної компактної маси в центрі, можна було б проводити, спираючись на ньютонівську теорію тяжіння. Проте для вивчення центральної області, де характерні швидкості руху акреціюючої речовини є порівняними зі швидкістю світла, необхідно враховувати релятивістські ефекти.

Популярною є ідея, що ближні "нормальні" галактики вже пройшли фазу активності й є згаслими квазарами, тобто теж мають масивні чорні діри. Фотометричні та спектроскопічні дані підтверджують наявність НМЧД у центральних областях багатьох галактик ранніх типів. Навпаки, моделі без чорної діри відпадали одна за одною як несумісні зі спостереженнями. Зокрема, у нашій Галактиці знайдено масу центрального невидимого об'єкта, що становить близько $3 \cdot 10^6 M_{\odot}$. Це було зроблено за допомогою інфрачервоних спостережень динаміки зір у центрі Галактики.

2.5. Космологія

Донедавна релятивістська космологія існувала здебільшого лише в теорії. Спостережні дані, що потребували ЗТВ для своєї інтерпретації, були обмеженими й не дозволяли надійно оцінити тип геометрії Всесвіту та його середню густину. Лише наприкінці минулого століття було визначено космологічну сталу, яку наразі інтерпретують як результат дії деяких космологічних полів. Ці поля можна охарактеризувати густиною маси, що становить домінуючий внесок ($\sim 70\%$) у середню густину Всесвіту на сучасному етапі космологічного розширення. Частка матерії з нульовим тиском становить майже 30% , причому внесок у цю частку звичайної баріонної ма-

терії незначний, близько 5 %. Чверть космологічної густини становить так звана небаріонна "темна матерія", яка не випромінює; її розподіли відслідковують за гравітаційними ефектами¹. Виявляється, що в сучасну епоху розширення Всесвіту прискорюється, а не сповільнюється, як це очікувалось раніше. Було з'ясовано, що Всесвіт є просторово-плоским, а його вік становить приблизно 14 млрд років. Уперше ці висновки були отримані на основі спостережень блиску наднових типу 1a і вимірювань дрібномасштабної анізотропії реліктового випромінювання.

2.6. Гравітаційні хвилі

У перспективі виникає ще одна важлива область застосування ефектів ЗТВ – гравітаційно-хвильова астрономія. Наразі основним джерелом інформації про навколишній Всесвіт є електромагнітне випромінювання різних діапазонів; важливими також є спостереження космічних променів; перші кроки робить нейтринна астрономія. Гравітаційно-хвильова астрономія – це ще одне вікно у Всесвіт, за допомогою якого можна буде отримувати принципово нові дані про власне обертання нейтронних зірок з деформованою поверхнею, їх "злипання", колапс зірок у інших галактиках тощо. У наукових колах вже давно існує повне взаєморозуміння щодо реальності гравітаційного випромінювання, але тільки тепер прогрес вимірювальної техніки наближає до прямих спостережень цього явища. Сплески такого випромінювання від спалаху наднової в нашій Галактиці можна було б зареєструвати вже технікою кінця минулого століття, але така подія відбувається, як свідчать оцінки, один раз на 300 років. Для систематичного детектування гравітаційних хвиль від реальних астрофізичних джерел необхідно на багато порядків підвищити чутливість гравітаційних детекторів, сучасна техніка на сьогодні вже наближається до необхідного порогу.

Більш детальну інформацію про перевірки та застосування ЗТВ можна знайти в книзі [50].

¹ Наразі існують кілька гіпотез щодо мікроскопічного складу темної матерії. Зокрема, припускають, що вона складається зі слабковзаємодіючих масивних частинок.

3. ТЕНЗОРИ НА БАГАТОВИДИ

... за своєю наївністю я вважав, що для фізики досить твердо засвоїти елементарні математичні поняття та мати їх готовими для застосування, а решта складається з непотрібних для фізики тонкощів, – омана, яку я пізніше з жалем усвідомив.

А. Ейнштейн

Традиційно викладенню ЗТВ передують основи математичного апарату ріманової геометрії. Ці відомості подано в розд. 3–7 з акцентом на фізичні застосування. Читач, що володіє відповідним апаратом, може одразу перейти до розд. 8.

Нагадаємо, що в теорії відносності основним об'єктом вивчення є множина подій. Подія означає первісне поняття, точку простору-часу, що визначається чотирма координатами. Поняття багатовиду, що сформульоване далі, дає змогу використати потужний апарат математичного аналізу для вивчення множини подій. Із цими поняттями ми зустрічалися раніше (див. ч. 1), тому трапляються деякі повторення. Підкреслимо, що на відміну від СТВ далі розглядаються довільні системи координат, не пов'язані з якимись конкретними системами відліку. Єдине обмеження полягає в можливості встановити взаємно однозначний і диференційовний зв'язок між допустимими системами координат.

Означення 3.1. Множина M_n є n -вимірним диференційовним багатовидом, якщо її можна подати як об'єднання підмножин ω_α : $M_n = \bigcup_\alpha \omega_\alpha$, причому:

а) для кожної підмножини ω_α існує закон ϕ_α (можливо й не один), що встановлює її взаємно однозначну відповідність з деякою областю Ω_α з n -вимірного арифметичного простору R^n : $\omega_\alpha \xleftrightarrow{\phi_\alpha} \Omega_\alpha \subset R^n$;

б) якщо ω_α і ω_β мають непорожній перетин $\tilde{\omega} = \omega_\alpha \cap \omega_\beta \neq \emptyset$ (або збігаються), причому згідно з (а):

$$\tilde{\Omega}_\alpha \leftrightarrow \tilde{\omega} \leftrightarrow \tilde{\Omega}_\beta, \text{ де } \tilde{\Omega}_\alpha \subset \Omega_\alpha, \tilde{\Omega}_\beta \subset \Omega_\beta, \tilde{\Omega}_\alpha \leftrightarrow \tilde{\Omega}_\beta;$$

то взаємно однозначна відповідність $\tilde{\Omega}_\alpha \leftrightarrow \tilde{\Omega}_\beta$ здійснюється неперервно диференційовними функціями на R^n . Порядок диференційовності функцій визначає порядок диференційовності багатовиду.

Для однієї підмножини $\omega_\alpha \subset M_n$ може існувати багато функцій ϕ_α , які визначають її образ у M_n . Якщо

$$\omega_\alpha \xleftrightarrow{\phi_\alpha} \Omega_\alpha \subset R^n \text{ та } \omega_\alpha \xleftrightarrow{\phi'_\alpha} \Omega'_\alpha \subset R^n,$$

то відповідність $\Omega_\alpha \leftrightarrow \Omega'_\alpha$ здійснюється неперервно диференційовними функціями. У цьому разі йтиметься про зв'язок між різними системами координат, причому кожна з них означена на відповідній карті $\Omega_\alpha \leftrightarrow \omega_\alpha$. Далі завжди припускаємо необхідний порядок диференційовності всіх функцій, які беруть участь у диференціальних операціях.

Постає питання: навіщо потрібно вводити багатovid як об'єднання підмножин замість того, щоб ввести одразу координати з R^n на всій множині M_n ? Виявляється, що це не завжди можливо. Наприклад, сфера є двовимірним багатovidом, який не можна взаємно однозначно й неперервно відобразити на площину R^2 ; через це для коректного введення координат сферу треба покрити якнайменше двома картами.

Далі вважаємо, що грецькі індекси, штриховані й нештриховані, набувають значень від 0 до $n-1$ при нумерації координат і підсумовуваннях (як і в ч. 1, використовуємо правило Ейнштейна щодо підсумовування за двома однаковими індексами – один має бути зверху, другий знизу). У стандартній теорії тяжіння ми маємо справу з чотиривимірним багатovidом подій M_4 ; відповідно покладаємо $n = 4$.

З умови взаємної однозначності випливає, що перетворення координат $x \rightarrow x' = x'(x)$ має бути неособливим, тобто існує обернене перетворення $x = x(x')$ і

$$\det \left\| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right\| \neq 0. \quad (3.1)$$

Розглядаючи $\partial x^{\mu'} / \partial x^{\alpha'} \equiv \delta_{\alpha'}^{\mu'}$, та $\partial x^\mu / \partial x^\alpha \equiv \delta_\alpha^\mu$, дістанемо

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} = \delta_{\alpha'}^{\mu'}; \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\mu. \quad (3.2)$$

Запис $\partial x^{\mu'} / \partial x^\mu$ означає, що диференціюють $x^{\mu'}$ як функції x згідно із законом перетворення $x' = x'(x)$; навпаки, у виразі $\partial x^\mu / \partial x^{\mu'}$ незалежними є $x^{\mu'}$, при цьому в (3.2) після диференціювання слід під-

ставити координати x^μ чи $x'^{\mu'}$, що відповідають одній точці $t \in M_n$ у різних системах.

Диференціюючи (3.2), маємо корисні співвідношення

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu'}}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\alpha'}} + \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\alpha'}} \right) = 0; \quad (3.3, \text{а})$$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial^2 x'^{\mu'}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \right) \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (3.3, \text{б})$$

Далі розглянемо деяку точку $t \in \omega_\alpha \subset M_n$, для якої дамо означення тензорів; поширення цих означень на підмножину або на весь багатovid M_n дає скалярні, векторні чи тензорні поля.

Означення 3.2. Величина φ є **скаляром**, якщо її числове значення не змінюється при перетвореннях координат. У різних координатних системах $\{x\}$ і $\{x'\}$ для будь-якої точки $t \in M_n$ з координатами відповідно x^μ і $x'^{\mu'}$:

$$\varphi'(x') \equiv \varphi(x), \quad \text{де } x' \equiv x'(x). \quad (3.4)$$

Зазначимо, що при перетворенні координат функціональний вигляд скалярної функції від своїх аргументів може змінюватися: $\varphi(x) \neq \varphi'(x)$; але числове значення скаляра у фіксованій точці t є незмінним у всіх системах координат.

Легко бачити, що похідні від скалярної функції при перетворенні координат задовольняють таке співвідношення

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}. \quad (3.5)$$

Воно дає приклад закону перетворення компонент коваріантного вектора.

Розглянемо деяку точку $t \in M_n$.

Означення 3.3. Нехай у кожній системі координат маємо упорядкований набір чисел $A_\mu, \mu = 0, 1, 2, \dots, n-1$, тоді кажуть, що ці набори утворюють **коваріантний вектор** у точці $t \in M_n$, якщо для будь-яких координатних систем $\{x\}$ та $\{x'\}$ і відповідних їм наборів $\{A_\mu\}$ і $\{A'_{\mu'}\}$ маємо

$$A'_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} A_\mu, \quad (3.6)$$

де матриця $\partial x^\mu / \partial x'^{\mu'}$ обчислюється в точці t . Числа A_μ називаються компонентами вектора у відповідних координатних системах.

Отже, компоненти коваріантного вектора перетворюються, як компоненти градієнта $\partial\phi/\partial x'^{\mu'}$ у (3.5), при переході між координатними системами $\{x\}$ та $\{x'\}$.

Означення 3.4. Сукупність наборів упорядкованих чисел (компонент) $\{B^\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, \dots, n-1$, заданих у всіх допустимих системах координат, утворюють **контраваріантний вектор** у точці t , якщо для будь-яких систем координат $\{x\}$ та $\{x'\}$ і відповідних компонент у цій точці

$$B^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} B^\mu. \quad (3.7)$$

Очевидним прикладом контраваріантного вектора є диференціал dx^μ .

Трансформаційні співвідношення для векторів у СТВ (розд. 2, ч. 1) є частинним випадком (3.6), (3.7) у разі спеціального класу перетворень координат, що пов'язують інерціальні системи. За довільних перетворень тензор Мінковського не зберігає свого вигляду.

Означення 3.5. Сукупність наборів n^{p+q} упорядкованих чисел (компонент) $\{T_{v_1 \dots v_p}^{\mu_1 \dots \mu_q}\}$, заданих у всіх системах координат, що перетворюються за правилом

$$T_{v'_1 \dots v'_q}^{\mu'_1 \dots \mu'_p} = \prod_{i=1}^p \frac{\partial x'^{\mu'_i}}{\partial x^{\mu_i}} \prod_{j=1}^q \frac{\partial x^{v_j}}{\partial x'^{v'_j}} T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}, \quad (3.8)$$

утворює **p контраваріантний і q коваріантний тензор¹** у точці t , де обчислюються матриці $\partial x'^{\mu'} / \partial x^\mu$ та $\partial x^\mu / \partial x'^{\mu'}$. Число $p+q$ називають валентністю тензора.

Означення 3.5 можна переформулювати таким чином: сукупність наборів n^{p+q} упорядкованих чисел (компонент) $\{T_{v_1 \dots v_p}^{\mu_1 \dots \mu_q}\}$, заданих у всіх системах координат, утворюють p контраваріантний і q коваріантний тензор у точці t , якщо вони перетворюються як прямий добуток p контраваріантних і q коваріантних векторів.

Коли йдеться про трансформаційні властивості тензорів, усі матриці перетворень завжди обчислюються в тій точці багатовиду M_n ,

¹ Або контраваріантний валентності p і коваріантний валентності q тензор.

де розглядаються компоненти тензора. Якщо компоненти задані в усіх точках деякої області, кажуть про *тензорне поле* в цій області.

Нагадаємо **основні властивості тензорів**, що є майже очевидними:

а) **лінійна комбінація тензорів однакової будови** є тензором тієї самої будови. Наприклад, якщо $T^{\alpha\beta}$ і $U^{\alpha\beta}$ є контраваріантними тензорами, то сума $\alpha T^{\alpha\beta} + \beta U^{\alpha\beta}$ також перетворюється за тензорним законом такого самого виду, що й для вихідних тензорів;

б) **прямий добуток тензорів довільної будови також є тензором**, але вже іншої будови. Наприклад, якщо $T^{\alpha\beta}$ – двічі контраваріантний тензор, а U_α – коваріантний вектор, то набори чисел $T^{\alpha\beta}U_\gamma$ утворюють двічі контраваріантний і один раз коваріантний тензор. Ці властивості легко довести за означенням тензорів;

в) **згортка за верхнім і нижнім індексами** дає новий тензор з меншою кількістю індексів. Покажемо, як приклад, що згортка двох векторів – коваріантного A_α і контраваріантного B^β дає скаляр. Використовуючи (3.6), (3.7), а також другу рівність з (3.2), дістанемо

$$A'_\mu B'^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\alpha} A_\mu B^\alpha = \delta_\alpha^\mu A_\mu B^\alpha = A_\mu B^\mu;$$

г) операція **перестановки коваріантних або контраваріантних індексів** не змінює закону перетворення, тобто дає тензор такої самої будови. Наприклад, з тензора $A_{\alpha\beta\delta\epsilon}$ маємо тензор $A_{\beta\alpha\delta\epsilon}$. За допомогою перестановки індексів, а також, з урахуванням властивості (а), з тензора $A_{\alpha\beta\delta\epsilon}$ отримуємо новий тензор

$$A_{[\alpha\beta]\delta\epsilon} := \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta\delta\epsilon} - A_{\beta\alpha\delta\epsilon}); \quad (3.9)$$

цю операцію, у результаті якої утворюється тензор (3.9), називають операцією **антисиметризації (альтернації)**¹ за двома індексами α та β . Двохіндексний тензор $A_{\alpha\beta}$ називають симетричним, якщо $A_{[\alpha\beta]} = 0$;

д) **існування та єдиність визначення тензора за компонентами в одній системі координат**. Якщо всі компоненти тензора дорівнюють нулю в одній системі координат, то це виконується в усіх інших системах. Ця властивість випливає з однорідності тензорних перетворень (3.8) відносно компонент тензорів. Звідси випливає єдиність визначення тен-

¹ У загальному випадку альтернацію означають за довільною кількістю індексів.

зора: якщо всі компоненти двох тензорів у точці m збігаються в одній системі координат, то вони збігатимуться в усіх системах.

Якщо в деякій системі координат $\{\tilde{x}^\mu\}$ задано n^{p+q} упорядкованих чисел $\tilde{T}_{\nu_1 \dots \nu_p}^{\mu_1 \dots \mu_q}$, тоді за допомогою тензорного закону перетворення можна визначити тензор відповідної будови та його компоненти в будь-якій системі координат $\{\tilde{x}^\mu\}$. Покажемо це на прикладі двічі коваріантного тензора, заданого в точці m . Нехай маємо $n \times n$ матрицю $\tilde{a}_{\mu\nu}$. Зафіксуємо систему координат $\{\tilde{x}^\mu\}$ і для довільної координатної системи $\{x^\mu\}$ утворимо (у точці m) числа

$$a_{\mu\nu} := \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\nu} \tilde{a}_{\mu\nu}.$$

Щоб показати, що сукупність наборів $a_{\mu\nu}$ у всіх координатних системах утворює двічі коваріантний тензор, треба пересвідчитися, що тензорний зв'язок справедливий для утворених таким чином наборів у *будь-яких* двох системах $\{x\}$ і $\{x'\}$. Порівняємо величини $a'_{\mu'\nu'}$, обчислені в системі $\{x'\}$, з компонентами $a_{\mu\nu}$, обчисленими в системі $\{x\}$:

$$a'_{\mu'\nu'} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x'^{\nu'}} \tilde{a}_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}} \tilde{a}_{\mu\nu}.$$

Проте за умовою

$$\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\nu} \tilde{a}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}, \text{ тому можна записати } a'_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}} a_{\mu\nu}.$$

Маємо тензорний закон перетворення між компонентами в системах $\{x\}$ та $\{x'\}$, що й треба було довести.

Аналогічно, відштовхуючись від компонентів в одній системі, можна побудувати вектори й тензори будь-якої структури.

Вправа 3.1. Якщо визначник матриці $a_{\alpha\beta}$ двічі коваріантного тензора відмінний від нуля в деякій системі координат, то ця властивість має місце в усіх системах координат, причому знак $\det\|a_{\alpha\beta}\|$ однаковий у всіх системах.

Розв'язання: закон перетворення

$$a'_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} a_{\alpha\beta} \quad (3.10)$$

можна записати як добуток трьох матриць¹:

$$\|a'_{\alpha'\beta'}\| = \left\| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \right\| \|a_{\alpha\beta}\| \left\| \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \right\|.$$

Звідси завдяки формулі для визначника добутку матриць

$$\det \|a'_{\alpha'\beta'}\| = \left(\det \left\| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \right\| \right)^2 \det \|a_{\alpha\beta}\|, \quad (3.11)$$

унаслідок невивроженості перетворення координат маємо необхідне твердження.

Наступна вправа зіставляє будь-якому невивроженому двічі коваріантному тензору двічі контраваріантний. Це буде використано для введення контраваріантного метричного тензора в рімановому багатомовиді.

Вправа 3.2. Нехай $a_{\alpha\beta}$ – компоненти двічі коваріантного тензора, причому $\det \|a_{\alpha\beta}\| \neq 0$. Доведіть, що компоненти оберненої матриці складають двічі контраваріантний тензор. Навпаки, для двічі контраваріантного тензора $a^{\alpha\beta}$, $\det \|a^{\alpha\beta}\| \neq 0$ компоненти оберненої матриці складають двічі коваріантний тензор.

Доведення: обмежимося розглядом двічі коваріантного тензора $a_{\alpha\beta}$, решта доводиться аналогічно. Нехай $\|b\| = \|a\|^{-1}$ і $\|b'\| = \|a'\|^{-1}$ відповідно в координатах $\{x\}$ та $\{x'\}$, тобто

$$a_{\alpha\beta} b^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma; \quad (3.12)$$

$$a'_{\alpha'\beta'} b'^{\beta'\gamma'} = \delta_{\alpha'}^{\gamma'}. \quad (3.12, a)$$

Підставимо (3.10) у (3.12, а):

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} a_{\alpha\beta} b^{\beta'\gamma'} = \delta_{\alpha'}^{\gamma'},$$

¹ Можна вважати, що перший індекс матриці $a_{\alpha\beta}$ нумерує рядок, а другий – стовпчик.

згорнемо результат з $\partial x'^{\alpha'} / \partial x^{\bar{\alpha}}$ за індексом α' з використанням (3.2).
Маємо

$$a_{\bar{\alpha}\beta} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} b'^{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x'^{\gamma'}}{\partial x^{\bar{\alpha}}}. \quad (3.13)$$

Згортаючи (3.13) з $b^{\alpha\bar{\alpha}}$ за $\bar{\alpha}$, маємо

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta'}} b'^{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x'^{\gamma'}}{\partial x^{\sigma}} b^{\alpha\sigma}.$$

Тут використано, що права обернена до $\|a\|$ матриця є також і лівою оберненою матрицею¹, тобто $b^{\alpha\bar{\alpha}} a_{\bar{\alpha}\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$. Подальша згортка з $\partial x'^{\mu'} / \partial x^{\alpha}$ за α приводить до закону перетворення двічі коваріантного тензора

$$b'^{\mu'\gamma'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\gamma'}}{\partial x^{\sigma}} b^{\alpha\sigma}.$$

Вправа 3.3. Доведіть, що символ Кронекера є один раз коваріантним і один раз контраваріантним тензором.

Твердження випливає з очевидного співвідношення

$$\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu'}} \delta_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x'^{\nu'}} = \delta_{\nu'}^{\mu'}. \quad (3.14)$$

Вправа 3.4. Нехай $a_{\alpha\beta}$ – тензор і для деякої системи координат виконується $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$. Тоді ці співвідношення зберігають силу в будь-яких координатних системах. Твердження випливає з властивостей тензорів (г) і (д).

Згадаємо умову рівності двох полілінійних форм. Дві полілінійні форми дорівнюють одна одній:

$$T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} U_{(1)}^{\nu_1} \dots U_{(q)}^{\nu_q} V_{(1)\mu_1} \dots V_{(p)\mu_p} \equiv \tilde{T}_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} U_{(1)}^{\nu_1} \dots U_{(q)}^{\nu_q} V_{(1)\mu_1} \dots V_{(p)\mu_p} \quad (3.15)$$

¹ Згорнемо (3.12) з $b^{\sigma\alpha}$ за α , тоді $b^{\sigma\alpha} a_{\alpha\beta} b^{\beta\gamma} - b^{\sigma\gamma} = 0$ або $(b^{\sigma\alpha} a_{\alpha\beta} - \delta_{\beta}^{\sigma}) b^{\beta\gamma} = 0$. Матриця $\|b\|$ неособлива, тому в дужках є нуль.

для довільних значень незалежних аргументів $U_{(1)}^{v_1}, \dots, U_{(q)}^{v_q}$, $V_{(1)\mu_1}, \dots, V_{(p)\mu_p}$ тоді й тільки тоді, коли їх коефіцієнти збігаються: $T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} = \tilde{T}_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$.

Для доведення досить продиференціювати співвідношення (3.15) за компонентами незалежних аргументів.

Наступна теорема встановлює зв'язок тензорів з полілінійними формами.

Теорема про полілінійні форми. Нехай набори $T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ задані в усіх координатних системах, причому для довільних q контраваріантних векторів $U_{(1)}^{v_1}, \dots, U_{(q)}^{v_q}$ і p коваріантних векторів $V_{(1)\mu_1}, \dots, V_{(p)\mu_p}$ величини

$$T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} U_{(1)}^{v_1} \dots U_{(q)}^{v_q} V_{(1)\mu_1} \dots V_{(p)\mu_p}$$

утворюють скаляр. Тоді ці набори утворюють p контраваріантний і q коваріантний тензор.

Доведемо це на прикладі двічі коваріантного тензора $T_{\mu\nu}$. Маємо для довільних $U_{(1)}^\mu, U_{(2)}^\nu$: $T'_{\mu'\nu'} U_{(1)}^{\mu'} U_{(2)}^{\nu'} = T_{\mu\nu} U_{(1)}^\mu U_{(2)}^\nu$. Враховуючи закон перетворення компонент контраваріантних векторів $U_{(1)}^\mu, U_{(2)}^\nu$ маємо

$$T'_{\mu'\nu'} U_{(1)}^{\mu'} U_{(2)}^{\nu'} = T_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}} U_{(1)}^{\mu'} U_{(2)}^{\nu'}.$$

За умови довільності чисел $U_{(1)}^\mu, U_{(2)}^\nu$ це можливо лише, якщо

$$T'_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\nu'}} T_{\mu\nu},$$

що й треба було довести.

Наслідок: нехай величини

$$T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} U_{(1)}^{v_1} \dots U_{(q')}^{v_{q'}} V_{(1)\mu_1} \dots V_{(p')\mu_{p'}}; \quad 1 \leq p' \leq p, \quad 1 \leq q' \leq q$$

утворюють $p - p'$ контраваріантний і $q - q'$ коваріантний тензор для довільних коваріантних векторів $V_{(1)\mu_1}, \dots, V_{(p')\mu_{p'}}$ і контраваріантних векторів $U_{(1)}^{v_1}, \dots, U_{(q')}^{v_{q'}}$. Тоді $T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ – p контраваріантний і q коваріантний тензор. Це

видно, якщо утворити скаляр, згортаючи записане співвідношення ще з $p - p'$ коваріантними та $q - q'$ контраваріантними довільними векторами, і використати попередню теорему.

4. СПЕЦІАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ В КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТАХ

Даний розділ є допоміжним, його мета – дати фізичне обґрунтування деяких співвідношень, зокрема, коваріантних похідних, що вводяться далі в розд. 5 для опису ріманового простору-часу. Основою для цього слугуватимуть співвідношення СТВ, яка перевірена з високою точністю аж до екстремальних умов. У ч. 1 рівняння СТВ було записано в інерціальних СВ. За відсутності гравітації ці рівняння можна узагальнити на довільні СВ і відповідно довільні координатні системи без внесення змін у фізичні основи теорії.

Одним з основних постулатів теорії тяжіння є припущення про локальну еквівалентність гравітаційних та інерціальних явищ, тому співвідношення СТВ, записані в довільних, не обов'язково інерціальних, системах відліку, вкажуть нам шлях до побудови аналогічних співвідношень за наявності гравітаційного поля. Хоча в СТВ маємо виділений клас координат, що відповідають інерціальним системам відліку, співвідношення, які наводитимуться далі, матимуть формально інваріантний вигляд відносно довільних координатних перетворень (а не тільки перетворень Лоренца).

Нехай $\{\tilde{x}\}$ – деяка "інерціальна" система координат (тобто яка використовує час і декартові координати інерціального спостерігача). Введемо метричний тензор простору Мінковського в довільній системі $\{x\}$ як узагальнення звичайного тензора Мінковського з СТВ:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (4.1)$$

Тензорні властивості цього об'єкта гарантовані властивістю (д) з розд. 3 про можливість визначення тензора компонентами в деякій системі. Ці компоненти утворюють симетричну невироджену матрицю.

Для інтервалу часу $d\tau$ на часоподібній траєкторії (згідно з розд. 2, ч. 1)

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} dx^\mu dx^\nu.$$

За допомогою $g_{\mu\nu}$ звідси маємо

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.1, a)$$

Зважаючи на властивості dx^α при перетвореннях координат, видно, що останній вираз має інваріантний вигляд у всіх системах.

Аналогічно, означення тензорних величин СТВ (тензора електромагнітного поля, тензора енергії імпульсу тощо) поширюється від "інерціальної" системи $\{\tilde{x}\}$ на будь-які криволінійні координати. При цьому зберігаються всі правила алгебраїчних дій над тензорами, що мали місце в СТВ. Проте це не стосується диференціальних операцій, яким слід приділити окрему увагу. Очевидно, що лише похідні від скалярної функції утворюють тензор (див. (3.5)), але для тензорів вищої валентності це не має місця. Наприклад, якщо контраваріантний вектор має компоненти \tilde{A}^μ в інерціальній системі $\{\tilde{x}\}$, то

$$\frac{\partial \tilde{A}^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha \right) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \right) A^\alpha \quad (4.2)$$

і це не є тензорним законом перетворення для похідних $\partial A^\mu / \partial x^\nu$. Тому зручно ввести тензорну диференціальну операцію аналогічно тому, як було введено метричний тензор простору Мінковського та інші тензорні величини СТВ у довільних координатах:

$$\nabla_\beta A^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial \tilde{A}^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \quad (4.3)$$

Ці компоненти утворюють тензор, який називатимемо *коваріантною похідною від контраваріантного вектора*.

З урахуванням (4.2) запишемо

$$\begin{aligned} \nabla_\beta A^\alpha &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} \left\{ \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial A^\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma} \right) A^\sigma \right\} = \\ &= \delta_\sigma^\alpha \delta_\beta^\rho \frac{\partial A^\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \left(\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\nu} \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma} \right) \right) A^\sigma = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha A^\gamma, \end{aligned} \quad (4.4)$$

де використано співвідношення (3.2), перепозначено індекси і введено величини

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \quad (4.5)$$

Ці величини будемо називати символами Крістоффеля простору Мінковського. Нагадаємо, що $\{\tilde{x}^\alpha\}$ відповідає інерціальній системі, де $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$.

Вправа 4.1. Знайдіть закон перетворення $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ при перетвореннях координат $\{x\} \rightarrow \{x'\}$.

Розв'язання: за означенням

$$\begin{aligned}\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} &= \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\gamma'}} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\beta'}} \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^{\gamma'}} \right) = \\ &= \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^{\beta'}} \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma} \right) \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^{\gamma'}} + \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \delta_\gamma^\alpha \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\gamma'}} = \\ &= \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^{\gamma'}} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\gamma'}}.\end{aligned}$$

Аналогічно (4.3), (4.4) можна отримати коваріантні похідні від тензорів будь-якої будови; ці вирази будуть записані далі в більш загальній ситуації ріманових багатovidів. Обмежимося формулою для коваріантної похідної від коваріантного вектора:

$$\nabla_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma A_\sigma \quad (4.6)$$

і від двічі коваріантного тензора

$$\nabla_\gamma A_{\alpha\beta} = \partial_\gamma A_{\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma A_{\sigma\beta} - \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma A_{\alpha\sigma}. \quad (4.7)$$

Вправа 4.2. Доведіть співвідношення (4.6), (4.7), користуючись безпосередньо означеннями

$$\nabla_\gamma A_\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^{\bar{\gamma}}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^{\bar{\alpha}}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{A}^{\bar{\alpha}}}{\partial \tilde{x}^{\bar{\gamma}}}; \quad (4.8)$$

$$\nabla_\gamma A_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^{\bar{\gamma}}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^{\bar{\alpha}}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^{\bar{\beta}}}{\partial x^\beta} \frac{\partial \tilde{A}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}}{\partial \tilde{x}^{\bar{\gamma}}}, \quad (4.9)$$

де $\tilde{A}_{\bar{\alpha}}$, $\tilde{A}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ – компоненти в інерціальній системі $\{\tilde{x}\}$.

Обмежимося доведенням (4.7). Згідно з (4.9), переписуючи похідні від $\tilde{A}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ у нових координатах, маємо

$$\begin{aligned}\nabla_\gamma A_{\alpha\beta} &= \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \tilde{x}^\beta} A_{\rho\epsilon} \right) = \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \tilde{x}^\beta} \right) A_{\rho\epsilon} + \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\epsilon \frac{\partial A_{\rho\epsilon}}{\partial x^\gamma},\end{aligned}$$

де використано (3.2). Маємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \tilde{x}^\beta} \right) &= \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\alpha} \right) \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial \tilde{x}^\beta} + \\ &+ \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial x^\epsilon}{\partial \tilde{x}^\beta} \right) \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\alpha} \right) \delta_\beta^\epsilon + \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial x^\epsilon}{\partial \tilde{x}^\beta} \right) \delta_\alpha^\rho.\end{aligned}$$

Застосовуючи (3.3), перетворюємо в першому доданку

$$\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\alpha} \right) = - \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\alpha} = -\Gamma_{\alpha\gamma}^\rho,$$

за означенням (4.5). Другий доданок розглядається аналогічно. Після цього легко дістати (4.7).

Використаємо (4.7) для отримання зв'язку між метричним тензором плоского простору та символами Крістоффеля (4.5) у просторі Мінковського. В "інерціальних" координатах $\{\tilde{x}\}$ маємо $\partial \eta_{\mu\nu} / \partial \tilde{x}^\alpha \equiv 0$ і за визначенням (4.9):

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} \equiv 0. \quad (4.10)$$

Оскільки введена похідна за побудовою є коваріантною, а $g_{\alpha\beta}$ – тензор, це співвідношення має місце в будь-якій системі координат. Згідно з (4.7) звідси випливає

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma g_{\sigma\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma g_{\alpha\sigma}. \quad (4.11)$$

Пряме обчислення на підставі цього співвідношення з урахуванням симетрії $g_{\mu\nu}$ та $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ за нижніми індексами дає

$$g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma} = 2\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\gamma}, \quad (4.12)$$

кома означає диференціювання за відповідним аргументом.

Введемо $g^{\mu\nu}$ – компоненти матриці, оберненої до $g_{\mu\nu}$, тобто

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (4.13)$$

Згортаючи (4.12) з $g^{\gamma\mu} = g^{\mu\gamma}$ за γ з урахуванням (4.13), отримаємо

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma}). \quad (4.14)$$

Введений об'єкт $g^{\mu\gamma}$ є двічі контраваріантним тензором (див. впр. 3.1), очевидно він є симетричним, причому в "інерціальних" координатах $\{\tilde{x}\}$ компоненти цього тензора, як і $g_{\mu\nu}$, збігаються з $\eta_{\mu\nu}$.

Отже, для обчислення коваріантних похідних у будь-яких координатах $\{x\}$ достатньо знати тензор $g_{\mu\nu}(x)$ у цих координатах, не звертаючись безпосередньо до (4.3), (4.8), (4.9) тощо, тобто всі рівняння математичної фізики, узгоджені з СТВ, узагальнюються на випадок довільних криволінійних координат за допомогою $g_{\mu\nu}(x)$. Відмінність $g_{\mu\nu}(x)$ від $\eta_{\mu\nu}$ тут не має фізичного навантаження й відповідає лише довільності вибору координат.

Постає запитання: чи можна для будь-якого тензора $g_{\mu\nu}(x)$ знайти перетворення $x \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{x}(x)$ таким чином, щоб у нових координатах \tilde{x} компоненти $g_{\mu\nu}$ були б сталими, як у тензора Мінковського? Далі буде видно, що за наявності гравітаційного поля це неможливо, тому узагальнимо операції коваріантного диференціювання без використання співвідношень, які базуються на зв'язку з інерціальними координатами $\{\tilde{x}\}$. Тим не менше, деякі означення та співвідношення для похідних типу (4.6), (4.7) формально зберігаються, хоча й наповнюються іншим змістом.

5. РІМАНІВ БАГАТОВИД І КОВАРІАНТНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ

Узагальнимо співвідношення СТВ на випадок довільного метричного тензора. Це буде зроблено на основі певного "принципу відповідності". Виявляється, зафіксувавши деяку точку m багатовиду, можна перейти до системи координат, де перші похідні від метричного тензора в цій точці дорівнюють нулю, тобто поведінка метричного тензора деякою мірою подібна до властивостей тензора Мінковського в інер-

ціальній системі. Це дає змогу дати коваріантне узагальнення похідної за аналогією з простором СТВ: природно визначити коваріантну похідну так, щоб вона збігалася зі звичайною в цих координатах у цій точці. Таке узагальнення виявляється цілком однозначним. З іншого боку, воно відповідає принципу локальної лоренцовості, що розглядається далі в розд. 8 як один з основних постулатів метричної ТТ.

5.1. Квадрат інтервалу в рімановому багатовиді

Зважаючи на вищенаведені висновки, розглянемо узагальнення формули (4.1, а) для квадрата інтервалу $ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ із функціями $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$, що не обов'язково задовольняють співвідношення (4.1). Далі позначимо $g = \det \|g_{\mu\nu}\|$. Записана формула може бути інтерпретована як джерело метричних співвідношень на багатовиді M_n , якщо вважати, що ds^2 – це квадрат елемента довжини.

Означення 5.1. Нехай на багатовиді M_n задано поле двічі коваріантного симетричного ($g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$) тензора $g_{\mu\nu}$, причому виконується умова невиврожденості $g \neq 0$, тоді багатовид M_n називають **рімановим**, а $g_{\mu\nu}$ – **метричним тензором** на M_n .

Умови симетричності та невиврожденості $g_{\mu\nu}$ досить накласти в одній системі координат; за властивостями тензорів (див. напр., впр. 3.4) вони виконуються тоді в будь-якій системі. У ЗТВ розглядають чотиривимірний простір-час ($n = 4$) і використовують метричний тензор з тією самою сигнатурою, що й у тензора Мінковського. Нагадаємо, що сигнатурою квадратичної форми $g_{\mu\nu} z^\mu z^\nu$ є інваріант

$\sigma = \sum_{\mu=0}^3 \text{sign}(\lambda_\mu)$, де λ_μ – власні числа симетричної матриці $g_{\mu\nu}$. У ЗТВ

сигнатура метричного тензора $\sigma = -2$; кажуть, що він має *лоренцову сигнатуру*. При цьому значення квадратичної форми ds^2 можуть бути додатними, від'ємними чи дорівнювати нулю – залежно від диференціалів координат, що до неї входять.

За допомогою метричного тензора вводять довжину кривої. Нехай крива $x(p)$ параметризована неособливим параметром p : (тобто

$$\sum_{a=0}^3 |dx^a/dp| \neq 0). \text{ Позначимо } \varepsilon = \text{sign} \left\{ g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\}.$$

Нехай уздовж кривої $\varepsilon = \text{const}$. Будемо казати, що крива часоподібна, якщо $\varepsilon = 1$, ізотропна (або світлоподібна), якщо $\varepsilon = 0$, і просторовоподібна, якщо $\varepsilon = -1$. Відповідно до метричної інтерпретації квадрата інтервалу, визначимо "довжину" часоподібної чи просторовоподібної кривої між точками $x(p_1)$ і $x(p_2)$ як

$$\int_{p_1}^{p_2} \left\{ \varepsilon g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\}^{1/2} dp.$$

Згідно з впр. 3.1 маємо двічі контраваріантний тензор $g^{\mu\nu}$ з компонентами оберненої до $\|g_{\mu\nu}\|$ матриці:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (5.1)$$

Цей тензор також називають метричним.

За допомогою коваріантного й контраваріантного метричних тензорів здійснюються *операції піднімання та опускання індексів*, наприклад: $A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta$; $T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}$. Тензори, що виникають після цієї операції, позначають тими самими літерами. Зауважимо, що треба зберігати порядок індексів при визначених операціях. Наприклад, тензор $T^{\alpha\beta\gamma} g_{\beta\sigma} = T^{\alpha\gamma}_\sigma$ у загальному випадку не дорівнює $T_\sigma^{\alpha\gamma}$ або $T^{\alpha\gamma}_\sigma$. Якщо на багатовиді задано кілька метричних тензорів (відповідно до цього маємо кілька ріманових багатовидів), треба робити застереження, за допомогою якого з них піднімають або опускають індекси.

5.2. Символи Крістоффеля та локально-геодезична система координат

Далі нам будуть потрібні **символи Крістоффеля, асоційовані з метричним тензором** $g_{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\beta\sigma,\gamma} + g_{\gamma\sigma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma}). \quad (5.2)$$

Кома тут означає частинну похідну. Очевидно ці символи симетричні за нижніми індексами: $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}$. Співвідношення (5.2) формально збігається з (4.14), але на відміну від (4.14) ми не вимагаємо тут виконання жодних співвідношень типу (4.1) для метричного тензора.

Знайдемо **трансформаційні властивості символів Крістоффеля** безпосередньо з (5.2):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} &= \frac{1}{2} g'^{\alpha'\sigma'} \left(\frac{\partial g'_{\beta'\sigma'}}{\partial x'^{\gamma'}} + \frac{\partial g'_{\gamma'\sigma'}}{\partial x'^{\beta'}} - \frac{\partial g'_{\beta'\gamma'}}{\partial x'^{\sigma'}} \right) = \\ &= \frac{g^{\alpha\sigma}}{2} \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\sigma'}}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'^{\gamma'}} \left(\frac{\partial x^{\bar{\sigma}}}{\partial x'^{\sigma'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} g_{\beta\bar{\sigma}} \right) + \frac{\partial}{\partial x'^{\beta'}} \left(\frac{\partial x^{\bar{\sigma}}}{\partial x'^{\sigma'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}} g_{\gamma\bar{\sigma}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x'^{\sigma'}} \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}} g_{\beta\gamma} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Розкриваючи в цьому виразі похідні від добутків, розглянемо спочатку члени, що не містять похідних від метричного тензора:

$$\begin{aligned} &\frac{g^{\alpha\sigma}}{2} \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\sigma'}}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \left[\frac{\partial^2 x^{\bar{\sigma}}}{\partial x'^{\gamma'} \partial x'^{\sigma'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} + \frac{\partial x^{\bar{\sigma}}}{\partial x'^{\sigma'}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma'} \partial x'^{\beta'}} \right] \cdot g_{\beta\bar{\sigma}} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial^2 x^{\bar{\sigma}}}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\sigma'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}} + \frac{\partial x^{\bar{\sigma}}}{\partial x'^{\sigma'}} \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\gamma'}} \right] \cdot g_{\gamma\bar{\sigma}} - \frac{\partial}{\partial x'^{\sigma'}} \left[\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}} \right] \cdot g_{\beta\gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Перші доданки у двох перших квадратних дужках після перепозначення відповідно $\bar{\sigma} \rightarrow \gamma$ та $\bar{\sigma} \rightarrow \beta$ взаємно знищуються з останнім членом виразу (зі знаком "мінус"). Другі доданки є однаковими, вони спрощуються з урахуванням (3.2) та (5.1) до вигляду

$$\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma'} \partial x'^{\beta'}} g^{\alpha\sigma} \delta_{\sigma\beta}^{\bar{\sigma}} g_{\beta\bar{\sigma}} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\gamma'}}.$$

Решта членів виразу включає похідні від метричного тензора, але не містить других похідних від x' за x , або навпаки; саме ця частина зберігається у випадку, коли перетворення координат $x'(x)$ є лінійними. Ці члени після нескладних перетворень з урахуванням (3.2) і заміни змінних диференціювання зводяться до вигляду

$$\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}.$$

Остаточний результат має вигляд

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^{\gamma'}} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\gamma'}}. \quad (5.3)$$

Зазначимо, що вираз (5.3) за формою збігається з результатом впр. 4.1, де розглядається простір Мінковського. Сукупність величин $\{\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha\}$, заданих у всіх координатних системах, що перетворюються за законом (5.3), називають *об'єктом зв'язності*. Зокрема, величини (5.2) утворюють *ріманову зв'язність*.

Означення 5.2. Система координат $\{x\}$ є геодезичною в точці $m_0 \in M_n$, якщо в цій точці $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x_0) = 0$, де x_0 – координати m_0 у цій системі. Вживають також вираз "локально-геодезична система координат" у відповідній точці.

Покажемо, що в рімановому багатовиді для довільної точки m_0 завжди можна знайти систему координат, геодезичну в m_0 . Нехай у системі $\{x\}$ точка m_0 має координати x_0^μ . Розглянемо нову систему координат $\{y\}$, що пов'язана зі старою в околі точки m_0 співвідношенням

$$x^\alpha = x_0^\alpha + y^\alpha - \frac{1}{2} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x_0) y^\beta y^\gamma, \quad (5.4)$$

де $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ – символи Крістоффеля в системі координат $\{x\}$. Зовні цього околу продовжимо (5.4) довільними допустимими перетвореннями, які гладко зшиваються з (5.4). Точка m_0 у системі $\{y\}$ має координати $y^\alpha = 0$, причому в цій точці, як легко бачити з (5.4),

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \right)_{m_0} = \delta_\beta^\alpha, \quad \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\beta \partial y^\gamma} \right)_{m_0} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x_0).$$

Для оберненого перетворення, очевидно, що

$$\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} \right)_{m_0} = \delta_\beta^\alpha.$$

Підстановка цих співвідношень у трансформаційний закон (5.3) дає бажаний результат у системі $\{y\}$ для символів Крістоффеля, обчислених у точці $y^\alpha = 0$: $\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}(0) = 0$.

Зауваження: існує безліч геодезичних у m_0 систем координат. Це легко бачити, якщо до правої частини (5.4) додати збіжний ряд за степенями y^α , починаючи із членів третього порядку з довільними коефіцієнтами. Нехай дві системи $\{x\}$ і $\{x'\}$ є геодезичними в точці m_0 , що має координати відповідно x_0 та x'_0 , тоді в силу (5.3) мають місце співвідношення

$$\left(\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\beta \partial x'^\gamma} \right)_{x'_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right)_{x_0} = 0.$$

Навпаки, нехай це співвідношення для других похідних має місце в координатах $\{x\}$ і $\{x'\}$ (для всіх значень індексів, що в нього входять). Тоді, якщо система $\{x\}$ є геодезичною в точці m_0 , то система $\{x'\}$ також є геодезичною в цій точці.

Виразимо умову локальної геодезичності в точці m_0 безпосередньо через похідні від метричного тензора. Згорнувши (5.2) з $g_{\rho\alpha}$, отримаємо рівність

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha g_{\alpha\rho} = \frac{1}{2} (g_{\beta\rho,\gamma} + g_{\gamma\rho,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho}),$$

яка дає змогу перевірити прямою підстановкою, що

$$g_{\mu\nu,\delta} = \Gamma_{\delta\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\delta\nu}^\sigma g_{\mu\sigma}. \quad (5.5)$$

Звідси система координат є геодезичною в точці m_0 тоді й тільки тоді, якщо перші похідні від метричного тензора в цій точці дорівнюють нулю:

$$\tilde{g}_{\mu\nu,\delta}(m_0) = 0, \quad (5.6)$$

де "тильда" підкреслює, що компоненти метричного тензора розглядаються саме в цій конкретній системі.

5.3. Коваріантне диференціювання

Геодезичні системи координат, асоційовані з різними точками, у загальному випадку не збігаються, тобто в системі $\{y\}$ рівність (5.6) має місце лише в m_0 , але не в усьому M_n . Це не заважає, однак, ввести коваріантну похідну конструктивно, аналогічно як у розд. 4, на основі певного "принципу відповідності" із СТВ.

Нехай система координат $\{y\}$ є геодезичною в точці m . Нехай $T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ – компоненти q коваріантного та p контраваріантного тензора у деякій системі координат $\{x\}$, а $\tilde{T}_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ – його компоненти в системі координат $\{y\}$. Введемо тензор, компоненти якого в системі $\{y\}$ збігаються із частинними похідними від $\tilde{T}_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$, тобто

$$U_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\alpha} = \frac{\partial y^{\tilde{\alpha}}}{\partial x^{\alpha}} \prod_{i=1}^p \left(\frac{\partial x^{\mu_i}}{\partial y^{\tilde{\mu}_i}} \right) \prod_{j=1}^q \left(\frac{\partial y^{\tilde{v}_j}}{\partial x^{v_j}} \right) \frac{\partial \tilde{T}_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}}{\partial y^{\tilde{\alpha}}}, \quad (5.7)$$

де всі похідні обчислюються в точці m . Згідно з властивістю (д) розд. 3 цей тензор визначений в точці m однозначно. Нехай тепер $\{y'\}$ – інша система координат, геодезична в точці m . Аналогічним співвідношенням введемо тензор $U'_{v_1 \dots v_q}{}^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\alpha}$ для цієї системи. Але, завдяки властивості локально-геодезичних систем (див. зауваження до означення 5.2) легко перевірити, що компоненти U та U' , означені за формулою (5.7), пов'язані тензорним законом перетворення, тобто U та U' – це один і той самий тензор. Покажемо це на прикладі тензорів (у точці m):

$$U_{v\alpha}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\tilde{\mu}}} \frac{\partial y^{\tilde{v}}}{\partial x^{v}} \frac{\partial y^{\tilde{\alpha}}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \tilde{T}_{\tilde{v}}^{\tilde{\mu}}}{\partial y^{\tilde{\alpha}}}, \quad U'_{v\alpha}{}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y'^{\tilde{\mu}'}} \frac{\partial y'^{\tilde{v}'}}{\partial x^{v}} \frac{\partial y'^{\tilde{\alpha}'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \tilde{T}'_{\tilde{v}'}{}^{\tilde{\mu}'}}{\partial y'^{\tilde{\alpha}'}}.$$

Згідно із зауваженням до означення 5.2,

$$\frac{\partial \tilde{T}'_{\tilde{v}'}{}^{\tilde{\mu}'}}{\partial y'^{\tilde{\alpha}'}} = \frac{\partial y^{\tilde{\alpha}}}{\partial y'^{\tilde{\alpha}'}} \frac{\partial y'^{\tilde{\mu}'}}{\partial y^{\tilde{\mu}}} \frac{\partial y^{\tilde{v}}}{\partial y'^{\tilde{v}'}} \frac{\partial \tilde{T}_{\tilde{v}}^{\tilde{\mu}}}{\partial y^{\tilde{\alpha}}}$$

(другі похідні від координат у точці m дорівнюють нулю). Звідси

$$\begin{aligned} U'_{v\alpha}{}^{\mu} &= \frac{\partial y'^{\tilde{\alpha}'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y'^{\tilde{\mu}'}} \frac{\partial y'^{\tilde{v}'}}{\partial x^{v}} \frac{\partial y^{\tilde{\alpha}}}{\partial y'^{\tilde{\alpha}'}} \frac{\partial y'^{\tilde{\mu}'}}{\partial y^{\tilde{\mu}}} \frac{\partial y^{\tilde{v}}}{\partial y'^{\tilde{v}'}} \frac{\partial \tilde{T}_{\tilde{v}}^{\tilde{\mu}}}{\partial y^{\tilde{\alpha}}} = \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\tilde{\mu}}} \frac{\partial y^{\tilde{v}}}{\partial x^{v}} \frac{\partial y^{\tilde{\alpha}}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \tilde{T}_{\tilde{v}}^{\tilde{\mu}}}{\partial y^{\tilde{\alpha}}} = U_{v\alpha}^{\mu}. \end{aligned}$$

Таким чином, можна не турбуватися щодо конкретного вибору локально-геодезичної системи в означенні (5.7) тензора U , який визначений єдиним чином для всіх таких систем.

Означення 5.3. Коваріантною похідною від q коваріантного та p контраваріантного тензора $T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ у точці m називатимемо $q+1$ коваріантний і p контраваріантний тензор

$$\nabla_{\alpha} T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} = U_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\alpha},$$

означений за формулою (5.7), де система координат $\{y\}$ є геодезичною в точці m .

Вживаним є також позначення коваріантної похідної за допомогою крапки з комою:

$$\nabla_{\alpha} T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \equiv T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{;\alpha}.$$

Означення 5.3 є цілком природним і очевидним щодо принципу відповідності зі СТВ; воно автоматично гарантує тензорні властивості коваріантної похідної. Проте це означення не дуже зручне: для кожної точки m воно потребує окремого координатного перетворення до відповідної локально-геодезичної системи, тому отримуємо явну формулу для коваріантної похідної, що використовує геометричні величини лише в одній (поточній) системі координат $\{x\}$.

Почнемо з похідної від контраваріантного вектора T^{μ} . Нехай m – точка з координатами x_0^{α} у цій системі. Розглянемо деяку геодезичну в m систему координат $\{y\}$. За означенням коваріантної похідної в точці m маємо

$$\begin{aligned} (\nabla_{\alpha} T^{\mu})_m &= \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\bar{\mu}}} \right)_m \left(\frac{\partial y^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\alpha}} \right)_m \left(\frac{\partial}{\partial y^{\bar{\alpha}}} \left(T^{\sigma} \frac{\partial y^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\sigma}} \right) \right)_m = \\ &= \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\bar{\mu}}} \right)_m \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(T^{\sigma} \frac{\partial y^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\sigma}} \right) \right)_m = \\ &= \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\bar{\mu}}} \right)_m \left(\frac{\partial y^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\sigma}} \right)_m \left(\frac{\partial T^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \right)_m + \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\bar{\mu}}} \right)_m \left(\frac{\partial^2 y^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\alpha}} \right)_m T^{\sigma}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Перший доданок після врахування (3.2) зводиться до $\frac{\partial T^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}$. Для обчислення другого доданка згадаємо, що в локально-лоренцовій системі

координат $\{y\}$ маємо $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}(x_0) = 0$, звідки у силу закону перетворення зв'язності (5.3):

$$\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\bar{\mu}}}\right)_m \left(\frac{\partial^2 y^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\alpha}}\right)_m = \Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu}(x_0).$$

Звідси маємо

$$\nabla_{\alpha} T^{\mu} = \frac{\partial T^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu} T^{\rho}.$$

Ця формула, отримана в точці m , вибраної без будь-яких обмежень, очевидно, поширюється на всі точки в координатній системі $\{x\}$. Зауважимо, що цю формулу можна отримати інакше: а) за допомогою перетворення для символів Крістофеля (5.3) перевірити, що цей вираз утворює тензор (див. далі впр. 5.2); б) урахувати очевидну обставину, що цей вираз збігається зі звичайною похідною в локально-геодезичній системі (для будь-якої наперед фіксованої точки багатовиду).

Для коваріантного вектора T_{μ} коваріантна похідна в точці m :

$$(\nabla_{\alpha} T_{\mu})_m = \left(\frac{\partial y^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\alpha}}\right)_m \left(\frac{\partial y^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\mu}}\right)_m \left\{ \frac{\partial}{\partial y^{\bar{\alpha}}} \left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial y^{\bar{\mu}}} T_{\rho} \right) \right\}_m = \left(\frac{\partial y^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\mu}}\right)_m \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial y^{\bar{\mu}}} T_{\rho} \right) \right\}_m.$$

Враховуючи тотожності типу (3.3) для других похідних, дістаємо в точці m :

$$\nabla_{\alpha} T_{\mu} = \frac{\partial y^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial y^{\bar{\mu}}} \frac{\partial T_{\rho}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^2 y^{\bar{\mu}}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial y^{\bar{\mu}}} T_{\rho} \quad \text{або} \quad \nabla_{\alpha} T_{\mu} = \frac{\partial T_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} T_{\rho}.$$

Ця рівність поширюється на всі точки багатовиду.

Аналогічно отримуємо формулу для коваріантної похідної від загального p контраваріантного та q коваріантного тензора:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} + \sum_{i=1}^p \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu_i} T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \rho \mu_{i+1} \dots \mu_p} - \\ &- \sum_{j=1}^q \Gamma_{\alpha\nu_j}^{\rho} T_{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \rho \nu_{j+1} \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Для скалярної функції φ коваріантна похідна збігається зі звичайною частинною похідною:

$$\nabla_{\alpha} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\alpha}}. \quad (5.9')$$

Кількість доданків з коефіцієнтами зв'язності зі знаком "+" збігається з кількістю контраваріантних індексів, а зі знаком "-" збігається з кількістю коваріантних, наприклад:

$$\nabla_{\alpha} A_{\mu\nu} = \partial_{\alpha} A_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} A_{\rho\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\rho} A_{\mu\rho};$$

$$\nabla_{\alpha} A_{\nu}^{\mu} = \partial_{\alpha} A_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu} A_{\nu}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\rho} A_{\rho}^{\mu},$$

$$(\partial_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}).$$

Видно, що всі міркування, які привели до формули (5.9), і вигляд цих співвідношень подібні до випадку простору Мінковського (розд. 4). Відмінність полягає в тому, що в просторі Мінковського аналогічні до (5.7) формули можна записати для кожної точки *у спільній системі координат*, а в загальному рімановому просторі ці міркування треба проводити для кожної точки окремо, з використанням відповідної для цієї точки локально-геодезичної системи координат.

За формулою (5.7) (або за формулою (5.9)) легко встановити, що оператор коваріантного диференціювання ∇ має всі властивості звичайної похідної:

а) **лінійність**: $\nabla(aU_1 + bU_2) = a\nabla U_1 + b\nabla U_2$ (де a і b – константи) для тензорів U_1 і U_2 **однакової будови**;

б) **правило Лейбніца диференціювання добутку** $U_1 \circ U_2$ (\circ – це може бути прямиий добуток або згортка довільних тензорів U_1 і U_2):

$$\nabla(U_1 \circ U_2) = (\nabla U_1) \circ U_2 + U_1 \circ \nabla U_2.$$

Також за формулою (5.7), використовуючи (5.6), отримуємо, що

в) **коваріантна похідна від метричного тензора дорівнює нулю**:

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} \equiv 0, \quad (5.10, \text{ а})$$

Аналогічно

$$\nabla_{\alpha} g^{\mu\nu} \equiv 0, \quad (5.10, \text{ б})$$

$$\nabla_{\alpha} \delta_{\nu}^{\mu} \equiv 0. \quad (5.10, \text{ в})$$

Зауважимо, що рівність (5.10, а) є іншим записом формули (5.5). Завдяки тотожностям (5.10) похідна комує з операцією піднімання та опускання індексів.

Означення 5.4. Коваріантний диференціал тензора $T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ – це q коваріантний і p контраваріантний тензор $\delta T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$, компоненти якого в геодезичній у точці t системі координат збігаються в цій точці зі звичайним диференціалом.

Означення 5.5. Коваріантна похідна тензора $T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ уздовж неособливої кривої $x(\tau)$ – це q коваріантний і p контраваріантний тензор $\frac{\delta}{d\tau} T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$, компоненти якого в геодезичній у точці t системі координат збігаються в цій точці зі звичайною похідною вздовж кривої.

5.4. Вправи та корисні співвідношення

Вправа 5.1:

а) покажіть коректність формули (5.7) для коваріантної похідної (єдиність незалежно від вибору геодезичних координат у даній точці) у загальному випадку;

б) отримайте формулу

$$\delta T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} = dT_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} + \sum_{i=1}^p \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu_i} dx^\alpha T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_{i-1} \rho \mu_{i+1} \dots \mu_p} - \sum_{j=1}^q \Gamma_{\alpha v_j}^{\rho} dx^\alpha T_{v_1 \dots v_{j-1} \rho v_{j+1} \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}.$$

в) покажіть, що для загального тензорного поля U маємо $\delta T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \equiv dx^\alpha \nabla_\alpha T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$;

г) отримайте аналогічну (б) формулу для коваріантної похідної $\frac{\delta}{d\tau} T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ уздовж кривої;

д) покажіть, якщо тензорне поле U означене в околі кривої $x(\tau)$, то $\frac{\delta U}{d\tau} \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \nabla_\alpha U$.

Вправа 5.2. Отримайте формулу коваріантного диференціювання, якщо замість означення 5.3 постулювати такі твердження:

а) $\nabla_\alpha T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ – $q+1$ коваріантний і p коваріантний тензор;

б) коваріантна похідна від довільних скаляра ϕ і контраваріантного вектора A^μ дається формулами

$$\nabla_{\alpha}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}} \quad \text{та} \quad \nabla_{\alpha}A^{\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}A^{\rho}$$

(перевірити це прямим обчисленням);

в) коваріантна похідна задовольняє правило Лейбніца диференціювання добутку.

Розв'язання: насамперед треба перевірити коваріантність виразів, означених у (б). Для похідної від скалярної функції це очевидно, для $\nabla_{\alpha}A^{\mu}$ при переході від $\{x\}$ до $\{x'\}$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'^{\mu'}}{\partial x'^{\alpha'}} + \Gamma_{\alpha'\rho'}^{\mu'}A'^{\rho'} &= \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} \right) + \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\rho'}} \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu} \frac{\partial x'^{\rho'}}{\partial x^{\varepsilon}} A^{\varepsilon} + \\ &+ \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'} \partial x'^{\rho'}} \frac{\partial x'^{\rho'}}{\partial x^{\varepsilon}} A^{\varepsilon} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}} \left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu} A^{\rho} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right) A^{\mu} + \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'} \partial x'^{\rho'}} \frac{\partial x'^{\rho'}}{\partial x^{\varepsilon}} A^{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Два останніх доданки взаємно скорочуються, оскільки останній з них є

$$\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\rho'}} \right) \frac{\partial x'^{\rho'}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} = - \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\rho'}} \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x'^{\rho'}}{\partial x^{\mu}} \right) A^{\mu} = - \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right) A^{\mu},$$

де враховано співвідношення (3.2), (3.3). Цим тензорний закон перетворення для $\nabla_{\alpha}A^{\mu}$ доведено.

Далі обмежимося виведенням формули (5.9) для коваріантного вектора T_{μ} . Маємо для довільного вектора A^{μ} за звичайним правилом диференціювання

$$\nabla_{\alpha}(T_{\mu}A^{\mu}) = \partial_{\alpha}(T_{\mu}A^{\mu}) = (\partial_{\alpha}T_{\mu})A^{\mu} + T_{\mu}(\partial_{\alpha}A^{\mu})$$

і з використанням умови (б)

$$\nabla_{\alpha}(T_{\mu}A^{\mu}) = (\nabla_{\alpha}T_{\mu})A^{\mu} + T_{\mu}(\nabla_{\alpha}A^{\mu}).$$

Зіставлення цих співвідношень завдяки довільності A^{μ} дає

$$\nabla_{\alpha}T_{\mu} = \frac{\partial T_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\rho}T_{\rho}.$$

Маючи формулу коваріантного диференціювання для коваріантних і контраваріантних векторів, для виведення (5.9) у випадку загального

тензора $T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ слід розглянути його згортку з q контраваріантними та p коваріантними векторами, що мають незалежні довільні компоненти.

Вправа 5.3. Доведіть формулу $\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha} = |g|^{-1/2} \partial_{\mu} |g|^{1/2}$, де $\partial_{\mu} = \partial / \partial x^{\mu}$.

Вказівка: застосуйте формулу диференціювання визначника $\delta g = A^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$, де $A^{\alpha\beta}$ – алгебраїчне доповнення елемента $g_{\alpha\beta}$ у матриці $\|g_{\alpha\beta}\|$; урахуйте, що $g^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} / g$.

Вправа 5.4. Користуючись попереднім результатом, дістаньте формулу для дивергенції контраваріантного вектора

$$\nabla_{\alpha} A^{\alpha} = |g|^{-1/2} \partial_{\alpha} [|g|^{1/2} A^{\alpha}].$$

Вправа 5.5. Користуючись попереднім результатом, дістаньте формулу для коваріантного оператора Лапласа – Д'Аламбера від скалярної функції

$$\nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \Phi = |g|^{-1/2} \partial_{\alpha} [|g|^{1/2} g^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \Phi].$$

Вправа 5.6. Запишіть оператор Лапласа у плоскому просторі у сферичних ($ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 (\sin \theta)^2 d\varphi^2$) і циліндричних ($ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$) координатах за допомогою результату попередньої вправи.

Вправа 5.7. На одному й тому самому багатovidі можуть бути задані різні метричні тензори і відповідно асоційовані з ними символи Крістофеля $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(x)$ і $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}(x)$ (в одній і тій самій системі координат). Користуючись співвідношенням (5.3), покажіть, що різниці цих величин $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(x) - \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}(x)$ утворюють тензор.

Вправа 5.8. Знайдіть закон перетворення визначника $g = \det \|g_{\mu\nu}\|$.

Розв'язання: закон перетворення

$$g'_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} g_{\alpha\beta}$$

можна трактувати як добуток трьох матриць

$$\|g'_{\alpha'\beta'}\| = \left\| \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha'}} \right\| \|g_{\alpha\beta}\| \left\| \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}} \right\|.$$

Звідси для визначників маємо $g' = JgJ = J^2g$, де $J = \det \left\| \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \right\|$ – якобіан координатного перетворення $\{x\} \rightarrow \{x'\}$. Величину, що перетворюється таким чином, називають скалярною густиною ваги 2.

Зауваження: оскільки елемент чотиривимірного об'єму перетворюється як $d^4x \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = Jd^4x'$, з висновку впр. 5.8 випливає, що величина $\sqrt{|g|}d^4x$ є інваріантом. У загальній теорії відносності працюють з метриками, що мають лоренцову сигнатуру, тому $g < 0$ і як інваріантний елемент чотиривимірного об'єму обирають величину $\sqrt{-g}d^4x$. Її зручно використовувати при інтегруванні в чотиривимірному просторі.

6. ГЕОДЕЗИЧНІ В РІМАНОВОМУ БАГАТОВИДІ

У плоскому просторі серед можливих траєкторій особливу роль відіграють прямі лінії. Їх узагальненням на випадок ріманового простору є геодезичні лінії. Як буде видно далі, за відсутності інших полів, окрім гравітаційних, пробні частинки рухаються саме вздовж геодезичних, аналогічно тому, як у плоскому просторі вільні частинки рухаються вздовж прямих.

Згідно з розд. 5 (означення 5.5), коваріантна похідна вздовж неособливої кривої $x^\mu = x^\mu(p)$, параметризованої неособливим параметром p , визначена для будь-якого тензора, заданого в кожній точці цієї кривої, компоненти якого є диференційовними функціями. Якщо тензорне поле $T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ означене в околі цієї кривої, коваріантну похідну від тензорного поля можна записати як

$$\frac{\delta}{dp} T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} = \nabla_\alpha T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{dx^\alpha}{dp} \quad (6.1)$$

(див. впр. 5.1).

Означення 6.1. Кажуть, що тензор U переноситься паралельно вздовж неособливої кривої $x^\mu = x^\mu(p)$, якщо $\frac{\delta U}{dp} \equiv 0$ уздовж $x^\mu(p)$.

Означення 6.2. Крива $x^\mu = x^\mu(p)$, параметризована неособливим параметром p , є геодезичною, якщо її дотичний вектор є колінеарним деякому ненульовому вектору A^μ , що переноситься паралельно вздовж $x^\mu(p)$, тобто

$$\frac{dx^\mu}{dp} = \alpha(p)A^\mu, \quad \alpha(p) \neq 0, \quad \frac{\delta A^\mu}{dp} = 0.$$

Зробимо заміну параметра $p = p(\tau)$ так, що $d\tau/dp = \alpha(p)$, тоді паралельно переноситься сам дотичний вектор, причому

$$\frac{\delta}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0 \quad (6.2)$$

або

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (6.2, a)$$

Параметр τ на геодезичній $x^\mu(\tau)$ обраний таким чином, що $dx^\mu/d\tau$ переноситься паралельно, називають канонічним. Очевидно, для довільного параметра p :

$$\frac{\delta}{dp} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0.$$

Лінійне перетворення $\tau \rightarrow a\tau + b$ знову дає канонічний параметр.

Доведемо обернене твердження. Нехай τ і τ' – канонічні параметри на геодезичній $x^\mu(\tau)$. Тоді обидва вектори $dx^\mu/d\tau$ і $dx^\mu/d\tau'$ задовольняють одне й те саме лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку. З єдиності розв'язку цього рівняння випливає $\frac{dx^\mu}{d\tau} = a \frac{dx^\mu}{d\tau'}$, де a – стала, що визначається з початкових умов при деяких $\tau = \tau_0$, $\tau' = \tau'_0$. Звідси, оскільки $dx^\mu/d\tau \neq 0$, маємо $d\tau'/d\tau = a = \text{const}$, тобто τ і τ' пов'язані лінійним перетворенням.

Далі буде зручно використовувати представлення рівнянь геодезичних (6.2) за допомогою формального лагранжіана

$$L(x, u) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) u^\mu u^\nu, \quad (6.3)$$

розглядаючи x^μ і $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ як узагальнені координати та швидкості.

Відповідні рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}$$

після відповідних заміन індексів набувають вигляду

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\alpha\nu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (6.4)$$

Розкриваючи похідну в лівій частині

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\alpha\nu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) = g_{\alpha\nu} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) + g_{\alpha\nu,\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

і згортаючи з $g^{\mu\nu}$, дістаємо

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + g^{\mu\nu} \left(g_{\alpha\nu,\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

Оскільки

$$2g_{\alpha\nu,\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \equiv (g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau},$$

маємо

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0,$$

тобто рівняння геодезичних (6.2, а).

Доведемо, що величина $L(x, dx/d\tau)$ зберігається вздовж геодезичної, тобто сама є інтегралом руху:

$$\frac{d}{d\tau} L = \frac{\delta}{d\tau} L = \frac{\delta g_{\mu\nu}}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + 2g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\delta}{d\tau} \left(\frac{dx^\nu}{d\tau} \right).$$

Згідно з (5.10) $\frac{\delta}{d\tau} g_{\mu\nu} = 0$, а другий доданок є також нулем у силу (6.2), звідси випливає необхідне твердження.

Вправа 6.1. Доведіть останнє твердження, не використовуючи символ коваріантного диференціювання δ , а безпосередньо за допомогою формул (5.5) і (6.2, а). Пропонуємо це провести самостійно.

Оскільки вздовж геодезичних величина

$$\varepsilon = g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (6.5)$$

є сталою, будемо вибирати канонічний параметр так, щоб $\varepsilon = 1$ для часоподібних геодезичних, $\varepsilon = -1$ для просторовоподібних геодезичних, $\varepsilon = 0$ для ізотропних геодезичних. Це завжди можна зробити за допомогою лінійної заміни τ . Вибір ε фіксує τ з точністю до адитивної сталої, яка визначає початок відліку.

Розглянемо функціонал "відстані"

$$D = \int_{p_1}^{p_2} \left(\varepsilon g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{1/2} dp \quad (6.6)$$

на часоподібних або на просторовоподібних кривих у рімановому просторі з метричним тензором $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$. Покажемо, що умовою стаціонарності цього функціоналу є рівняння геодезичних, тобто перша варіація від D дорівнює нулю на кривих, що задовольняють (6.2). За вказаною умовою, записуючи рівняння Ейлера – Лагранжа з варіаційного числення, маємо

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{f} \frac{dx^\alpha}{dp} g_{\alpha\nu} \right) = \frac{1}{2f} g_{\alpha\beta,\nu} \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp}, \quad \text{де } f = \left(\varepsilon \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{1/2}. \quad (6.7)$$

Зробимо заміну параметра $p \rightarrow \tau$ на траєкторії, яка є розв'язком (6.7) так, щоб $\frac{d\tau}{dp} = f$, тоді видно, що (6.7) збігається зі співвідношенням (6.4), яке еквівалентне рівнянням геодезичних (6.2).

Вправа 6.2. Звести до квадратур рівняння геодезичних у рімановому багатовиді з квадратом інтервалу

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)\{d\vartheta^2 + (\sin\vartheta)^2 d\varphi^2\}. \quad (6.8)$$

Розв'язання: згідно з (6.3) запишемо формальний лагранжіан

$$L = \frac{1}{2} \left\{ A(r) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - B(r) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - C(r) \left[\left(\frac{d\vartheta}{d\tau} \right)^2 + (\sin\vartheta)^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] \right\}.$$

Рівняння Лагранжа мають вигляд

$$\frac{d}{d\tau} \left(A \frac{dt}{d\tau} \right) = 0;$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(B \frac{dr}{d\tau} \right) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{dA}{dr} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{dB}{dr} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{dC}{dr} \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + (\sin \theta)^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] \right\};$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(C \frac{d\theta}{d\tau} \right) = C \sin(2\theta) \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2; \quad \frac{d}{d\tau} \left((\sin \theta)^2 C \frac{d\varphi}{d\tau} \right) = 0.$$

Метрика (6.8) є інваріантною відносно тривимірних обертань навколо центра $r = 0$ при сталих r і t , тому з міркувань симетрії можна обмежитися рухом у площині $\theta = \frac{\pi}{2}$. Тоді третє рівняння тотожно задовольняється, а перше й останнє дають

$$A \frac{dt}{d\tau} = P_t; \quad C \frac{d\varphi}{d\tau} = P_\varphi, \quad \text{де } P_t, P_\varphi - \text{сталі.} \quad (6.9)$$

Далі замість другого рівняння, яке залишилося й містить другу похідну від радіальної змінної, звернемося до інтеграла (6.5), звідки

$$A \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - B \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - C \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = \varepsilon.$$

Підстановка рівнянь (6.9) приводить до диференціального рівняння першого порядку,

$$\frac{P_t^2}{A} - B \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{P_\varphi^2}{C} = \varepsilon, \quad (6.10)$$

яке неявно визначає залежність $r(\tau)$:

$$\tau(r) = \pm \int dr P_t^{-1} \sqrt{AB} \left\{ 1 - \frac{A}{C} L_\varphi^2 - \frac{\varepsilon A}{P_t^2} \right\}^{-1/2}, \quad L_\varphi = P_\varphi / P_t. \quad (6.11, \text{ а})$$

Після переходу в (6.10) до незалежної змінної t з урахуванням (6.9), отримуємо

$$t(r) = \pm \int dr \sqrt{B/A} \left\{ 1 - \frac{A}{C} L_\varphi^2 - \frac{\varepsilon A}{P_t^2} \right\}^{-1/2}. \quad (6.11, \text{ б})$$

Аналогічно

$$\varphi(r) = \pm \int dr \frac{L_\varphi \sqrt{AB}}{C} \left\{ 1 - \frac{A}{C} L_\varphi^2 - \frac{\varepsilon A}{P_t^2} \right\}^{-1/2}. \quad (6.11, \text{ в})$$

Знаки "+" або "-" у (6.11) відповідають ділянкам траєкторій геодезичних з різними знаками $\frac{dr}{d\tau}, \frac{dr}{dt}, \frac{dr}{d\varphi}$.

7. ТЕНЗОР КРИВИНИ

У цьому розділі введено поняття "плоский багатовид" і розглянуто відповідні умови з використанням тензора кривини Рімана. Забігаючи наперед зауважимо, що в загальній теорії відносності саме відмінність тензора Рімана від нуля є ознакою ненульового гравітаційного поля в скінченній області.

7.1. Тензор кривини і плоский багатовид

У розд. 5 доведено існування геодезичної системи координат у точці m , де перші похідні від метричного тензора в m дорівнюють нулю. Розглянемо умови, за яких існує система координат, де ці похідні дорівнюють нулю в усьому просторі або в скінченній області змінних x^α .

Обчислимо комутатор двох коваріантних похідних від контраваріантного вектора. Маємо двічі коваріантний і один раз контраваріантний тензор

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha &= \partial_\mu (\nabla_\nu A^\alpha) + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \nabla_\nu A^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \nabla_\sigma A^\alpha = \partial_\mu \partial_\nu A^\alpha + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha) A^\sigma + \\ &+ \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \partial_\mu A^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \partial_\nu A^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\rho}^\sigma A^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \nabla_\sigma A^\alpha. \end{aligned}$$

Частина доданків зникає при антисиметризації за нижніми індексами (див. (3.9)):

$$2\nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} A^\alpha \equiv (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) A^\alpha \equiv 2A^\alpha_{;[\nu\mu]} = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} A^\beta, \quad (7.1)$$

де введено позначення

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\sigma. \quad (7.2)$$

Ліва частина (7.1) – тензор, причому це співвідношення має місце для будь-якого вектора A^α . Тому $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ – це один раз контраваріантний і тричі коваріантний тензор за теоремою про полілінійні форми з розд. 3.

Означення 7.1. Тензор $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$, означений формулою (7.2), називають *тензором кривини* або *тензором Рімана*.

Із (7.1), після опускання та піднімання відповідних індексів, легко отримати аналогічне співвідношення для коваріантного вектора:

$$2\nabla_{[\gamma}\nabla_{\beta]}A_{\alpha} = R^{\sigma}_{\alpha\gamma\beta}A_{\sigma} = -R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}A_{\sigma} = R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}A_{\sigma}$$

або

$$2A_{\alpha;[\beta\gamma]} \equiv 2\nabla_{[\gamma}\nabla_{\beta]}A_{\alpha} = R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}A_{\sigma}. \quad (7.1, a)$$

Означення 7.2. Ріманів багатovid називатимемо плоским, якщо в околі кожної точки існує система координат, у якій $g_{\alpha\beta,\gamma} \equiv 0$. Відповідно у кожному такому околі $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv 0$.

На відміну від формули (5.6), в означенні 7.2 рівність нулю похідних від метричного тензора має місце в деякій області, а не тільки в окремій точці. Якщо $g_{\alpha\beta,\gamma} \equiv 0$, то можна, не порушуючи цю умову, застосувати лінійні перетворення так, щоб діагоналізувати метричний тензор, а потім за допомогою ділатацій (перетворень виду $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = a^{(\mu)}x^{\mu}$; тут немає суми за індексами!) зробити так, щоб діагональні елементи дорівнювали або +1, або -1. Нульових елементів тут не може бути, оскільки матриця $g_{\mu\nu}$ невироджена.

Теорема 7.1. Ріманів багатovid є плоским тоді й тільки тоді, коли

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \equiv 0. \quad (7.3)$$

Необхідність випливає з (7.1): якщо існує система координат, у якій $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv 0$, тоді коваріантні похідні в цій системі зводяться до частинних ∂_{μ} , які комутують між собою, тобто ліва частина (7.1) тотожно дорівнює нулю. Завдяки довільності A^{α} звідси маємо (7.3).

Доведемо достатність. Нехай виконано (7.3). Покажемо існування перетворення $x \rightarrow y = y(x)$ такого, щоб у системі $\{y\}$:

$$\tilde{\Gamma}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}(y) = \frac{\partial y^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{\bar{\beta}}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial y^{\bar{\gamma}}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x) + \frac{\partial y^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial y^{\bar{\beta}} \partial y^{\bar{\gamma}}} \equiv 0 \quad (7.4)$$

Обернене перетворення для символів Крістоффеля $0 = \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ має вигляд

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\sigma}} \frac{\partial^2 y^{\sigma}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}}; \quad (7.5)$$

очевидно (7.5) можна отримати з (7.4), і навпаки. Домножуючи (7.5) на $\partial y^\mu / \partial x^\alpha$ отримуємо систему рівнянь для функцій $y^\mu = y^\mu(x)$:

$$\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha},$$

яку зручно представити у вигляді системи першого порядку

$$\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} = \psi_\alpha^\mu; \quad (7.6. \text{ а})$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \psi_\alpha^\mu = \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \psi_\sigma^\mu \quad (7.6. \text{ б})$$

Перевіримо виконання достатніх умов локального існування розв'язку (7.6) відносно $y^\mu(x)$, $\psi_\alpha^\mu(x)$ (див. дод. 3). Ці умови формально виглядають як результат комутації других похідних, отриманих унаслідок системи (7.6). Із рівнянь (7.6, а) маємо співвідношення

$$0 \equiv (\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_\beta \partial_\alpha) y^\mu = (\Gamma_{\beta\alpha}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma) \psi_\sigma^\mu,$$

яке завжди виконується завдяки симетрії ріманової зв'язності $\Gamma_{\beta\alpha}^\sigma$ за нижніми індексами α, β . Із (7.6, б):

$$0 \equiv (\partial_\gamma \partial_\beta - \partial_\beta \partial_\gamma) \psi_\alpha^\mu = (\partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma) \psi_\sigma^\mu + (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \Gamma_{\gamma\sigma}^\rho - \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\rho) \psi_\rho^\mu = R_{\alpha\gamma\beta}^\sigma \psi_\sigma^\mu.$$

Ця умова також виконана завдяки (7.3). За дод. 3 звідси випливає існування розв'язку системи (7.6) в околі кожної точки багатовиду.

7.2. Властивості тензора кривини

Отримаємо формулу повністю коваріантного тензора Рімана

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\sigma} R^\sigma_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma (g_{\alpha\sigma} \Gamma_{\delta\beta}^\sigma) - \partial_\delta (g_{\alpha\sigma} \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma) - g_{\alpha\sigma, \gamma} \Gamma_{\delta\beta}^\sigma + \\ + g_{\alpha\sigma, \delta} \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma + g_{\alpha\sigma} (\Gamma_{\gamma\rho}^\sigma \Gamma_{\delta\beta}^\rho - \Gamma_{\delta\rho}^\sigma \Gamma_{\gamma\beta}^\rho).$$

Виражаючи похідні від метричного тензора через символи Крістоффеля за допомогою формули (5.5), після нескладних обчислень дістанемо

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta, \beta\gamma} + g_{\beta\gamma, \alpha\delta} - g_{\alpha\gamma, \beta\delta} - g_{\beta\delta, \alpha\gamma}) + g_{\sigma\rho} (\Gamma_{\alpha\delta}^\sigma \Gamma_{\beta\gamma}^\rho - \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \Gamma_{\beta\delta}^\rho). \quad (7.7)$$

Із формули (7.7) маємо алгебраїчні співвідношення для тензора кривини в рімановому багатовиді:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}; \quad (7.8)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0. \quad (7.9)$$

Доведення (7.8) й особливо (7.9) можна скоротити, якщо застосувати для будь-якої наперед заданої точки m локально-геодезичні координати. У цих координатах легко перевірити (7.8) і (7.9) у точці m , беручи до уваги лише лінійні за $g_{\mu\nu}$ члени в (7.7).

Аналогічно можна отримати *тотожності Біанкі*

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\epsilon} + R_{\alpha\beta\delta\epsilon;\gamma} + R_{\alpha\beta\epsilon\gamma;\delta} \equiv 0. \quad (7.10)$$

Тут маємо циклічну перестановку за останніми трьома індексами; нагадаємо, що крапка з комою означає коваріантне диференціювання. Для доведення (7.10) скористаємося локально-геодезичними координатами. Нехай $m \in M_n$, $\{y\}$ – координати, геодезичні в точці m . У цій точці коваріантна похідна збігається зі звичайною. Похідні від квадратичних за $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ членів у (7.7) у цій точці також дорівнюють нулю, тому для доведення (7.10) у точці m беремо до уваги лише ті доданки в (7.7), які є лінійними за другими похідними від метрики. Підстановка цих членів у (7.10) дає нуль після нескладних обчислень. Оскільки ліва частина (7.10) є тензором, це співвідношення в точці m має місце в будь-яких координатах. Ці міркування можна повторити для будь-якої точки m , тому (7.10) тотожно виконується в усьому просторі.

Означення 7.3. Згортку тензора Рімана за першим і третім індексами $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$ називають *тензором Річчі*. Цей тензор є симетричним:

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\beta\nu\alpha\mu} = R_{\nu\mu}, \text{ де застосовано властивості тензора Рімана (7.8).}$$

Зауважимо, що в літературі зустрічається також означення тензора Річчі як згортки за першим і четвертим індексами, що відрізняється за знаком.

Означення 7.4. Скалярну величину $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu}$ називають *скалярною кривиною*.

Означення 7.5. Тензор $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ називають *тензором Ейнштейна*. Важлива властивість цього тензора випливає з тотожностей Біанки (7.10). Згортка (7.10) з $g^{\beta\epsilon}$ і $g^{\alpha\gamma}$ дає тотожність

$$2R^{\beta}_{\delta;\beta} - R_{;\delta} \equiv 0,$$

яку можна записати у вигляді коваріантного "закону збереження":

$$G^{\beta}_{\delta;\beta} \equiv 0. \quad (7.11)$$

7.3. Відносне відхилення геодезичних

Аналіз відносної поведінки геодезичних дає змогу виявити характеристики ріманового багатovidу M_n і з'ясувати, чи є він плоским. Розглянемо сім'ю геодезичних ліній $x = X(u, v)$, де u є канонічним параметром уздовж кожної такої лінії, інший параметр, v , визначає геодезичну.

Для двох сусідніх геодезичних, що відповідають параметрам v і $v + dv$, розглянемо відносне відхилення $d\eta^{\mu} = V^{\mu}dv$, де $V^{\mu} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial v}$. По-

значимо також $U^{\mu} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial u}$ як дотичний до геодезичної вектор. Очевидно, V^{μ}, U^{μ} є контраваріантними векторами.

За умовою геодезичності

$$\frac{\delta}{\partial u} \left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial u} \right) = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\delta U^{\mu}}{\partial u} = 0, \quad (7.12)$$

де δ – коваріантний диференціал (див. розд. 5). Нагадаємо, що коваріантна похідна означена вздовж будь-якої неособливої прямої, у тому числі, уздовж сім'ї $x = X(u, v)$ при $v = \text{const}$. Звідси

$$\frac{\delta}{\partial v} \left(\frac{\delta U^{\mu}}{\partial u} \right) = 0. \quad (7.13)$$

Для будь-якого контраваріантного вектора $A^\mu(u, v)$, означеного на сім'ї геодезичних, пряме обчислення дає

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\partial v} \frac{\delta A^\mu}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\partial A^\mu}{\partial u} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial X^\alpha}{\partial u} A^\beta \right] + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial X^\alpha}{\partial v} \left[\frac{\partial A^\beta}{\partial u} + \Gamma_{\rho\sigma}^\beta \frac{\partial X^\rho}{\partial u} A^\sigma \right] = \\ & \text{(розкриваючи дужки та перепозначаючи індекси)} \\ &= \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial u \partial v} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\alpha \frac{\partial A^\beta}{\partial v} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \frac{\partial A^\beta}{\partial u} + \left(\partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \Gamma_{\gamma\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \right) V^\gamma U^\alpha A^\beta + \\ & \quad + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial v \partial u} A^\beta = \frac{\delta}{\partial u} \frac{\delta}{\partial v} A^\mu + R_{\beta\gamma\alpha}^\mu A^\beta V^\gamma U^\alpha. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Звідси, здійснюючи комутацію коваріантних похідних у (7.13) і використовуючи співвідношення

$$\frac{\delta U^\mu}{\partial v} = \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial v \partial u} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial X^\alpha}{\partial u} \frac{\partial X^\beta}{\partial v} = \frac{\delta V^\mu}{\partial u},$$

дістаємо рівняння девіації (відхилення) геодезичних

$$\frac{\delta^2 V^\mu}{\partial u^2} + R_{\alpha\beta\gamma}^\mu U^\alpha V^\beta U^\gamma = 0. \quad (7.15)$$

Звідси випливає, що коли тензор Рімана тотожно дорівнює нулю, то вектор відносного відхилення $d\eta^\mu$ близьких геодезичних може змінюватися лише лінійно. Це очевидно в координатній системі, де $g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$, у ній геодезичні лінії є прямими.

У загальній теорії відносності, де тіла рухаються за геодезичними, рівняння девіації (7.15) дає змогу визначити тензор Рімана за даними спостережень відносного руху тіл і променів світла. Звертаємо увагу, що тут йдеться саме про відносну поведінку траєкторій тіл. Маючи лише одну ізольовану траєкторію, не можна виявити наявності чи відсутності гравітаційного поля.

8. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕТРИЧНОЇ ТЕОРІЇ ТЯЖІННЯ

За звичкою, що виявилася доцільною, вони¹ дотримуються найпростіших припущень до тих пір, доки факти не вимусять їх до ускладнення або видозмінень цих припущень.

Е. Мах

Базисні положення теорії тяжіння спираються на численні експериментальні й теоретичні дослідження. Зрозуміло, що ми не в змозі подати тут повне обґрунтування цих положень. А. Ейнштейну знадобилося майже десятиріччя, щоб звести окремі міркування в єдину систему і сформулювати основи загальної теорії відносності, і після цього й досі продовжується ретельний аналіз її внутрішньої будови та її порівняння з іншими варіантами теорії тяжіння. Узагальнення результатів цих досліджень дає змогу подати основи теорії тяжіння у вигляді невеликої кількості аксіом, що буде зроблено з невеликими коментарями. У цьому розділі викладено ті положення теорії, що визначають еволюцію негравітаційних фізичних полів у рімановому просторі-часі. Вони однакові для всіх метричних теорій тяжіння, які відрізняються лише рівняннями для метричного тензора. Ці рівняння у ЗТВ розглядатимуться в розд. 10.

8.1. Вихідні положення

8.1.1. Загальна коваріантність. Як і у СТВ, у теорії тяжіння мають справу з множиною подій, будова якої визначає просторово-часові співвідношення між матеріальними об'єктами. Наступне твердження означає можливість введення координат у кожній області простору-часу: $\{A_0\}$ *множина подій (простір-час) є чотиривимірним диференційовним багатовидом M_4 .* Це твердження є теоретичною моделлю, яка застосована для опису широкого діапазону явищ. Разом з тим існує загальна думка, що ця модель потребує істотної модифікації на дуже малих масштабах, де треба враховувати квантово-гравітаційні ефекти. За-

¹ Йдеться про фізиків.

лежно від ситуації припускають необхідний порядок диференційовності багатовиду, що дає змогу застосовувати потужний апарат математичного аналізу. Припущення про багатовид подій природно пов'язане з розглядом тензорів у довільних координатах і дозволяє надати теорії інваріантного вигляду. Фізичний аналіз вимірювань просторово-часових величин за наявності гравітації показує, що всі системи координат, у тому числі й пов'язані нелінійними перетвореннями, є рівноправними. Наприклад, за принципом еквівалентності рух у прискореній системі відліку на малих масштабах відбувається так само, як і в неприскореній за наявності поля тяжіння. Ми не знаємо загального фізичного принципу, застосовного для довільних полів тяжіння, за допомогою якого можна було б виділити певний клас координатних систем чи систем відліку, тому логічно записати рівняння математичної фізики у вигляді, що не залежить від вибору координат, допускаючи будь-які невироджені координатні перетворення (не тільки лінійні, як у СТВ). Остання вимога задовольняється, якщо рівняння математичної фізики допускають запис у тензорному вигляді. Зауважимо, що в тензорному вигляді можна записати будь-які рівняння (навіть ньютонівської механіки), але для цього, як правило, необхідно ввести додаткові об'єкти, які, наприклад, характеризують виділені системи координат. Тому нетривіальним є такий постулат коваріантності: $\{A_1\}$ співвідношення для локальних фізичних полів допускають запис у тензорному вигляді без введення додаткових геометричних об'єктів, що характеризують систему координат.

Коментар: тут локальні поля (локальні фізичні величини) – це такі, що означені в точці й не пов'язані з інтегруванням у деякій, навіть малій області. Нижче ми уточнимо поняття локальності щодо фізичних вимірювань. Вимога локальності, очевидно, також містить певне обмеження на порядок похідних від фізичних величин у рівняннях негравітаційних полів. Вважатимемо, що локальні величини не містять похідних від фізичних полів вище першого порядку. Слід також відзначити, що у формулюванні постулату $\{A_1\}$ є певна невизначеність щодо об'єктів, які "характеризують систему координат". Як буде видно далі, рівняння фізичних полів містять метричний тензор, який характеризує гравітаційне поле. Проте явний вигляд метричного тензора містить також певну інформацію й про систему координат, тому це формулювання вимагає уточнення; більш конкретні вимоги до рівнянь теорії будуть сформульовані нижче за допомогою принципу локальної лоренцовості.

8.1.2. Простір-час – ріманів багатовид. Далі будемо виділяти *власне гравітаційні* ефекти – такі, що не зникають у певній області простору-часу в будь-яких неінерціальних системах відліку. Наприклад, однорідне гравітаційне поле, задане в скінченній області, не є власним, оскільки воно зникає з точки зору системи спостерігачів, що вільно падають у цій області. Однорідне гравітаційне поле, як свідчать експерименти, неможливо відрізнити від поля сил інерції в прискореній системі відліку.

Подальші міркування пов'язують гравітаційну взаємодію з властивостями простору-часу. Фундаментальною величиною в СТВ є квадрат інтервалу, який за допомогою метричного тензора простору Мінковського (4.1) можна записати в інваріантному вигляді відносно довільних координатних перетворень. Існування інерціальних систем координат у СТВ, де компоненти $g_{\mu\nu}$ є сталими, відображає факт однорідності простору-часу, але за наявності власне гравітаційного поля простір-час вже не є однорідним. Про це свідчать вимірювання інтервалів часу, викривлення траєкторій світлових променів у гравітаційному полі та інші експерименти. Тому, якщо ми бажаємо зберегти вигляд квадрата інтервалу (4.1, а) за наявності гравітації, зробимо вирішальний крок, надаючи нового змісту коефіцієнтам цієї квадратичної форми: на відміну від (4.1) вважатимемо, що в загальному випадку вони не зводяться до $\eta_{\mu\nu}$ у жодній системі координат. Іншими словами, тензор кривини $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, що відповідає $g_{\mu\nu}$, не дорівнює нулю.

Звичайно, можна було б розглянути ще більш загальний вираз для інтервалів часу ніж (4.1, а), проте це призвело б до появи нових теоретичних об'єктів, окрім $g_{\mu\nu}$, які потребують фізичної інтерпретації. Наразі немає експериментальних підстав для таких узагальнень¹. Тому, за принципом оккамового леза, зосередимося на такій формі для квадрата інтервалу:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (8.1)$$

де аналогічно СТВ вважаємо, що:

- а) події з координатами x і $x + dx$ можуть бути в причинному зв'язку лише тоді, коли права частина (8.1) більше або дорівнює нулю;
- б) якщо $ds^2 = 0$, ці події можуть бути пов'язані світловим сигналом (іншими словами, ці точки розташовані на траєкторії деякої безмасової частинки);

¹ Хоча теоретичні роботи в цьому напрямі, зрозуміло, існують.

в) якщо $ds^2 > 0$, ці точки розташовані на траєкторії деякої частинки ненульової маси; у цьому разі власний час частинки між цими подіями є

$$d\tau = \frac{1}{c} ds, \quad ds = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}.$$

Новим порівняно з СТВ припущенням є таке:

г) наявність кривини простору-часу, тобто відмінність тензора Рімана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ від нуля, є ознакою наявності власне гравітаційного поля.

У випадку (б) кажуть, що події з координатами x і $x + dx$ розділені світлоподібним (або ізотропним) інтервалом, у випадку (в) – часоподібним інтервалом. Інтервал, що відповідає $ds^2 < 0$, називають просторовоподібним; у цьому разі події x і $x + dx$ не можуть бути в причинному зв'язку.

Зазначені твердження коротко формулюють як постулат про ріманів багатовид: $\{B\}$ Множина подій є чотиривимірним рімановим багатовидом M_4 з метричним тензором $g_{\mu\nu}$, компоненти якого визначають квадратичну форму (8.1) від диференціалів координат з лоренцовою сигнатурою ($\sigma = -2$). Тензор $g_{\mu\nu}$ містить усю інформацію про гравітаційне поле.

Лоренцова сигнатура означає, що для будь-якої точки $m \in M_4$ простору-часу існує лінійне перетворення координат, яке в новій системі дає $g_{\mu\nu}(m) = \eta_{\mu\nu}$ (тут для кожної точки буде своє перетворення). Припущення відносно сигнатури необхідне принаймні тому, що частинним випадком M_4 є простір Мінковського СТВ. Природно, що σ не зміниться, якщо гравітаційне поле є слабким і властивості M_4 не дуже відрізняються від властивостей простору Мінковського. Це твердження поширюється з області слабого поля на весь простір-час, якщо ми бажаємо, щоб форма (8.1) була невивродженою відповідно до означення 5.1 (зміна сигнатури можлива лише за умови, що $g = \det \|g_{\mu\nu}\|$ перетворюється на нуль у деякій точці). Більш глибоке обґрунтування вибору σ впливає з принципу локальної лоренцовості простору-часу (див. далі), який також узгоджується з постулатом $\{B\}$.

8.1.3. Принцип локальної лоренцовості. Конкретизуємо постулати теорії тяжіння для того, щоб мати алгоритм для побудови співвідношень у рімановому просторі-часі. Для цього нам потрібно буде ввести локально-лоренцову систему координат. Нехай задано точку $m \in M_4$.

Означення 8.1. Система координат називається лоренцовою (або локально-лоренцовою) у точці m , якщо в цій системі $g_{\mu\nu}(m) = \eta_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu,\alpha}(m) = 0$.

Локально лоренцові координати є частинним випадком координат, що є геодезичними в точці m . Подане означення спирається на таку лему.

Лема 8.1. Для будь-якої точки $m \in M_4$ існує система координат, що є локально лоренцовою в точці m .

Доведення: нехай побудовано геодезичну в точці m систему координат (див. розд. 5). Будь-які лінійні перетворення не змінюють умову $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(m) = 0$ (або $g_{\mu\nu,\gamma}(m) = 0$), що очевидно в силу закону перетворення зв'язності (5.3). Цю обставину можна використати для діагоналізації квадратичної форми (8.1) за допомогою лінійних перетворень – відповідно до відомої теореми з лінійної алгебри. Після цього квадрат інтервалу в точці m має вигляд

$$ds^2|_m = \sum_{\mu=0}^3 \lambda_{\mu} (dy^{\mu})^2,$$

причому похідні від метричного тензора в цій точці дорівнюють нулю. Відповідно до гіпотези про вибір сигнатури одне із чисел λ_{μ} є додатним, решта – від'ємними. Координати можна впорядкувати так, що $\lambda_0 > 0$, $\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, 3$, тоді бажаний результат дає розтяг координатних осей $y^{\mu} \rightarrow \tilde{y}^{\mu} = \sqrt{|\lambda_{\mu}(m)|} y^{\mu}$, де за індексами $\mu = 0, 1, 2, 3$ немає підсумовування. Лемі доведено.

Для подальшого треба уточнити поняття локальних вимірювань і локальних фізичних величин. Лема 8.1 справедлива для будь-яких, у тому числі й власне гравітаційних полів, адже рівність нулю перших похідних від метричного тензора в окремій точці не означає рівності нулю тензора кривини в цій точці. Перехід у локально-лоренцову систему знищує (у точці) лише невластні (гравітаційно-інерційні) ефекти. При розгляді принципу еквівалентності в розд. 1 йдеться про "локальну лабораторію" і точкові тіла, маючи на увазі малі розміри тіл або розміри лабораторії, де проводяться локальні вимірювання. Фізичні експерименти свідчать, що в кожному конкретному випадку існує такий малий просторово-часовий масштаб, на якому можливо мати справу лише з негравітаційними полями, нехтуючи власне гравітаційними ефектами, тобто ефектами кривини. Це дуже спрощує справу. За звичайних умов для того, щоб зафіксувати викривлення простору-часу, треба або розглядати великі (астрономічні) масштаби, або – на менших масштабах – мати дуже точні прилади. Проте, чим сильніше власне гравітаційне поле, тим меншим буде масштаб. Фізичні вели-

чини, поля та алгоритми їх вимірювання, для яких несуттєві ефекти кривини, називатимемо *локальними*.

Як свідчать експерименти, поле тяжіння створює однакові прискорення будь-яких пробних тіл у *одній* точці. Гравітаційні ефекти, відмінні від інерційних, можна зафіксувати, лише спостерігаючи відносний рух тіл у *різних* точках, причому відносні прискорення між ними будуть тим меншими, чим меншою буде відносна відстань. З іншого боку, відносні прискорення під дією негравітаційних полів можна спостерігати "у точці", тобто в *локальних експериментах*. Наприклад, за наявності електромагнітного поля виникає відносне прискорення зарядженого та нейтрального тіл, як би близько вони не були розташовані. Із розгляду видно, що *власне гравітаційне поле має нелокальний характер*.

Розмір околу точки m , у якому можна знехтувати відмінністю $g_{\mu\nu}$ від $\eta_{\mu\nu}$, залежить як від значень других похідних $g_{\mu\nu,\alpha\beta}(m)$ (які всі одночасно не можна обернути на нуль, якщо $R_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(m) \neq 0$), так і від характеру конкретної задачі, що розглядається. Усі існуючі перевірки принципу еквівалентності свідчать, що локальна фізика не залежить від $g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ і отже, від тензора кривини. Це вказує шлях до побудови рівнянь локальних полів у викривленому просторі-часі.

Розглянемо спостереження в лабораторії, розміри якої досить малі. Припустимо, що на лабораторію ззовні не діють ніякі сили, окрім гравітаційних, тобто вона вільно рухається. За ейнштейнівським принципом еквівалентності (підрозд. 1.1), що узгоджується з дослідом з дуже великою точністю, усередині лабораторії діють закони спеціальної теорії відносності. За допомогою переходу від локально-лоренцової системи, ми маємо змогу записати ці закони в будь-яких координатах.

Конкретизуємо висловлені міркування у формі **постулату локальної лоренцовості**.

{B} *Нехай m – будь-яка точка багатовиду події M_4 , а $\{y\}_m$ – локально-лоренцова в точці m система координат. У точці m у системі $\{y\}_m$ усі співвідношення для локальних тензорних фізичних величин, що не містять похідних вище першого порядку, збігаються з відповідними співвідношеннями СТВ.*

Коментар:

а) на прикладі формули (7.2) про комутатор двох коваріантних похідних зрозуміло, чому в постулаті {B} йдеться про диференціальні рівняння не вищі першого порядку. Два послідовних коваріантних диференціювання породжують вирази з похідними від символів Крістоффеля, тобто з другими похідними від метричного тензора, які

в координатах $\{y\}_m$ не зникають у точці m . Тому такі співвідношення не є локальними й їх неможливо однозначно зафіксувати, виходячи з відповідних співвідношень СТВ. Наприклад, рівняння девіації геодезичних (7.15) з ненульовим тензором Рімана не перейдуть у рівняння з $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0$, яким би малим ми не вибрали окіл точки m . На щастя, найбільш важливі фізичні поля, які розглядаються в релятивістській астрофізиці та теорії тяжіння, можуть бути описані рівняннями першого порядку;

б) локально-лоренцова в точці m система координат обрана для порівняння з СТВ саме тому, що в ній властивості метричного тензора в околі m подібні до $\eta_{\mu\nu}$. Локально-лоренцові координати в околі точки m відповідають звичайному сприйняттю спостерігачем просторово-часових співвідношень, тобто відповідають системі відліку спостерігача, що вільно рухається. За принципом еквівалентності гравітаційні сили в цій точці локально компенсуються фіктивними "силами" інерції і фізичні закони мають вигляд співвідношень СТВ.

8.1.4. Резюме. Алгоритм введення співвідношень для локальних полів у викривленому просторі-часі виглядає таким чином:

а) записуємо ці співвідношення в тензорному вигляді, де окрім негравітаційних локальних полів може входити лише метричний тензор (постулати $\{A\}$, $\{B\}$);

б) для будь-якої точки (події) записане співвідношення має збігатися з відповідним співвідношенням СТВ у локально-лоренцовій системі (постулат $\{B\}$).

Наведене вище однозначно фіксує широке коло тензорних співвідношень математичної фізики згідно з властивістю тензорів (однозначність визначення тензорів компонентами в деякій системі). Власне, ми вже використовували аналогічний принцип у розд. 5 для побудови коваріантної похідної. Таким чином, щоб визначити форму рівнянь математичної фізики у викривленому просторі-часі, треба в рівняннях СТВ замінити $\eta_{\mu\nu}$ на $g_{\mu\nu}$, а звичайні похідні – на коваріантні, оскільки вони збігаються зі звичайними в локально-лоренцовій системі у відповідній точці. Це правило часто називають принципом мінімального зв'язку.

У даному посібнику {A–B} розглядаються як основні постулати, на яких базується подальший виклад¹. Вони дають змогу визначити фізичні закони, які керують еволюцією негравітаційних полів, матеріальних тіл тощо, у викривленому просторі-часі із заданим метричним тензором $g_{\mu\nu}$. Навпаки, можна визначити цей тензор експериментально, вивчаючи рух тіл і фотонів у деякій системі відліку. Щодо рівнянь для $g_{\mu\nu}$, то вони розглядатимуться окремо.

8.2. Спостережувані величини у викривленому просторі-часі

8.2.1. Власний час. Розглянемо деякі локально спостережувані величини, що можуть бути експериментально виміряні спостерігачем безпосередньо на його траєкторії. Зокрема, нас цікавитимуть величини, за допомогою яких визначаються просторово-часові співвідношення між подіями: власний час і кути між напрямками. Відстань не є локальною величиною і для неї в релятивістській теорії тяжіння (РТТ) немає загальноприйнятого визначення. Є різні типи відстаней (радіолокаційна, паралактична тощо), які не збігаються між собою у викривленому просторі-часі.

Час – це одна з найважливіших величин, які можуть бути виміряні безпосередньо спостерігачем. Інтервали часу визначаються за формулою (8.1) для близьких подій на чотиривимірній траєкторії (часто вживають термін "світова лінія") при

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} dp^2 \geq 0.$$

Нагадаємо, що часоподібна крива $x(t)$ (у кожній точці $ds^2 > 0$) може описувати рух частинки з ненульовою масою спокою; ізотропна крива ($ds^2 = 0$) – рух частинки з нульовою масою спокою; точки на просторовоподібній траєкторії ($ds^2 < 0$) причинно не пов'язані, вони можуть мати спільну причину, але одна подія не може бути причиною іншої.

¹ Зрозуміло, що ці постулати не можна вивести логічно з СТВ, не спираючись на фізичні реалії, але зазначимо, що існує низка досліджень, які більш глибоко відстежують взаємозв'язок цих принципів зі слабким і ейнштейнівським принципами еквівалентності.

Власний час уздовж часоподібної траєкторії згідно з (8.1) обчислюється за формулою

$$\tau = \frac{1}{c} \int dp \left\{ g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (8.2)$$

Дана формула буде повністю визначена, якщо зафіксувати початок відліку часу, тобто точку на траєкторії спостерігача й відповідне значення параметра p , що задає нижню межу інтегрування. Формула (8.2) не залежить від вибору параметра вздовж траєкторії, але для часоподібних траєкторій найзручнішим фізично змістовним параметром є саме власний час або $s = \tau \cdot c$. Нехай $x = x_0(\tau)$ – це (часоподібна) траєкторія спостерігача, τ – його власний час; $u^\mu = dx^\mu / ds$ – 4-швидкість. Очевидно, розділивши $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ на ds^2 уздовж траєкторії, дістанемо співвідношення $u^\mu u_\mu = 1$.

8.2.2. Локально-супутня система спостерігача. Для математичного опису процесу вимірювань у рімановому просторі-часі зручно використовувати прості моделі систем відліку локального спостерігача, що розглядаються далі. Нехай траєкторія спостерігача проходить через точку m простору-часу. Локально-супутньою системою спостерігача в точці m будемо називати локально-лоренцову систему (у цій самій точці), де $u^\mu(m) = (1, 0, 0, 0)$. Це – миттєва система спокою спостерігача. На його траєкторії в околі m у цій системі маємо $dx^\mu = (dx^0, 0, 0, 0)$ і $ds = cd\tau = dx^0 = cdt$.

Для визначення локально-супутньої системи використовують фіксовані (реперні) напрямки, що створюють певну систему відліку в околі спостерігача. В астрометричних спостереженнях, наприклад, це можуть бути напрямки на деякі небесні тіла, напрямки обертання осі Землі тощо. Виходячи з них можна фізично задати три напрямки, пов'язані з астрономічною системою відліку. Оскільки реальні вимірювання проводяться спостерігачем у його власній системі, зафіксуємо три просторові напрямки в точці спостереження за допомогою просторовоподібних векторів $e^\mu_{(i)}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ так, щоб

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{(a)(b)}, \quad a, b = 0, 1, 2, 3, \quad (8.3)$$

де додатковий четвертий вектор – 4-швидкість спостерігача $e_{(0)}^\mu = u^\mu$, $\eta_{(a)(b)}$ – компоненти тензора Мінковського; індекси, що нумерують вектори, беремо в дужки, щоб не плутати їх з векторними індексами. Припускаємо, що четвірка векторів $e_{(a)}^\mu$ (її називають *тетрадою*) задана в кожній точці траєкторії $x_0(\tau)$ і задовольняє умову ортонормування (8.3). На практиці просторовоподібні вектори $e^\mu_{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, моделюють певну вимірювальну процедуру.

Набір компонент $e_{(a)}^\mu$ за всіх значень індексів утворює матрицю $\|e_{(a)}^\mu\|$, яка є не виродженою. Дійсно, співвідношення (8.3) можна подати як добуток, до якого як множник входить зазначена матриця. Взяти детермінант від обох частин (8.3), легко отримати $\det \|e_{(b)}^\nu\| \neq 0$, тому існує обернена до $e_{(a)}^\mu$ матриця $e^{(a)}_\mu$:

$$e_{(a)}^\nu e^{(a)}_\mu = \delta^\nu_\mu, \quad e_{(a)}^\mu e^{(b)}_\mu = \delta^{(b)}_{(a)}.$$

Зазначимо, що введення поля тетрад у всьому просторі (а не тільки на світовій лінії спостерігача) дає змогу моделювати вимірювання фізичних величин, а також давати нові представлення динамічних рівнянь теорії (див. дод. 4).

У локально-супутній системі в заданій точці на світовій лінії спостерігача можна вибрати координатні осі й вектори тетради так, що

$$\{e_{(a)}^\mu\} = \{e^{(a)}_\mu\} = \delta^{(a)}_\mu.$$

Будемо називати таку тетраду власною.

Для довільного вектора A^μ ототожнюємо його проєкції на вектори власної тетради $A^{(a)} = A^\mu e^{(a)}_\mu$ з величинами, що вимірює спостерігач у своїй власній (локально-супутній) системі.

Маючи явний вигляд векторів тетради $e_{(a)}^\mu$, за проєкціями вектора на тетраду можна відновити його компоненти, і навпаки. Три компоненти v^i звичайної швидкості частинки ненульової маси відносно спостерігача можна отримати з 4-швидкості $V^\alpha = dx^\alpha / ds$ цієї частинки ($x^\alpha(s)$ – світова лінія частинки, s/c – власний час на цій лінії):

$$v^i = \frac{cV^\mu e_{\mu}^{(i)}}{V^\nu e_{\nu}^{(0)}}, \quad i = 1, 2, 3;$$

це легко перевірити за допомогою переходу в локально-супутню систему спостерігача:

$$cV^\mu e_{\mu}^{(i)} / V^\nu e_{\nu}^{(0)} = cV^i / V^0 = cdx^i / dx^0 = dx^i / dt.$$

Компоненти тензора електромагнітного поля $\tilde{F}_{\alpha\beta}$ у локально-супутній системі спостерігача слід ототожнити з вимірюваними ним компонентами електричного та магнітного полів:

$$E_i = \tilde{F}_{0i}, \quad B_i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1,2,3} \varepsilon_{ijk} \tilde{F}_{jk}, \quad \tilde{F}_{ij} = -\sum_{k=1,2,3} \varepsilon_{ijk} B_k \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

де ε_{ijk} – тривимірний символ Леві-Чівіта (див. підрозд. 3.1, ч. 1), звідки в довільній системі

$$E_i = e_{(0)\mu}^\mu e_{(i)\nu}^\nu F_{\mu\nu}, \quad B_i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1,2,3} \varepsilon_{ijk} e_{(j)\mu}^\mu e_{(k)\nu}^\nu F_{\mu\nu}.$$

Таким чином, вимірювання в локальній лабораторії визначають компоненти тензора електромагнітного поля в будь-якій системі координат $\{x^\alpha\}$:

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{F}_{\alpha\beta}(\tilde{x}).$$

Запишемо співвідношення для кутових величин, пов'язаних з ізотропними траєкторіями фотонів та інших частинок нульової маси. Відмінність від масивних частинок полягає в неможливості користуватися власним часом на світових лініях, які вважатимемо параметризованими за допомогою деякого параметра p . Нехай тепер $x^\mu(p)$ – траєкторія фотона, що перетинає траєкторію спостерігача в точці $t \in M_4$, тоді просторовий напрямок руху фотона відносно спостерігача визначається проекціями ізотропного вектора $V^\mu = dx^\mu / dp$ на вектори власної тетради:

$$n^i = \frac{v^i}{c} = \frac{e_{\mu}^{(i)} dx^\mu / dp}{e_{\nu}^{(0)} dx^\nu / dp}, \quad i = 1, 2, 3,$$

де v^i – компоненти тривимірної швидкості фотона відносно спостерігача в його власній системі, $(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = c^2$. Зауважимо, що цю формулу для швидкості з довільним вибором параметра можна використовувати й для масивних частинок.

Для косинуса кута між двома траєкторіями фотонів $x(p)$, $\tilde{x}(p)$, що перетинають траєкторії спостерігача в точці m , має місце інваріантна формула

$$\cos \theta = 1 - V^\mu \tilde{V}_\mu (V_\alpha u^\alpha)^{-1} (\tilde{V}_\beta u^\beta)^{-1}, \quad (8.4)$$

де $V^\mu = dx^\mu / dp$, $\tilde{V}_\mu = d\tilde{x}^\mu / d\tilde{p}$, u^α – 4-швидкість спостерігача. Ця формула вже не використовує просторових векторів тетради. Вибір параметрів p і \tilde{p} є довільним. Для перевірки (8.4) досить перейти в локально-супутню в точці m систему координат, у якій $dt = dx^0 / c$ – це звичайний проміжок часу, виміряний спостерігачем. Легко дістати

$$V^\mu \tilde{V}_\mu (V_\mu u^\mu)^{-1} (\tilde{V}_\mu u^\mu)^{-1} = 1 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{v}})}{c^2} = 1 - \cos(\theta),$$

де $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}$ – тривимірні вектори звичайної швидкості фотонів у його власній системі.

8.3. Суцільне середовище та пробні частинки

8.3.1. Рівняння руху ідеальної рідини. Запишемо рівняння гідродинаміки, узагальнюючи закон збереження тензора енергії-імпульсу $T^{\mu\nu}$ у СТВ (див. розд. 6, ч. 1):

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (8.5)$$

де

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu} p, \quad (8.6)$$

ε – густина енергії в системі спокою (супутній системі) елемента рідини; p – тиск, що аналогічно СТВ є функцією двох термодинамічних параметрів¹; $U^\mu = dx^\mu / ds$ – ейлерова 4-швидкість, що визначається

¹ Наприклад, концентрація баріонів і густина питомої ентропії або питомої ентропії та густини енергії в системі спокою елемента рідини.

в кожній точці середовища; $U^\mu U_\mu = 1$. Густина енергії та тиск, а також інваріантна концентрація баріонів n^* , є скалярними величинами; вони визначаються в локально-супутній системі спостерігача, що рухається разом з елементом рідини.

Рівняння (8.5) має тензорний вигляд і містить тільки гідродинамічні величини плюс метричний тензор простору-часу, тобто відповідає вимозі коваріантності. У довільній точці можна ввести локально-лоренцову систему координат; у ній і в цій точці коваріантні похідні збігатимуться зі звичайними похідними, а рівняння (8.5) збігатимуться з рівняннями гідродинаміки СТВ. Таким чином, рівняння (8.5) відповідає вимозі локальної лоренцовості й у межах постулатів {A–B} є єдино можливими рівняннями руху ідеальної рідини у викривленому просторі-часі з метричним тензором $g_{\mu\nu}$.

Подальший розгляд аналогічний до гідродинаміки СТВ (див. розд. 6, ч. 1). Із (8.5) випливає

$$U^\nu \nabla_\mu [(\varepsilon + p)U^\mu] + (\varepsilon + p)U^\mu \nabla_\mu U^\nu - g^{\mu\nu} \nabla_\nu p = 0. \quad (8.7)$$

Помножимо це рівняння на U_ν і врахуємо, що зі співвідношення нормування $U_\nu U^\nu = 1$ маємо $U_\nu \nabla_\mu U^\nu = 0$, тоді

$$\nabla_\mu [(\varepsilon + p)U^\mu] = U^\mu \nabla_\mu p \equiv U^\mu \partial_\mu p. \quad (8.8)$$

Урахуємо це в рівнянні (8.7) і дістанемо

$$(\varepsilon + p)U^\mu \nabla_\mu U^\nu = (g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu) \partial_\nu p. \quad (8.9)$$

Рівняння (8.8), (8.9) – це релятивістське узагальнення рівнянь Ейлера, які описують рух суцільного середовища.

Рівняння (8.5) треба доповнити рівнянням стану та незалежним еволюційним рівнянням для ще одного термодинамічного параметра. Це може бути, наприклад, рівняння збереження кількості баріонів, яке відповідно до постулату {B} аналогічно узагальнює рівняння (6.8) із ч. 1 на випадок ріманового простору-часу:

$$\nabla_\mu (n^* U^\mu) = 0. \quad (8.10)$$

Термодинамічні співвідношення для питомих величин в локальній системі, рівняння на ударних хвилях і їх наслідки мають такий самий вигляд, як у СТВ.

8.3.2. Рух вільних частинок. Уведемо лінії струму як траєкторії, що є розв'язками диференціального рівняння

$$\frac{dx^\mu}{ds} = U^\mu(x). \quad (8.11)$$

Лінії струму одночасно є світовими лініями елементів середовища, а у випадку вільного руху частинок у гравітаційному полі – світовими лініями цих частинок. В останньому випадку, коли тиск відсутній ($p \equiv 0$), а елементи речовини рухаються лише під впливом гравітаційних сил, з (8.9) маємо

$$U^\mu \nabla_\mu U^\nu = 0. \quad (8.12)$$

Звідси дістанемо рівняння траєкторії для окремого елемента рідини. Із (8.11), обчислюючи коваріантну похідну вздовж траєкторії елемента рідини (див. означення 5.5 і властивості коваріантного диференціювання вздовж кривої з розд. 5), обчислюємо

$$\frac{\delta}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\nu}{ds} \nabla_\nu U^\mu = U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0.$$

Отже, траєкторія вільної частинки є геодезичною лінією:

$$\frac{\delta}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = 0, \quad (8.13)$$

вона є часоподібною ($U^\mu U_\mu = 1$).

За принципом еквівалентності (див. розд. 1) рух тіл у полі тяжіння не залежить від їх внутрішньої будови, тому (8.13) є рівнянням руху для будь-якого пробного тіла за відсутності зовнішніх негравітаційних сил.

8.4. Електродинаміка

8.4.1. Електромагнітне поле та заряджені частинки. Аналогічно викладеному в п. 8.3.2 і згідно з постулатами {A–B} рівняння електромагнітного поля в рімановому просторі-часі мають вигляд

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} J^\mu; \quad (8.14)$$

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = 0; \quad (8.15)$$

$$F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}, \quad (8.16)$$

де тензор Максвелла $F_{\mu\nu}$ і 4-вектор струму J^μ визначаються формулами СТВ у локально-супутній системі для точки на траєкторії спостерігача (підрозд. 8.2). Проекції цих об'єктів на вектори власної тетради в заданій точці на траєкторії спостерігача дадуть вимірювані компоненти напруженостей електричного та магнітного полів.

Рівняння руху заряду згідно з принципом локальної лоренцовості та рівнянням СТВ має вигляд

$$\frac{\delta u^\mu}{ds} = \frac{e}{mc^2} F^\mu{}_\nu u^\nu, \quad (8.17)$$

де u^μ – 4-швидкість пробного тіла з масою m і зарядом e . Вони узагальнюють рівняння руху незаряджених частинок (8.13).

Вправа 8.1. Покажіть, що рівняння (8.15) збігаються з рівняннями СТВ у плоскому просторі.

Вказівка: застосуйте (8.16) та означення коваріантної похідної.

8.4.2. Рівняння геометричної оптики. Нехай $J^\mu = 0$. У наближенні геометричної оптики шукаємо розв'язок рівнянь електромагнітного поля у вигляді

$$F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} \exp[-i\Omega], \quad (8.18)$$

де $f_{\mu\nu}$ – функція, що змінюється повільно, а ейконал Ω містить великий параметр, причому для характерних значень величин маємо

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} |k_{\alpha}| \cdot \max_{\mu, \nu} \{|f_{\mu\nu}|\} &\gg \max_{\mu, \nu, \alpha} \{|f_{\mu\nu, \alpha}|\}, \\ \max_{\alpha} |k_{\alpha}| &\gg \max_{\mu, \nu, \alpha} |\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}|, \end{aligned}$$

де позначено $k_{\alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial x^{\alpha}}$. Це припущення правомірне, коли довжина хвилі електромагнітного випромінювання значно менша від масштабу характерної зміни гравітаційних величин, що визначений тензором кривини. Зокрема, це практично завжди виконується в астрономічних умовах. Ураховуючи основні порядки наближення, маємо $\nabla_{\alpha} F_{\mu\nu} \approx ik_{\alpha} F_{\mu\nu}$ і з (8.14), (8.15) дістаємо

$$F^{\mu\nu} k_{\nu} = 0, \quad F_{\alpha\beta} k_{\gamma} + F_{\beta\gamma} k_{\alpha} + F_{\gamma\alpha} k_{\beta} = 0.$$

Згортаючи другу групу рівнянь з $k^\gamma = g^{\gamma\rho}k_\rho$ з урахуванням першої, маємо $F_{\alpha\beta}k_\gamma k^\gamma = 0$, тобто при $F_{\alpha\beta} \neq 0$ звідси випливає $k_\gamma k^\gamma = 0$ або

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\Omega}{\partial x^\beta} = 0 \quad (8.19)$$

– рівняння ейконалу, що описує поширення променів світла в гравітаційному полі. Поверхні рівня функції Ω , тобто поверхні сталості фази (8.18), визначають форму фронтів електромагнітних хвиль і напрямок їх руху.

У плоскому просторі для звичайних плоских хвиль маємо

$$\Omega = k_\mu x^\mu = k^0 x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x},$$

де $k^\mu = \eta^{\mu\nu}k_\nu = (k^0, \mathbf{k})$, $k^0 = \omega/c = |\mathbf{k}|$. Тривимірний вектор \mathbf{k} , ортогональний до поверхні фронту, задає просторовий напрямок руху променів світла $x = x(p)$, p – параметр на траєкторії. При довільній параметризації це можна записати як умову колінеарності вектора дотичної та вектора k^μ :

$$\frac{dx^\mu}{dp} = \chi(p)k^\mu,$$

де три рівняння при $\mu = 1, 2, 3$ відповідають просторовому напрямку, а четверте рівняння при $\mu = 0$ забезпечує ізотропність траєкторії (фотон рухається зі швидкістю світла).

Рівняння для траєкторії $x = x(p)$ очевидним чином узагальнюється на випадок викривленого простору-часу¹:

$$\frac{dx^\mu}{dp} = \chi(p)k^\mu = \chi(p)g^{\alpha\beta} \frac{\partial\Omega}{\partial x^\beta}. \quad (8.20)$$

У локально-лоренцовій системі це відповідає рівнянню СТВ для променів. Далі зручно зробити заміну параметра $p \rightarrow \tau$ (не плутати з власним часом, що не існує на ізотропних кривих!) так, щоб компенсувати множник χ у (8.20):

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = k^\mu(x). \quad (8.21)$$

¹ Траєкторії, що задовольняють (8.20), є характеристиками рівняння ейконалу (8.19).

Уздовж траєкторії $x(\tau)$ у силу (8.19)

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{\partial\Omega}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} = k^\mu k_\mu = 0, \quad (8.22)$$

тобто Ω є інтегралом цієї системи диференціальних рівнянь (8.21).

Покажемо, що траєкторія $x(\tau)$ є ізотропною геодезичною. Обчислюючи коваріантну похідну вздовж $x(\tau)$, маємо

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) &= \frac{\delta}{d\tau} k^\mu(x(\tau)) = \left(\nabla_\alpha k^\mu \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \\ &= k^\alpha \nabla_\alpha k^\mu = k^\alpha g^{\mu\nu} \nabla_\alpha k_\nu = g^{\mu\nu} k^\alpha \nabla_\nu k_\alpha, \end{aligned}$$

де використано співвідношення

$$\nabla_\alpha k_\nu = \partial_\alpha k_\nu + \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma k_\sigma = \partial_\alpha \partial_\nu \Omega + \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma k_\sigma = \nabla_\nu k_\alpha.$$

Диференціюючи (8.19) у вигляді $k^\alpha k_\alpha = 0$, маємо $k^\alpha \nabla_\nu k_\alpha = 0$, звідки

$$\frac{\delta}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0.$$

Таким чином, $x = x(\tau)$ – геодезична; завдяки (8.19) вона є ізотропною, причому τ – канонічний параметр. За допомогою ізотропних геодезичних можна будувати розв'язки рівняння (8.19) (див. дод. 5).

8.4.3. Частота випромінювання. Запишемо формулу для частоти, яку сприймає спостерігач з траєкторією $x_0^\mu(\tau)$, для якого залежність фази від власного часу є $\Omega(x_0(\tau))$. Частота, тобто швидкість зміни фази, дається похідною

$$\omega_0 = \frac{d}{d\tau} \Omega(x_0(\tau)) = \frac{\partial\Omega}{\partial x^\mu} \frac{dx_0^\mu}{d\tau}. \quad (8.23)$$

Звідси аналогічно, як і в підрозд. 3.5, ч. 1, легко отримати стандартну формулу для ефекту Доплера у СТВ:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}{1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c}.$$

Гравітаційне зміщення частоти для нерухомих випромінювача і спостерігача у статичному гравітаційному полі буде розглянуто в наступному розділі.

9. ФЕНОМЕНОЛОГІЧНА ТЕОРІЯ СЛАБКОГО ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ

Повний теоретичний аналіз гравітаційно-релятивістських ефектів у ЗТВ неможливий без рівнянь для метричного тензора. Проте навіть без цих рівнянь, можна зробити деякі висновки про наближений вигляд метричного тензора та пов'язати між собою результати різних гравітаційних експериментів. У цьому розділі вважатимемо, що гравітаційне поле створюється стаціонарним розподілом гравітуючих мас. Рівняння руху розглянемо далі для пробних частинок (або полів), тобто таких, що рухаються в гравітаційному полі, але їх впливом на це поле можна знехтувати. Це типова ситуація, коли маса пробних об'єктів значно менша від маси джерел гравітаційного поля.

9.1. Слабке гравітаційне поле острівної системи тіл

Рівняння часоподібних геодезичних, що є рівняннями руху пробних тіл за відсутності полів, крім гравітаційного, застосовні в довільних координатах. Проте в конкретних задачах доцільно розглядати виділені координатні системи. Наприклад, за відсутності гравітації, тобто у випадку плоского простору-часу в інерціальних системах відліку, вводимо координати, у яких метричний тензор $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, хоча в довільних координатах цей тензор може мати досить складний вигляд. У разі слабкого гравітаційного поля ізольованої (острівної) системи тіл, очікуємо, що в деякій системі координат (x^0, \mathbf{x}) метричний тензор має вигляд

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (9.1)$$

де $\max\{|h_{\mu\nu}|; \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\} = H \ll 1$; причому $h_{\mu\nu}(x^0, \mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Остання умова враховує, що поле ізольованої системи тіл спадає до нуля на нескінченності. Якщо ці умови виконуються, гравітаційне поле називатимемо слабким. Якщо розглянути світову лінію спостерігача $\mathbf{x} = \text{const}$, за $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ на цій лінії маємо $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt = dt$, тобто координату $t = x^0 / c$ можна розглядати як час нескінченно віддаленого спостерігача.

Вважатимемо, що гравітаційне поле є статичним, якщо існує деяка система координат (x^0, \mathbf{x}) , для якої $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ (не залежить від x^0), причому

$$g_{00} > 0, \quad g_{0i} = 0, \quad (9.2)$$

а просторова частина квадрата інтервалу $g_{ij}dx^i dx^j$ строго від'ємно визначена¹, тобто для ненульових значень диференціалів dx^i :

$$g_{ij}dx^i dx^j < 0. \quad (9.3)$$

Остання умова узгоджується з вимогою щодо лоренцової сигнатури. Вимога (9.2) щодо знака g_{00} потрібна, щоб нульова координата мала зміст часу на світових лініях $\mathbf{x} = \text{const}$. Наприклад, метрика

$$ds^2 = -F(x^1)(dx^0)^2 + (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2,$$

де $F > 0$, не є стаціонарною, хоча всі компоненти не залежать від x^0 , і це очевидно, якщо зробити заміну координат $x'^0 = x^1$, $x'^1 = x^0$. Вимога стосовно g_{0i} необхідна для того, щоб інтервал простору-часу

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{ij}dx^i dx^j \quad (9.4)$$

не змінювався при оберненні часу $x^0 \rightarrow -x^0$. Інтервал (9.4) також не змінює вигляд при зміщеннях уздовж осі x^0 . Це відповідає випадку, коли тіла, що створюють гравітаційне поле, не рухаються, або їхнім рухом можна знехтувати. Якщо ж обмежитися лише інваріантністю відносно часових зміщень і не накладати умову незмінності при оберненні часу, то кажуть, що гравітаційне поле є стаціонарним; у цьому випадку відсутня умова $g_{0i} = 0$.

Розглянемо умови на метрику, які випливають з вимоги відповідності ньютонівського наближення релятивістської теорії та ньютонівських рівнянь руху пробного тіла в заданому слабкому гравітаційному полі. Для цього обмежимося саме статичною метрикою (9.4), зважаючи на те, що в межах застосування теорії Ньютона гравітаційна сила – права частина рівнянь руху гравітуючих тіл – не залежить від їх швидкості.

¹ Тут і далі латинські індекси (зокрема, i, j) пробігають значення 1,2,3.

9.2. Ньютонівське наближення в рівняннях руху пробного тіла

Відповідно до вищенаведеного, покладемо в (9.1):

$$\frac{\partial h_{00}}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^0} = 0, \quad h_{0j} = 0, \quad |h_{ij}| \leq H \ll 1, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Із цих умов на метричний тензор $g_{\mu\nu}$ впливають аналогічні умови для контраваріантного метричного тензора $g^{\mu\nu}$, зокрема $g^{0i} = 0$. Для символів Крістоффеля маємо

$$\Gamma_{0j}^i = 0, \quad \Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_j g_{00} \approx \frac{1}{2} \partial_i h_{00},$$

де взято до уваги, що $g^{ij} = -\delta^{ij} + O(H)$.

У ньютонівському наближенні швидкість матеріальних тіл набагато менша від швидкості світла:

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{dx^0} \right| = \frac{1}{c} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \ll 1, \quad (x^0 = ct).$$

Відкидаючи члени порядку $O(H)$ і $O(V/c)^2$, де V – характерна швидкість пробного тіла, для елемента власного часу маємо

$$d\tau = c^{-1} \left\{ (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{dx^0} \right\}^{\frac{1}{2}} dx^0 \approx dt.$$

Координатний час t можна вибрати, як незалежний параметр траєкторії. Для вивчення траєкторії точкового тіла в заданому гравітаційному полі скористаємось рівняннями геодезичних у загальній параметризації, які отримаємо заміною $\tau \rightarrow p$ у рівняннях (6.2):

$$\frac{dp}{d\tau} \frac{d}{dp} \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dp}{d\tau} \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2 = 0,$$

звідки

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \frac{d^2 p}{d\tau^2} \frac{dx^\mu}{dp} \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^{-1} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} = 0.$$

Якщо вибрати параметром координатний час $p = t = x^0 / c$, перший доданок у останньому рівнянні при $\mu = 0$ зникає, звідки знаходимо d^2t/dt^2 . З урахуванням цього, решта рівнянь при $\mu = 1, 2, 3$ дають

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^\mu}{cdt} \right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0.$$

Сюди формально можна приєднати також рівняння при $\mu = 0$, яке виконується тотожно. Звідси обчислюємо рівняння руху у слабкому полі, ураховуючи лише члени, які дають найбільший внесок (за малих V/c):

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \approx -\Gamma_{00}^i \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} = -\frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \quad (9.5)$$

Зауважимо, що з урахуванням умови статичності відкинуті члени мають порядок $\sim h_{\mu\nu,i} V^2$, зокрема,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^i}{cdt} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 2\Gamma_{0j}^0 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = -g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}.$$

Ці члени дають відносний внесок $\sim O(V^2/c^2)$ у рівняння руху.

Порівняємо (9.5) з рівнянням Ньютона для руху тіла в заданому гравітаційному полі з потенціалом U :

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x^i},$$

де $U(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'$; ρ – густина маси, G – гравітаційна стала.

Для відповідності цього рівняння з (9.5) треба покласти

$$\frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} = \frac{2}{c^2} \frac{\partial U}{\partial x^i},$$

тобто в цьому наближенні

$$h_{00} = \frac{2}{c^2} U + \text{const}.$$

У випадку ізольованої системи $h_{00}(\infty) = 0$, тому, якщо вибір потенціалу відповідає $U(\infty) = 0$, маємо

$$g_{00} = 1 + h_{00} \approx 1 + \frac{2U}{c^2}. \quad (9.6)$$

9.3. Гравітаційне зміщення частоти

Нехай гравітаційне поле ізольованої системи тіл є слабким і стаціонарним. Виберемо систему координат (x^0, \mathbf{x}) , яка відповідає (9.1) та умовам (9.2), (9.3) (без умови статичності). Розглянемо ейконал поля електромагнітного випромінювання, припускаючи, що в зазначеній системі просторові координати приймача та випромінювача електромагнітного поля не змінюються із часом t . Світовою лінією випромінювача є

$$\{X_0^\mu(t)\} = \{ct, \mathbf{x}_0\}, \quad \mathbf{x}_0 = \text{const}. \quad (9.7)$$

Наша задача – обчислити частоту, яку сприймає спостерігач, який перебуває у стані спокою у просторовій точці \mathbf{x} , тобто його світовою лінією є

$$\{X_1^\mu(t)\} = \{ct, \mathbf{x}_1\}, \quad \mathbf{x}_1 = \text{const}.$$

Цією частотою за формулою (8.23) є

$$\omega_1 = \frac{dX_1^\mu}{d\tau_1} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} \right)_1, \quad (9.8)$$

де частинні похідні обчислюються в місцезнаходженні спостерігача, а диференціал його власного часу є $d\tau_1 = [g_{00}(\mathbf{x}_1)]^{1/2} dt$. Завдяки стаціонарності системи в суму за μ у (9.8) дає внесок тільки нульова компонента

$$\omega_1 = \frac{dX_1^0}{d\tau_1} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^0} \right)_1 = [g_{00}(\mathbf{x}_1)]^{-1/2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)_1. \quad (9.9)$$

Аналогічно, для власної частоти випромінювача

$$\omega_0 = [g_{00}(\mathbf{x}_0)]^{-1/2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)_0. \quad (9.10)$$

Пов'яжемо подію $\{ct_0, \mathbf{x}_0\}$ випромінювання кожного сигналу з подією $\{ct_1, \mathbf{x}_1\}$ його прийому спостерігачем. Різниця $t_1 - t_0$ для заданих \mathbf{x}_0 і \mathbf{x}_1 встановлюється за рівняннями ізотропних геодезичних. Однак, навіть не розв'язуючи ці рівняння, очевидно, що для статичної метрики, яка не залежить від t , різниця $t_1 - t_0$ не залежить від моменту випромінювання. Оскільки ейконал зберігається вздовж геодезичних, маємо для будь-яких t_0 : $\Omega(t_0, \mathbf{x}_0) \equiv \Omega(t_1, \mathbf{x}_1)$, тоді

$$\left(\frac{\partial \Omega(t, \mathbf{x}_0)}{\partial t} \right)_{t=t_0} = \left(\frac{\partial \Omega(t, \mathbf{x}_1)}{\partial t} \right)_{t=t_1}$$

і за формулами (9.9), (9.10):

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \left[\frac{g_{00}(\mathbf{x}_0)}{g_{00}(\mathbf{x}_1)} \right]^{1/2}. \quad (9.11)$$

Формула (9.11) виконується в будь-якому статичному гравітаційному полі для нерухомих випромінювача та спостерігача. Вона дає змогу визначити різницю в показаннях годинників у точках \mathbf{x}_0 і \mathbf{x}_1 , які можна пов'язати з періодом коливань випромінювання. Якщо поле слабке, то підстановка співвідношення (9.6) у (9.11) дає відому формулу (1.2) для гравітаційного зміщення частоти:

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = - \frac{U(\mathbf{x}_1) - U(\mathbf{x}_0)}{c^2} \quad (9.12)$$

для нерухомого джерела випромінювання та нерухомого спостерігача.

Для гравітаційних полів у околі Землі величина (9.12) є дуже малою. Тому, якщо спостерігач і джерело рухаються, гравітаційний ефект можна врахувати шляхом додавання поправки (9.12) до релятивістського ефекту Доплера з СТВ, який містить залежність від швидкостей джерела та спостерігача.

9.4. Сферично-симетричний простір-час

Інтуїтивне уявлення про сферичну симетрію пов'язане з інваріантністю всіх фізичних величин відносно просторових обертань – рухів спостерігача в просторовоподібних напрямках¹. Узагальнюючи це,

¹ Елементи загального підходу до розгляду симетрій ріманового простору-часу на основі векторів Кіллінга подано в дод. 6.

вважатимемо простір-час *сферично-симетричним*, якщо існує деяка система координат (x^0, \mathbf{x}) , $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, де виконані такі умови:

а) квадрат інтервалу ds^2 є невідродженою квадратичною формою від диференціалів $dx^0, d\mathbf{x} = (dx^1, dx^2, dx^3)$ з лоренцевою сигнатурою;

б) ds^2 залежить лише від dx^0 і x^0 та комбінацій $r = |\mathbf{x}|$, $(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}) \equiv r dr$, $d\mathbf{x}^2$, які можна скласти з тривимірних векторів $d\mathbf{x}$, \mathbf{x} ;

в) координата x^0 має часоподібний характер (тобто $g_{00} > 0$ і лінії $\mathbf{x} = \text{const}$ є часоподібними).

Зазначені в (б) комбінації є інваріантними при просторових обер-таннях координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, що розглядаються як декартові, відносно точки $\mathbf{x} = 0$. З умов (а) – (в) випливає такий загальний вигляд сферично-симетричного квадрата інтервалу:

$$ds^2 = a(x^0, r)(dx^0)^2 + 2b(x^0, r)dx^0 dr + e(x^0, r)d\mathbf{x}^2 + f(x^0, r)dr^2. \quad (9.13)$$

Розглянемо випадок, коли коефіцієнти a, e, f не залежать від x^0 , $b = 0$ (статичне гравітаційне поле). Зауважимо, що внаслідок умови (в) $a(r) > 0$, тоді, навіть якщо b відмінне від нуля, від коефіцієнта при $dx^0 dr$ можна позбутися за допомогою заміни

$$x^0 = x^0 - \int \frac{b(r)}{a(r)} dr.$$

Враховуючи, що далі нас цікавитимуть слабкі гравітаційні поля, припускаємо, що для метрики (9.13) також виконуються умови (9.1) – (9.3). У сферичних координатах

$$\{\mathbf{x}\} = \{r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta\}, \quad r \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

$$d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2 dO^2, \quad dO^2 = d\theta^2 + (\sin \theta)^2 d\varphi^2,$$

а квадрат інтервалу має вигляд

$$ds^2 = a(dx^0)^2 + e d\mathbf{x}^2 + f dr^2 = a(dx^0)^2 + (e + f)dr^2 + er^2 dO^2.$$

Щоб забезпечити правильну сигнатуру метрики, покладемо $e + f < 0$, $e < 0$. Далі можна ще спростити цей вираз, залишивши лише дві невідомі функції від нової радіальної змінної $r' = r'(r)$, покладаючи

$$r'^2 = -e(r)r^2. \quad (9.14)$$

Дістаємо квадратичну форму за диференціалами від координат

$$dS^2 = A(r')(dx^0)^2 - B(r')(dr')^2 - (r')^2 dO^2, \quad (9.15)$$

де

$$A(r') = a(r), \quad B = -(e + f) \left(\frac{dr}{dr'} \right)^2.$$

Отримані координати, у яких коефіцієнтом при dO^2 є квадрат радіальної змінної, називають *координатами кривин*. Інша заміна змінних приводить до форми

$$dS^2 = \tilde{A}(r'')(dx^0)^2 - \tilde{B}(r'')[(dr'')^2 + (r'')^2 dO^2], \quad (9.16)$$

де $\tilde{A}(r'') = a(r)$, $\tilde{B}(r'') = -(e + f) \left(\frac{dr}{dr''} \right)^2$, а нова радіальна змінна r'' визначається з диференціального рівняння

$$er^2 = r''^2(e + f) \left(\frac{dr}{dr''} \right)^2.$$

Координати, що відповідають представленню (9.16), називають *ізотропними*. Зв'язок між координатами кривин та ізотропними координатами визначається за формулами

$$r' = r'' \sqrt{\tilde{B}(r'')}; \quad B(r') = \tilde{B}(r'') \left(\frac{dr''}{dr'} \right)^2. \quad (9.17)$$

Підкреслимо, що перетворення координат, які привели до (9.15), (9.16), не призводять до втрат інформації про гравітаційне поле. Представлення метрики в різних координатах є фізично еквівалентними, оскільки числові значення всіх спостережуваних величин виражаються через скалярні комбінації метричного тензора та інших полів. Наявність більшої кількості довільних функцій у (9.13) порівняно з (9.15) або (9.16) відбиває лише довільність у виборі координат, тоді як фізичні властивості гравітаційного поля за сферичної симетрії описуються двома функціями від однієї змінної.

9.5. Параметризований постньютонівський формалізм для гравітаційного поля сферично-симетричної маси

Вигляд метрики (9.15) або (9.16) можна ще конкретизувати, якщо відомо, що гравітаційне поле створюється сферично-симетричним тілом маси M із центром у початку координат. Зосередимося на ізотропній формі (9.16). Щоб обмежити варіанти вибору невідомих функцій, вважатимемо, що розмір тіла малий¹ порівняно з r . Тоді безрозмірні функції \tilde{A}, \tilde{B} можуть залежати лише від однієї безрозмірної величини r_g/r , де $r_g = 2GMc^{-2}$ має розмірність довжини. Цей висновок спирається на те, що радіальна координата й dS мають розмірність довжини, крім того, у гравітаційній задачі, що розглядається, можуть фігурувати лише гравітаційна стала G , швидкість світла c і маса центрального тіла M . Для Сонця $M = 2 \cdot 10^{33}$ г, $r_g = 3$ км. Радіус Сонця² $R_s \approx 7 \cdot 10^5$ км, звідки на поверхні Сонця $r_g/R_s \approx 4 \cdot 10^{-6}$. Мализна цієї величини вказує на мализну гравітаційно-релятивістських ефектів у Сонячній системі, тому в цьому розділі вважатимемо $r_g/r \ll 1$. Пам'ятаючи це, припускаємо, що \tilde{A}, \tilde{B} розкладаються в ряд за степенями r_g/r :

$$\tilde{A}(r) = 1 - \alpha \frac{r_g}{r} + \frac{\beta}{2} \left(\frac{r_g}{r} \right)^2 + \dots; \quad \tilde{B}(r) = 1 + \gamma \frac{r_g}{r} + \dots, \quad (9.18)$$

де α, β, γ – безрозмірні коефіцієнти. Формули для метрики у вигляді (9.18) називають розкладом Едінгтона – Робертсона.

Порівняння між собою коефіцієнта \tilde{A} з (9.18) і g_{00} з (9.6) вимагає $\alpha = 1$ у межах точності до першого порядку за величиною $U/c^2 = -GM/(c^2 r)$. Як буде видно, параметри β і γ , що залишилися, визначають усі постньютонівські гравітаційно-релятивістські ефекти у сферично-симетричному полі.

¹ Як буде видно далі (розд. 12), у ЗТВ, як і в ньютонівській теорії, при сферичній симетрії зовнішнє гравітаційне поле не залежить від розподілу маси всередині тіла, що створює це поле. За цих умов припущення про малі розміри тіла не потрібне.

² Радіус тіла в ізотропних координатах і координатах кривин дещо відрізняється, але це не є суттєвим.

Запишемо також метричний тензор, що відповідає (9.18), у координатах кривин. Перехід від ізотропних до координат кривин відповідно до (9.17) наближено дає $r' = r'' + \frac{\gamma r_g}{2}$ і

$$A(r') = 1 - \frac{r_g}{r''} + \tilde{\beta} \left(\frac{r_g}{r'} \right)^2 + \dots, \quad B(r') = 1 + \gamma \frac{r_g}{r'} + \dots, \quad \text{де } \tilde{\beta} = \frac{\beta - \gamma}{2}. \quad (9.19)$$

9.6. Рух фотонів

9.6.1. Основні рівняння. Далі користуватимемось переважно координатами кривин і для спрощення запису опускатимемо штрихи в радіальних координатах:

$$dS^2 = A(r)(dx^0)^2 - B(r)dr^2 - r^2 dO^2. \quad (9.20)$$

За допомогою лагранжіана (6.3) отримаємо рівняння для траєкторій фотонів, що відповідають інтервалу (9.20) у координатах кривин. З огляду на сферичну симетрію запишемо ці рівняння у площині $\theta = \pi/2$. На основі результатів впр. 6.2 маємо інтеграли руху

$$cA(r) \frac{dt}{d\tau} = P_t; \quad t = x^0 / c; \quad r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = P_\varphi;$$

$$c^2 A(r) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - B(r) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

Звідси

$$\left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 = \frac{ABL_\varphi^2}{r^4} \left(1 - \frac{AL_\varphi^2}{r^2} \right)^{-1}; \quad (9.21, a)$$

$$c^2 \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 = \frac{B}{A} \left(1 - \frac{AL_\varphi^2}{r^2} \right)^{-1}, \quad L_\varphi = P_\varphi / P_t \quad (9.21, б)$$

Мінімальне значення r_m відповідає умові $dr/d\varphi = 0$, тобто

$$\frac{\sqrt{A(r_m)}}{r_m} L_\varphi = 1. \quad (9.22)$$

Наближено $r_m \approx L_\varphi$.

9.6.2. Викривлення траєкторій світла в полі тяжіння. Нехай світло поширюється у площині $\theta = \pi/2$ від джерела S (рис. 9.1), розташованого на нескінченності ($r = \infty$), причому r_m – мінімальне значення радіальної змінної вздовж ізотропної геодезичної. Із рівняння (9.21, а) отримуємо залежність $\varphi(r)$. При русі фотона з нескінченності до точки $r = r_m$ радіус-вектор фотона повертається на кут

$$\varphi(r_m) = \int_{r_m}^{\infty} \frac{L_\varphi \sqrt{AB} dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{AL_\varphi^2}{r^2}}} = \int_{r_m}^{\infty} \frac{\sqrt{AB} d[-L_\varphi/r]}{\sqrt{1 - \frac{AL_\varphi^2}{r^2}}} = \int_{u=0}^1 \sqrt{AB} \frac{d(u/\sqrt{A})}{\sqrt{1-u^2}},$$

де $u = \frac{\sqrt{A(r)}}{r} L_\varphi$ при відповідному виборі додатного напрямку повороту кута.

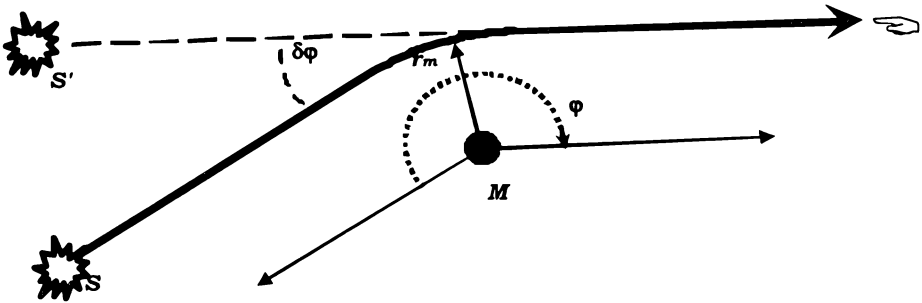


Рис. 9.1. Викривлення траєкторії світла в гравітаційному полі масою M

З урахуванням (9.19) запишемо

$$A(r) = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad B(r) = 1 + \gamma \frac{r_g}{r};$$

параметр $\tilde{\beta}$ тут (як і в п. 9.6.3) не враховуємо, оскільки в даній задачі він не дає внеску в наближення, що розглядається. Повний поворот кута при русі від джерела світла до спостерігача, що розташований на відстані $r \gg r_m$ від центра, є

$$2\varphi(r_m) = 2 \int_0^1 \sqrt{AB} \frac{d(u/\sqrt{A})}{\sqrt{1-u^2}} \approx 2 \int_0^1 \left(1 + \frac{(\gamma-1)r_g}{2L_\varphi} u \right) \left(1 + \frac{ur_g}{L_\varphi} \right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \approx$$

$$\approx 2 \int_0^1 \left(1 + \frac{(\gamma+1)r_g}{2L_\varphi} u \right) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \approx 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma+1}{2} \frac{r_g}{L_\varphi} \right) \approx \pi + \frac{(\gamma+1)r_g}{r_m},$$

де враховано (9.22) і відкинуто члени вище першого порядку за r_g/L_φ . Зауважимо, що точність застосованих наближень досить висока, адже мінімальне значення $r_m \approx L$ принаймні більше радіуса Сонця та $r_g/L < 4 \cdot 10^{-6}$.

Якщо гравітації немає ($r_g = 0$), траєкторією електромагнітного сигналу є пряма і $\varphi = \pi$. Гравітаційне поле відхиляє промінь на кут

$$\delta\varphi = (\gamma+1)r_g/r_m. \quad (9.23)$$

Унаслідок цього віддалений спостерігач ($r \gg r_m$) побачить, що зображення джерела сигналів S' нібито відштовхується від маси M на певний кут. Цей кут дорівнює $\delta\varphi$, якщо відстань до джерела випромінювання значно більша за r . Така ситуація реалізується у випадку, коли зорю можна спостерігати на небесній сфері поблизу Сонця під час затемнення.

Зробимо зауваження щодо фізичного змісту параметрів r_g і r_m у формулі (9.23). Величина r_g , пов'язана з масою центрального тіла, може бути визначена за поведінкою пробних тіл у гравітаційному полі на великих відстанях, де наближено виконується закон Ньютона. Щодо r_m , то цю величину треба проаналізувати більш ретельно. У реальних спостереженнях віддаленого джерела завдяки руху небесних тіл r_m є функцією часу, яка залежить від підгоночних параметрів, що визначаються зі зіставлення результатів сукупності спостережень. Хоча r_m можна назвати, у першому наближенні, прицільною відстанню, треба мати на увазі, що відстань у ЗТВ може визначатися по-різному; принаймні вона не збігається з радіальною координатою r . Треба також пам'ятати, що радіальна змінна в ізотропних координатах не збігається з радіальною змінною в координатах кривин. Завдяки слабкості гравітаційного поля різні визначення відстані відрізняються одне від одного на величини порядку $r_g \ll r_m$, якими нехтуємо у формулі (9.23). Тому в (9.23) можна наближено ототожнити r_m з ньютонівською величиною, що вимірюється за відомими процедурами класичної астрометрії. Проте при вимірюваннях гравітаційної затримки сигналів (див. далі п. 9.6.3) таке ототожнення дає

похибку, яка може бути того самого порядку, що й сам ефект, тому тут треба бути більш обережним.

9.6.3. Гравітаційна затримка сигналів. При радіолокації віддаленого об'єкта гравітаційне поле збільшує загальний час затримки відбитого електромагнітного сигналу. Цей ефект додаткової (гравітаційної) затримки відомий як ефект Шапіро. Як і раніше, обмежимося розглядом задачі на площині $\theta = \pi/2$, де розташовані приймач-передавач сигналів ($r = r_1$) і рефлектор ($r = r_2$). Сигнал випромінюється в точці $r = r_1$ у момент t_1 , проходить повз масу M через точку з мінімальним значенням радіальної змінної $r = r_m$ при $t = t_m$; далі відбивається від рефлектора при $r = r_2$, $t = t_2$; проходить зворотний шлях і реєструється в точці $r = r_1$ при $t = t'_1$ (рис. 9.2). Нас цікавитиме гравітаційний внесок $\Delta T_{\text{грав.}}$ у час затримки сигналів, тобто величина, на яку цей час збільшується за присутності гравітаційного поля. Масу M , приймач-передавач і рефлектор вважатимемо нерухомими; змінами в цій конфігурації за час поширення сигналів у розрахунках $\Delta T_{\text{грав.}}$ можна знехтувати, якщо відносні швидкості в системі значно менші від швидкості світла.

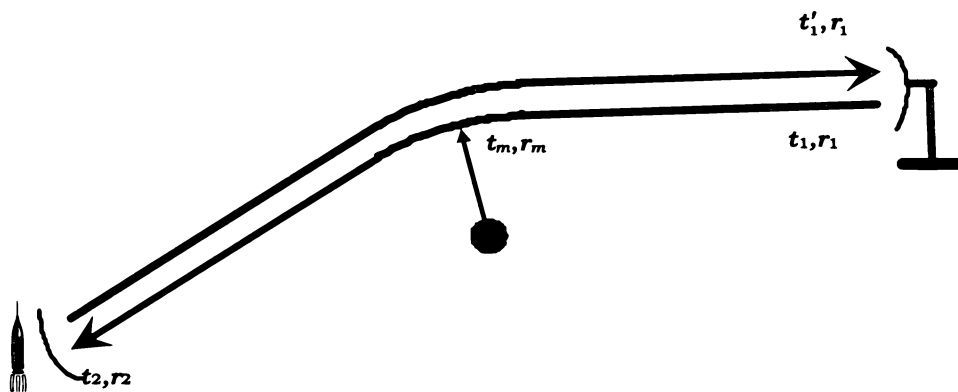


Рис. 9.2. До обчислення гравітаційної затримки радіолокаційних сигналів

Далі ми обчислимо координатну затримку часу $t'_1 - t_1$. Це не є та величина, що може спостерігатися за допомогою фізичних приладів. Проте, маючи значення t_1 і t'_1 , можна обчислити власний час на траєкторії приймача-передавача між випромінюванням і прийомом відбитого сигналу:

$$\Delta T = \sqrt{g_{00}(r_1)} \cdot (t'_1 - t_1). \quad (9.24)$$

Власний час T є спостережуваною фізичною величиною, її можна вимірювати в експерименті. Задача зводиться до обчислення $t'_1 - t_1$.

Із рівняння (9.21, б) маємо

$$c(t_2 - t_m) = \int_{r_m}^{r_2} \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{dr}{\sqrt{1 - AL_\phi^2/r^2}} = \int_{\rho_m}^{\rho_2} \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{\rho d(\rho\sqrt{A})}{\sqrt{\rho^2 - \rho_m^2}},$$

де $\rho = r/\sqrt{A}$, $\rho_m = r_m/\sqrt{A(r_m)} = L_\phi$ (див. (9.22)).

Беручи до уваги наближені вирази (9.19) і відкидаючи члени порядку, вищі за r_g/r , маємо $\rho = r + r_g/2$ і

$$\begin{aligned} c(t_2 - t_m) &= \int_{\rho_m}^{\rho_2} \left(\rho + \frac{\gamma+1}{2} r_g \right) \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \rho_m^2}} = \sqrt{\rho_2^2 - \rho_m^2} + \frac{\gamma+1}{2} r_g \ln \frac{\rho_2 + \sqrt{\rho_2^2 - \rho_m^2}}{\rho_m} \approx \\ &\approx \sqrt{r_2^2 - r_m^2} + \frac{r_g}{2} \left(\frac{r_2 - r_m}{r_2 + r_m} \right)^{1/2} + \frac{\gamma+1}{2} r_g \ln \frac{\rho_2 + \sqrt{\rho_2^2 - \rho_m^2}}{\rho_m}. \end{aligned}$$

Аналогічно обчислюються $t_m - t_1$ і такі самі величини на зворотному шляху від "2" до "1". У реальних експериментах гравітаційний внесок у радіолокаційну затримку буде найбільшим, коли траєкторія сигналів проходить якомога ближче до Сонця, при цьому $r_1 \gg r_m$, $r_2 \gg r_m$. Відкидаючи члени порядку $r_g(r_m/r_2)$, отриману формулу можна спростити:

$$c(t_2 - t_m) \approx \sqrt{r_2^2 - r_m^2} + \frac{r_g}{2} + \frac{\gamma+1}{2} r_g \ln \left(\frac{2r_2}{r_m} \right),$$

звідки, за умови $r_1 \gg r_m$, $r_2 \gg r_m$,

$$c(t'_1 - t_1) \approx 2\sqrt{r_1^2 - r_m^2} + 2\sqrt{r_2^2 - r_m^2} + (\gamma+1)r_g \ln \left(\frac{4r_2r_1}{r_m^2} \right) + 2r_g. \quad (9.25)$$

При $r_g = 0$ права частина дає класичну формулу для відстані між точками "1" і "2". Спостережуваний час радіолокаційної затримки ΔT обчислюється за формулою (9.24). Однак виникає проблема, як пов'язати параметри r_2, r_1, r_m , що входять у (9.25), зі спостережними даними. Нагадаємо, що при виведенні (9.25) ми користувалися координатами кривин; легко перевірити, що в інших координатах (напр., од-

норідних) формула для $t'_1 - t_1$ містить сталі внески $\sim r_g$ з іншими коефіцієнтами. Ці внески обумовлені першими двома доданками нульового порядку в (9.25), які залежать від радіальних координат, що самі по собі не є спостережуваними величинами¹. Проте при опрацюванні спостережень параметри r_1, r_2 , які входять у час запізнення сигналів, можуть бути визначені через інші спостережувані величини за астрометричними даними (зрозуміло, що при цьому всі такі величини аналізують в одній і тій самій системі координат для фіксованого представлення метрики). Зв'язок усіх спостережуваних величин, у тому числі і часу затримки, виглядатиме однаково в будь-яких координатах. Детальне обчислення спостережуваних величин і їх зв'язку, який враховує всі потрібні для цього астрометричні спостереження, виходить за межі цього розділу. Зазначимо лише, що для тестування ЗТВ перевіряють не стільки формулу (9.25), скільки її зміни. Приймач-передавач встановлюють на Землі, а рефлектор – на космічному апараті; завдяки їх відносному руху величина ΔT змінюється із часом. Оптимальною для вивчення релятивістського ефекту є умова, що шлях сигналів проходить близько до Сонця (тобто $r_1 \gg r_m$, $r_2 \gg r_m$). причому для перевірки релятивістського ефекту та експериментального визначення параметра γ найбільш важливим є логарифмічний доданок у (9.25), що залежить від r_m :

$$\Delta T_{\text{грав.}} \approx (\gamma + 1) \frac{r_g}{c} \ln \left(\frac{4r_2 r_1}{r_m^2} \right). \quad (9.26)$$

У Сонячній системі гравітаційно-релятивістські ефекти, що визначаються формулами (9.23) і (9.26), дуже малі, але вони впевнено реєструються сучасними приладами. Це дає змогу експериментально визначити параметр $\gamma = 1$ (узгоджується із ЗТВ) з точністю до десятих часток відсотка. З іншого боку, урахування гравітаційної затримки необхідне й для прикладних потреб у радіоінтерферометрії з наддовгими базами та при радіолокаційному слідкуванні за космічними апаратами в Сонячній системі.

9.6.4. Гравітаційні лінзи. Із розглянутими ефектами пов'язане ще одне явище, надійне щодо отримання нової космологічної інформації – явище гравітаційного лінзування (див. також підрозд. 2.2). Досить часто в астрономічних дослідженнях поблизу променя зору на

¹ Див. зауваження в кінці п. 9.6.2.

віддалене джерело трапляється масивне тіло і його гравітаційне поле спотворює зображення джерела, і навіть створює кілька зображень. У позагалактичних гравітаційно-лінзових системах джерелом може слугувати квазар, коли його електромагнітне випромінювання на шляху до нас проходить через лінзову галактику. Завдяки впливу гравітаційного поля галактики на траєкторію електромагнітних сигналів можливі декілька траєкторій, за якими ці сигнали потрапляють до спостерігача й він бачить кілька зображень одного й того самого квазара з різною яскравістю. Відносна затримка сигналів під час руху від джерела до спостерігача в різних зображеннях – завдяки різним траєкторіям і різним полям на шляху до спостерігача – може становити місяці й роки. Відносну затримку вимірюють, досліджуючи кореляції змін блиску зображень. Ця величина, а також конфігурація зображень квазара та їх відносна яскравість залежать від маси галактики й розподілу маси.

Суттєву роль при формуванні яскравості окремого зображення відіграють неоднорідності гравітаційного поля, обумовлені окремими зірками лінзової галактики (так званий ефект *мікролінзування*). Рухи зірок поблизу променів зору різних зображень, а значить і підсилення блиску в різних зображеннях відбуваються незалежно, тому відносні коливання блиску також можна використовувати для вивчення ефекту. Характер змін блиску залежить від розмірів і розподілу яскравості джерела, що є різними в різних діапазонах випромінювання; це використовують для вивчення тонкої структури квазарів – джерел випромінювання в гравітаційно-лінзових системах.

Розглянемо ефект підсилення яскравості точкового джерела полем однієї точкової маси M , покладаючи $\gamma = 1$ (рис. 9.3). Нехай спостерігач перебуває у площині O , маса M – у площині G ; обидві площини проведемо ортогонально прямій SM , яка проходить через джерело S і масу M , відстані між O та M і між M та S є відповідно a та b , тоді відстань між S та O є $a + b$ (це справедливо, якщо ми нехтуємо космологічною кривиною). Точки перетину SM з G та O прийемо за початки координат у цих площинах і розглянемо систему у площині рисунка, тобто в перерізі, у якому міститься траєкторія променя, що йде від джерела S і перетинає G у точці з координатою x . Відстані a і b вважаємо набагато більшими за x . Тоді для розрахунків можна наближено вважати, що при перетині площини G промінь заломлюється, змінюючи стрибком свій напрямок на малий кут $\delta\varphi$ відповідно до (9.23), при $\gamma = 1$.

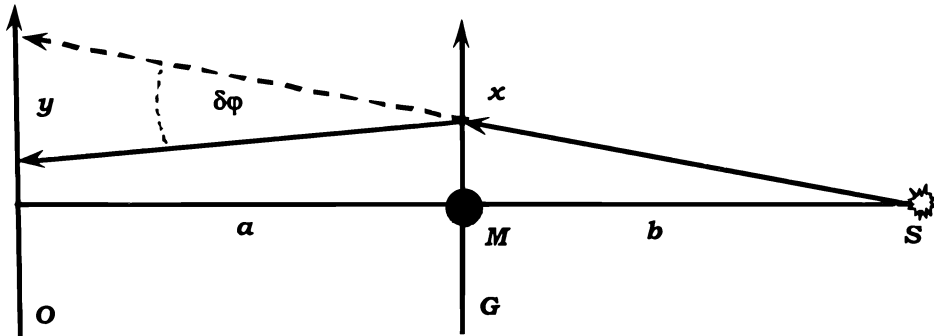


Рис. 9.3. Схема гравітаційного лінзування масою M

За відсутності заломлення промінь перетинає площину спостерігача O в точці $y = (a + b)x/b$. При заломленні на кут $\delta\phi$ ця точка зміщується в точку

$$y = \frac{a + b}{b} x - a\delta\phi = \frac{a + b}{b} x - \frac{2r_g}{x} a.$$

Легко бачити, що записане рівняння для фіксованого $y \neq 0$ має два розв'язки, які відповідають двом можливим траєкторіям променя, тобто двом зображенням джерела. Очевидно, у цих співвідношеннях можна вийти з площини рисунка й записати

$$y_i = \frac{a + b}{b} x_i - \frac{2r_g x_i}{r^2} a, \quad i = 1, 2, \tag{9.27}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ – двовимірні вектори у площині лінзи G і у площині спостерігача O , $r = |\mathbf{x}|$. Це задає відображення $G \rightarrow O$. Якщо пучок променів освітлює ділянку площиною $d\Pi_G$ на G , а його продовження – ділянку $d\Pi_O$ на O , то

$$d\Pi_O = \det \left\| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right\| d\Pi_G.$$

За відсутності поглинання на ділянці $d\Pi_O$, $d\Pi_G$ падає однаковий потік. Обчислимо коефіцієнт підсилення яскравості – відношення густин потоків, що падають на площину спостерігача O за наявності й за відсутності маси M . В обох випадках розглянемо один і той самий пучок променів, що падає на ділянку $d\Pi_G$; при цьому ділянки

$d\Pi_O(M=0)$ (за відсутності маси M) і $d\Pi_O(M)$ (за наявності маси) відрізнятимуться й освітленість ділянок за однакових потоків обернено пропорційна $d\Pi$. Для порівняння яскравостей зображення об'єкта необхідно обчислити відношення

$$k_I = \frac{d\Pi_O(M=0)}{d\Pi_O(M)} = \left(\det \left\| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right\| \right)_{M=0} \left(\det \left\| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right\| \right)_M^{-1}.$$

Із (9.27) маємо

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \frac{a+b}{a} \left\{ \delta_{ij} \left(1 - \frac{2r_g ab}{r^2(a+b)} \right) + 4r_g \frac{x^i x^j}{r^4} \frac{ab}{a+b} \right\}.$$

Обчислення визначника цієї двовимірної матриці та підстановка в попередню формулу дає

$$k_I = \left| 1 - \frac{R_E^4}{r^4} \right|^{-1},$$

де $R_E = [2r_g ab / (a+b)]^{1/2}$ – так званий *радіус кільця Ейнштейна* гравітаційної лінзи. Назва пов'язана з тим, що коли спостерігач перебуває на одній прямій з масою і джерелом ($y=0$), тоді $r=R_E$, підсилення нескінченне і спостерігач бачить яскраве *кільце Ейнштейна* навколо маси M . Величина R_E у реальних системах може бути суттєвою. Якщо $M=M_\odot$, $a=b=5 \cdot 10^{22}$ км (порядку космологічних відстаней), то $R_E \approx 4 \cdot 10^{11}$ км $\approx 1,3 \cdot 10^{-2}$ парсеків. Нескінченність коефіцієнта підсилення є наслідком ідеалізації (точкове джерело плюс наближення геометричної оптики). Проте й у реальній ситуації ефект підсилення може бути досить значним (до кількох разів). Завдяки рухам астрономічних тіл, що беруть участь у явищі гравітаційного линзування, яскравість джерела може змінюватися завдяки змінам прицільної відстані пучка променів відносно зір за час порядку місяців, і навіть тижнів.

9.7. Гравітаційне зміщення перицентра орбіти пробного тіла

Розглянемо тепер рух пробної частинки ненульової маси в полі, що описується формулами (9.19) і (9.20). Траєкторія руху є часоподібною геодезичною, рівняння якої отримуємо за допомогою лагранжіана (6.3) аналогічно рівнянням (9.21) (див. впр. 6.2). Інтеграл нормування для часоподібною геодезичною є ($t = x^0 / c$):

$$c^2 A(r) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - B(r) \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 1,$$

або

$$c^2 A(r) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \left[B(r) \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + r^2 \right] \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 1.$$

З урахуванням інтегралів

$$cA(r) \frac{dt}{ds} = P_t, \quad r^2 \frac{d\phi}{ds} = P_\phi$$

маємо

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \left(B \frac{L_\phi^2}{r^4} \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{A} - \frac{1}{P_t^2} - \frac{L_\phi^2}{r^2} \right\}, \quad L_\phi = P_\phi / P_t.$$

Для слабко-релятивістського руху величина $\frac{1}{A(r)} - \frac{1}{P_t^2}$ є малою, тому тут, на відміну від підрозд. 9.6, треба врахувати ще один порядок розкладу Еддінгтона – Робертсона, тобто доданок з коефіцієнтом $\tilde{\beta}$ у співвідношенні (9.19). Це дає

$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \left[\left(1 + \frac{\gamma r_g}{r} \right) \frac{L_\phi^2}{r^4} \right]^{-1} \left\{ E + \frac{r_g}{r} - \frac{L_\phi^2 - (1 - \tilde{\beta}) r_g^2}{r^2} \right\}, \quad (9.28)$$

де $E = 1 - 1/P_t^2$. Якщо відкинути в (9.28) квадратичний за r_g член і покласти $\gamma = 0$, можна показати, що це рівняння описує ньютонівський еліпс. Dodanok r_g / r у фігурних дужках описує ньютонівський ефект.

Нехай r_1 – мінімальне, а r_2 – максимальне значення радіальної змінної (перицентр і апоцентр) для обмеженої орбіти. Із цими параметрами пов'язані константи інтегрування L_ϕ та E , але нам знадобиться

лише перша з них. Для екстремальних значень r у точках, де $dr/d\varphi = 0$, з (9.28) маємо

$$E + \frac{r_g}{r} - \frac{L_\varphi^2 - (1 - \tilde{\beta})r_g^2}{r^2} = 0. \quad (9.29)$$

Звідси за теоремою про корені квадратного тричлена (відносно $1/r$) маємо зв'язок L_φ^2 з r_1 і r_2 :

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_g}{L_\varphi^2 - (1 - \tilde{\beta})r_g^2} \quad \text{або} \quad L_\varphi^2 - (1 - \tilde{\beta})r_g^2 = \frac{r_g r_1 r_2}{r_1 + r_2}, \quad (9.30)$$

Обчислимо кут повороту радіус-вектора тіла на ділянці орбіти від r_1 до $r_2 > r_1$, де $r(\varphi)$ монотонно зростає (рис. 9.4). Згідно з (9.28) кут повороту становить

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{\gamma r_g}{2r}\right) \frac{L_\varphi dr}{r^2 \left[E + \frac{r_g}{r} - \frac{\chi^2 L_\varphi^2}{r^2}\right]^{1/2}} = \int_{u_2}^{u_1} \left(1 + \frac{\gamma r_g}{2L_\varphi} u\right) \frac{du}{\left[E + \frac{r_g}{L_\varphi} u - \chi^2 u^2\right]^{1/2}},$$

де $\chi^2 = 1 - \frac{(1 - \tilde{\beta})r_g^2}{L_\varphi^2}$, $u = \frac{L_\varphi}{r}$, причому $u_i = \frac{L_\varphi}{r_i}$, $i = 1, 2$ – корені квадратного тричлена в знаменнику підінтегрального виразу. Звідси після стандартної заміни $\xi = \frac{u - (u_1 + u_2)/2}{(u_1 - u_2)/2}$ маємо

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{\chi} \int_{\chi_{-1}}^{\chi_1} \left[1 + \frac{\gamma r_g}{2L_\varphi} \left(\frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} \xi\right)\right] \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \pi + \left(1 - \tilde{\beta} + \frac{\gamma}{2}\right) \frac{r_g^2}{2L_\varphi^2} \pi.$$

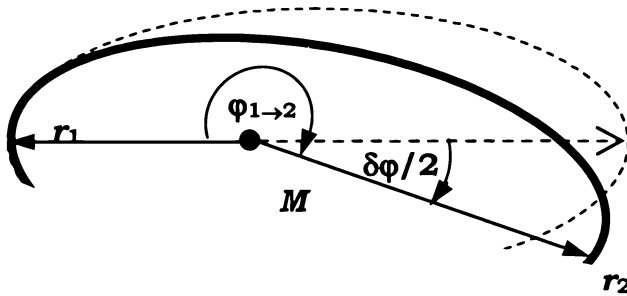


Рис. 9.4. Гравітаційне зміщення перигендра (пунктиром показано ньютонівський еліпс)

Для кута між двома послідовними точками перицентра маємо, з урахуванням (9.30) після простих наближень,

$$\varphi_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 1} = 2\varphi_{1 \rightarrow 2} \approx 2\pi + \pi r_g (1 - \tilde{\beta} + \frac{\gamma}{2}) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (9.31)$$

У ньютонівській теорії орбітою пробного тіла в полі точкової маси є замкнена крива – еліпс – і зміна кута між послідовними перицентрами становить 2π (повне обертання). Вплив релятивістської гравітації дає додатковий кут зміщення

$$\delta\varphi = \pi r_g (1 - \tilde{\beta} + \frac{1}{2}\gamma) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \pi r_g (1 + \gamma - \frac{1}{2}\beta) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

який робить орбіту незамкненою. Зазначимо, що через малізну ефекту, як і в розрахунках відхилення променя в гравітаційному полі, величини r_1, r_2 визначаються зі спостережень у ньютонівському наближенні¹. Перицентр зміщується в напрямку руху тіла, причому ефект накопичується з кожним поворотом, що полегшує його спостереження. Для Меркурія розрахунок релятивістського зміщення перигелію² дає $\approx 43''$ за 100 років. У дійсності, окрім релятивістських ефектів, на прецесію перигелію Меркурія впливають також нерелятивістські чинники (зокрема, збурення під впливом планет), які можна врахувати за ньютонівською теорією, але залишається залишкове зміщення на $43''$ за століття, яке не мало задовільного пояснення аж до появи ЗТВ. Порівняння цієї величини з (9.31) узгоджується у межах експериментальної похибки зі значенням $\tilde{\beta} = 0$ або $\beta = 1$ при $\gamma = 1$.

10. РІВНЯННЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ В ЗАГАЛЬНІЙ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

У цьому розділі буде отримано рівняння Ейнштейна як наслідок варіаційного принципу Гільберта. Як відзначено в розд. 4, ч. 1, у сучасній теоретичній фізиці принцип найменшої дії є відправною точкою для виведення динамічних рівнянь поля. Функціонал дії має

¹ Див. зауваження в кінці п. 9.6.2.

² Тобто перицентра відносно Сонця.

складатися з дії для гравітаційного поля та дії для всіх негравітаційних полів. Щодо останнього, то цей вираз можна вважати відомим відповідно до принципу локальної лоренцовості, який фіксує рівняння негравітаційних полів. Вимога інваріантності підінтегрального виразу для функціоналу дії гравітаційного поля жорстко обмежує вигляд рівнянь другого порядку для метричного тензора з точністю до двох констант – гравітаційної та космологічної (п. 10.1.3). Негравітаційна дія містить метричний тензор і також дає внесок у рівняння гравітаційного поля, який буде інтерпретовано як тензор енергії імпульсу; треба показати, що ця інтерпретація й цей внесок не призводять до суперечностей (підрозд. 10.2).

10.1. Принцип найменшої дії¹

10.1.1. Вступні міркування. У ньютонівській теорії гравітаційне поле описується рівнянням Пуассона

$$\Delta U = 4\pi G\mu, \quad (10.1)$$

де U – потенціал поля; μ – густина маси; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравітаційна стала. Розв'язок рівняння (10.1) з нульовими граничними умовами на нескінченності дається відомою формулою для ньютонівського потенціалу

$$U(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\mu(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|};$$

інтеграл береться по всьому простору.

У релятивістській теорії роль потенціалів гравітаційного поля відіграють компоненти тензора $g_{\mu\nu}$. Саме така інтерпретація узгоджується із формулою (9.6), отриманою в ньютонівському наближенні. Згадаємо також, що в рівняннях руху пробних тіл вираз для сили містить саме перші похідні від $g_{\mu\nu}$ – аналог напруженостей поля, які є першими похідними від потенціалів. Згідно із цим очікуємо, що рівняння для метричного тензора є рівняннями другого порядку в частинних похідних, аналогічно рівнянням для вектор-потенціалу в електродинаміці.

Існують кілька шляхів побудови рівнянь для $g_{\mu\nu}$, які приводять до однакового результату – рівнянь Ейнштейна. Ми розглянемо шлях, запропонований Д. Гільбертом, який спирається на варіацій-

¹ Перед підрозд. 10.1 рекомендуємо повторити розд. 5.

ний принцип найменшої дії¹. Дію S польової системи подають у вигляді інтеграла по деякій області простору-часу. Дія є функціоналом від польових функцій, зокрема, від компонент метричного тензора, що входять у підінтегральний вираз. За принципом найменшої дії, рівняння поля випливають з умови $\delta S = 0$, де δS – перша варіація дії (див. розд. 4, ч. 1). Нагадаємо, що це лише необхідна умова мінімуму функціоналу S .

10.1.2. Дія для негравітаційних полів. Розглянемо спочатку функціонал дії S_m для негравітаційних полів A_i , $i = 1, 2, \dots, N$, у заданому гравітаційному полі з метричним тензором $g_{\mu\nu}$. Запишемо дію як

$$S_m = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} L_m(A_i, g_{\mu\nu}), \quad (10.2)$$

де скалярну функцію L_m будують із згорток негравітаційних полів і метричного тензора; Ω – об'єм інтегрування в чотиривимірному просторі, який може бути нескінченним. Нагадаємо, що величина $d^4x' \sqrt{-g'} = d^4x \sqrt{-g}$ є інваріантним елементом об'єму (див. зауваження після впр. 5.8). Таким чином, підінтегральний вираз² у формулі (10.2) є інваріантним при перетворенні координат.

За принципом найменшої (стаціонарної) дії поле слід вибрати таким чином, щоб його малі збурення $A_i(x) \rightarrow A_i(x) + \delta A_i(x)$ не змінювали значення дії в лінійному наближенні. Аналогічно розд. 4 із ч. 1 розглядаємо збурення полів і відповідні збурення дії $S_m(A_i + \delta A_i) - S_m(A_i)$ в області Ω за умови, що на межах цієї області $\delta A_i|_{\partial\Omega} = 0$. Таким чином, для першої варіації дії маємо

$$\delta_{A_i} S_m \equiv \delta_{A_i} \left(\int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} L_m \right) = 0,$$

де індекс A_i у δ_{A_i} означає, що розглядаються варіації S_m лише завдяки зміні полів A_i , але не $g_{\mu\nu}$.

Виходячи з варіаційного принципу та враховуючи умову $\delta A_i|_{\partial\Omega} = 0$, стандартним способом отримуємо рівняння Ейлера – Лагранжа для A_i :

¹ Фактично тут використовуємо умову стаціонарності дії відносно малих варіацій (а не мінімуму; див. далі та аналогічні зауваження в підрозд. 4.1 ч. 1).

² Підінтегральний вираз у (10.2) називають густиною функції Лагранжа.

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial A_{i,\alpha}} (\sqrt{-g} L_m) \right] = \frac{\partial}{\partial A_i} (\sqrt{-g} L_m). \quad (10.3)$$

Вигляд L_m має забезпечити відповідність рівнянь (10.3) і рівнянь для A_i , отриманих іншим шляхом – із рівнянь СТВ за допомогою принципів коваріантності та локальної лоренцовості. У викривленому просторі ці рівняння містять метричний тензор, тому природно, що L_m також залежить від $g_{\alpha\beta}$ й описує взаємодію полів A_i з гравітаційним полем. Далі треба обчислити варіацію S_m також і при збуреннях гравітаційного поля. Як незалежні змінні оберемо компоненти контраваріантного метричного тензора $g^{\mu\nu}$. При обчисленні перших варіацій, при змінах $g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ формально можна вважати, що симетричні компоненти метричного тензора незалежні. Як і у випадку полів A_i , покладемо $\delta g^{\mu\nu} = 0$ на межах області Ω . При зміні $g^{\mu\nu}$ маємо першу варіацію дії S_m негравітаційних полів:

$$\begin{aligned} \delta_g S_m &= \\ &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \left\{ \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} L_m) \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} (\sqrt{-g} L_m) \delta g^{\mu\nu, \alpha} \right\} = \\ &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \left\{ \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} L_m) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} (\sqrt{-g} L_m) \right) \right\} \delta g^{\mu\nu} + \\ &+ \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} (\sqrt{-g} L_m) \delta g^{\mu\nu} \right) \right\} = \frac{1}{2c} \int_{\Omega} d^4 x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (10.4)$$

де застосовано теорему Остроградського – Гаусса для інтеграла від повної чотиривимірної дивергенції і введено позначення

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} L_m) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu, \alpha}} (\sqrt{-g} L_m) \right) \right\}. \quad (10.4, a)$$

Далі буде видно, що $T_{\mu\nu}$ має зміст тензора енергії-імпульсу негравітаційних полів.

10.1.3. Гравітаційна дія. Щоб отримати рівняння для $g^{\mu\nu}$, зазвичай недостатньо дії S_m , адже загальний функціонал дії мусить містити

суто гравітаційну дію S_g , що має приводити до рівнянь гравітаційного поля й за відсутності інших полів. Шукатимемо гравітаційну дію у вигляді

$$S_g = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} L_g,$$

де L_g є функцією тільки від метричного тензора та його похідних, яка має однаковий вигляд у всіх системах координат і є скаляром. Останнє забезпечуватиме коваріантність рівнянь гравітаційного поля, але тоді виникає ускладнення. Здавалося б, що L_g може бути функцією лише $g^{\mu\nu}$ і перших похідних $g^{\mu\nu}$, яка приводить згідно з варіаційним принципом до рівнянь поля другого порядку. У цьому випадку, використовуючи локально-лоренцеві координати в точці x , за умовою інваріантності L_g маємо $L_g(g^{\mu\nu}(x), g^{\mu\nu}_{,\alpha}(x)) = L_g(\eta^{\mu\nu}, 0)$. Оскільки це можна повторити для довільної точки, густина лагранжіана є константою. Щоб побудувати нетривіальний лагранжіан і дістати рівняння, є інша можливість: використати вираз для L_g , який містить також другі похідні від $g^{\mu\nu}$, але лінійно. Як буде видно далі, тоді також можна отримати систему другого порядку відносно $g^{\mu\nu}$. Покажемо, що скалярна функція, яка має такі властивості, з точністю до адитивної константи пропорційна скалярній кривині R .

Зафіксуємо точку x_0 і перейдемо до локально-геодезичних у цій точці координат; тоді в цій точці маємо $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$. У цьому разі залишається лише метричний тензор і його другі похідні, що мають входити лінійно. З огляду на це L_g може бути сконструйований лише у вигляді лінійної комбінації двох незалежних згорток других похідних $g_{\alpha\beta,\gamma\delta} \equiv \partial_\delta \partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ з контраваріантним метричним тензором (з точністю до адитивної константи K). Звідси легко встановити загальний вигляд для L_g у точці x_0 :

$$L_g = A g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} g_{\alpha\beta,\gamma\delta} + B g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} g_{\alpha\beta,\gamma\delta} + K. \quad (10.5)$$

Цей вираз не змінюється, принаймні за лінійних перетворень координат, що є необхідною, хоча й не достатньою, умовою. Проаналізуємо тепер обмеження на вигляд (10.5), що випливають з умови інваріантності L_g відносно більш широкого класу перетворень.

Розглянемо перетворення $\{x\} \rightarrow \{x'\}$ такі, що

$$\left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \right)_{x'_0} = 0 \leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right)_{x_0} = 0, \quad (10.6)$$

де $x'_0 = x'(x_0)$, причому

$$\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right)_{x_0} = \delta_\nu^\mu, \quad \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right)_{x'_0} = \delta_\mu^\nu. \quad (10.7)$$

Із (10.6), (10.7) випливає, що ці перетворення зберігають умову локальної геодезичності в точці x_0 . Крім того,

$$g'^{\alpha\beta}(x'_0) = g^{\alpha\beta}(x_0); \quad \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right)_{x_0} = \left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^\alpha} \right)_{x'_0} = 0.$$

За умовою вираз (10.5) має зберігати свій вигляд принаймні за таких перетворень ($L_g = L'_g$). Запишемо L'_g у системі координат $\{x'\}$ у точці x'_0 :

$$L'_g = Ag'^{\alpha\beta'} g'^{\gamma\delta'} g'_{\alpha'\beta',\gamma'\delta'} + Bg'^{\alpha'\gamma'} g'^{\beta'\delta'} g'_{\alpha'\beta',\gamma'\delta'} + K.$$

Запишемо перший доданок через старі координати $\{x\}$ з урахуванням (10.6), (10.7); усі обчислення проводимо в точці $x'_0 \leftrightarrow x_0$:

$$\begin{aligned} g'^{\alpha\beta'} g'^{\gamma\delta'} g'_{\alpha'\beta',\gamma'\delta'} &= g'^{\alpha\beta'} g'^{\gamma\delta'} \frac{\partial^2}{\partial x'^{\gamma'} \partial x'^{\delta'}} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} g_{\alpha\beta} \right) = \\ &= g'^{\alpha\beta'} g'^{\gamma\delta'} \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x'^{\gamma'} \partial x'^{\delta'}} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \right) + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial}{\partial x'^{\gamma'}} \left(\frac{\partial}{\partial x'^{\delta'}} g_{\alpha\beta} \right) \right\} = \\ &= g'^{\alpha\beta'} g'^{\gamma\delta'} \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x'^{\gamma'} \partial x'^{\delta'}} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \right) + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^{\gamma'}} \frac{\partial}{\partial x'^{\delta'}} \left(\frac{\partial x^\delta}{\partial x'^{\delta'}} \frac{\partial}{\partial x^\delta} g_{\alpha\beta} \right) \right\} = \\ &= 2g'^{\alpha\beta'} g'^{\gamma\delta'} \frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x'^{\gamma'} \partial x'^{\delta'} \partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} g_{\alpha\beta} + \\ &+ g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} g_{\alpha\beta,\gamma\delta} = 2g^{\gamma\delta} \frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x'^{\gamma'} \partial x'^{\delta'} \partial x'^{\alpha'}} + g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} g_{\alpha\beta,\gamma\delta}. \end{aligned}$$

Аналогічно обчислюємо другий доданок. Підстановка результатів у L'_g після перепозначення індексів дає

$$L'_g = 2(A + B)g^{\beta\gamma} \frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial x'^\beta \partial x'^\gamma \partial x'^\alpha} + L_g.$$

Щоб забезпечити інваріантність L_g принаймні відносно розглянутих перетворень, тобто $L'_g = L_g$, необхідно покласти $A + B = 0$. Тоді вираз (10.5) збігається, з точністю до скалярного множника та адитивної сталої, зі скалярною кривиною R , яка в локально-геодезичних координатах у точці x_0 має вигляд $R(x_0) = g^{\alpha\beta} g^{\delta\gamma} [g_{\alpha\delta, \beta\gamma} - g_{\alpha\beta, \delta\gamma}]$.

Таким чином, у будь-якій системі координат слід покласти

$$L_g = C_1 R + K = C_1 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + K, \quad (10.8)$$

де константа C_1 далі буде визначена з умови відповідності з ньютонівською границею. Цей вираз, отриманий унаслідок необхідної умови інваріантності відносно обмеженої групи перетворень, є інваріантом відносно загальних перетворень і відповідає всім вимогам щодо густини функції Лагранжа в дії для гравітаційного поля.

10.1.4. Рівняння гравітаційного поля. Обчислимо варіацію гравітаційної складової дії:

$$\delta S_g = C_1 \int_{\Omega} d^4 x \delta \left(\sqrt{-g} [g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + 2\Lambda] \right),$$

де замість константи K введено пропорційну їй величину Λ . Із тождествності $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$ випливає $\delta(g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}) = 0$ або $\delta g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} + g_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\nu} = 0$. Це дає зв'язок між варіаціями контраваріантного та коваріантного метричного тензорів $\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \delta g^{\mu\nu}$.

Варіація від визначника є $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ (порівняйте з вказівкою до впр. 5.3). Звідси

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \text{ тоді} \\ \delta S_g &= C_1 \int_{\Omega} d^4 x \left(\delta[\sqrt{-g} g^{\mu\nu}] R_{\mu\nu} + 2\Lambda \delta(\sqrt{-g}) + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right) = \\ &= C_1 \int_{\Omega} d^4 x \sqrt{-g} \left\{ \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + 2\Lambda) \right) \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Обчислимо варіацію тензора Річчі за допомогою локально-геодезичної системи в точці x_0 . Оскільки в цій системі $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(x_0) = 0$, до формули ввійдуть лише похідні від символів Крістоффеля:

$$(\delta R_{\mu\nu})_{x_0} = \partial_{\alpha} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \partial_{\nu} \delta \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}.$$

Оскільки $\delta \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ є тензором (як різниця двох символів Крістоффеля, див. впр. 5.7), цей вираз можна записати через коваріантні похідні. Це дає

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu})_{x_0} &= g^{\mu\nu} [\nabla_{\alpha} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \nabla_{\nu} \delta \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}]_{x_0} = \\ &= [g^{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha} \nabla_{\alpha} \delta \Gamma_{\gamma\mu}^{\gamma}]_{x_0} = (\nabla_{\alpha} W^{\alpha})_{x_0}, \end{aligned}$$

де $W^{\alpha} = g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\gamma\mu}^{\gamma}$. У цю формулу входять вже лише тензорні величини, тому її вигляд зберігається в будь-якій координатній системі. Очевидно, у такому вигляді це співвідношення зберігається в довільній точці¹:

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha} W^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g} W^{\alpha}).$$

Таким чином, доданок, що містить $\delta R_{\mu\nu}$ у (10.9) зводиться до інтеграла від повної дивергенції:

$$\int_{\Omega} d^4 x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int_{\Omega} d^4 x \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g} W^{\alpha}), \quad (10.10)$$

а значить до інтеграла по гіперповерхні, що обмежує об'єм Ω .

Оскільки вектор W^{α} залежить як від $\delta g^{\mu\nu}$, так і від перших похідних від цих функцій, вимагатимемо, щоб варіації $\delta g^{\mu\nu}$ та їх похідні² $\delta g^{\mu\nu}_{,\alpha}$ зникали на межах об'єму інтегрування Ω . Згідно із цими умовами вираз (10.10), що зводиться до інтеграла по межах області Ω , дає нульовий внесок у (10.9), тоді з (10.4) і (10.9) отримуємо

¹ Використано формулу для коваріантної дивергенції від вектора (впр. 5.4).

² Вимога щодо похідних є жорсткою й вимагає додаткового розгляду, який тут не проводимо. Крім того, не всі компоненти метричного тензора можна вважати динамічними змінними, варіації компонент можуть мати координатний характер. Проте на це можна не звертати уваги, якщо обмежитися лише розглядом необхідних умов стаціонарності дії.

$$\delta(S_m + S_g) = \int_{\Omega} d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2c} T_{\mu\nu} + C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + 2\Lambda) \right) \right\}.$$

За принципом найменшої дії $\delta(S_g + S_m) = 0$ при довільних варіаціях $\delta g^{\mu\nu}$ відносно шуканих функцій $g^{\mu\nu}$ маємо рівняння

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + 2\Lambda) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \text{де } \kappa = -(2cC_1)^{-1}. \quad (10.11)$$

10.2. Тензор енергії-імпульсу

10.2.1. Ліва частина рівнянь (10.11) містить тензор Ейнштейна, для якого має місце тотожність (7.11); додавання члена з $g_{\mu\nu}$ до $G_{\mu\nu}$, очевидно, не порушує її. Це дає необхідну умову існування розв'язку рівнянь (10.11):

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0 \quad (10.12)$$

Покажемо, що необхідна умова (10.12) дійсно виконується, якщо справедливі рівняння еволюції негравітаційних полів, що відповідають дії S_m . Будемо виходити з інваріантності величини S_m за інфінітезимальних перетворень координат

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x), \quad (10.13)$$

де малі величини $\xi^{\mu}(x)$ відрізняються від нуля лише всередині об'єму Ω і обертаються на нуль на його межі $\partial\Omega$ разом з похідними. Завдяки цьому межі інтегрування в (10.2) у нових координатах $\{x'\}$ виглядають так само, як і в старих $\{x\}$, і можна записати

$$S'_m = \int_{\Omega} d^4x' \sqrt{-g'(x')} L_m(g'^{\mu\nu}(x'), A'_i(x')), \quad (10.14)$$

де штрихи означають, що g' та A' обчислені в нових координатах (10.13). Для метричного тензора запишемо це перетворення з точністю до лінійних за ξ^{μ} членів:

$$g'^{\mu'\nu'}(x') = \left(\delta^{\mu'}_{\mu} + \xi^{\mu}_{,\mu'} \right) \left(\delta^{\nu'}_{\nu} + \xi^{\nu}_{,\nu'} \right) g^{\mu\nu}(x) \approx g^{\mu'\nu'}(x) + \xi^{\mu'}_{,\mu} g^{\mu\nu} + \xi^{\nu'}_{,\nu} g^{\mu\nu}. \quad (10.15)$$

Координати x^{μ} у (10.14) є змінними інтегрування, їх можна замінити на x^{μ} . Нас цікавить зміна форми метричного тензора $\delta g^{\mu\nu}(x) = g'^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}(x)$, яку отримуємо з (10.15), враховуючи

$$g'^{\mu\nu}(x + \xi) \approx g'^{\mu\nu}(x) + g'^{\mu\nu}_{,\alpha} \xi^{\alpha} \approx g^{\mu\nu}(x) + g^{\mu\nu}_{,\alpha} \xi^{\alpha},$$

де відкинуто члени другого порядку за ξ^{α} . Тоді (10.15) після перепозначення індексів переписується у вигляді

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = \xi^{\mu}_{,\alpha} g^{\alpha\nu} + \xi^{\nu}_{,\alpha} g^{\mu\alpha} - g^{\mu\nu}_{,\alpha} \xi^{\alpha} = \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}, \quad (10.16)$$

де зроблено підстановку $g'^{\mu\nu}_{,\alpha} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} g^{\sigma\nu} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\sigma} g^{\mu\sigma}$ (вона впливає з тожності $\nabla_{\alpha} g^{\mu\nu} \equiv 0$). Оскільки $\xi^{\mu}(x)$ та їх похідні за припущенням обертаються на нуль на межі $\partial\Omega$ об'єму Ω , це саме стосується й $\delta g^{\mu\nu}$. Підкреслимо, що тут варіація $\delta g^{\mu\nu}$ не є довільною, на відміну від підрозд. 10.1.

Компоненти негравітаційних полів також змінюються $A_i(x) \rightarrow A'_i(x) = A_i(x) + \delta A_i(x)$ і величини δA_i можна знайти, якщо відомі тензорні властивості A_i при перетворенні координат. Але явний вигляд δA_i далі не буде потрібний; зазначимо лише, що ці величини, аналогічно до $\delta g^{\mu\nu}$ обертаються на нуль на $\partial\Omega$.

Варіація дії S_m складається з варіацій завдяки зміні $g^{\mu\nu}$ і зміні A_i :

$$\begin{aligned} \delta S_m = S'_m - S_m = & \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4x \delta g^{\mu\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_{\alpha} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \right\} (\sqrt{-g} L_M) + \\ & + \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4x \sum_{i=1}^N \delta A_i \left\{ \frac{\partial}{\partial A_i} (\sqrt{-g} L_M) - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left[\frac{\partial}{\partial A_{i,\alpha}} (\sqrt{-g} L_M) \right] \right\}, \end{aligned}$$

де застосовано формулу Остроградського – Гаусса і враховано, що $\delta g^{\mu\nu}$ і δA_i дорівнюють нулю на $\partial\Omega$. Останній інтеграл у цій формулі дорівнює нулю внаслідок рівнянь (10.3) для негравітаційних полів, а перший перепишемо з використанням формули (10.4, а), яка визначає $T_{\mu\nu}$. Використовуючи (10.16) і симетрію тензора $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, маємо

$$\begin{aligned}\delta S_m &= \frac{1}{2c} \int_{\Omega} d^4 x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} (\xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi_{\mu;\nu} = \\ &= \frac{1}{c} \int_{\Omega} d^4 x \sqrt{-g} \left\{ \nabla_{\nu} (T^{\mu\nu} \xi_{\mu}) - \xi_{\mu} \nabla_{\nu} T^{\mu\nu} \right\}.\end{aligned}$$

Оскільки¹ $\sqrt{-g} \nabla_{\nu} (T^{\mu\nu} \xi_{\mu}) = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi_{\mu})$, перший доданок під знаком інтеграла зникає, тому що приводить до інтегрування по межах області Ω , де ξ_{μ} дорівнює нулю.

За умовою, S_m не змінюється при перетвореннях (10.16), тобто $\delta S_m = 0$, звідки $\int_{\Omega} d^4 x \sqrt{-g} \xi_{\mu} \nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$ для довільних ξ_{μ} усередині Ω . Це

можливо лише тоді, коли виконується рівняння (10.12). Таким чином, умова (10.12) є наслідком рівнянь негравітаційних полів, що випливають з інваріантного варіаційного принципу (10.13).

10.2.2. Перейдемо до інтерпретації тензора $T^{\mu\nu}$, означеного формулою (10.4, а). Рівняння, подібне до (10.12), вже зустрічалось у ч. 1, де тензор енергії-імпульсу вводився інакше. Треба показати, що (10.4, а) відповідає старому означенню тензора енергії-імпульсу.

Проведемо обчислення за означенням (10.4) у випадку вільних частинок. Для цього нам потрібний вираз дії пробної частинки ненульової маси m , що записується у вигляді інтеграла вздовж траєкторії

$$S_{\text{ч.}} = -mc \int ds = -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx_m^{\mu}}{dp} \frac{dx_m^{\nu}}{dp}} dp, \quad (10.17)$$

де $x_m(p)$ – часоподібна траєкторія частинки, параметризована неособливою змінною p . Дія (10.17) узагальнює спеціально-релятивістську дію вільної частинки

$$-mc \int \sqrt{c^2 - \left(\frac{d\mathbf{x}_m}{dt} \right)^2} dt = -mc \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx_m^{\mu}}{dp} \frac{dx_m^{\nu}}{dp}} dp.$$

Вираз (10.17) відрізняється лише сталим множником від функціоналу (6.6), який приводить до рівнянь геодезичних. Таким чином, (10.17) за певних умов переходить у відому із СТВ дію і відповідає рівнянням руху пробного тіла (8.13), які були отримані з інших міркувань.

Обчислимо варіацію (10.17) при зміні метричного тензора

¹ Див. формулу для коваріантної дивергенції від вектора з впр. 5.4.

$$\delta S_{\text{ч}} = -\frac{mc}{2} \int \frac{\delta g_{\alpha\beta} \frac{dx_m^\alpha}{dp} \frac{dx_m^\beta}{dp}}{\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx_m^\mu}{dp} \frac{dx_m^\nu}{dp}}} dp = -\frac{mc}{2} \int \delta g_{\alpha\beta} \frac{dx_m^\alpha}{ds_m} \frac{dx_m^\beta}{ds_m} ds_m,$$

де $ds_m = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx_m^\mu}{dp} \frac{dx_m^\nu}{dp}} dp$. Переходячи від $\delta g_{\alpha\beta}$ до $\delta g^{\mu\nu}$, приведемо $\delta S_{\text{ч}}$ до вигляду (10.4):

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{ч}} &= \frac{mc}{2} \int ds_m \delta g^{\mu\nu} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \frac{dx_m^\alpha}{ds_m} \frac{dx_m^\beta}{ds_m} = \\ &= \frac{mc}{2} \int ds_m \int \frac{\delta^{(4)}(x - x_m)}{\sqrt{-g}} \delta g^{\mu\nu} u_{(m)\mu} u_{(m)\nu} \sqrt{-g} d^4 x, \end{aligned}$$

де $u_{(m)\mu} = g_{\mu\alpha} \frac{dx_m^\alpha}{ds_m}$, а чотиривимірна δ -функція Дірака означена формальною умовою $\int d^4 x f(x) \delta^{(4)}(x) = f(0)$, причому

$$\delta^{(4)}(x) \equiv \delta(x^0) \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3) = 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Завдяки властивостям δ -функції можна замінити $\delta g^{\mu\nu}(x_m)$ на $\delta g^{\mu\nu}(x)$, тоді, змінюючи послідовність інтегрувань, дістанемо

$$\delta S_{\text{ч}} = \frac{mc}{2} \int d^4 x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \int ds_m \frac{\delta^{(4)}(x - x_m)}{\sqrt{-g}} u_{(m)\mu} u_{(m)\nu}.$$

Порівняння з (10.4) дає тензор енергії-імпульсу точкової частинки

$$T_{\text{ч}}^{\mu\nu}(x) = mc^2 \int ds_m \delta^{(4)}(x - x_m) (-g)^{-1/2} u_{(m)\mu}^\mu u_{(m)\nu}^\nu. \quad (10.18)$$

Цей вираз узгоджується з відомим тензором енергії-імпульсу точкового тіла у СТВ:

$$T_{\text{ч}}^{\mu\nu}(x) = \frac{mc \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) \frac{dx_m^\mu}{dt} \frac{dx_m^\nu}{dt}}{\sqrt{c^2 - \left(\frac{d\mathbf{x}_m}{dt}\right)^2}},$$

де враховано $\{x_m^\mu\} = \{x^0, \mathbf{x}_m(t)\}$, $x^0 = ct$.

Якщо розподіл невзаємодіючих частинок неперервний і можна вважати, що всі частинки кожного елемента dm у точці x мають од-

накову швидкість $u^\mu(x) = u_{(m)}^\mu$, з (10.18) отримуємо тензор енергії-імпульсу у вигляді

$$T_{\zeta}^{\mu\nu}(x) = c^2 \int dm \int ds_m \delta^{(4)}(x - x_m) (-g)^{-1/2} u_{(m)}^\mu u_{(m)}^\nu = \varepsilon(x) u^\mu(x) u^\nu(x), \quad (10.19)$$

де $\varepsilon(x) = \mu^*(x) c^2$ – густина енергії в системі спокою середовища, а величина $\mu^*(x) = \int dm (-g)^{-1/2} \int ds_m \delta^4(x - x_m)$ – інваріантна густина маси спокою. Таким чином, формула (10.19) дає тензор енергії-імпульсу пилових незваємодіючих частинок.

10.2.3. Аналогічно можна розглянути дію для інших полів і показати, що введений формулою (10.4) тензор $T^{\mu\nu}$ можна узгодити з іншими означеннями цієї величини в просторі-часі Мінковського. Проте для інтерпретації тензора $T^{\mu\nu}$ вже досить проведених обчислень. Це видно з таких міркувань. Запишемо $T^{\mu\nu} = T_{\zeta}^{\mu\nu} + T_A^{\mu\nu}$, виділяючи внесок незваємодіючих частинок і $T_A^{\mu\nu}$ – аналогічний внесок інших негравітаційних полів. У плоскому просторі в інерціальній системі координат формула (10.12) переходить у рівняння

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0,$$

що за відсутності випромінювання й зовнішніх потоків, означає збереження інтегралів $\int d^3x T^{\mu 0} = \int d^3x T_{\zeta}^{\mu 0} + \int d^3x T_A^{\mu 0}$.

Таким чином, зміни енергії та імпульсу, що відповідають згідно з (10.19) внеску маси спокою частинок, збалансовуються внеском інших негравітаційних полів, тому $T_A^{\mu 0}$ слід інтерпретувати як тензор енергії-імпульсу інших негравітаційних полів, а $T^{\mu\nu}$ слід надати змісту саме тензора енергії-імпульсу всіх негравітаційних полів, що відповідають дії S_m (10.2).

10.3. Константа κ і космологічна стала

Домножуючи (10.11) на $g^{\mu\nu}$ і підсумовуючи, виразимо скалярну кривину через праву частину рівнянь:

$$R - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (R + 2\Lambda) = \kappa T \rightarrow R + 2\Lambda = -(\kappa T + 2\Lambda),$$

де $T = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$. Повертаючись до (10.11), маємо

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (10.20)$$

Припускаючи, що гравітаційне поле є слабким (у релятивістському розумінні), вважатимемо, що в певній системі координат метричний тензор мало відрізняється від тензора Мінковського: $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}$, де $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, і проведемо обчислення з точністю до членів, лінійних за $h_{\mu\nu}$. Оскільки символи Крістоффеля лінійні за першими похідними від $h_{\mu\nu}$, відкидаючи квадратичні комбінації цих символів, згідно з (7.7) маємо

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \approx \frac{1}{2}(g_{\alpha\delta,\beta\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma}),$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \approx \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (g_{\alpha\nu,\beta\mu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\alpha\beta,\mu\nu} - g_{\mu\nu,\alpha\beta}) \approx \\ &\approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} (g_{\alpha\nu,\beta\mu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\alpha\beta,\mu\nu} - g_{\mu\nu,\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (10.21)$$

Розглянемо статичний розподіл маси з густиною $\mu \approx \mu^*$, який утворює слабе гравітаційне поле. Для статичності будь-якого тіла необхідні взаємодії, що утримують його від колапсу під впливом взаємного тяжіння окремих елементів. Ці взаємодії також дають внесок у загальний тензор енергії-імпульсу, але для нерелятивістських конфігурацій він незначний і можна обмежитися формулою (10.19).

Умова статичності допускає вибір системи координат, яка відповідає формулі (9.4) для квадрата інтервалу. У цій системі можна покласти просторові компоненти швидкості $u^i = 0$, а нульова компонента визначається умовою нормування $(u^0)^2 = (g_{00})^{-1} \approx 1$ при слабкому полі.

Розглянемо рівняння (10.20) для індексів $\mu = 0, \nu = 0$. За умовою статичності з (10.21), відкидаючи похідні за x^0 , маємо

$$R_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(-g_{00,\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\Delta g_{00}.$$

Використаємо наближену формулу (9.6) для метричного коефіцієнта g_{00} . У правій частині (10.20) $T = c^2\mu^* u_\alpha u^\alpha = \mu^* c^2$, тоді це рівняння набуває вигляду

$$\frac{1}{2}\Delta g_{00} = \kappa(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00}) - \Lambda g_{00} \approx \frac{1}{2}\kappa c^2 - \Lambda g_{00}.$$

Якщо підставити сюди наближений вираз (9.6) для g_{00} , отримаємо рівняння для ньютонівського потенціалу U , яке матиме за $\Lambda \neq 0$ вигляд рівняння Гельмгольца. Розв'язок цього рівняння істотно відрізняється від ньютонівського потенціалу на масштабах $\sim \Lambda^{-1/2}$. З іншого боку, із спостережень відомо, що на масштабах Сонячної системи гравітаційний потенціал зі значною точністю описується рівнянням Пуассона (10.1), тобто константа Λ , яку називають космологічною сталою, практично себе не проявляє. Недарма значення цієї константи вдалося встановити лише наприкінці минулого століття, тому, де не йдеться про космологію, цією константою можна знехтувати. Тепер можна оцінити константу κ , вимагаючи, щоб потенціал U задовольняв (10.1). Підстановка g_{00} з (9.6) дає рівняння

$$\Delta U = \frac{1}{2} \kappa c^4 \mu,$$

що збігається з (10.1), якщо

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

Перепишучи (10.11) з отриманою константою κ (поки що без космологічної сталої), маємо рівняння гравітаційного поля Ейнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (10.22)$$

Рівняння поля (10.22) з'явилися майже одночасно в працях А. Ейнштейна і Д. Гільберта, які йшли до них різними шляхами. Пізніше Ейнштейн ввів космологічну сталу¹ і рівняння набули остаточного вигляду

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (10.23)$$

Це було зроблено, щоб забезпечити існування стаціонарних космологічних розв'язків. Пізніше необхідність такого кроку відпала завдяки виявленню розбігання галактик: стало зрозумілим, що наш Всесвіт є нестаціонарним. Проте космологічна стала залишалася в полі зору теоретиків. Ненульове значення Λ було достовірно встановлено наприкінці минулого століття.

¹ У різних авторів можна зустріти інші числові коефіцієнти при Λ .

Покладемо

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon_\Lambda,$$

де введено новий параметр ε_Λ , що має розмірність густини енергії. Рівняння (10.23) перепишемо у вигляді

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T^{\mu\nu} + T_{vac}^{\mu\nu}), \quad (10.24)$$

де $T_{vac}^{\mu\nu} = \varepsilon_\Lambda g^{\mu\nu}$ – можна назвати тензором енергії-імпульсу космологічного вакууму (хоча щодо цього є різні інтерпретації¹). Така назва пов'язана з тим, що у плоскому просторі $T_{vac}^{\mu\nu} = \varepsilon_\Lambda \eta^{\mu\nu}$ зберігає свій вигляд у всіх інерціальних системах відліку. Це узгоджується з постулатами СТВ про відсутність привілейованої системи відліку та з вимогою інваріантності вакууму відносно перетворень Лоренца, а також відносно часових і просторових трансляцій. Тензор $T_{vac}^{\mu\nu} = \varepsilon_\Lambda g^{\mu\nu}$ можна формально подати у вигляді тензора енергії-імпульсу ідеальної рідини (8.6), якщо вибрати рівняння стану $p = -\varepsilon = -\varepsilon_\Lambda$. Зауважимо, що очевидно $\nabla_\nu T_{vac}^{\mu\nu} \equiv 0$, тобто такий вибір узгоджується з коваріантним законом збереження та рівняннями гідродинаміки.

Чисельне значення ε_Λ зручно подавати у зв'язку з іншими космологічними параметрами: $\varepsilon_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_c c^2$, де $\rho_c = 3H_0^2 / (8\pi G)$ – так звана критична густина, вона дуже мала й проявляє себе через космологічну кривину лише на великих масштабах, H_0 – стала Габбла, що характеризує розбігання галактик, а константа Ω_Λ характеризує внесок ε_Λ у загальну космологічну густина. Сучасні спостереження дають $H_0 \approx 72$ км/(с·Мпк), $\Omega_\Lambda \approx 0,7$. Більш докладно зміст цих параметрів буде розглянуто в розд. 13.

Резюмуємо результати. Рівняння гравітаційного поля (10.23) отримано за таких припущень: вони є наслідком принципу стаціонарної дії з інваріантною підінтегральною функцією L_g , вони є рівняннями у частинних похідних другого порядку відносно метричного тензора $g_{\mu\nu}$. Ці умови визначають явний вигляд L_g ; (10.8) з точністю до двох

¹ Зокрема, стала Λ , можливо, є проявом певного космологічного поля, "квінтесенції", широко вживаний також термін "темна енергія".

констант, одна з яких пропорційна гравітаційній сталій, а інша пов'язана з космологічною сталою. Рівняння Ейнштейна пов'язують властивості простору-часу, описувані геометричними об'єктами в лівій частині рівнянь, з розподілом енергії-імпульсу $T_{\mu\nu}$ негравітаційних полів у правій частині. Введення космологічної сталої в (10.23) є необхідним для врахування ефектів релятивістської космології, але для опису гравітаційних явищ, що не потребують врахування космологічної кривини, ми використовуємо рівняння (10.22). Умовою інтегровності рівнянь (10.22) і (10.23) є коваріантне співвідношення (10.12), яке забезпечується рівняннями еволюції негравітаційних полів і за відсутності гравітаційного поля переходить у звичайний закон збереження енергії-імпульсу СТВ.

11. НАБЛИЖЕННЯ СЛАБКОГО ПОЛЯ ТА ГРАВІТАЦІЙНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

У лінійному наближенні слабкого поля рівняння Ейнштейна зводяться до хвильового рівняння, джерелом якого є тензор енергії-імпульсу негравітаційних полів. У цьому наближенні легко проаналізувати загальний розв'язок і питання щодо гравітаційних хвиль.

11.1. Фізична довільність у розв'язках рівнянь поля

Степінь вільності фізичного поля можна визначити як мінімальну кількість функцій, що однозначно фіксують розв'язок рівнянь цього поля. Довільність розв'язків, зокрема, обумовлена кількістю незалежних початкових умов у задачі Коші. Наприклад, для скалярного поля з рівнянням Д'Аламбера для цього достатньо двох функцій трьох змінних, що визначають це поле та його похідну за часом на гіперповерхні $t = \text{const}$. Аналогічні питання докладно досліджені й для гравітаційного поля. Можна показати, що рівняння Ейнштейна зводяться до еволюційної системи гіперболічного типу та додаткових рівнянь еліптичного типу для початкових даних на просторовоподібній гіперповерхні. З'ясування степенів вільності поля необхідне як для розробки аналітичних і наближених методів розв'язання рівнянь Ейнштейна, так і для побудови коректної процедури квантування поля.

Система рівнянь (10.22) є досить специфічною. Якщо $g_{\mu\nu}(x)$ є розв'язком системи, то завдяки коваріантності її задовольняє тензор

$$g'_{\mu\nu}(y) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} g_{\alpha\beta}(x)$$

в іншій системі координат. Таким чином, для будь-яких чотирьох незалежних функцій ϕ^μ , які можна розглядати як координатні перетворення $x \rightarrow y = \phi(x)$, тензор

$$g'_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(\phi(x)) \quad (11.1)$$

також є розв'язком.

Довільність розв'язку очевидно пов'язана з довільністю функцій¹ ϕ^μ у (11.1), не пов'язана із фізичними степенями вільності гравітаційного поля, оскільки зміна координат не змінює фізичної ситуації й не впливає на числові значення спостережуваних величин. Цю обставину можна застосувати, наприклад, щоб перетворити частину компонент метричного тензора на нуль або накласти на них деякі умови. Таким чином, хоча формально $g_{\mu\nu}(x)$ має десять незалежних компонент, не всі вони відбивають фізичну довільність гравітаційного поля, тобто кількість фізично змістовних незалежних функцій, які треба задати при визначенні даних Коші на початковій гіперповерхні $x^0 = 0$. З іншого боку, безпосереднім обчисленням можна показати, що з десяти рівнянь (10.22) можна утворити лінійні комбінації, які не містять других похідних $\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial t^2}(x^0 = ct)$, і їх можна розглядати як обмеження на дані Коші. Усе це вимагає ретельного аналізу кількості функцій, які фіксують розв'язок рівнянь (10.22), незалежно від координатних перетворень. Розглянемо ці питання для рівнянь (10.22) у наближенні слабкого поля.

11.2. Рівняння Ейнштейна в лінійному наближенні

У разі слабкого поля, тобто коли компоненти метричного тензора мало відрізняються від тензора Мінковського, запишемо

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \sum_{\mu,\nu} |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (11.2)$$

¹ Відповідні нефізичні степені вільності називають координатними.

Окрім припущення про слабке гравітаційне поле, це також означає певний вибір координатної системи й певну асимптотичну поведінку, що відповідає ізольованій системі. Для метричного тензора (11.2) використаємо наближений вираз тензора Рімана (10.21), звідки отримуємо лінійне за компонентами $h_{\mu\nu}$ наближення для тензора Річчі, у якому відкинуто квадратичні члени за цими величинами,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\beta,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta}). \quad (11.3)$$

Введемо нові польові змінні

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}. \quad (11.4)$$

Згортка цього виразу з $\eta^{\mu\nu}$ дає змогу виразити h через $h = -\psi$, $\psi = \eta^{\mu\nu} \psi_{\mu\nu}$, звідки $h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \psi$.

Накладемо калібрувальну умову

$$\eta^{\alpha\beta} \psi_{\mu\alpha,\beta} = 0, \quad (11.5)$$

яка буде обґрунтована нижче. Формулу (11.5) можна переписати як

$$\eta^{\alpha\beta} h_{\mu\alpha,\beta} = \frac{1}{2} h_{,\mu},$$

звідки видно, що завдяки (11.5) перші три доданки в правій частині (11.3) скорочуються й підстановка (11.4) у (11.3) дає

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} [\square \psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square \psi], \quad \text{де } \square \equiv \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta.$$

Звідси легко записати рівняння Ейнштейна в наближенні слабкого поля; вони мають вигляд хвильового рівняння

$$\square \psi_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (11.6)$$

Продиференціюємо (11.6) і згорнемо з $\eta^{\alpha\beta}$:

$$\square (\eta^{\alpha\beta} \psi_{\mu\alpha,\beta}) = -\frac{16\pi G}{c^4} \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta T_{\mu\alpha}.$$

Права частина дорівнює нулю, якщо виконується закон збереження енергії-імпульсу у плоскому просторі: $\eta^{\alpha\beta} \partial_\beta T_{\mu\alpha} = 0$. Це співвідношення є першим наближенням точного рівняння (10.12) за константою взає-

модії G (лінійним за величинами $h_{\mu\nu} \sim G$). У цьому наближенні нехтуємо квадратичними за $h_{\mu\nu}$ членами, а також складовими $\sim Gh_{\mu\nu}$ у (10.12) і членами більш високого порядку. За умови відсутності зовнішнього випромінювання в ізольованій системі маємо $\eta^{\alpha\beta}\psi_{\mu\alpha,\beta} = 0$, як розв'язок хвильового рівняння з нульовою правою частиною. Таким чином, рівняння (11.6) узгоджено з умовою (11.5).

Формальний розв'язок рівнянь (11.6) можна отримати за стандартною формулою для загаяних потенціалів. Однак застосування цього розв'язку наштовкуються на низку "підводних каменів", пов'язаних з коректністю наближення слабкого поля (див. нижче).

11.3. Калібрувальні перетворення

Як було показано, умову (11.5) за певних граничних умов виконано для розв'язку рівняння (11.6). Розглянемо інший підхід і покажемо, що умову (11.5) можна задовольнити для будь-якого метричного тензора (11.2), застосовуючи малі перетворення координат (10.13). За цих перетворень функціональна форма метричного тензора змінюється згідно з (10.16): $\delta g^{\mu\nu}(x) = \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}$. Перепишемо цю формулу для варіації коваріантного метричного тензора

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta} = -\xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu}. \quad (11.7)$$

Це індукує відповідну зміну величин $h_{\mu\nu}$, які відрізняють $g_{\mu\nu}$ від $\eta_{\mu\nu}$. Нехтуючи малими членами більш високого порядку $\sim O(\xi h)$, запишемо

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}, \quad (11.8)$$

де $\xi_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\xi^\beta$, або в термінах функції $\psi_{\mu\nu}$:

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{,\alpha}. \quad (11.9)$$

Це можна розглядати як калібрувальне перетворення, яке не змінює фізичного змісту шуканого розв'язку $\psi_{\mu\nu}$, звідси

$$\psi'_{\mu\alpha,\beta}\eta^{\alpha\beta} = \psi_{\mu\alpha,\beta}\eta^{\alpha\beta} - \square\xi_\mu.$$

Таким чином, якщо як ξ_μ вибрати розв'язок рівняння

$$\square\xi_\mu = \psi_{\mu\alpha,\beta}\eta^{\alpha\beta}, \quad (11.10)$$

то для нових польових функцій $\psi'_{\mu\nu}$, що фізично еквівалентні старим, умова (11.5) є виконаною. Однак вона умова ще не фіксує остаточно системи координат, оскільки залишається можливість перетворень (11.9) з новими функціями $\xi^\alpha = \eta^{\alpha\beta}\xi_\beta$, що задовольняють рівняння

$$\square \xi^\alpha = 0 \quad (11.11)$$

і, таким чином, не впливають на умову (11.5).

11.4. Розклад поля за плоскими хвилями

З огляду на лінійність, досить проаналізувати питання про ступені вільності для рівняння (11.6) у пустоті

$$\square \psi_{\mu\nu} = 0 \quad (11.12)$$

разом з умовою (11.11) для калібрувальних перетворень. Розв'язки рівнянь (11.11), (11.12) можна отримати за допомогою перетворення Фур'є. Вони мають вигляд

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \int d^4k \delta(k^2) \Phi_{\mu\nu}(k) e^{ikx}; \quad (11.13, \text{а})$$

$$\xi_\mu(x) = \int d^4k \delta(k^2) \zeta_\mu(k) e^{ikx}; \quad (11.13, \text{б})$$

де позначено $kx = k^\mu x_\mu$, $k^2 = k^\mu k_\mu = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2$; причому $\Phi_{\mu\nu}(k) \equiv \Phi_{\mu\nu}(k^0, \mathbf{k})$, $\zeta_\mu(k) \equiv \zeta_\mu(k^0, \mathbf{k})$ – довільні функції чотирьох змінних. Ці розв'язки можна подати у вигляді

$$\psi_{\mu\nu}(x) = \int d^3\mathbf{k} \left(\psi_{\mu\nu}^+(\mathbf{k}) e^{ikx} + \psi_{\mu\nu}^-(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right)_{k^0=|\mathbf{k}|}; \quad (11.14, \text{а})$$

$$\xi_\mu(x) = \int d^3\mathbf{k} \left(\xi_\mu^+(\mathbf{k}) e^{ikx} + \xi_\mu^-(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right)_{k^0=|\mathbf{k}|}, \quad (11.14, \text{б})$$

де $\psi_{\mu\nu}^\pm$, ξ_μ^\pm – довільні функції просторового вектора \mathbf{k} . Покажемо це для $\xi_\mu(x)$. Проінтегрувавши (11.13, б) за k^0 , дістанемо

$$\xi_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|} \left(\zeta_\mu(k) e^{ikx} \right)_{k^0=|\mathbf{k}|} + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|} \left(\zeta_\mu(k) e^{ikx} \right)_{k^0=-|\mathbf{k}|}.$$

Другий доданок за допомогою заміни $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ перепишемо таким чином:

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|} \zeta_\mu(-|\mathbf{k}|, \mathbf{k}) e^{i(-|\mathbf{k}|x^0 + \mathbf{k}\mathbf{x})} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|} \zeta_\mu(-|\mathbf{k}|, -\mathbf{k}) e^{i(-|\mathbf{k}|x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})}$$

Звідси $\xi_\mu(x)$ набуває вигляду (11.14, б), якщо позначити

$$\xi_\mu^+(\mathbf{k}) = \frac{\zeta_\mu(|\mathbf{k}|, \mathbf{k})}{2|\mathbf{k}|}, \quad \xi_\mu^-(\mathbf{k}) = \frac{\zeta_\mu(-|\mathbf{k}|, -\mathbf{k})}{2|\mathbf{k}|}.$$

Ці функції є незалежними, оскільки $\zeta_\mu(k^0, \mathbf{k})$ і $\zeta_\mu(-k^0, \mathbf{k})$ при фіксованому $k^0 > 0$ є незалежними функціями трьох змінних – компонент вектора \mathbf{k} . Перетворення, що було виконано з $\xi_\mu(x)$, називають виділенням додатно-частотних і від'ємно-частотних компонент. Аналогічно дістанемо (11.14, а).

Використаємо представлення (11.13), (11.14, а, б), щоб отримати обмеження на функції $\psi_{\mu\nu}^\pm$, ξ_μ^\pm . Умова (11.5) дає

$$\psi_{\mu\nu}^\pm k^\nu = 0, \quad (11.15)$$

$$\text{а формула (11.9) – } \psi_{\mu\nu}^{\prime\pm} = \psi_{\mu\nu}^\pm \mp i\xi_\mu^\pm k_\nu \mp i\xi_\nu^\pm k_\mu \pm i\eta_{\mu\nu}\xi_\alpha^\pm k^\alpha, \quad (11.16)$$

де k_μ (тут і далі в цьому підрозділі) – ізотропні вектори: $k^0 = |\mathbf{k}|$; $\mathbf{k} = (k^1, k^2, k^3)$.

Покажемо, що можна накласти додаткові умови

$$\psi_{0n}^\pm = 0, \quad n = 1, 2, 3; \quad (11.17)$$

$$\psi_{\mu\nu}^\pm \eta^{\mu\nu} = 0. \quad (11.18)$$

Якщо (11.17) і (11.18) не виконуються, підберемо ξ_μ у (11.16) так, щоб відповідні умови виконувалися для функцій $\psi_{\mu\nu}^{\prime\pm}$, отриманих згідно з (11.16). Це дає чотири рівняння відносно ξ_μ :

$$-\xi_0^\pm k^n + \xi_n^\pm k^0 \pm i\psi_{0n}^\pm = 0, \quad \xi_0^\pm k^0 + \sum_{n=1}^3 \xi_n^\pm k^n \mp \frac{i}{2} \psi_{\mu\nu}^\pm \eta^{\mu\nu} = 0.$$

Із першого співвідношення знаходимо $\xi_n^\pm = (\mp i\psi_{0n}^\pm + \xi_0^\pm k^n)/k^0 = 0$. Підстановка в друге рівняння дає

$$2k^0 \xi_0^\pm \mp i \left(\sum_n \psi_{0n}^\pm \frac{k^n}{k^0} + \frac{1}{2} \psi_{\mu\nu}^\pm \eta^{\mu\nu} \right) = 0,$$

яке очевидно має розв'язок за умови $k^0 \neq 0$. Звідси маємо розв'язок усієї системи відносно величин ξ_μ^\pm , які забезпечують рівності (11.17) і (11.18) для нових фур'є-амплітуд (11.16).

Далі зручно зробити просторовий поворот системи координат так, щоб вектор \mathbf{k} мав лише третю компоненту, тоді з (11.15), покладаючи $\mu=0$ і беручи до уваги (11.17), маємо $\psi_{00}^{\pm} = 0$. Звідси, з урахуванням (11.17) дістанемо $\psi_{0\mu}^{\pm} = 0$. Тепер (11.15) має вигляд $\psi_{\mu 3}^{\pm} k^3 = 0 \rightarrow \psi_{\mu 3}^{\pm} = 0$. Залишаються ненульовими лише компоненти $\psi_{12}^{\pm} = \psi_{21}^{\pm}$, ψ_{11}^{\pm} , ψ_{22}^{\pm} , причому в силу (11.18) останні пов'язані співвідношенням $\psi_{11}^{\pm} + \psi_{22}^{\pm} = 0$.

Таким чином, для кожного вектора $\mathbf{k} \neq 0$ маємо чотири незалежних числа ψ_{11}^{-} , ψ_{11}^{+} , ψ_{12}^{-} , ψ_{12}^{+} . Іншими словами, маємо чотири незалежні функції трьох змінних, що задають розв'язок наближених рівнянь поля.

11.5. Гравітаційне випромінювання

Рівняння (11.12) наближено описує вільне гравітаційне поле в пустоті; його розв'язки інтерпретують як гравітаційні хвилі – збурення кривини простору-часу, яке може бути зареєстровано за відносними коливаннями вільних тіл згідно з рівняннями геодезичної девіації (7.15). Цей принцип закладено в проекти широкосмугових гравітаційних антен. Як очікується, у перспективі детектори гравітаційних хвиль будуть спроможні реєструвати збурення метрики на рівні $\sim 10^{-22} \div 10^{-23}$ (за безрозмірною амплітудою), що виникають унаслідок катастрофічних подій у сусідніх галактиках (злиття подвійних зір, вибухи наднових тощо). Створення таких детекторів відкриє нове, дуже важливе джерело астрономічної інформації. Це – справа майбутнього, хоча й не дуже далекого. Тим не менше, уже зараз існує вагоме підтвердження існування гравітаційного випромінювання на основі багаторічних спостережень за рухом пульсара PSR 1913+16, який є членом подвійної системи. Перевірка передбачення ЗТВ базується на підрахунках впливу гравітаційного випромінювання на орбітальний період системи. Унікальність PSR 1913+16 полягає в тому, що наявність пульсара, який є джерелом дуже стабільних імпульсів, забезпечує можливість точного визначення параметрів орбіти. Крім того, це досить тісна система зі значними втратами енергії на гравітаційне випромінювання.

Потужність гравітаційного випромінювання можна оцінити за допомогою розв'язків рівняння (11.6). Результат має такий вигляд (Ейнштейн, 1918 р.):

$$P_{grav} = \frac{G}{45c^5} \ddot{D}_{ij} \ddot{D}^{ij}, \quad (11.19)$$

де $D_{ij} = \int \rho (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) dV$ – квадрупольний момент мас з густиною ρ , крапка означає диференціювання за часом.

При використанні формули (11.19) слід врахувати такі зауваження: по-перше, поняття енергії в ЗТВ є досить специфічним і потребує детального розгляду; по-друге, необхідно чітко визначити, якому порядку наближень відповідають ефекти, пов'язані з втратами енергії. Зокрема, при розгляді руху подвійної зорі орбітальні поправки за рахунок випромінювання мають порядок $\sim (v/c)^5$, що відповідає більш точному наближенню, ніж те, у якому отримано рівняння (11.6). У зв'язку з цим низкою авторів було проведено прямі розрахунки рівнянь руху двох тіл до порядку $(v/c)^5$, що не потребують енергетичних міркувань. Виявляється, що більш високі порядки наближень не дають внесок у формулу (11.19), де можна вважати, що P_{grav} описує втрати ньютонівської енергії гравітаційної системи. Із цих міркувань можна отримати формулу для зменшення орбітального періоду подвійної системи, яка була блискуче підтверджена¹ спостереженнями динаміки пульсара PSR 1913+16.

12. СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНЕ ГРАВІТАЦІЙНЕ ПОЛЕ ОБМЕЖЕНОЇ СИСТЕМИ МАС. ЧОРНІ ДІРИ

У цьому розділі буде отримано й досліджено розв'язок Шварцшильда рівнянь Ейнштейна (10.22) без космологічної сталої, що описує чорну діру без обертання, а також зовнішнє гравітаційне поле сферично-симетричної ізольованої системи мас. Умови сферичної симетрії та певної фізичної поведінки на нескінченності визначають цей розв'язок єдиним чином (теорема Біркгоффа). Також буде проаналізовано рух пробних тіл у цьому полі. Суттєво новим, на відміну від ньютонівської теорії, є висновок про існування нестійких колових орбіт і ниж-

¹ За відкриття й дослідження першого радіопульсара PSR 1913+16, що є членом тісної подвійної системи, Р. Халсу та Дж. Тейлору присуджено Нобелівську премію з фізики.

ньої межі радіуса колових орбіт, що має важливі наслідки для моделей релятивістських астрофізичних об'єктів. Далі розглянемо систему координат, придатних для опису простору-часу в області під сферою Шварцшильда. Наприкінці розділу подано короткі відомості про метрику Керра та астрофізичні прояви чорних дір.

12.1. Метрика Шварцшильда

Суттєвим залишається поняття сферичної симетрії, введене в розд. 9. Розглянемо сферично-симетричне гравітаційне поле, що описується метрикою (9.13) у координатах $\{t, r, \theta, \varphi\}$, тому виходитимемо із сферично-симетричної форми для квадрата інтервалу

$$ds^2 = c^2 A(t, r) dt^2 - B(t, r) dr^2 + 2D(t, r) dt dr - F(t, r) dO^2, \quad (12.1)$$

який збігається з (9.13) після деяких перепозначень. Цей вираз можна спростити, враховуючи, що заміни змінних $t, r \rightarrow t', r'$ не порушують сферичної симетрії у виразі (12.1). Зафіксуємо систему координат, накладаючи деякі умови на метричні коефіцієнти, що описують гравітаційне поле обмеженої сферично-симетричної системи мас.

Будемо вважати, що

$$F \equiv r^2. \quad (12.2)$$

Якщо це не так, за умови $F > 0$ зробимо заміну $r \rightarrow r' = \sqrt{F(t, r)}$, не змінюючи t, θ, φ . Умова невиродженості перетворення (3.1) зводиться до співвідношення

$$\frac{\partial F}{\partial r} \neq 0. \quad (12.3)$$

Це виключає можливість, коли $F = F(t)$ не залежить від r . Можна показати, що така можливість реалізується й розв'язки рівнянь Ейнштейна з $F = F(t)$ дійсно існують, але вони описують фізичну ситуацію, відмінну задачі про поле обмеженої системи мас. Для обмеженого розподілу маси ми очікуємо, що принаймні для досить великих значень радіальної координати r компоненти метричного тензора та їх похідні наближені до відповідних компонент тензора Мінковського. У сферичних координатах це забезпечує нерівність (12.3), тому існує область, де виконується (12.3) і відповідно можна покласти (12.2). Далі, щоб не перепозначати координати, можна вважа-

ти, що необхідні перетворення вже зроблені й умова (12.2) виконана. Тепер вважатимемо

$$D(t, r) = 0. \quad (12.4)$$

Якщо це не так, зробимо заміну $t \rightarrow t = f(t', r)$, залишаючи решту координат без змін, причому функція f задовольняє

$$c^2 A \frac{\partial f}{\partial r} + D = 0. \quad (12.5)$$

Підставляючи $dt = \frac{\partial f}{\partial t'} dt' + \frac{\partial f}{\partial r} dr$ у (12.1), бачимо, що коефіцієнт при $dt' dr$ зникає і умова (12.4) виконується в нових координатах. Зазначимо, що (12.5) – це звичайне диференціальне рівняння відносно функції f , де координата t входить як параметр; його розв'язок

$$f = -\int \frac{D}{c^2 A} dr + h(t)$$

існує, якщо $A \neq 0$, і визначає f з точністю до довільної функції $h(t)$.

Заміна буде неособливою, якщо $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$.

Таким чином, шукаємо розв'язок рівнянь Ейнштейна (10.22) у вигляді

$$ds^2 = c^2 A(t, r) dt^2 - B(t, r) dr^2 - r^2 dO^2 \quad (12.6)$$

в області $r \geq R_0$ для деякого R_0 , припускаючи, що маса, що створює гравітаційне поле, розташована в області $r < R_0$, а при $r > R_0$ права частина (10.22) обертається на нуль. Розв'язок рівнянь поля в пустоті (зовні тіла, що створює гравітаційне поле) називають зовнішнім. Щоб забезпечити лоренцову сигнатуру, вимагатимемо $A > 0, B > 0$.

При отриманні представлення (12.6) було використано певні нерівності щодо коефіцієнтів метрики (12.1). Випадки, коли ці нерівності не виконуються, треба аналізувати окремо, але ми не будемо цього робити, звертаючись знов-таки до міркувань щодо поведінки метричного тензора обмеженої системи мас і вважаючи, що нерівності виконуються принаймні за $r \geq R_0$.

Запишемо діагональні компоненти метричного тензора, що відповідають (12.6) у координатах $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$:

$$g_{00} = A, \quad g_{11} = -B, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 (\sin \theta)^2.$$

Наведемо ненульові компоненти символів Крістоффеля $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$, що відповідають метричній формі (12.6) (при $\beta \leq \gamma$ з огляду на симетрію за нижніми індексами):

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{A}}{2A}, \quad \Gamma_{01}^0 = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{B}}{2A}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{A'}{2B}, \quad \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{B}}{2B}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{B'}{2B}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{B}, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{r(\sin\theta)^2}{B}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \text{ctg}\theta,\end{aligned}$$

де точка означає похідну за x^0 , а штрих – похідну за r .

Обчислимо компоненти рівнянь Ейнштейна. У пустоті згортка (10.22) за індексами дає $R = 0$, що дозволяє переписати рівняння поля у вигляді

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (12.7)$$

Підстановка сюди обчислених символів Крістоффеля дає

$$R_{01} = \frac{\dot{B}}{rB} = 0. \quad (12.8)$$

Умова $\dot{B} = 0$, що випливає звідси, спрощує обчислення компонент

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} + \frac{A'}{rB} - \frac{A'^2}{4AB} \quad (12.9, \text{ а})$$

і

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'^2}{4A^2} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{B'}{rB}. \quad (12.9, \text{ б})$$

Також легко отримати

$$R_{22} = 1 - \frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB}, \quad (12.9, \text{ в})$$

$$R_{33} = (\sin\theta)^2 R_{22}, \quad R_{02} = R_{03} = R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0. \quad (12.9, \text{ г})$$

Розглядаючи суму $\frac{R_{00}}{A} + \frac{R_{11}}{B}$, дістаємо

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0. \quad (12.10)$$

Ураховуючи (12.10) у (12.9, в), маємо

$$-1 + \frac{1}{B} - \frac{rB'}{B^2} = -1 + \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{B} \right) = 0. \quad (12.11)$$

Оскільки завдяки (12.8) функція B не залежить від $x^0 = ct$, рівняння (12.11) дає

$$B = \left(1 + \frac{k}{r} \right)^{-1},$$

де k – стала інтегрування.

Із (12.10) маємо

$$\frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial r} (AB) = 0.$$

Звідси, враховуючи отриманий вираз для B , легко дістати

$$A = h(t) \left(1 + \frac{k}{r} \right),$$

де $h(t)$ – довільна функція, яка має бути додатною, щоб забезпечити правильну сигнатуру при $r \rightarrow \infty$. Можна одразу покласти $h(t) = 1$, оскільки в (12.6) її можна виключити заміною змінної t , покладаючи $dt'^2 = h dt^2$.

Зауважимо, що при отриманні розв'язку ми з двох незалежних рівнянь (12.9, а, в) використали лише їхню лінійну комбінацію, яка привела до (12.10), тому для остаточної перевірки слід підставити отримані вирази в одне із цих рівнянь, щоб пересвідчитися, що воно перетворюється на тотожність. Розрахунок показує, що це дійсно так.

Щоб з'ясувати зміст константи k , розглянемо компоненту метричного тензора

$$g_{00} = A = \left(1 + \frac{k}{r} \right)$$

за досить великих r . Для обмеженого розподілу маси при $r \rightarrow \infty$ поле має бути слабким. Згадаємо формулу ньютонівського наближення (9.6):

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2U}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r},$$

де M – загальна маса, що створює гравітаційне поле. Величина гравітаційної маси визначається поведінкою пробних тіл у її гравітаційному полі на великих відстанях, де можна користуватися ньютонівськими рівняннями руху, які узгоджуються з (9.6), тому, порівнюючи два вирази, слід покласти $k = -2GM/c^2$.

Остаточний вигляд метрики

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 dO^2, \quad (12.12)$$

де величину $r_g = 2GM/c^2$ називають *гравітаційним радіусом* або *радіусом Шварцшильда*. Вираз (12.12) має зміст за умови $r \geq R_0 > r_g$. Сингулярну сферу $r = r_g$ називають також сферою Шварцшильда. Якщо порівняти (12.12) з параметризованою метрикою слабкого поля (9.20), отримуємо $\gamma = 1, \tilde{\beta} = 0$ або $\beta = 1$, що узгоджується зі спостережними даними.

Розв'язок (12.12) був уперше знайдений К. Шварцшильдом (1916) виходячи з припущення, що інтервал (12.1) є статичним. Пізніше було показано (Г. Біркгофф, 1923), що умова статичності зайва¹. Дійсно, при отриманні (12.12) не використано припущення про статичність розподілу маси в області $r \leq R_0$. Наприклад, усередині сфери $r \leq R_0$ може бути зірка, яка колапсує або пульсує. Проте слід пам'ятати, що при отриманні (12.12) були зроблені певні припущення (ізолювана система, асимптотична поведінка метрики тощо). Якщо ці припущення не робити, отримаємо розв'язок, який має інший зміст. Як приклад, розглянемо метрику (12.12) в області $r < r_g$. Очевидно, у цій області (12.12) також є розв'язком рівнянь поля. Позначаючи $\bar{t} = r, \bar{r} = ct$, перепишемо (12.12) у вигляді

$$ds^2 = \left(\frac{r_g}{\bar{t}} - 1\right) d\bar{t}^2 - c^2 \left(\frac{r_g}{\bar{t}} - 1\right) d\bar{r}^2 - \bar{t}^2 dO^2. \quad (12.13)$$

¹ Можна навпаки, накласти умову статичності, але зняти умову сферичної симетрії. Виявляється, що статичний розв'язок рівнянь Ейнштейна, що описує асимптотично плоский простір-час, має зв'язний регулярний горизонт подій (див. далі) і не містить сингулярностей зовні горизонту, є розв'язком Шварцшильда (теорема Ізраеля).

При $\bar{t} < r_g$ цей вираз описує нестатичний простір-час з однорідним простором. Очевидно, метрика (12.13) не має нічого спільного із фізичними припущеннями, висловленими ще на початку підрозд. 12.1.

Ми розглядали зовнішній розв'язок у деякій області $r > R_0$, тепер перейдемо до іншого випадку, коли маси немає при $r < R_1$ для деякого $R_1 > 0$, а за $r > R_1$ розподіл мас сферично-симетричний. Тут рівняння поля в пустоті мають сенс, починаючи з $r = 0$, а щоб продовжити розв'язок на значення $r > R_1$, треба розв'язувати рівняння (10.22) з ненульовою правою частиною. Отриманий розв'язок (12.12) застосовний при всіх $r < R_1$, якщо в ньому покласти $k = 0$ ($r_g = 0$); це забезпечує регулярність при $r = 0$. Відповідно маємо частинний розв'язок рівнянь поля, який збігається з тензором Мінковського у сферичних координатах. Це означає, що гравітаційне поле відсутнє всередині порожнини, утвореної сферично-симетричним розподілом маси. Цей висновок цілком аналогічний ньютонівській теорії.

12.2. Рух пробних тіл

Для визначення траєкторій пробних тіл у гравітаційному полі, що відповідає інтервалу (12.12) можна використати техніку, викладену в розд. 9. На відміну від підрозд. 9.6, 9.7, тепер нас будуть цікавити якісні властивості траєкторій пробних тіл у всій області $r > r_g$, припускаючи, що траєкторії проходять зовні тіла, яке є джерелом поля. Аналогічно розглянутому в розд. 9 запишемо інтеграли руху

$$A \frac{dx^0}{ds} = p_0 > 0 \quad (12.14, \text{а})$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = p_3, \quad (12.14, \text{б})$$

$$\frac{p_0^2}{A} - B \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - \frac{p_3^2}{r^2} = \varepsilon, \quad (12.14, \text{в})$$

де $s = ct$ – канонічний параметр, $\varepsilon = 1$ для тіл з ненульовою масою спокою; при розгляді променів світла треба покласти $\varepsilon = 0$. Із системи (12.14) отримуємо

$$\frac{d\varphi}{dx^0} = L_\varphi \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) r^{-2}, \quad (12.14, \text{г})$$

де введено константу інтегрування $L_\varphi = p_3 / p_0$.

Перепишемо рівняння (12.14, в) у вигляді

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 2[E - U(r)], \quad (12.15)$$

де

$$E = \frac{p_0^2}{2}, \quad U(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\varepsilon + \frac{p_3^2}{r^2}\right).$$

Рівняння (12.15) має вигляд рівняння одновимірного руху частинки одиничної маси в полі з потенціальною енергією $U(r)$, що дає змогу наочно проаналізувати всі якісно можливі типи траєкторій у просторі-часі Шварцшильда.

12.2.1. Радіальний рух фотонів ($\varepsilon = 0$, $p_3 = 0$). Із (12.14) отримуємо

$$\frac{dr}{dx^0} = \pm \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \quad x^0 = ct, \quad (12.16)$$

де "+" або "-" відповідає руху за радіусом у різних напрямках. Розв'язок (12.16), що відповідає положенню r_0 фотона в момент координатного часу t_0 , має такий вигляд:

$$\pm c(t - t_0) = r - r_0 + r_g \ln \frac{r - r_g}{r_0 - r_g}. \quad (12.17)$$

У випадку радіального падіння r монотонно спадає із часом:

$$c(t - t_0) = r_0 - r + r_g \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g},$$

причому $r \rightarrow r_g$ за $t \rightarrow \infty$ і фотон, що знаходився зовні сфери $r = r_g$, не перетинає її за жодних скінченних значень t .

12.2.2. Рух фотонів з кутовим моментом ($\varepsilon = 0$, $p_3 \neq 0$). Відповідна ефективна потенціальна енергія має вигляд

$$U(r) = \frac{p_3^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right).$$

Ця функція має єдиний максимум $U_m = \frac{2p_3^2}{27r_g^2}$ у точці $r = 3r_g/2$ (на рис. 12.1 показаний кружечком), що відповідає єдиному можливій коловій орбіті у площині $\theta = \pi/2$. Очевидно, вона є нестійкою й відповідає умові $E = U_m$; у цьому разі

$$L_\varphi = \frac{p_3}{p_0} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} r_g,$$

причому $\varphi = \pm \omega_0 t + \text{const}$, де $\omega_0 = \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{c}{r_g}$.

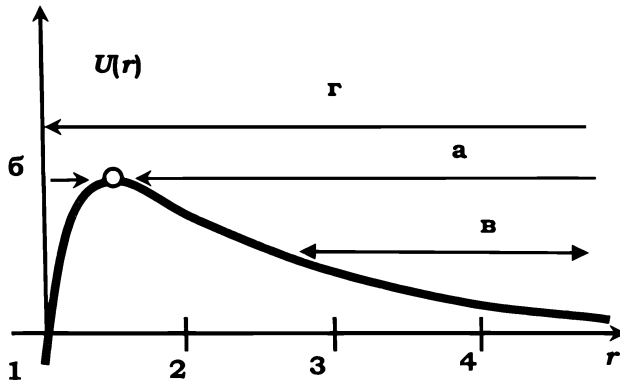


Рис. 12.1 До п. 12.2.2 ($r_g = 1$)

Значенню $E = U_m$ відповідають ще чотири розв'язки рівняння (12.15):

а) $r \rightarrow 3r_g/2 + 0$ при $t \rightarrow \infty$ і $r \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow -\infty$. Цей розв'язок описує рух фотона з нескінченності, який робить нескінченну кількість обертів навколо колової орбіти $r = 3r_g/2$ (яка є граничним циклом), наближаючись до неї ззовні при $t \rightarrow \infty$;

б) $r \rightarrow 3r_g/2 - 0$ при $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow r_g + 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Розв'язок описує рух фотона, що при $t \rightarrow -\infty$ був поблизу поверхні $r = r_g$; він робить нескінченну кількість обертів навколо центра, наближаючись до тієї ж колової орбіти зсередини при $t \rightarrow \infty$. При $r \rightarrow 3r_g/2$ для цих розв'язків маємо

$$\frac{d\varphi}{dx^0} \rightarrow \pm \frac{\omega_0}{c}.$$

Щоб оцінити поведінку при $t \rightarrow -\infty$, з (12.14) і (12.15) дістанемо

$$p_0 \frac{dr}{dx_0} = \pm \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{2[E - U(r)]}. \quad (12.18)$$

З урахуванням явного вигляду $U(r)$ видно, що для орбіти (а) при $t \rightarrow \infty$ координата r зростає в асимптотиці як ct , а φ прямує до деякого скінченного значення. Це відповідає прямолінійному руху за великих r .

Для орбіт (б) при $t \rightarrow -\infty$ координата r прямує до r_g як експонента: $r - r_g > 0$, $r - r_g \sim \exp[t/r_g]$; φ також прямує до скінченного значення. Ще два розв'язки (12.15), з $E = U_m$ отримуються з (а), (б) за допомогою інверсії часу $t \rightarrow -t$;

в) при $0 < E < U_m$ частинка не може подолати потенціальний бар'єр, тому вона перебуває або праворуч від нього ($r \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \pm\infty$), або ліворуч ($r \rightarrow r_g + 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$; на рисунку цей випадок не показано). Перший випадок описує рух фотонів з нескінченності, які відхиляються на деякий кут і знову йдуть на нескінченність.

г) у другому випадку траєкторія починається й закінчується на сфері $r = r_g$. При $E > U_m$ (рис. 12.1) траєкторія починається на нескінченності й закінчується на сфері $r = r_g$, ще один тип руху отримемо з (г) інверсією часу.

Цікаво окремо розглянути випадок, коли E близьке до U_m . Якщо $|E - U_m| \ll U_m$, частинка тривалий час перебуває поблизу колової орбіти $r = 3r_g/2$, маючи скінченну кутову швидкість відповідно (12.14, г). Це означає, що перед тим, як віддалитися на нескінченність або впасти на сферу Шварцшильда, частинка робить певну кількість обертів, тим більшу, чим менша величина $|E - U_m|$.

12.2.3. Радіальний рух масивних тіл ($\epsilon = 1$, $p_3 = 1$). Цей випадок описується рівнянням

$$\frac{dr}{dx^0} = \pm \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{p_0^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}. \quad (12.19)$$

Залежно від знака величини $1 - \frac{1}{p_0^2}$ це рівняння описує обмежений або необмежений рух. Поведінка траєкторії в околі сфери $r = r_g$ аналогічна п. 12.2.1.

12.2.4. Рух масивного тіла з кутовим моментом. Випадок $\varepsilon = 1$ при $p_3 \neq 0$ найбільш багатий щодо можливих типів траєкторій. Ці типи визначаються наявністю й положенням екстремумів функції $U(r)$, які є різними для різних величин p_3^2 . Точки мінімуму відповідають розв'язкам рівнянь руху $r = \text{const}$ – стійким коловим орбітам. Максимуми відповідають нестійким коловим орбітам, що є граничними циклами. Опишемо стисло основні типи розв'язків:

а) при $0 < p_3^2 < 3r_g^2$ потенціальна енергія є монотонно зростаючою функцією при $r \in (r_g, \infty)$. Тут можливими є необмежені траєкторії ($p_0^2 \geq 1$), коли $r \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow -\infty$ і $r \rightarrow r_g + 0$ при $t \rightarrow \infty$, або навпаки, а також траєкторії, які починаються й закінчуються на сфері Шварцшильда ($p_0^2 < 1$);

б) при $p_3^2 = 3r_g^2$ виникає стаціонарна точка потенціалу, що є точкою нестійкої рівноваги $r = 3r_g$; вона відповідає граничному циклу – нестійкій коловій орбіті. Тут серед траєкторій з $p_0^2 < 1$ виникають дві, для яких $2E = p_0^2 = 8/9$. Ці траєкторії проходять в області $(r_g, 3r_g)$, причому при $t \rightarrow \pm\infty$ або $r \rightarrow 3r_g$, або $r \rightarrow r_g$;

в) якщо $3r_g^2 < p_3^2$, виникають мінімум U_{\min} і максимум U_{\max} потенціальної енергії відповідно в точках

$$r_{\min} = \frac{p_3^2}{r_g} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{3r_g^2}{p_3^2}} \right]$$

(радіус стійкої колової орбіти) і

$$r_{\max} = \frac{3r_g}{1 + \sqrt{1 - \frac{3r_g^2}{p_3^2}}}$$

(радіус нестійкої колової орбіти, що є граничним циклом). Очевидно, $\frac{3}{2}r_g < r_{\max} < 3r_g < r_{\min}$, причому зі зростанням p_3^2 радіус стійкої колової орбіти r_{\min} зростає до нескінченності, а радіус граничного циклу (нестійкої колової орбіти) r_{\max} прямує до $\frac{3}{2}r_g$. Наявність нижньої межі радіуса стійких колових орбіт, а також нестійких колових орбіт, є суттєво новим елементом релятивістської задачі порівняно з ньютонівською теорією; цей якісний результат має важливі астрофізичні наслідки.

Потенціальна яма з мінімумом у точці r_{\min} , що відповідає стійкій коловій орбіті, веде до можливості періодичних коливань радіальної змінної r як функції кута φ усередині цієї ями. Рух відбувається в деякій області $r \in [r_1, r_2]$, де $r_{\max} < r_1 < r_{\min} < r_2$, $U_{\min} < E = U(r_1) = U(r_2) < U_{\max}$. Траєкторія може бути замкненою кривою, коли $r(\varphi)$ має період $2\pi q$, де q – раціональне число, і незамкненою кривою, яка щільно заповнює кільцеву область, якщо q ірраціональне.

Якісна класифікація траєкторій дещо відрізняється залежно від знака $p_3^2 - 4r_g^2$. За $3r_g^2 < p_3^2 < 4r_g^2$ маємо¹ $U_{\max} < U(\infty) = \frac{1}{2}$. Специфічними для цього випадку є траєкторії з $E = U_{\max}$, для яких $r \rightarrow r_{\max} + 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$; ці траєкторії починаються на граничному циклі і через деякий час повертаються в його окіл. Траєкторії, для яких $U_{\max} < E < U(\infty)$ і $E \geq U(\infty)$ мають поведінку $r(t)$, аналогічну випадку (а) при $p_0^2 < 1$ та $p_0^2 \geq 1$.

За умови $p_3^2 \geq 4r_g^2$ маємо $U_{\max} \geq U(\infty)$. При $E < U(\infty)$ маємо обмежені траєкторії всередині потенціальної ями. Виникають розв'язки рівняння (12.15), відповідні рухам частинки, коли вона рухається з нескінченності, відбивається від потенціалу в точці повороту $r_t: U(r_t) = E$, після чого знову прямує на нескінченність. За $E = U_{\max}$ маємо нестійку колову орбіту $r = r_{\max}$, а також дві траєкторії, що прямують до цієї орбіти з нескінченності, і дві траєкторії, що пряму-

¹ Щоб це довести, треба врахувати явний вираз для r_{\max} і розкласти $U_{\max} - 1/2$ на співмножники, одним з яких є $p_3^2 - 4r_g^2$.

ють від r_g до колової орбіти, (або при $t \rightarrow \infty$, або при $t \rightarrow -\infty$). За $E = U(\infty)$ маємо необмежені траєкторії з асимптотикою $r \rightarrow r_g + 0$ або при $t \rightarrow \infty$, або при $t \rightarrow -\infty$.

12.3. Спостережувані величини при радіальному падінні

Розглянемо приклади обчислення спостережуваних величин у випадку радіального руху пробних тіл у полі Шварцшильда. Уявімо для наочності космічний корабель, що падає в чорну діру. Нагадаємо, що координатний час t можна інтерпретувати як власний час віддаленого спостерігача. Якщо спостерігач перебуває у стані спокою далеко від сфери Шварцшильда ($r_c \gg r_g$, де r_c – радіальна координата спостерігача), його власний час

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{\mu\nu}} \frac{dx_c^\mu}{dt} \frac{dx_c^\nu}{dt} dt = \int \sqrt{g_{00}} dt \approx t + \text{const.} \quad (12.20)$$

Якщо розглядати траєкторії тіл, що падають на сферу Шварцшильда, як функції t , з (12.19) видно, що вони досягають цієї сфери лише у межі $t \rightarrow \infty$. Корабель ніби "зависає" над сферою Шварцшильда. Однак радіальна координата r сама по собі не є спостережною величиною. Для того щоб стежити за космонавтом, що рухається, необхідно реєструвати сигнали від космічного корабля, власні або відбиті.

12.3.1. Розглянемо радіальне падіння космонавта, коли його кутові координати збігаються з кутовими координатами спостерігача. Нехай радіопередавач космонавта має сталу власну частоту ω_0 . Обчислимо частоту $\omega_c(t)$ сигналів, виміряну спостерігачем. Подія випромінювання сигналу джерелом (t_s, r_s), що рухається разом з космонавтом і подія приймання його спостерігачем (t_c, r_c) у силу (12.17) пов'язані співвідношенням

$$t_c = t_s + T(r_c, r_s), \quad r_c < r_s, \quad (12.21)$$

де координатний час запізнення є таким:

$$T(r_1, r_2) = \frac{1}{c} \left(r_1 - r_2 + r_g \ln \frac{r_1 - r_g}{r_2 - r_g} \right).$$

Залежність $r_s = r_s(t_s)$ задано рівнянням траєкторії тіла, тому формула (12.21) дає змогу виразити загальний час t_s через t_c . Зазначені події належать одній ізотропній геодезичній, яка описує рух електромагнітного сигналу, тоді для ейконалу Ω поля випромінювання тіла з траєкторією $(t_s(\tau), r_s(\tau))$ згідно з п. 8.4.3 маємо

$$\Omega(t_c, r_c) = \Omega(t_s, r_s). \quad (12.22)$$

Згадаємо також формули для частоти, вимірюваної у власних системах спокою тіла і спостерігача

$$\omega_0 = \left(\frac{d\Omega}{d\tau} \right)_s, \quad \omega_c = \left(\frac{d\Omega}{d\tau} \right)_c = \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_c,$$

де індекси означають обчислення на відповідній траєкторії. Звідси у силу (12.22) і (12.14):

$$\omega_c = \left(\frac{d\Omega}{d\tau} \right)_s \frac{d\tau_s}{dt_s} \frac{dt_s}{dt_c} = \omega_0 \frac{1}{p_0} \left(1 - \frac{r_g}{r_s} \right) \left(\frac{dt_s}{dt_c} \right), \quad (12.23)$$

де p_0 – константа руху з (12.14, а), яка фіксується початковими умовами. Враховуючи зв'язок між координатним часом випромінювання t_s на траєкторії космонавта і часом t_c (12.21), а також (12.19), обчислимо:

$$\frac{dt_c}{dt_s} = 1 - \frac{1}{c} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r_s}} \frac{dr_s}{dt_s} = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{p_0^2} \left(1 - \frac{r_g}{r_s} \right)},$$

тоді

$$\omega_c = \frac{\omega_0}{p_0} \left(1 - \frac{r_g}{r_s} \right) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{p_0^2} \left(1 - \frac{r_g}{r_s} \right)} \right]^{-1}.$$

При $r_s \rightarrow r_g$ маємо асимптотично

$$r_s - r_g \approx \text{const} \cdot \exp \left[-\frac{c}{r_g} t_s \right], \quad dt_s / dt_c \approx 1/2,$$

тому $\omega_c(t_c)$ спадає, як

$$\exp \left[-\frac{ct_c}{2r_g} \right].$$

12.3.2. Нехай тепер випромінювач сигналів перебуває у стані спокою в точці $r_c = \text{const}$, тобто біля спостерігача. Обчислимо¹ частоту ω_s , яку реєструє приймач космонавта, що падає, якщо власна частота випромінювача ω_0 стала. Тут застосовні всі попередні міркування, але, оскільки сигнали від випромінювача рухаються від "c" до "s", замість (12.21) маємо

$$t_s = t_c + T(r_c, r_s) = t_c - T(r_s, r_c), \quad r_c > r_s(t_s). \quad (12.24)$$

Звідси

$$\frac{dt_c}{dt_s} = 1 + \frac{1}{c} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r_s}} \frac{dr_s}{dt_s} = \frac{\left(1 - \frac{r_g}{r_s}\right) \frac{1}{p_0^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{p_0^2} \left(1 - \frac{r_g}{r_s}\right)}}.$$

Підставляючи це у формулу

$$\omega_s = \left(\frac{d\Omega}{d\tau}\right)_s = \left(\frac{d\Omega}{d\tau}\right)_c \frac{d\tau_c}{dt_c} \frac{dt_c}{dt_s} \frac{dt_s}{d\tau_s} = \omega_0 \frac{p_0}{1 - \frac{r_g}{r_s}} \frac{dt_c}{dt_s},$$

маємо

$$\omega_s = \frac{\omega_0}{p_0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{p_0^2} \left(1 - \frac{r_g}{r_s}\right)}} \rightarrow \frac{\omega_0}{2p_0} \text{ при } r_s \rightarrow r_g.$$

Таким чином, хоча в першому випадку (приймач на нескінченності нерухомий, передавач вільно падає на сферу Шварцшильда) має місце нескінченний червоний зсув частоти, в оберненій ситуації (приймач падає, випромінювач на нескінченності перебуває у стані спокою) він не переходить у нескінченний фіолетовий зсув. Це пояснюється тим, що тут діють два ефекти зсуву частоти: гравітаційний і доплерівський. У першому випадку ці ефекти підсилюють один одного, а в другому відбувається їх взаємна компенсація.

12.3.3. Нехай віддалений спостерігач у точці r_c надсилає локаційні сигнали в напрямку тіла, а потім приймає відбитий від тіла сигнал. Час $t_2 - t_1$ між подіями (t_1, r_c) випромінювання сигналу та (t_2, r_c) прийман-

¹ У зв'язку з подібністю формул ми зберігаємо позначення для рухомої та нерухомої точок, тепер індекс "c" відповідає джерелу, а "s" – спостерігачу.

ня відбитого дає змогу оцінити положення тіла. Ці моменти пов'язані системою двох рівнянь

$$t_2 - t_s = T(r_c, r_s(t_s)), \quad (12.25, \text{ а})$$

$$t_s - t_1 = T(r_c, r_s(t_s)). \quad (12.25, \text{ б})$$

Якщо відомо t_s , величиною запізнення є $t_2 - t_1 = 2T(r_c, r_s(t_s))$. Проте рівняння (12.25, б), яке дозволяє виразити t_s як функції t_1 , не завжди має розв'язок (не при всіх t_1). Щоб це показати, перепишемо (12.25, б) у вигляді $t_1 = F(t_s)$, де права частина $F(t) = t - T(r_c, r_s(t))$ обмежена при $t \rightarrow \infty$ граничною величиною $F_{\max} > F(t)$ (це випливає з дослідження похідної dF/dt , яка в силу рівняння руху (12.19) експоненційно спадає за $t \rightarrow \infty$, $r_s(t) \rightarrow r_g$).

Таким чином, починаючи з деякого моменту $t_1 = F_{\max}$ за годинником спостерігача рівняння (12.25, б) не має розв'язків. Це означає, що сигнали, надіслані з точки r_c не наздоганяють корабель, що падає. Проте приймач у точці r_c завжди прийматиме відлуння якихось сигналів, надісланих при $t_1 < F_{\max}$. Якщо прив'язуватися не до t_1 , а до часу приймання t_2 , ситуація цілком визначена, оскільки, на відміну від (12.25, б), рівняння (12.25, а) завжди має розв'язок. У розв'язках системи (12.25, а) $t_2 \rightarrow \infty$ відповідає $t_1 \rightarrow F_{\max}$; при цьому "радіолокаційна" відстань $c(t_2 - t_1)/2$ також прямує до нескінченності.

12.4. Простір-час під сферою Шварцшильда

Досі ми не цікавилися поведінкою речовини, яка створює гравітаційне поле. Найбільш проста модель такої речовини – це сферично-симетричний розподіл пилу, частинки якого взаємодіють тільки гравітаційно, тому цей розподіл має бути нестатичним. Розв'язок рівнянь Ейнштейна, який описує цю модель, знайдено Р. Толменом в явному вигляді. Однак, якщо нас цікавить лише рух поверхні пилової кулі на межі з вакуумом, деталі розв'язку всередині кулі не потрібні, адже зовні, згідно з підрозд. 12.1, він переходить у розв'язок Шварцшильда. Якщо розподіл мас біля поверхні кулі не має особливостей, слід очікувати, що фізичні умови, зокрема, гравітаційне поле біля цієї поверхні всередині та зовні практично не відрізняються. Можна вважати, що

частинки поверхні пилової кулі вільно рухаються вздовж геодезичних метрики Шварцшильда.

У випадку з космонавтом (див. підрозд. 12.3) при $t \rightarrow \infty$ експоненційно прямує до r_g , проте ніколи (з погляду віддаленого спостерігача) її не досягає. Те саме можна сказати про радіус поверхні $r(t)$ колапсуючої пилової кулі. Однак звернемо увагу на іншу форму рівняння руху (12.15), яка визначає траєкторію як функцію власного часу космонавта. Права частина (12.15) не обертається на нуль при $r = r_g$, тому за годинником космонавта пройде скінченний час падіння від точки r до точки r_g :

$$\tau_g = \frac{1}{c} \int_{r_g}^r \frac{dr}{\sqrt{p_0^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{p_3^2}{r^2}\right)}}.$$

Що ж побачить космонавт далі? Те саме можна спитати про долю колапсуючої кулі, після її уходу під горизонт (хоча зовнішній спостерігач цього ніколи й не дочекається)? Формально рівняння траєкторії як функції власного часу космонавта не містять жодних сингулярностей, що заважали б розгляду при $r < r_g$ (принаймні для додатних r), тому виникає справедлива підозра, що сингулярність Шварцшильда має координатний характер і її можна усунути. Згадаємо, що розв'язок рівнянь Ейнштейна можна шукати в будь-яких координатах, причому, за означенням диференційовного багатовиду, координатна сітка не обов'язково покриватиме весь простір-час. Виникає питання: чи існують інші координати ζ^α , що покривають потрібну область простору-часу, у яких компоненти того ж самого метричного тензора є регулярними? Зрозуміло, що тут треба вимагати тензорний зв'язок між компонентами метричного тензора в системах координат ζ^α і t, r, θ, φ у спільній області існування.

Розглянемо наведений випадок для метричної форми (12.12). Подамо вираз для розв'язку (12.12) в інших координатах T, R, θ, φ , який не має особливостей при $r = r_g$. Розглянемо метрику

$$ds^2 = c^2 dT^2 - \frac{r_g}{f} dR^2 - f^2 dO^2, \quad \text{де } f \equiv f(T, R) = \left[\frac{3}{2} (R - cT) \right]^{2/3} r_g^{1/3}. \quad (12.26)$$

Покажемо, що у спільній області регулярності обох метрик області $f > r_g$ квадрат інтервалу (12.26) збігається з (12.12), якщо покласти при $r > r_g$:

$$T = t + \frac{1}{c} \int \frac{\sqrt{\frac{r_g}{r}}}{1 - \frac{r_g}{r}} dr, \quad R = ct + \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_g}{r} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \quad (12.27)$$

Обчислюючи різницю $R - cT$, легко отримати зв'язок $r = f(T, R)$ з урахуванням якого пряма підстановка (12.27) у (12.26) приводить до (12.12). Таким чином, при $r = f(T, R) > r_g$ представлення (12.26) і (12.12) еквівалентні, але (12.26) означено також при $0 < f(T, R) \leq r_g$. Можна показати, що для точок, де $f(T, R) = 0$, метрика є сингулярною в будь-якій координатній системі, тобто ця сингулярність є фізичною. Поверхня $f(T, R) = r_g$ вже не містить сингулярностей у компонентах метричного тензора, що відповідають представленню (12.26), за допомогою якого маємо продовження метрики під сферу Шварцшильда. Однак ця поверхня є специфічною: вона відіграє роль однобічної мембрани, яка пропускає частинки з області $f(T, R) > r_g$ в область $f(T, R) < r_g$, але не пропускає у зворотному напрямку. Це впливає з умови

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \geq 0.$$

що має виконуватися для будь-яких фізичних траєкторій. Дійсно, враховуючи (12.26), уздовж такої траєкторії маємо

$$c^2 dT^2 \geq \frac{r_g}{f} dR^2 + f^2 [d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\varphi^2] \geq \frac{r_g}{f} dR^2,$$

тобто $c \sqrt{\frac{f}{r_g}} \geq \frac{dR}{dT}$. Ліва частина нерівності в області $f(T, R) < r_g$ менша від c , тому

$$\frac{d}{dT}(cT - R) \geq 0. \quad (12.28)$$

Якщо траєкторія починається в точці під сферою Шварцшильда, тобто

$$cT - R > -\frac{2}{3}r_g, \quad (12.29)$$

то завдяки (12.28) ліва частина нерівності (12.29) зростає, і ця нерівність із часом ще більше підсилюється, тобто траєкторія не перетинає поверхні $f(T, R) = r_g$, де має бути $cT = R - \frac{2}{3}r_g$. Цю поверхню, що має властивість не пропускати будь-які сигнали до віддаленого спостерігача, називають *горизонтом подій*.

Легко бачити, що лінії $R, \theta, \varphi = \text{const}$ є часоподібними геодезичними. Одна з таких ліній може бути траєкторією точки на поверхні пилової сфери, яка за скінченний власний час потрапляє у фізичну сингулярність $f(T, R) = 0$.

12.5. Чорні діри та метрика Керра

У гарячих зорях, де відбуваються ядерні реакції, сили тиску, зумовлені високою температурою, врівноважують сили тяжіння. Наприкінці еволюції, коли ядерне паливо всередині зорі вичерпується, її температура спадає. Це може супроводжуватися вибуховими процесами, змінами розмірів зорі, але в кінці кінців вона охолоджується, й основний внесок у тиск вже не буде обумовлений температурними факторами. Виникає питання про стійкість холодної зорі відносно колапсу під дією сил тяжіння. Основними чинниками, які можуть протидіяти колапсу зорі, є тиск виродженого електронного газу в білих карликах або нейтронного газу в нейтронних зорях. Як показують розрахунки, якщо маса холодної зорі приблизно більша за $3 \div 5 M_{\odot}$, то жодні реальні рівняння стану не можуть забезпечити стабільність¹.

Модель колапсуючої пилової кулі, про яку згадано вище, не враховує сил тиску, що протидіють силам тяжіння в реальних тілах, але еволюція сферично-симетричної колапсуючої зорі якісно подібна до колапсу пилової сфери. Поверхня зірки стискається до радіуса Шварцшильда, цей процес з погляду віддаленого спостерігача триває нескінченно. Зоря практично не випромінює й проявляє себе тільки гравітаційно. Такий об'єкт називають чорною дірою або колапсаром.

¹ Верхня оцінка відповідає нескінченно жорсткому рівнянню стану в центрі зорі. Більш фізичні рівняння стану дають оцінку $\sim 3,6$ мас Сонця, але питання залишається відкритим у зв'язку з недостатнім знанням ядерних взаємодій усередині надгустої зорі.

Колапсар – принципово нестационарний об'єкт, хоча зовнішня метрика Шварцшильда є статичною.

Напевне, сферично-симетричний колапс не є загальним астрофізичним явищем. Слід очікувати, що в типовому випадку колапсує тіло має ненульовий кутовий момент. На жаль, не існує точного розв'язку, який дозволяв би відстежити всю історію колапсу масивної зірки, що обертається. Тим не менше, з досліджень Б. Картера, Д. Робінсона та інших вчених випливає¹, що асимптотичний стан простору часу в результаті колапсу описується метрикою Керра, яка має вигляд²

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) (dt)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} (dr)^2 - \rho^2 (d\theta)^2 + \frac{2ar_g r}{\rho^2} (\sin\theta)^2 dt d\varphi - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2} (\sin\theta)^2\right) (\sin\theta d\varphi)^2, \quad (12.30)$$

де M – маса, $a = J/M$, J – кутовий момент чорної діри; $r_g = 2M$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - r_g r + a^2$; маса та кутовий момент визначаються поведінкою поля на нескінченності. Метрика (12.30) – точний розв'язок рівнянь Ейнштейна, що описує незаряджену³ чорну діру з обертанням. За умови $a < r_g/2$ поверхня $r = R_h$, де

$$R_h = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - a^2},$$

має властивості горизонту подій: зовнішній спостерігач не може отримати жодних фізичних сигналів з області $r < R_h$. На відміну від сферично-симетричного випадку горизонт подій не збігається з поверхнею нескінченного червоного зміщення $g_{00} = 0$, яка має вигляд

¹ Результат цих досліджень можна сформулювати таким чином: стаціонарні аксіально-симетричні розв'язки рівнянь Ейнштейна в пустоті, що мають гладкий опуклий горизонт подій і є асимптотично плоскими та регулярними зовні горизонту, є розв'язками Керра, що однозначно фіксуються параметрами M, J .

² Метрику записано в координатах Бойера – Ліндквіста; вибір одиниць відповідає $c = 1$, $G = 1$. У цій системі одиниць M, a, r_g мають розмірності довжини.

³ За наявності заряду відомо точний розв'язок Керра – Ньюмена сумісної системи рівнянь Ейнштейна та Максвелла.

$$r = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - a^2 \cos^2 \theta},$$

і лише дотикається до горизонту в полюсах $\theta = 0, \pi/2$. Область між горизонтом і поверхнею нескінченного червоного зміщення називають *ергосферою*. Легко бачити, що в ергосфері неможливі часоподібні радіальні траєкторії $\varphi = \text{const}, \theta = \text{const}$.

З ергосферою пов'язана цікава можливість відбирати енергію обертання чорної діри (процес Пенроуза) – на відміну від чорної діри Шварцшильда, де жодне відбирання енергії неможливе. При цьому чорну діру Керра характеризує так звана незвідна маса чорної діри

$$M_{ir} = \left[\frac{M}{2} \left(M + \sqrt{M^2 - a^2} \right) \right]^{1/2},$$

яка не зменшується при жодних взаємодіях. Як і при розв'язку Шварцшильда, з погляду віддаленого спостерігача, час падіння пробного тіла в чорну діру Керра нескінченний. Тут також існують області стійких і нестійких колових орбіт.

При $a > r_g/2$ горизонту не існує, у цьому разі маємо так звану голу сингулярність, яка може спостерігатися ззовні. За гіпотезою космічної цензури, висунутою Р. Пенроузом, виникнення голих сингулярностей неможливе, хіба що вони існували із самого початку Всесвіту. Аналіз певних фізичних ситуацій частково підтверджує гіпотезу Пенроуза, але досить строгого загального її доведення наразі не існує.

Чорні діри, утворені в результаті колапсу зірок, можна шукати в подвійних системах, коли можна оцінити масу невидимого об'єкта, спостерігаючи рух компаньйона. Існує більше десятка "кандидатів у чорні діри" в подвійних системах. Їх типовою ознакою є рентгенівське випромінювання, що свідчить про перетікання газу з компаньйона на невидимий компактний об'єкт. Подібна картина також має місце, коли газ акрецює на нейтронну зорю, яка має розміри порядку десятків кілометрів, але в цьому разі типовими є періодичні зміни рентгенівського потоку (рентгенівські пульсари). Остаточним критерієм є величина маси, яка у випадку чорної діри має перевищувати вищезазначене критичне значення.

Окрім чорних дір зоряної маси в подвійних системах, об'єктом уваги астрофізиків є надмасивні чорні діри (НМЧД) в ядрах галактик і квазарів. Маса відомих НМЧД сягають $10^6 \div 10^9 M_{\odot}$. НМЧД – це до-

силь поширене явище; можна виділити два класи цих об'єктів. Коли на чорну діру акрецює газ достатньої густини, він розігрівається до високих ефективних температур і в цьому разі спостерігають джерело випромінювання – квазар або активне галактичне ядро. Якщо окіл НМЧД не містить достатньої кількості речовини, її можна ідентифікувати тільки за гравітаційними ефектами, зокрема, спостерігаючи рух зір навколо неї. Подібна чорна діра з масою приблизно $3,5 \cdot 10^6 M_{\odot}$ існує в центрі нашої Галактики на відстані 8 кпк від Сонця.

13. РОЗВ'ЯЗКИ ФРІДМАНА ТА ГЛОБАЛЬНА БУДОВА ВСЕСВІТУ

Якщо відкинути думку щодо особливого положення нашої Галактики у Всесвіті, слід прийняти гіпотезу про однорідність навколишнього тривимірного простору. Спостереження свідчать, що наш Всесвіт виглядає приблизно однаково в усіх напрямках, і тому природно вважати, що так само він виглядає для спостерігача в будь-якій іншій галактиці. Потужним аргументом на користь цього є ізоотропія "реліктового" електромагнітного випромінювання, що поширюється у Всесвіті в усіх напрямках, флуктуації якого помітні лише на рівні 0,001 %.

Таким чином, перший крок у побудові космологічних моделей полягає в розгляді умов однорідності та ізоотропії тривимірного простору, що й буде зроблено в цьому розділі. Спочатку проаналізуємо умови для метрики тривимірного простору і, спираючись на це, запишемо загальний вигляд метричного тензора чотиривимірного простору-часу. За умов просторової однорідності та ізоотропії, що стосуються не тільки гравітаційного поля, але й усіх інших величин, що характеризують Всесвіт на великих масштабах, рівняння Ейнштейна зводяться до космологічних рівнянь Фрідмана. Подальший розгляд вимагає врахування фізичних процесів, які впливають на ефективне рівняння стану різних складових матерії у Всесвіті, що розширюється. Наприкінці розділу подано короткий огляд основних понять і спостережних фактів з релятивістської космології.

3.1. Умови просторової однорідності та ізотропії

Аналіз умов просторової однорідності та ізотропії зручно починати з розгляду тривимірної метрики. Почнемо розгляд з вимоги про те, що поле не залежить від орієнтації деякої системи відліку, тобто з умови сферичної симетрії відносно деякої точки, яка є більш слабкою умовою, а вже потім накладемо умову однорідності. Аналогічно викладеному в підрозд. 9.4, зведемо квадрат додатно-визначеного елемента відстані сферично-симетричного тривимірного простору до вигляду¹

$$d\tilde{s}^2 = B(r)dr^2 + r^2 dO^2, \quad (13.1)$$

позначаючи $x^1 = r \in [0, \infty]$, $x^2 = \theta \in [0, \pi]$, $x^3 = \varphi \in [0, 2\pi)$ – відповідно радіальну та кутові змінні. Тут ми поки що не цікавимося залежністю від часу, який може входити в ці рівняння як параметр. Відповідно (13.1) можна розглядати як квадрат інтервалу (9.15) з оберненим знаком на гіперповерхні $x^0 = \text{const}$.

За умовою однорідності будь-яка скалярна функція, побудована з компонент метричного тензора, не повинна залежати від координат. Застосуємо цю необхідну (але ще не достатню!) умову до скалярної кривини R . Для обчислень можна використати формули (12.9) для тензора Річчі, які не містять нульових індексів, покладаючи $A(t, r) \equiv 1$. Легко перевірити, за означенням тензора Річчі, що ця процедура дає необхідні компоненти тензора Річчі у випадку просторової метрики (13.1):

$$\tilde{R}_{11} = \frac{B'}{rB}, \quad \tilde{R}_{22} = 1 + \frac{rB'}{2B^2} - \frac{1}{B},$$

$$\tilde{R}_{33} = \sin^2 \theta \tilde{R}_{22}, \quad \text{де } B' = \frac{\partial B}{\partial r}.$$

Звідси скалярна кривина матиме вигляд

$$\tilde{R} = \frac{2B'}{rB^2} - \frac{2}{r^2 B} + \frac{2}{r^2}.$$

За умовою ця величина не залежить від \mathbf{r} , тому покладемо $\tilde{R} = -6K$, де K – стала з розмірністю оберненого квадрата довжини. Звідси

¹ У цьому розділі "тильдою" позначаємо величини, які відповідають тривимірному простору.

$$-\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{B}\right)+1=-3Kr^2.$$

Інтегруючи це рівняння, отримуємо

$$B = \frac{1}{1 + Kr^2 + \frac{c_1}{r}},$$

де c_1 – стала інтегрування.

Якщо $c_1 \neq 0$, прямим обчисленням можна перевірити, що інваріант $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ залежить від r , тобто не виконується умова однорідності (для цього досить розглянути асимптотику $r \rightarrow 0$). Ми не приводимо тут цих обчислень. Покладаючи $c_1 = 0$, отримуємо остаточний вираз для квадрата елемента відстані:

$$d\tilde{s}^2 = \frac{dr^2}{1 + Kr^2} + r^2 dO^2. \quad (13.2)$$

Метрику (13.2) отримано як наслідок необхідних умов і, окрім тривіального випадку $K = 0$, коли вона є евклідовою метрикою у сферичних координатах, поки що не очевидно, чи вона дійсно реалізує вимогу однорідності та ізотропії в кожній точці простору. Щоб пересвідчитися в цьому, покажемо, що (13.2) є метрикою на гіперсфері (з реальним або уявним радіусом) у чотиривимірному евклідовому просторі. Як буде видно далі, усі точки й напрямки на гіперсфері еквівалентні, що гарантує виконання умов однорідності та ізотропії.

Розглянемо фіктивний чотиривимірний ріманів багатовид у координатах $\{r, \theta, \varphi, u\}$ (не плутати безрозмірну координату u із часом!) з метрикою

$$ds^2 = du^2 - Kd\mathbf{r}^2, \quad (13.3)$$

де $\mathbf{r} = (x, y, z)$; $d\mathbf{r}^2 = dr^2 + r^2 dO^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ – метрика тривимірного плоского простору; $K \neq 0$ – константа. Зв'язок декартових координат зі сферичними дається звичайними співвідношеннями

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Ріманів багатовид з метрикою (13.3) є плоским, у ньому немає виділених точок чи напрямків. У цьому багатовиді рівняння

$$u^2 - Kr^2 = 1 \quad (13.4)$$

визначає поверхню додатної або від'ємної кривини залежно від знака K . При $K > 0$ маємо дві незв'язні частини (чотиривимірний аналог двопорожнинного гіперboloїда), з яких нам досить взяти одну:

$$u = \sqrt{1 + Kr^2}, \quad (13.4, \text{ а})$$

а при $K < 0$ маємо зв'язну поверхню – гіперсферу

$$u = \pm \sqrt{1 - |K| r^2}. \quad (13.4, \text{ б})$$

Якщо $\{r, \theta, \phi\}$ вибрати за координати на цій гіперповерхні, підставляючи (13.4) у (13.3), дістанемо елемент відстані

$$d\tilde{s}^2 = \frac{r^2 K^2 dr^2}{1 + Kr^2} - K(dr^2 + r^2 dO^2) = -K \left\{ \frac{dr^2}{1 + Kr^2} + r^2 dO^2 \right\}. \quad (13.5)$$

Квадратична форма (13.5) збігається з (13.2) із точністю до сталого множника, тому умови ізотропії та однорідності для (13.5) і (13.2) еквівалентні. Продемонструємо це для (13.5) прямим чином: покажемо, що можна підібрати таке перетворення координат, яке переводить початок $r = 0$ у будь-яку точку гіперповерхні (13.4), причому в нових сферичних координатах вихідні рівняння (13.3) і (13.4) зберігають свій вигляд.

Розглянемо спочатку випадок $K > 0$ (13.4, а) і запишемо перетворення, що переводить точку $O_0 \equiv \{r = 0, u = 1\}$, яка відповідає початку сферичних координат, в іншу точку $O'_0 \equiv \{\sqrt{1 + Kr_0^2}, \mathbf{r}_0\}$ цієї гіперповерхні. Очевидно, не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\mathbf{r}_0 = (\xi_0, 0, 0)$, відповідно $u_0 = \sqrt{1 + K\xi_0^2}$. Розглянемо перетворення координат $\{u, \mathbf{r}\} \rightarrow \{u', \mathbf{r}'\}$, де $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' : x \rightarrow x'$, а y, z залишимо незмінними:

$$u' = \frac{u + vx\sqrt{K}}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x' = \frac{x + vu/\sqrt{K}}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad v < 1. \quad (13.6)$$

Якщо формально покласти $K = 1/c^2$, перетворення (13.6) має вигляд перетворення Лоренца. Легко бачити, що це перетворення залишає інваріантним вирази $u^2 - Kx^2$ і $du^2 - Kdx^2$, а отже, рівняння (13.3) і (13.4). Якщо підібрати значення v так, щоб

$$\xi_0 = \frac{v/\sqrt{K}}{\sqrt{1 - v^2}}$$

(це можна зробити для будь-якого ξ_0), тоді перетворення (13.6) переводить точку O_0 у задану точку O'_0 , і навпаки, обернене перетворення, що також зберігає (13.3), (13.4), переводить O'_0 в O_0 . Оскільки вигляд рівнянь збережено, можна ввести нові сферичні координати $\{r', \theta, \varphi\}$ із центром у точці $x' = 0, y = 0, z = 0$ і в цих координатах метрика на гіперповерхні матиме той самий вигляд (13.5).

У разі $K < 0$ міркування аналогічні, лише для точки O'_0 слід врахувати умову $|\mathbf{r}| \leq 1/\sqrt{|K|}$. У цьому разі для переходу в точку $O'_0 \equiv \{u, \xi_0, 0, 0\}$, $u^2 = 1 - |K| \xi_0^2$, слід вибрати звичайне обертання у площині змінних $(u, \sqrt{|K|x})$, яке зберігає $u^2 + |K|x^2$ і $du^2 + |K|dx^2$. Звідси випливає еквівалентність будь-яких точок простору з квадратом інтервалу (13.5), тобто його однорідність. Ізотропія є наслідком сферичної симетрії (13.5), причому початок цих координат можна вибрати в будь-якій точці простору. Наслідком буде ізотропія й однорідність тривимірного ріманового простору з метрикою (13.2).

Повертаючись до (13.2), позначимо $a = |K|^{-1/2}$ і зробимо заміну:

$$1) r = a \sin \chi \text{ при } K < 0, \tilde{R} = 6/a^2 > 0;$$

$$2) r = a\chi \text{ при } K = 0, \tilde{R} = 0;$$

$$3) r = a \operatorname{sh} \chi \text{ при } K > 0, \tilde{R} = -6/a^2 < 0;$$

Це приводить до таких можливих метрик ізотропного та однорідного тривимірного простору

$$d\tilde{s}^2 = a^2 [d\chi^2 + F^2 dO^2], \quad (13.7)$$

причому, $F \equiv F(\chi)$ має різний вигляд залежно від знака скалярної кривини $\sigma = \operatorname{sign} K = -\operatorname{sign} \tilde{R}$:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sigma = -1, \quad F(\chi) = \sin \chi, \\ 2) \sigma = 0, \quad F(\chi) = \chi, \\ 3) \sigma = 1, \quad F(\chi) = \operatorname{sh} \chi, \end{array} \right\}$$

де масштабний множник a в (13.7) пропорційний дійсному (при $\tilde{R} > 0$) чи уявному ($\tilde{R} < 0$) радіусу кривини тривимірного простору. За $\tilde{R} = 0$ радіус кривини нескінченний, вирази (13.5) і (13.7) збігаються з квадратом інтервалу для плоского простору з точністю до сталого співмножника. У першому випадку, коли $\sigma = -1$, величина χ змінюється від нуля до π (замкнений світ зі скінченним об'ємом), а у двох

інших випадках – від нуля до нескінченності (відкритий світ); простір має в останніх випадках нескінченний об'єм.

13.2. Метрика однорідної ізотропної моделі Всесвіту

Побудуємо однорідну ізотропну модель Всесвіту на основі метрик (13.7), вважаючи, що множник a може залежати від часу. Ця модель вперше була розглянута О. Фрідманом у 1922 р. Шукатимемо розв'язок рівнянь Ейнштейна (10.24) з космологічною сталою у вигляді метрики з просторовою частиною (13.7). Компоненти g_{0i} , $i = 1, 2, 3$, треба прирівняти до нуля, інакше ці три компоненти визначали б деякий напрямок у кожній точці в суперечності з умовою ізотропії. Компоненту g_{00} , яка з умови однорідності залежить лише від x^0 , можна покласти рівною одиниці; адже в разі відмінності g_{00} від одиниці, можна замінити $x^0 \rightarrow x'^0$, щоб $g_{00}(dx^0)^2 = (dx'^0)^2$. Отже, розв'язок шукаємо у вигляді

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\bar{s}^2 \quad (13.8)$$

у координатах $x^0 = ct$, $x^1 = \chi$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, де $d\bar{s}^2$ подано формулами (13.7).

Ненульові символи Крістоффеля, асоційовані з (13.8) (точка означає похідну за x^0 , штрих – за x^1):

$$\Gamma_{11}^0 = a\dot{a}, \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}F^2, \quad \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}(\sin\theta)^2 F^2, \quad \Gamma_{01}^1 = \dot{a}a^{-1},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -FF', \quad \Gamma_{33}^1 = -FF'(\sin\theta)^2,$$

$$\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \dot{a}a^{-1}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = F^{-1}F', \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma_{23}^3 = \text{ctg}\theta.$$

Ненульові компоненти тензора Ейнштейна $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$:

$$G_{00} = \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3\sigma}{a^2}, \quad G_{11} = -\dot{a}^2 - 2a\ddot{a} + \sigma,$$

$$G_{22} = G_{11}F^2 = \frac{G_{33}}{(\sin\theta)^2}.$$

Розглянемо рівняння (10.24) у гідродинамічній моделі Всесвіту, коли права частина має вигляд тензора енергії-імпульсу ідеальної рідини (8.6). Цей тензор може бути сумою кількох складових, що мають вигляд (8.6) з різними рівняннями стану¹; вважатимемо, що він описує всі негравітаційні види матерії, включаючи також і тензор енергії-імпульсу, що описує внесок космологічної сталої (див. підрозд. 10.3) $T_{vac}^{\mu\nu}$. Щоб виконувалася умова ізотропії, "рідина" має бути нерухомою відносно системи, де метрика має вигляд (13.8), тобто $\{u^\mu\} = \{u^0, 0, 0, 0\}$, інакше в точках, де просторова частина 4-швидкості не дорівнює нулю, існував би виділений напрямок. З умови нормування 4-швидкості маємо $(u^0)^2 g_{00} = 1$. Таким чином, $T_{00} = \varepsilon$, $T_{ij} = -p g_{ij}$, а решта компонент дорівнює нулю.

Вибір ідеальної рідини як моделі всіх негравітаційних полів, що дають внесок у праву частину рівнянь Ейнштейна на космологічних масштабах, є дуже загальним з різних міркувань. Тут відзначимо, що будь-який тензор, що задовольняє умови однорідності та ізотропії, можна подати у вигляді (8.6). Дійсно, для загального тензора енергії-імпульсу $T_{\alpha\beta}$ у системі, що відповідає координатам t, χ, θ, φ , має бути $T_{0i} = 0$ (аналогічно компонентам g_{0i}); компонента T_{00} може залежати тільки від змінної t , яку можна вважати космологічним часом; нарешті $T_{ij} = f(t)\tilde{g}_{ij}$, де метричний тензор тривимірного простору \tilde{g}_{ij} відповідає метриці (13.7). Таким чином, в умовах однорідності та ізотропії $T_{\alpha\beta}$ залежить лише від двох незалежних функцій, які можна однозначно зв'язати з тиском і густиною енергії.

Із "00" компоненти рівнянь (10.24) маємо

$$\frac{a^2}{3} G_{00} \equiv \dot{a}^2 - \sigma = \frac{8\pi G}{3c^4} \varepsilon a^2.$$

Рівняння "11", "22", "33" є залежними, вони дають

$$G_{11} + \frac{a^2}{3} G_{00} \equiv -2a\ddot{a} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{11} + \frac{a^2}{3} T_{00}) = \frac{8\pi G}{3c^4} a^2 (\varepsilon + 3p).$$

Після переходу до змінної t , незалежні рівняння Ейнштейна зводяться до системи

¹ Тобто з різними співвідношеннями, що визначають зв'язок тиску з густиною енергії та іншими термодинамічними параметрами.

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} a \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right); \quad (13.9)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho a^2 = \frac{\sigma c^2}{2}, \quad (13.10)$$

де $\rho = \varepsilon/c^2$ – інваріантна густина маси спокою всіх видів матерії у Всесвіті, окрім гравітаційного поля, p – тиск рідини, що включає також від'ємний тиск, пов'язаний з космологічною сталою $p = -\varepsilon_\Lambda$.

Завдяки умовам однорідності та ізотропії з рівнянь гідродинаміки для локально нерухомої рідини залишається лише одне нетривіальне рівняння неперервності:

$$\left[(p + \rho c^2) u^\mu \right]_{;\mu} = p_{,;\mu} u^\mu,$$

яке набуває вигляду

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^0} \left[\sqrt{|g|} (p + \rho c^2) u^0 \right] = p_{,0} u^0.$$

Явний вигляд метрики (13.3) та умова нормування для 4-швидкості u^μ дають змогу переписати це рівняння таким чином:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{d}{dt} \ln a = 0. \quad (13.11)$$

Нагадаємо, що з тотожності (7.11) випливає коваріантний закон збереження (10.12), який має наслідком рівняння релятивістської гідродинаміки. Таким чином, рівняння руху та рівняння поля не є незалежними. Це легко бачити безпосередньо для отриманих рівнянь. Диференціюючи (13.10) за t і використовуючи (13.11), легко отримати (13.9), тому далі достатньо розглядати (13.10) і (13.11). Рівняння (13.11) можна записувати окремо для різних видів матерії з різними рівняннями стану, що дають внесок у загальну космологічну густину, якщо вони не взаємодіють між собою, окрім як через гравітаційне поле:

- для рівняння стану холодного ідеального газу $p = 0$ з (13.11) випливає $\frac{d}{dt} (\rho a^3) = 0$, звідки $\rho \sim a^{-3}$;
- для рівняння стану ультрарелятивістського ідеального газу $p = \varepsilon/3$ аналогічно маємо $\rho \sim a^{-4}$;

• для тиску "космологічного вакууму" $p = p_{vac} = -\varepsilon_\Lambda$, це узгоджується з рівнянням (13.11), яке в даному випадку перетворюється на тотожність.

Розглянемо космологічні рівняння для різних знаків тривимірної кривини \tilde{R} , що відповідають різним σ :

1) $\sigma = 1$, тоді з (13.10) випливає співвідношення

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + c^2,$$

де права частина завжди більша за нуль. Таким чином, \dot{a} ніколи не обертається на нуль, а значить не змінює знак. У сучасну епоху $\dot{a} > 0$ (що відповідає розбіганню галактик, яке спостерігається), тоді в майбутньому космологічне розширення триватиме до нескінченності;

2) $\sigma = 0$, тут, як видно з (13.10), (13.11), знак \dot{a} також не змінюється, а монотонно зростає;

3) $\sigma = -1$. У цьому випадку міг би бути можливим момент часу, коли $\frac{8\pi G}{3}\rho a^2 = c^2$, $\dot{a} = 0$, тобто космологічне розширення змінюється на стиснення. Однак, забігаючи вперед, зазначимо, що завдяки значному внеску ε_Λ у загальну густину енергії цей випадок не може бути реалізований.

У наведених нижче трьох вправах розглянуто космологічні моделі, які не враховують космологічну сталу.

Вправа 13.1. Знайдіть розв'язок рівнянь Фрідмана у випадку замкненої ($\sigma = -1$) космологічної моделі з нульовою космологічною сталою ($\varepsilon_\Lambda = 0$) і холодною матерією ($p = 0$).

Розв'язання: при $p = 0$ з (13.11) маємо

$$\rho(t) = \rho_0 \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^3, \quad (13.12)$$

де ρ_0 , a_0 – значення параметрів на деякий момент t_0 . Рівняння (13.10) набуває вигляду

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 a_0^3}{a} = -c^2, \quad (13.13)$$

що нагадує закон збереження енергії у випадку радіального руху класичної частинки з координатою a в полі з ньютонівським потенціалом, коли загальна енергія частинки від'ємна. У цьому разі розв'язок

має точку повороту $a = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^2}$, у якій розширення Всесвіту змінюється на його стиснення, після проходження якої за скінченний час маємо $a = 0$ – простір стягується в точку.

Рівняння (13.13) зручно розв'язувати в параметричному вигляді. Введемо нову часову змінну η співвідношенням

$$t = \frac{1}{c_0} \int a d\eta,$$

тоді (13.13) набуває вигляду закону збереження енергії для гармонічного осцилятора:

$$\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 + a^2 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 a_0^3 a = 0.$$

Накладемо умову $a = 0$ при $\eta = 0$, звідки також $da/dt = 0$ при $\eta = 0$. Відповідним розв'язком, що задовольняє ці умови, є

$$a = A_0(1 - \cos \eta), \quad A_0 = \frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3c^2}.$$

Звідси $t = \frac{A_0}{c}(\eta - \sin \eta)$.

Масштабний фактор a досягає максимуму, а потім прямує до нуля за скінченний час. Отриманий розв'язок підтверджує викладений вище якісний висновок у випадку замкненої моделі Всесвіту.

Вправа 13.2. Знайдіть розв'язок рівнянь Фрідмана у випадку плоскої ($\sigma = 0$) космологічної моделі з нульовою космологічною сталою ($\varepsilon_\Lambda = 0$) і холодною матерією ($p = 0$).

Розв'язання: із рівняння (13.10):

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 a_0^3}{a}. \quad \text{Звідси } \frac{a}{a_0} = (6\pi G\rho_0)^{1/3} t^{2/3}.$$

У цій моделі Всесвіт нескінченно розширюється.

Вправа 13.3. Знайдіть розв'язок рівнянь Фрідмана у випадку відкритої ($\sigma = 1$) космологічної моделі з нульовою космологічною сталою ($\varepsilon_\Lambda = 0$) і холодною матерією ($p = 0$).

Розв'язання: (аналогічне впр. 13.1). Із (13.10) перехід до нової часової змінної η приводить до рівняння

$$\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 - a^2 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 a_0^3 a = 0,$$

шуканий розв'язок якого має вигляд

$$a = A_0(\operatorname{ch} \eta - 1), \quad t = \frac{A_0}{c}(\operatorname{sh} \eta - \eta), \quad A_0 = \frac{4\pi G \rho_0 a_0^3}{3c^2}.$$

Точки повороту відсутні.

Вправа 13.4. Знайдіть розв'язок рівнянь Фрідмана у випадку замкненої космологічної моделі з ультрарелятивістським рівнянням стану $p = \varepsilon/3$, нульовою космологічною сталою ($\varepsilon_\Lambda = 0$) і різними σ .

Вказівка: розв'язання при $\sigma = \pm 1$ використовує ту ж саму заміну $t \rightarrow \eta$, що й у впр. 13.1, 13.3, і приводить до якісно подібних випадків. Розглянемо більш докладно випадок $\sigma = 0$.

Із рівнянь (13.11) маємо $\varepsilon \sim a^{-4}$, тоді з (13.10):

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\varepsilon(t_0) a_0^4}{a^2(t)},$$

звідки легко отримати

$$a(t) = \left(\frac{32\pi G}{3c^2} \varepsilon(t_0)\right)^{1/4} t^{1/2} a_0.$$

13.3. Елементи релятивістської космології

13.3.1. Космологічний час і інваріантна відстань. Для метрики (13.8) величина $t = x^0/c$ має зміст загального космологічного часу, який у кожній точці збігається з власним часом елемента рідини, що перебуває у стані спокою в системі координат $\{t, \chi, \theta, \varphi\}$. На гіперповерхні $t = \operatorname{const}$ можна ввести інваріантну відстань уздовж деякої кривої L між її точками $x(p_0)$ і $x(p)$:

$$\begin{aligned} D &= \int_L \sqrt{-ds^2} = \int_L d\tilde{s} \equiv \\ &\equiv \int_{p_0}^p a(t) \left[\left(\frac{d\chi}{dp}\right)^2 + F^2 \left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 + F^2 \sin^2(\theta) \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 \right]^{1/2} dp, \end{aligned}$$

де p – довільний неособливий параметр уздовж кривої. Для малих масштабів (порівняно з космологічними) ця величина збігається з власною відстанню $d\bar{s}$ у локально-лоренцовій системі, що її вимірює спостерігач, який перебуває в стані спокою відносно рідини, у своєму оточенні¹. Уздовж радіуса χ , тобто при $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, якщо відраховувати від початку координат, це буде

$$D = \int_0^{\chi} \sqrt{-ds^2} = \int_0^{\chi} d\bar{s} = a(t)\chi.$$

13.3.2. Космологічний червоний зсув. Нехай у точці $\chi = \chi_1$ розташовано джерело випромінювання з власною частотою ω_p . Траєкторія сигналів від цієї точки до спостерігача в точці $\chi = 0$ є ізотропною геодезичною, тому умова нормування має вигляд

$$c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = a^2(t) \left(\frac{d\chi}{d\tau} \right)^2,$$

звідки, враховуючи, що χ зменшується на шляху до спостерігача, дістанемо

$$c \int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')} = \chi, \quad (13.14)$$

де $\{t_1, \chi, \theta, \varphi\}$ – подія випромінювання, $\{t, 0, \theta, \varphi\}$ – подія прийому сигналу, $t_1 < t$. Зв'язок між t і t_1 дає

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a(t_1)} \frac{dt_1}{dt}.$$

Ейконал поля випромінювання зберігається вздовж променя:

$$\{\Omega(t)\}_0 \equiv \{\Omega(t_1)\}_\chi,$$

тоді спостережувана частота, що приймається в сучасний момент космологічного часу $t = t_0$:

$$\omega_{obs} = \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_{\chi=0} = \left(\frac{d\Omega}{dt_1} \right)_{\chi} \frac{dt_1}{dt} = \omega_p \frac{a(t_1)}{a(t_0)}, \quad (13.15)$$

оскільки t_0 і t_1 є власні часи у відповідних точках.

¹ Наприклад, за допомогою радіолокаційних сигналів.

Якщо $a(t)$ зростає, маємо $\omega_{obs} < \omega_p$ – зменшення частоти. Параметром червоного зміщення називають величину

$$z = \frac{\omega_p}{\omega_{obs}} - 1 = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_p} - 1,$$

де λ – відповідна довжина хвилі. Згідно з (13.15) маємо формулу¹

$$z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (13.16)$$

Космологічне червоне зміщення було першим космологічним ефектом, що спостерігався у спектрах випромінювання галактик. Це підтверджує факт розширення Всесвіту. У часи Габбла, який уперше спостерігав цей ефект, доступними були вимірювання відстані для не дуже далеких галактик, на цих масштабах зв'язок між червоним зміщенням і відстанню є приблизно лінійним. Для невеликих відстаней запишемо

$$a(t_1) \approx a(t) - (t - t_1) \frac{da}{dt} \approx a(t) - \frac{D}{c} \frac{da}{dt},$$

де враховано п. 13.3.1 і (13.14), тоді (13.16) наближено перепишемо як закон Габбла:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{D}{c} H_0, \quad (13.17)$$

де введено сталу Габбла $H_0 = \left. \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0}$, що визначається в сучасну

епоху t_0 . У літературі також розглядають параметр Габбла відносно довільного моменту часу $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$.

13.3.3. Відстані в космології. У викривленому просторі-часі існують різні визначення відстані, що збігаються лише у плоскому просторі. Розглянемо космологічну відстань за кутовим діаметром і космологічну фотометричну відстань. Нехай об'єкт, що його бачить спостерігач, має кутовий діаметр $\Delta\phi \ll 1$ (у радіанах), і йому відповідає власний діаметр Δl (поперечний розмір, перпендикулярний до променя зору). Відстанню за кутовим діаметром називають величину D_a , що входить у співвідношення

¹ Інколи її називають формулою Леметра.

$$\Delta l = D_a \Delta \phi. \quad (13.18, \text{ а})$$

У загальному просторі-часу $\Delta \phi$ може залежати від орієнтації об'єкта для одного й того самого Δl , але для метрики (13.8) ця величина визначена однозначно.

Нехай потужність випромінювання об'єкта у власній системі є I , а Π – густина потоку енергії¹ (за абсолютною величиною), що реєструє спостерігач. Фотометричною відстанню називають величину D_{ph} , яка входить у співвідношення

$$\Pi = \frac{I}{4\pi D_{ph}^2}. \quad (13.18, \text{ б})$$

У плоскому просторі (13.18, а) – звичайний зв'язок між кутовим і фізичним розмірами, а (13.18, б) – закон обернених квадратів, причому $D_{ph} = D_a$. У викривленому просторі ці величини не збігаються і формули (13.18) є означеннями величин D_a, D_{ph} . Отримаємо формули для цих відстаней у фрідманівській космології з метрикою (13.8).

Нехай малий відрізок розташований на колі $\chi = \chi_1$, $\theta = \pi/2$, між точками ϕ і $\phi + \Delta \phi$, має червоне зміщення z , що відповідає моменту космологічного часу t_1 , а сучасний спостерігач ($t = t_0$) перебуває в точці $\chi = 0$. З урахуванням (13.7) власний розмір відрізка є

$$\Delta l = d\tilde{s} = a(t_1)F(\chi_1)\Delta \phi.$$

Траєкторія променя світла від точки $t_1, \chi_1, \theta, \phi$ є ізотропною геодезичною вздовж радіуса χ ($d\phi = d\theta = 0$) до точки $\chi = 0, t = t_0$, тому $cdt = -ad\chi$, звідки визначаємо χ_1 і згідно з означенням (13.18) маємо кутову відстань

$$D_a = a(t_1)F\left(\int_{\chi_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}\right). \quad (13.19)$$

Перейдемо до фотометричної відстані. Нехай ізотропне джерело випромінює фотони з власною частотою джерела ω_1 . Випромінювання відбувається в космологічну епоху t_1 , яка відповідає червоному зміщенню z , але тепер виберемо систему координат таку, що джерело розташова-

¹ Тобто енергія за одиницю часу, що перетинає одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку випромінювання.

но в точці $\chi = 0$, а спостерігач реєструє випромінювання в точці $\chi = \chi_0$ у момент $t = t_0$. Розрахуємо густину потоку енергії в околі спостерігача, беручи за основу кількість випромінених фотонів N , яка зберігається за відсутності поглинання. Власною потужністю джерела є

$$I = \frac{dN}{dt_1} \hbar\omega_1 = \left(\frac{dN}{dt} \right)_{t_0} \left[\left(\frac{dt_1}{dt} \right)_{t_0} \right]^{-1} \hbar\omega_0 \frac{\omega_1}{\omega_0}.$$

Відношення частот, а також dt_1/dt , виражаються через відношення масштабних факторів $a(t_0)/a(t)$, тобто за формулою (13.16), через червоне зміщення. Тому

$$I = \left(\frac{dN}{dt} \right)_{t_0} \hbar\omega_0 (1+z)^2.$$

Спостерігач перебуває на сфері $\chi = \chi_0, t = t_0$, елементом її поверхні для метрики (13.7) є $dS = [a(t_0)]^2 [F(\chi_0)]^2 \sin(\theta) d\varphi d\theta$, а повною поверхнею – $S = 4\pi [a(t_0)]^2 [F(\chi_0)]^2$.

Кількість фотонів зберігається, тому прийнятою енергією на одиницю площі за одиницю часу спостерігача є

$$\frac{\hbar\omega_0}{4\pi [a(t_0)]^2 [F(\chi_0)]^2} \left(\frac{dN}{dt} \right)_{t_0}.$$

За означенням (13.18, б): $D_{ph} = (1+z)a(t_0)F(\chi_0) = (1+z)^2 a(t_1)F(\chi_0)$, причому χ_0 визначаємо аналогічно випадку D_a , розглядаючи рух променя від джерела (початок руху в момент t_1) до спостерігача (прийм променя в момент t_0):

$$\chi_0 = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)},$$

Після порівняння з (13.19), маємо

$$D_{ph}(z) = (1+z)^2 D_a(z). \quad (13.20)$$

13.3.4. Параметри однорідної ізотропної моделі. Введемо критичну густину

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G},$$

тоді рівняння (13.10) у сучасну епоху $t = t_0$ можна переписати таким чином:

$$H_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_c} \right) = \frac{\sigma c^2}{a_0^2}, \quad a_0 = a(t_0), \rho_0 = \rho(t_0). \quad (13.21)$$

Звідси видно, що параметр σ визначається відношенням ρ_0/ρ_c , або безпосередньо сталою Габбла та середньою густиною Всесвіту, що включає внесок космологічної сталої. Параметр ρ_c розділяє області густин, що відповідають відкритому й замкненому Всесвіту; коли $\rho_0 = \rho_c$, Всесвіт є просторово-плоским. За сучасними експериментальними даними відношення ρ_0/ρ_c може відрізнитися від одиниці не більше ніж на кілька сотих, однак знак близької до нуля різниці $\rho_0 - \rho_c$, а значить і знак σ , на даний момент невідомі. Зазначимо, що за теорією космологічної інфляції раннього Всесвіту, яка розв'язує труднощі стандартної космологічної моделі, має бути $\rho_0 = \rho_c$ з дуже великою точністю. Слід підкреслити, що незважаючи на те, що при переході $\rho_0 - \rho_c$ через нуль змінюється дискретний параметр σ , жодні стрибки у спостережних величинах відсутні, причому, коли $\rho_0 \rightarrow \rho_c$, параметр $a_0 \rightarrow \infty$ і у формулах для спостережних величин він зникає.

Як було зазначено вище, космологічні рівняння (13.10) і (13.11) описують дуже загальну ситуацію щодо впливу на вигляд метрики простору-часу. Для подальшої конкретизації необхідно врахувати рівняння стану різних складових матерії у Всесвіті.

Сучасний ($t = t_0$) внесок різних видів матерії характеризують параметром Ω – відношенням відповідної густини маси до критичної, зокрема, $\Omega = \rho_0/\rho_c$, де ρ_0 – загальна густина, що визначає згідно з (13.21) знак просторової кривини Всесвіту, $\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda/\rho_c$, де $\rho_\Lambda = \varepsilon_\Lambda/c^2$ тощо.

13.3.5. Стандартна модель з холодною темною матерією та космологічною сталою (Λ CDM-модель). У Λ CDM-моделі прийнято, що основний внесок у сучасну густину маси дають:

- космологічна стала ($\varepsilon_\Lambda = \rho_\Lambda c^2$);
- небаріонна холодна темна матерія з практично нульовим тиском і густиною ρ_{dm} , яка слабко взаємодіє зі звичайною речовиною;

• звичайна (баріонна) матерія з густиною ρ_b ; у сучасну епоху можна вважати, що її тиск також є нульовим і при розв'язанні рівнянь Фрідмана ρ_b можна об'єднати з ρ_{dm} у спільну густину $\rho_m = \rho_{dm} + \rho_b$. У більш ранні часи, за високих температур і густин енергії, тиск баріонної матерії був суттєвим.

Невелику частку густини становить випромінювання. При описі сучасної стадії еволюції Всесвіту цією часткою можна знехтувати, хоча в ранньому Всесвіті випромінювання відіграло значну роль. Таким чином, на сучасній стадії еволюції прийматимемо, що баріонна та небаріонна складові є холодними з параметром $\Omega_m = \rho_m / \rho_c$ і зі спільним рівнянням стану $p = 0$. Із рівняння (13.11) маємо зв'язок між загальною густиною та масштабним фактором окремо для кожної складової, звідки

$$\rho(t) = \rho_\Lambda(t) + \rho_m(t) = \rho_\Lambda(t_0) + \rho_m(t_0) \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3.$$

Із (13.10) отримуємо рівняння для масштабного фактора

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c \left[\Omega_\Lambda + \Omega_m \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \right] + \frac{\sigma c^2}{a^2}. \quad (13.22)$$

13.3.6. Відстані в Λ CDM-моделі. Рівняння (13.22) можна переписати таким чином:

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c \left[\Omega_\Lambda + \Omega_m (1+z)^3 \right] + \frac{\sigma c^2}{a_0^2} (1+z)^2,$$

де використано формулу для червоного зсуву (13.16). У момент $t = t_0$ маємо $z = 0$, звідси за визначенням критичної густини

$$\frac{\sigma c^2}{a_0^2} = H_0^2 (1 - \Omega), \text{ або } \frac{c}{a_0} = H_0 |1 - \Omega|, \quad (13.23)$$

тоді

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_\Lambda + \Omega_m (1+z)^3 + (1-\Omega)(1+z)^2 \right]. \quad (13.24)$$

Із (13.16)

$$dz = -\frac{a(t_0)}{[a(t)]^2} \frac{da}{dt} dt = -(1+z) \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right) dt,$$

тому за допомогою (13.24) після заміни змінної інтегрування t на червоне зміщення z , маємо

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \frac{c}{H_0 a_0} \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m (1 + \zeta)^3 + (1 - \Omega)(1 + \zeta)^2}}.$$

Із формул (13.19), (13.23) дістаємо формулу відстані за кутовим діаметром в однорідному ізотропному Всесвіті:

$$D_a(z) = \frac{a_0}{1+z} F \left(\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \right) = \frac{c}{(1+z)H_0\sqrt{|1-\Omega|}} F \left(\sqrt{|1-\Omega|} \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m (1 + \zeta)^3 + (1 - \Omega)(1 + \zeta)^2}} \right). \quad (13.25)$$

За формулою (13.20) маємо також фотометричну відстань як функцію червоного зміщення

$$D_{ph}(z) = \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{|1-\Omega|}} F \left(\sqrt{|1-\Omega|} \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m (1 + \zeta)^3 + (1 - \Omega)(1 + \zeta)^2}} \right). \quad (13.26)$$

Звернемо увагу, що при $\Omega \rightarrow 1$ в обох випадках знака σ отримуємо однаковий результат, який відповідає $\sigma = 0$:

$$D_{ph}(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m (1 + \zeta)^3}}. \quad (13.27)$$

Як впливає з визначення D_{ph} , ця величина може розглядатися як спостережувана, якщо джерелом випромінювання є так звана стандартна свічка – об'єкт, потужність якого можна визначити незалежним чином. При вимірюванні відстаней до об'єктів з червоним зміщенням до $z \sim 1$ (і навіть більше) у ролі такої стандартної свічки можуть виступати наднові типу Ia, спалахи яких спостерігають у сусідніх галактиках. В експериментальних дослідженнях безпосередньо вимірюються червоне зміщення та густина потоку енергії від джерела випромінювання в околі спостерігача. Це дозволяє визначити залежність $D_{ph}(z)$ і використати її для визначення космологічних параметрів, що входять у (13.26). Спостереження наднових типу Ia наприкінці минулого століття стали першим вагомим аргументом на користь ненульового значення космологічної сталої. У подальшому ці спостере-

ження були доповнені спостережними даними щодо флуктуацій температури *реліктового випромінювання*. Сукупність експериментальних даних дає змогу визначити параметри

$$H_0 \approx 72 \text{ км/(с·Мпк)}, \Omega \approx 1, \Omega_\Lambda \approx 0,73, \Omega_m \approx 0,27. \quad (13.28)$$

Нагадаємо, що останній параметр відповідає внеску всієї "холодної" матерії з нульовим тиском. З іншого боку, розгляд ядерних реакцій, що відбувалися в ранньому Всесвіті й мали наслідком спостережуваний розподіл елементів, накладає сильні обмеження на вміст звичайної баріонної матерії: $\Omega_b \approx 0,04 \div 0,05$. Приблизно чверть космологічної густини має досі невідоме, принаймні, небаріонне походження.

13.3.7. Сучасна стадія космологічної інфляції. Як було відзначено, у сучасну епоху основний внесок у космологічні рівняння дають космологічна стала, що відповідає рівнянню стану $p_{vac} = -\varepsilon_\Lambda$, і холодна матерія (баріонна та небаріонна) з рівнянням стану $p_m \approx 0$; загальний тиск є $p = p_{vac}$; загальна густина енергії також складається із цих компонент $\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_{vac}$. У сучасну епоху переважає вплив космологічної сталої, причому зі значним запасом має місце нерівність $\varepsilon + 3p < 0$. Тому з (13.9) маємо $\ddot{a} > 0$, тобто *космологічне розширення в сучасну епоху відбувається з прискоренням*. Більше того, це прискорення із часом буде зростати, адже при розширенні $\rho_m = \varepsilon_m / c^2 \sim a^{-3}$ спадає, тому величина $[-(\varepsilon + 3p)]$ надалі ще збільшуватиметься. Із часом $\varepsilon_m \rightarrow 0$ і рівняння (13.10) можна наближено переписати як

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_\Lambda a^2,$$

звідки видно, що масштабний фактор виходить на експоненційний режим зростання:

$$a \sim \exp\left(t \sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_\Lambda}\right). \quad (13.29)$$

Цей режим збільшення з прискоренням називають інфляційним¹, він реалізується незалежно від знака σ . Сучасну стадію космологічної інфляції слід відрізнити від інфляційного зростання $a(t)$, що відбува-

¹ Інфляція" (від англ. *inflation*) означає "роздування".

лося в перші миттєвості еволюції Всесвіту, починаючи з планківських¹ часів $\sim 10^{-44}$ с.

13.3.8. Гаряча модель Всесвіту. Зі спостережень відомо, що Всесвіт заповнений так званим *реліктовим випромінюванням*², яке має спектр абсолютно чорного тіла із сучасною температурою, приблизно 2,7 К. Це випромінювання практично ізотропне, тобто майже однакове з усіх напрямків. Щоб оцінити еволюцію випромінювання в часі, розглядатимемо його як однорідний газ фотонів з густиною енергії $\varepsilon_r(t)$ і з релятивістським рівнянням стану $p = \varepsilon_r/3$. Для такого рівняння стану, як було зазначено вище, із рівняння (13.11) випливає

$$\varepsilon_r(t) = \varepsilon_r(t_0) \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^4. \quad (13.30)$$

Якщо рухатися назад у часі, починаючи від сучасної епохи t_0 , густина випромінювання та його температура³ зростають; також зростає густина енергії баріонної матерії:

$$\varepsilon_b(t) = \varepsilon_b(t_0) \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^3. \quad (13.31)$$

Оскільки в цей період ε_b змінюється більш повільно, у минулому роль випромінювання була більш вагомою. Із (13.30), (13.31) випливає, що на ранніх стадіях еволюції Всесвіту матерія мала дуже високі температури й густини. Навіть якщо не брати до уваги небаріонну компоненту, мікросклад якої поки що невідомий, слід припустити наявність стадії, на якій існувала майже рівноважна суміш плазми та випромінювання. Цей період еволюції називають *радіаційною ерою*. Використовуючи відомі дані про взаємодію елементарних частинок, можна оцінити склад цієї суміші в різні часи та відстежити її подальшу еволюцію та сучасний розподіл елементів. Космологічне пояснення первинного розподілу елементів у моделі гарячого Всесвіту вперше запропонував Г. Гамов у 1946–1948 рр., ще коли реліктове випромінювання було невідомим.

¹ Планківськими називають величини, які можна отримати шляхом комбінації фундаментальних констант \hbar, c, G .

² В англomовній літературі – *microwave background radiation* (мікрохвильове фонове випромінювання).

³ Унаслідок закону Стефана – Больцмана $T_r \sim \varepsilon_r^{1/4}$.

За високих температур і густин матерії баріон-фотонна суміш еволюціонує в термодинамічній рівновазі, але з космологічним розширенням температура первинної суміші спадає й відбувається рекомбінація водню. Відсоток іонізованих атомів (здебільшого водню) зменшується й умови рівноваги між речовиною та випромінюванням вже не виконуються. Після рекомбінації водню речовина в газовій фазі стає прозорою й практично не взаємодіє із фотонами, які еволюціонують незалежно. Ці фотони й утворюють реліктове випромінювання, що несе залишки початкового тепла, зберігаючи рівноважний розподіл енергії фотонів по довжинах хвиль, що відповідає спектру випромінювання абсолютно чорного тіла. Спостереження реліктового випромінювання є одним з найважливіших підтверджень теорії гарячого Всесвіту.

13.3.9. Дрібномасштабна анізотропія реліктового випромінювання. У дорекомбінаційну епоху речовина та випромінювання були однорідними з високим ступенем точності, але ця однорідність не була ідеальною. Про це свідчить сучасна спостережувана структура Всесвіту у вигляді галактик та їх скупчень. Згідно із загальною думкою в результаті квантово-статистичних ефектів у ранньому Всесвіті виникають флуктуації густини різних складових матерії, що залишаються малими до рекомбінації водню. Після рекомбінації малі збурення однорідного розподілу речовини зростають завдяки гравітаційній взаємодії. Вони утворюють значні концентрації маси, з яких потім виникають структурні елементи Всесвіту. Навпаки, залишкове випромінювання майже не взаємодіє з речовиною; його кванти подорожують дотепер у вигляді реліктового випромінювання, яке реєструють у мікрохвильовому діапазоні. Спостережною величиною є температура¹ T цього випромінювання, яка дещо відрізняється (на величини порядку $10^{-5}T$) для різних напрямків і є функцією кутових сферичних координат $\mathbf{n} = (\theta, \varphi)$. Малі флуктуації температури дають інформацію про флуктуації густини матерії в епоху рекомбінації. Розподіл $T(\mathbf{n})$ на небесній сфері являє собою хаотичну плямисту картину. Величину

$$T(\mathbf{n}) - \langle T \rangle = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}),$$

де $\langle T \rangle$ – середнє значення температури на небі, можна розкласти за сферичних функціях $Y_{lm}(\mathbf{n})$. Коефіцієнти

$$C(l) = \frac{l(l+1)}{2\pi} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2$$

¹ Оскільки спектр випромінювання є рівноважним (чорнотільним), його можна охарактеризувати певною температурою.

утворюють так званий *кутовий енергетичний спектр* (рис. 13.1), який зручно порівнювати з теоретичними розрахунками. Залежність коефіцієнтів C_l від номера мультиполя $l = 0, 1, 2, \dots$ дає змогу оцінити параметри будови Всесвіту і вміст первинної суміші.

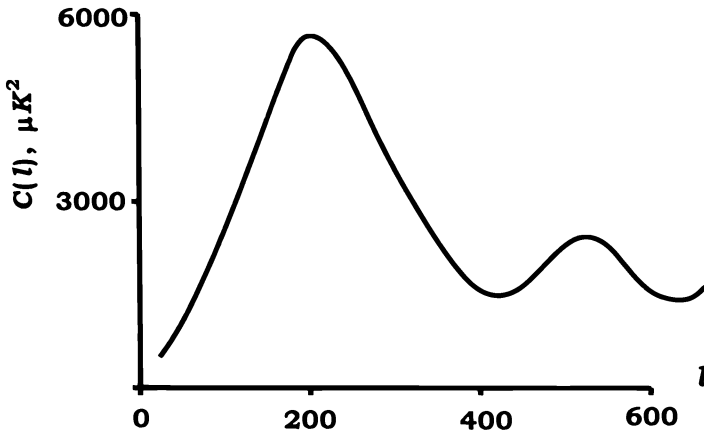


Рис. 13.1. Вигляд спостережуваного кутів енергетичного спектра анізотропії реліктового випромінювання. Положення першого максимуму приблизно при $l = 200$ відповідає просторово плоскій метриці $\sigma = 0$

13.3.10. Обмеженість стандартної космологічної моделі. У стандартній моделі з космологічною сталою виникає низка питань, які вимагають модифікації теорії на різних рівнях. Обговоримо деякі з них.

Проблема площинності (від англ. *flatness*). Перепишемо рівняння (13.10) аналогічно до (13.21), вводячи "космологічні параметри" для довільного моменту часу:

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad \rho_{c,t} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad \Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_{c,t}},$$

тоді для спостерігача в момент t рівняння (13.21) перепишеться таким чином:

$$H^2(t)[1 - \Omega(t)] = \frac{\sigma c^2}{a^2(t)},$$

звідки

$$\frac{1 - \Omega(t)}{\Omega(t)} = \frac{1 - \Omega(t_0)}{\Omega(t_0)} g(t), \quad \text{де } g(t) = \frac{\varepsilon_0 a_0^2}{\varepsilon(t) a^2(t)}.$$

Для рівняння стану холодної матерії $\varepsilon \sim a^{-3}$ і $g \sim (1+z)^{-1}$; для ультрарелятивістського рівняння стану $\varepsilon \sim a^{-4}$, $g \sim (1+z)^{-2}$. У будь-якому разі, якщо уявити спостерігача, що проводив би вимірювання в момент космологічної рекомбінації водню, параметр $\Omega(t)$ міг би відрізнятись від одиниці не більше ніж на величину порядку $\sim 10^{-5}$, і це відхилення зменшується на багато порядків для планківського часу. Така точність, що характеризує близькість просторової метрики до плоскої на початку космологічного розширення, вимагає пояснень.

Проблема горизонту. Флуктуації температури реліктового випромінювання дуже малі, і для такого високого ступеня ізотропії необхідним є причинний зв'язок між областями формування випромінювання, які відповідають різним напрямкам.

Оцінимо у межах стандартної моделі розмір причинно-зв'язаної області в момент космологічного часу t , на яку може вплинути подія $t = t_1, \chi = 0$ у координатах, що відповідають метриці (13.8). Найбільший розмір області відповідає подіям, пов'язаним рівнянням ізотропної геодезичної (13.14). Фізичною відстанню (див. п. 13.3.1) між точкою χ і початком просторових координат у час t є

$$D(t, t_1) = ca(t) \int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (13.32)$$

Якщо припустити, що небаріонна матерія зберігає нульовий тиск і в радіаційну еру ($\varepsilon_{dm} \sim a^{-3}$), тоді (за малих $a(t)$) основний внесок у тиск і густину дають випромінювання та баріонна матерія (для якої за високих густин і температур прийматимемо також ультрарелятивістське рівняння стану $p = \varepsilon/3$, $\varepsilon_b \sim a^{-4}$). Внеском космологічної сталої в радіаційну еру нехтуємо, тоді для грубої оцінки можна скористатися результатом впр. 13.4 із підрозд. 13.2, за яким $a \sim t^{1/2}$. Підставляючи це в (13.32), дістанемо

$$D_{hor}(t, t_1) = 2ct(1 - \sqrt{t_1/t}) < 2ct.$$

Як видно, навіть при $t_1 \rightarrow 0$ розмір причинно-зв'язаної області є скінченним. Сукупність наявних спостережних даних дають змогу оцінити цей розмір у епоху рекомбінації, після якої випромінювання відокремлюється від речовини й поширюється незалежно: $t_{rec} \sim 10^{13}$ с,

$z_{rec} \sim 10^3$. Максимальний розмір причинно-зв'язаної області (*масштаб горизонту*) у цю епоху буде $D(t_{rec}, 0)$, а її кутовий розмір з погляду сучасного спостерігача є $\theta_{hor} = D(t_{rec}, 0) / D_a(z_{rec}) = 0,02$, що відповідає $1,1^\circ$. У цьому розгляді ми вважали, що сигнали, які пов'язують причинно-зв'язані події, поширюються зі швидкістю світла, але в баріонно-фотонній суміші збурення поширюються зі швидкістю звуку $c_s = c / \sqrt{3}$, тому відповідний кутовий розмір¹ буде меншим в $\sqrt{3}$ разів і становитиме $0,6^\circ$. Це відповідає характерному розміру плям у розподілі $T(\mathbf{n})$ на небесній сфері, а величина $l_{hor} = \pi / \theta_{hor}$ відповідає номеру мультиполя в максимумі залежності C_l на рис. 13.1.

Слід очікувати, що за порядком величини отримані оцінки матимуть місце й при більш точному врахуванні стану баріонної та небаріонної компонент. Принаймні, можна впевнено стверджувати, що розмір причинно-зв'язаної області аж ніяк не покриває все небо, тому цілком незрозуміло, чому збігаються середні температури реліктового випромінювання, що приходить з причинно-незалежних напрямків? Проблема горизонту є дуже сильним аргументом, що свідчить про необхідність перегляду космологічної моделі на ранніх стадіях еволюції. Ці та інші питання знаходять відповіді в межах різних варіантів теорії інфляції раннього Всесвіту. За цією теорією космологічна "стала" Λ не є сталою, причому за дуже малих t величина Λ перевищувала сучасне значення на багато порядків, тому оцінки горизонту, де знехтувано ϵ_Λ , стають неправомірними. Навпаки, величина ϵ_Λ , як вважають, домінувала над усіма іншими внесками в космологічну густину, що забезпечувало експоненційний режим збільшення масштабного фактора – аналогічно (13.29), але значно більш швидкий, з іншими параметрами, відмінними від (13.28). Детальне обговорення інфляційної теорії виходить за межі цієї книги. Зазначимо лише, що швидке роздування забезпечує високий ступінь однорідності у спостережуваній частині Всесвіту та близькість параметра Ω до одиниці.

¹ Його називають акустичним горизонтом.

14. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ ВІДНОСНОСТІ: ІСТОРИКО-БІБЛІОГРАФІЧНА ДОВІДКА

14.1. Розробка основ

Ідея про неевклідовість фізичного простору пробивала собі шлях з XIX ст., починаючи від *Миколи Івановича Лобачевського* та *Яноша Бойяі*¹. Спочатку було показано, що геометрія, яка не використовує п'ятий постулат Евкліда про паралельні прямі, є внутрішньо несуперечливою². Природно виникло питання, наскільки п'ятий постулат відповідає фізичним реаліям? Відомо, що *Карл Фрідріх Гаусс*, найавторитетніший математик того часу, також прийшов до аналогічної думки (хоча й не довів її до завершеної публікації) і намагався перевірити цей постулат за допомогою триангуляційних вимірювань у горах Гарца. У своїй роботі 1826 р. "Про начала геометрії" Лобачевський ставить питання про наслідки нової геометрії для опису механічних явищ. *Бернгард Ріман*, який суттєво розвинув апарат неевклідової (ріманової) геометрії (1854), розмірковував у цьому контексті про "поширення емпіричного досліду... у напрямку непомірно великого чи непомірно малого"; зокрема, він допускав існування кривини простору, відчутної на дуже великих масштабах, у порівнянні з якими "частина Всесвіту, доступна телескопам, є дуже малою...". *Уільям Кліффорд* у 1876 р. припустив, що простір складається з ділянок різної кривини, причому зміни кривини пов'язані з рухом матерії. Проте ці здогадки, хоча й дуже слушні, були ще далеко від побудови послідовної теорії простору-часу.

Початку XX ст. притаманне ретельне обговорення взаємозв'язку фізичного досліду та теоретичних моделей, аксіоматики тощо, пов'язаних з такими фундаментальними поняттями, як простір, час і відносність руху. Було продемонстровано, що певні теоретичні конструкції, типу "абсолютна система координат" і абсолютний час, аж ніяк не обумовлені дослідом. Блискучі успіхи СТВ підтвердили принципову важливість аналізу вимірювань, у кінцевому рахунку – необхідність правильного розуміння, що дійсно може вимірювати спостерігач,

¹ Цитуємо А. Ейнштейна та інших класиків науки за збірником [1, 2].

² "Роботи Лобачевського були першими, які стали відомими в широких колах і справили вплив (1829)... можна припустити, що і Лобачевський розпочав свої дослідження, сподіваючись, що заперечування аксіоми Евкліда призведе до суперечностей. Однак коли це сподівання не здійснилося, у нього вистачило інтелектуальної мужності зробити звідси всі висновки" (Е. Мах, "Пізнання та омана", 1903 [1]).

а що є лише плодом людської фантазії. Зокрема, рух може бути тільки відносним; абсолютний рух без прив'язки до спостерігача є фікцією.

У СТВ ідея відносності стосувалася лише інерціальних рухів. Однак *Ернст Мах* писав: "Для мене взагалі існує тільки відносний рух, і я не можу тут допустити якусь відмінність між рухом обертальним і поступальним. Якщо тіло обертається відносно неба нерухомих зірок, виникають відцентрові сили... Чи можемо ми, тримаючи нерухомо ньютонівську посудину з водою, обертати відносно неї небо з зорями і довести, що в цьому відцентрові сили відсутні?". Тут можна виділити два пункти: а) локальна відносність інерціальних і неінерціальних систем відліку; б) *принцип Маха*: інерція тіл обумовлена взаємодією з усіма іншими тілами Всесвіту. Погляди Маха справили велике враження на Ейнштейна [3, С. 27–32]. Пункт (а) реалізовано в ЗТВ і метричних ТТ у вигляді принципу еквівалентності між гравітацією та інерцією; справедливість чи хибність пункту (б) досі залишається нез'ясованою.

У 1907 р. *Альберт Ейнштейн*, натхнений успіхом СТВ, поширює [2, С. 65–114] принцип відносності на неінерціальні системи за допомогою принципу еквівалентності: "... у гравітаційному полі всі тіла прискорюються однаково. Тому ... будемо припускати повну фізичну рівноцінність гравітаційного поля та відповідного прискорення системи відліку. Це припущення поширює принцип відносності на випадок рівномірно прискореного руху системи відліку." Спираючись на це, Ейнштейн обчислив червоний зсув частоти світла в гравітаційному полі. Це був перший вирішальний крок у створенні релятивістської теорії тяжіння. Після невдалих спроб побудувати скалярну теорію гравітаційного поля, другий вирішальний крок було зроблено в 1913 р., коли Ейнштейн зрозумів, що для опису спостережних ефектів у гравітаційному полі необхідно залучити метричний тензор чотиривимірного риманового простору-часу. На цю думку наводило чотиривимірне представлення СТВ, запропоноване в роботах *Германа Мінковського*. Важливу роль відіграла співпраця з математиком *Марселем Гроссманом*, з яким Ейнштейн приятелював ще зі студентських років [3, С. 350–356]. Проте правильні рівняння для метричного тензора ще були невідомі; це ставило наступну задачу. Після тривалих пошуків Ейнштейн опублікував остаточний вигляд цих рівнянь наприкінці 1915 р. Ще до цього ним було передбачено гравітаційне відхилення світла в полі Сонця та обчислено релятивістський внесок є прецесію перигелію Меркурія – єдиний на той час спостережуваний астрономічний ефект ЗТВ. Збіг зі спостережним результатом надав упевненості в правильності теорії, побудованої дедуктивним шляхом. Повністю ЗТВ у завершеному ви-

гляді (але ще без космологічної сталої) опублікована Ейнштейном у 1916 р. [2, С. 452–504]. Зауважимо, що в 1915 р. рівняння гравітаційного поля були також отримані видатним математиком *Девідом Гільбертом* [1, С. 133–145], який виходив з варіаційного принципу. Точніше, Гільберт запропонував загальний розгляд функціоналу дії для електричних і гравітаційних явищ, з якого у частинному випадку випливали правильні рівняння для метричного тензора.

14.2. Досягнення

Розвиток ЗТВ не закінчився публікацією А. Ейнштейном її основ в 1916 р. Відзначимо найбільш важливі віхи в розробці її теоретичного апарату. Докладні літературні посилання можна знайти в [10, 28–30, 34]. Щодо спостережних засад ЗТВ її астрофізичних і космологічних застосувань та сучасного стану гравітаційного експерименту ми відсилаємо читача до монографії [50]. Сучасний стан і проблеми космології добре висвітлено в нещодавньому виданні [13].

14.2.1. Після створення ЗТВ виникла ідея застосувати ЗТВ до опису Всесвіту в цілому. Ейнштейн (1917) ввів у рівняння поля космологічну сталу, щоб забезпечити існування стаціонарного космологічного розв'язку. Аналогічний розв'язок було досліджено В. де Сіттером (1917). Після робіт Ейнштейна та де Сіттера, А.А. Фрідман (1922) знайшов нестационарні космологічні розв'язки, що описують однорідний та ізотропний Всесвіт, а в 1929 р. У. Габбл виявив розбігання галактик. Здавалося б, необхідність введення космологічної сталої відпала, але наприкінці минулого століття було експериментально з'ясовано, що ця стала має ненульове значення.

Для дослідження структурної еволюції Всесвіту необхідно вивчати відхилення від умов однорідності та ізотропії. Таку задачу вперше розглянув Е.М. Ліфшиц (1946) для невеликих масштабів порівняно з космологічними (див. [24]); пізніше це дослідження доповнювалося багатьма авторами [18]. Дослідження фізичних полів у фрідманівському просторі-часі, а також вивчення гідродинамічних і гравітаційних збурень фрідманівських розв'язків є вихідним елементом для пояснення сучасної неоднорідності в розподілі речовини у Всесвіті та спостережень дрібно-масштабної анізотропії мікрохвильового реліктового фону.

14.2.2. До питань космології примикають математичні дослідження загальної структури простору-часу (див. [47, 33]). У 60-х рр. минулого століття виникла жвава дискусія щодо існування космологічної син-

гулярності. Деякі автори вважали, що космологічна сингулярність при $t \rightarrow 0$, характерна для розв'язків Фрідмана, є наслідком симетрії й не притаманна загальному випадку. Здавалося, що за наявності зростаючих при $t \rightarrow 0$ збурень можна було уникнути сингулярності і таким чином продовжити розв'язок в область від'ємних t . У другій половині 60-х рр. ХХ ст. Р. Пенроуз і С. Хокінг довели низку теорем якісного характеру щодо геодезичної повноти; були викладені умови, за яких або виникає сингулярність, або виникають інші чинники, за яких неможливо передбачувати майбутнє. Із цих робіт, зокрема, впливає невідвертість первинної космологічної сингулярності у "стандартній" космологічній моделі. З іншого боку, В.А. Белінський, Е.М. Ліфшиц і І.М. Халатніков побудували загальний асимптотичний розв'язок рівнянь Ейнштейна біля початку космологічного розширення (див. [24]), що містить сингулярність. Оскільки за наявності сингулярностей теорія не працює, необхідно модифікувати теорію в області аномально великих густин імовірно з урахуванням квантових ефектів. Інший аргумент, що свідчить про необхідність модифікації стандартної моделі пов'язаний з проблемою горизонту в космології (п. 13.3.10).

14.2.3. Внутрішня несуперечливість і можливість передбачувати майбутнє є принциповими для будь-якої теорії. Мовою математики це означає існування та єдиність розв'язків рівнянь теорії, у даному випадку ЗТВ. Ці питання розглядалися, починаючи з 1950-х рр., І. Шоке-Брюа, А. Ліхнеровичем, А. Фішером і Дж. Марсденом, а також іншими дослідниками, за допомогою методів нелінійного аналізу та теорії гіперболічних рівнянь з частинними похідними. Тут, як правило, йшлося про локальні результати, тобто існування розв'язку довели в деякому околі даних Коші (бібліографія в [37, 47]). Якісні результати щодо глобальних властивостей розв'язків (топология, теореми про колапс і сингулярності) висвітлено в книгах Р. Пенроуза [33] і С. Хокінга та Дж. Елліса [47]. Для аналізу проблеми початкових даних і динаміки гравітаційного поля суттєву роль відіграло спеціальне представлення рівнянь поля, запропоноване Р. Арновіттом, С. Дезером і Ч. Мізнером (відоме як формалізм АДМ, див. [29]) Принципово важливим є доведення додатної визначеності енергії в ЗТВ (П. Шон, С. Яо, Е. Віттен; див. дод. 8 і статтю [45]).

14.2.4. Для астрофізичних застосувань першочергову роль відіграють точні розв'язки, які описують чорні діри (див. розд. 12): у сферично-симетричному випадку (К. Шварцшильд, 1916) і за наявності обертання (Р.П. Керр, 1963). Відомі узагальнення цих розв'язків на випа-

док, коли чорна діра має заряд (у цьому випадку розв'язують сумісну систему рівнянь Ейнштейна та Максвелла), а також для ненульової космологічної сталої [22]. Важливі результати щодо властивостей чорних дір і умов їх утворення в загальній постановці отримано Р. Пенроузом, С. Хокінгом, В. Израелем, Б. Картером (див. [47, 33, 32]). Детально вивчено рівняння, які описують процеси електромагнітного та гравітаційного випромінювань в околі чорних дір; для ознайомлення із цим напрямом рекомендуємо монографії [32, 17]. У геометрії Керра для рівнянь основних хвильових полів можна провести розділення змінних (С.А. Тюколскі, 1972).

Як відомо, чорна діра в ЗТВ не випромінює, але квантові процеси в околі класичних (тобто неквантових) чорних дір приводять до виникнення чорнотільного випромінювання і, таким чином, до зменшення маси діри. Цей ефект уперше розрахував С. Хокінг (1972), і тому він названий його ім'ям [32]. Специфікою випромінювання Хокінга, що відрізняє його від інших квантово-польових процесів народження частинок у сильних полях є обумовленість наявністю горизонту подій. Процес Хокінга може бути астрофізично значущим за наявності чорних дір з масою менше $\sim 10^{14}$ г. Однак чорна діра з такою малою масою не може утворитися в результаті звичайного колапсу; наразі немає ані вказівок на існування таких об'єктів, ані міркувань щодо можливостей їх утворення.

Унікальним за повнотою розгляд математичних питань теорії чорних дір подано у двотомнику С. Чандрасекара [48] (формалізм Ньюмена – Пенроуза, теореми про чорні діри, детальне виведення розв'язку Керра та рівнянь хвильових полів у просторах Шварцшильда та Керра). Різноманітні питання фізики та математики чорних дір див. у [12, 38, 41, 49].

14.2.5. Розв'язки Шварцшильда, Керра та космологічні розв'язки Фрідмана можна вважати найбільш вживаними серед великої кількості точних розв'язків, відомих у ЗТВ. Як правило, точні розв'язки відбивають певні симетрії простору-часу, їх можна шукати за допомогою групового аналізу. Потужний імпульс до вивчення точних розв'язків було у свій час надано алгебраїчною класифікацією гравітаційних полів (А.З. Петров, 1950, див. [34], також дод. 7). На основі класифікації Петрова було з'ясовано асимптотичну поведінку полів випромінювання ізольованої системи (теорема Сакса про розщеплення, див. дод. 7.2, п. 7.2). Інваріантний аналіз простору-часу за алгебраїчною будовою тензорів Рімана й Вейля та за групами рухів подано в моно-

графії А.З. Петрова [34]. Важливу роль для отримання точних результатів у ЗТВ відіграв формалізм ізотропної тетради, запропонований Е. Ньюменом і Р. Пенроузом (1962) (див. напр., [48]). Досить повний перелік точних розв'язків ЗТВ можна знайти в монографії [22].

14.2.6. У різні періоди значну увагу привертала наближені методи розв'язання рівнянь поля, зокрема, у зв'язку з виведенням рівнянь руху масивних тіл і обчисленням ефектів гравітаційного випромінювання. У перших роботах з проблеми руху, започаткованих за участю самого Ейнштейна, масивні тіла вважалися точковими або розглядалися як сингулярності поля. Цей напрям відображено в монографіях [21, 40]. Із сучасної точки зору більш фізичною є постановка задачі про рух протяжних астрономічних тіл; цей напрям започатковано В.А. Фоком [46], див. також [9]. Бібліографію щодо робіт з проблеми руху у зв'язку з квадрупольною формулою Ейнштейна (11.19) можна знайти в книгах [5, 37].

14.3. Рекомендації щодо додаткового вивчення загальної теорії відносності

Існують багато видань, доступних читачеві, які можна рекомендувати для подальшого опанування релятивістської теорії тяжіння. На початку цього процесу можна орієнтуватися на компактний виклад основ ЗТВ у всевітньо відомому посібнику Л.Д. Ландау та Є.М. Ліфшица [24]. Оволодіти матеріалом допоможе збірник задач [23]. Більш детальний розгляд основних питань, необхідних для розуміння сучасної теорії гравітації, подано у високоякісних підручниках таких, як [10, 29]. Ґрунтовний аналіз теоретичних підвалин і апарату ЗТВ проведено в монографіях В.А. Фока [46] і Дж. Синга [42], які, незважаючи на давні роки видання, і досі не втратили свого наукового значення. Основи теорії та спостережувані ефекти релятивістської гравітації дискутувалися в багатьох посібниках, зокрема в [7, 9, 11, 16, 19, 20, 28, 30, 31, 39]. Зауважимо, що дана книга є розширеною та доповненою версією посібника [16]. У [50] подано короткий огляд теоретичних підвалин ЗТВ, її перевірок, що були виконані до 2005 р., та основних напрямів застосування в сучасній астрофізиці, астрометрії та космології. У цій книзі також наведено відомості про дослідників у галузі ЗТВ, що працювали в Україні або деяким чином були пов'язані з нею.

Подальший перелік зачіпає здебільшого спеціальні розділи. Питання релятивістської гідродинаміки розглядалися в [41, 43]. У [8] засто-

совано методи якісної теорії диференціальних рівнянь до вивчення розв'язків рівнянь Ейнштейна з речовиною. У [37] проведено цикл якісних і аналітичних досліджень рівнянь руху тіл у релятивістській динаміці. Тут також розроблено математичний апарат для аналізу локальних спостережень у викривленому просторі-часі. Проте практичному астрометристу, зацікавленому в конкретних ефектах ЗТВ, можливо, більше сподобається книга [27]. З іншими підходами до теорії релятивістських систем відліку, важливої для астрометричних застосувань ЗТВ, можна ознайомитися в [11, 19, 20, 31, 39, 50].

Значна кількість видань стосується проблем астрофізики та космології. Читачеві, зацікавленому фізикою компактних об'єктів, можна рекомендувати [17, 38, 49]. Із фізичними аспектами релятивістської космології можна ознайомитись у [18, 35, 36, 38]. Велику увагу привертають гравітаційні лінзи; перша у світі монографія з цього питання видана друком українськими вченими в [6]. Проблеми стандартної космологічної моделі та відомості про інфляційну теорію подано в [15, 25, 13]. Ретельний аналіз експериментальних засад ЗТВ та її зіставлення з альтернативними теоріями тяжіння висвітлено в [44]; цю книгу обов'язково треба простудіювати тим, хто намагається "підправити" ЗТВ. Огляд проблематики, пов'язаної з гравітаційним випромінюванням, викладено в [5], де подано огляд астрофізичних джерел випромінювання, і проблеми детектування (див. також [50]).

Література

**Якщо ви хочете дізнатись у фізиків-теоретиків
що-небудь про методи, якими вони користуються,
я раджу вам твердо дотримуватися такого принципу:
не слухайте, що вони говорять,
а краще вивчайте їх роботи.**

А. Ейнштейн

1. Альберт Ейнштейн и теория гравитации : Сб. статей / Редакция лит. по физике. – М.: Мир, 1979.
2. Эйнштейн А. Труды. – М.: Наука. – Т. 1. – 1967.
3. Эйнштейн А. Труды. – М.: Наука. – Т. 4. – 1967.
4. Берке У. Пространство-время, геометрия и космология. – М.: Мир, 1985.
5. Бичак И., Руденко В.М. Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. – М.: Изд-во МГУ, 1987.
6. Блюх П.В., Минаков А.А. Гравитационные линзы. – К.: Наук. думка, 1989.
7. Богородский А.Ф. Всемирное тяготение. – К.: Наук. думка, 1971.
8. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. – М.: Наука, 1980.
9. Брумерг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.
10. Вейнберг С. Гравитация и космология. – М.: Мир, 1975.
11. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. – М.: Энергоатомиздат, 1982.
12. Гальцов Д.В. Частицы и поля в окрестности черных дыр. – М.: Изд-во МГУ, 1986.
13. Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной. – М.: Изд-во ИЯИ РАН, 2007.
14. Дирак П.А.М. Общая теория относительности. – М.: Атомиздат, 1977.
15. Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. Космология ранней Вселенной. – М.: Изд-во МГУ, 1988.
16. Жданов В.І. Вступ до релятивістської теорії тяжіння. – К.: ІЗМН, 1996.
17. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. – М.: Наука, 1971.
18. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. – М.: Наука, 1975.

19. Зельманов А.Л., Агаков В.Г. Элементы общей теории относительности. – М.: Наука, 1989.
20. Иваницкая О.С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории тяготения. – Минск: Наука и техника, 1979.
21. Инфельд Л., Плебанский Е. Движение и релятивизм. – М.: ИЛ, 1962.
22. Крамер Д., Штефани Х., Мак-Каллум М., Херлит Е. Точные решения уравнений Эйнштейна. – М.: Энергоиздат, 1982.
23. Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюколски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации. – М.: Мир, 1979.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1988.
25. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М.: Наука, 1990.
26. Мак-Витти Г.К. Общая теория относительности и космология. – М.: ИЛ, 1961.
27. Маррей К.Э. Векторная астрометрия. – К.: Наук. думка, 1986.
28. Меллер К. Теория относительности. – М.: Атомиздат, 1975.
29. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. – Т. 1–3. – М.: Мир, 1977.
30. Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. – М.: Наука, 1969.
31. Мицкевич Н.В., Ефремов А.П., Нестеров А.И. Динамика полей в общей теории относительности. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
32. Новиков И.Д., Фролов В.П. Физика черных дыр. – М.: Наука, 1986.
33. Пенроуз Р. Структура пространства – времени. – М.: Мир, 1972.
34. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. – М.: Наука, 1966.
35. Пиблс П.¹. Физическая космология. – М.: Мир, 1975. – 310 с.
36. Пиблс Ф.Дж.Э. Структура Вселенной в больших масштабах. – М.: Мир, 1983.
37. Пирагас К.А., Жданов В.И., Александров А.Н. и др. Качественные и аналитические методы в релятивистской динамике. – М.: Энергоатомиздат, 1995.
38. Рис М., Руффини Р., Уилер Дж. Черные дыры, гравитационные волны и космология. – М.: Мир, 1977.

¹ Ініціали автора подано відповідно до оригіналу.

39. Родичев В.И. Теория тяготения в ортогональном репере. – М.: Наука, 1974.
40. Рябушко А.П. Движение тел в общей теории относительности. – Минск: Вышейш. шк., 1979.
41. Сибгатуллин Н.Р. Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. – М.: Наука, 1984.
42. Синг Дж.Л. Общая теория относительности. – М.: ИЛ, 1963.
43. Станюкович К.П., Мельников В.Н. Гидродинамика, поля и константы. – М.: Энергоатомиздат, 1983.
44. Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
45. Фаддеев Л.Д. Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна // УФН. – 1982. – Т. 136. – Вып. 3. – С.435–457.
46. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: ГИТТЛ, 1955.
47. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. – М.: Мир, 1977.
48. Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр. – Ч. 1–2. – М.: Мир, 1986.
49. Шапиро С., Тюколски С. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. – Т. 1–2. – М.: Мир, 1985.
50. Загальна теорія відносності: випробування часом / Я.С. Яцків, О.М. Александров, І.Б. Вавилова, В.І. Жданов, Ю.М. Кудря, С.Л. Парновський, Е.О. Федорова, С.В. Хміль. – К., ГАО НАН України, 2005

ДОДАТКИ

Додаток 1

ФАКТОРИЗАЦІЯ МАТРИЦІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОРЕНЦА

Нагадаємо, що матриці власного перетворення Лоренца визначено умовами (див. підрозд. 2.1, ч. 1)

$$\eta_{\mu\nu} L^\mu_\alpha L^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \quad (1.1)$$

$$\det\|\mathbf{L}\| = 1, \quad L^0_0 \geq 1. \quad (1.2)$$

Кожна така матриця індукує зв'язок координат $\{x\} \rightarrow \{x'\}$:

$$x'^\alpha = L^\alpha_\beta x^\beta, \quad (1.3)$$

що відповідають двом інерціальним СВ.

Співвідношення (1.1) формально виглядає як закон перетворення компонент коваріантного тензора Мінковського. Аналогічно, для контраваріантного тензора Мінковського (компоненти якого збігаються з компонентами коваріантного)

$$\eta^{\mu\nu} = L^\mu_\alpha L^\nu_\beta \eta^{\alpha\beta}. \quad (1.1, a)$$

Для матриці оберненого перетворення

$$\left(L^{-1}\right)^\mu_\alpha = \eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} L^\beta_\nu. \quad (1.4)$$

Зокрема,

$$L^0_0 = \left(L^{-1}\right)^0_0, \quad L^0_i = -\left(L^{-1}\right)^0_i. \quad (1.5)$$

Із (1.1) випливає

$$\left(L^0_0\right)^2 - \left(L^1_0\right)^2 - \left(L^2_0\right)^2 - \left(L^3_0\right)^2 = 1. \quad (1.6)$$

Наслідком (1.5), (1.6) є таке твердження.

Лема. $L^0_0 \equiv \left(L^{-1}\right)^0_0 = 1$ тоді й тільки тоді, коли $L^0_i \equiv -\left(L^{-1}\right)^0_i = 0$ для всіх $i = 1, 2, 3$. У цьому разі матриця власного перетворення Лоренца L описує тривимірне обертання.

Нехай $L^0_0 > 1$. Тоді компоненти L^0_i ($i=1,2,3$) визначають деякий тривимірний напрямок, і можна зробити тривимірне обертання осей так, щоб у нових координатах $\{\tilde{x}\}$ було $\tilde{L}^0_1 \neq 0, \tilde{L}^0_s = 0, s=2,3$, де $\tilde{L}^\alpha_\beta = L^\alpha_\gamma Q^\gamma_\beta$, Q^γ_β – матриця тривимірного обертання. Це можна зробити таким чином. Виберемо три просторові взаємно ортогональні одиничні вектори $e^i_{(k)}$ ($k=1,2,3$), $e^0_{(k)} = 0$ такі, що $e^i_{(1)} \sim L^0_i, e^i_{(s)} L^0_i = 0, s=2,3$. У нових змінних $x^0 = \tilde{x}^0, x^i = e^i_{(k)} \tilde{x}^k$, тоді $\tilde{L}^\alpha_\beta = L^\alpha_\gamma Q^\gamma_\beta$, де $Q^0_0 = 1, Q^0_i = Q^i_0 = 0, Q^i_k = e^i_{(k)}$. Зокрема, для $s=2,3$ маємо $\tilde{L}^0_s = L^0_i e^i_{(s)} = 0$. Матриця $\tilde{L}^\alpha_\beta = L^\alpha_\gamma Q^\gamma_\beta$ також є матрицею власного перетворення Лоренца $\{\tilde{x}\} \rightarrow \{x'\}$, причому, оскільки $\tilde{L}^0_0 = L^0_0 > 1$ у силу леми 1 маємо $\tilde{L}^0_1 \neq 0$.

Аналогічно розглянемо перетворення $\tilde{L}'^\alpha_\beta = Q'^\alpha_\gamma \tilde{L}'^\gamma_\beta$ таким чином, щоб $\tilde{L}'^s_0 = 0, \tilde{L}'^1_0 \neq 0$, причому залишається $\tilde{L}'^0_1 \neq 0, \tilde{L}'^0_s = 0, s=2,3$. Для цього покладемо $Q'^0_0 = 1, Q'^0_i = Q'^i_0 = 0, Q'^i_\beta = e'^{(i)}_\beta$, де для трьох взаємно ортогональних одиничних векторів $e'^{(i)}_\beta$ ($i=1,2,3$), $e'^{(i)}_0 = 0$, причому $e'^{(i)}_i \sim \tilde{L}^i_0, e'^{(s)}_i \tilde{L}^i_0 = 0, s=2,3$. Тому $\tilde{L}'^s_0 = Q'^s_i \tilde{L}^i_0 = e'^{(s)}_i \tilde{L}^i_0 = 0$. Крім того, використовуючи властивості матриці \tilde{L}'^α_β , маємо $\tilde{L}'^0_s = Q'^0_0 \tilde{L}^0_s = 0$.

Очевидно, $\tilde{L}'^0_1 \neq 0, \tilde{L}'^1_0 \neq 0$, у іншому випадку в силу леми матимемо $\tilde{L}'^0_0 = 0$, що суперечить вихідному припущенню $L^0_0 > 1$. Тоді зі співвідношення (1.1) $\eta_{\mu\nu} \tilde{L}'^\mu_0 \tilde{L}'^\nu_s = -\tilde{L}'^1_0 \tilde{L}'^1_s = 0$, звідки $\tilde{L}'^1_s = 0$. Аналогічно маємо з (1.1, а) $\tilde{L}'^s_1 = 0$. Таким чином, матриця \tilde{L}'^α_β набуває блочної структури:

$$\|\tilde{L}'\| = \begin{pmatrix} L(2 \times 2) & 0 \\ 0 & O(2 \times 2) \end{pmatrix},$$

де $L(2 \times 2)$ – двовимірна матриця перетворення Лоренца, що відповідає відносному руху систем відліку вздовж осі абсцис OX_1 , $O(2 \times 2)$ – матриця просторового обертання у площині, перпендикулярній осі абсцис; її можна діагоналізувати вибором векторів $e'_\alpha^{(s)}, e_{(s)}^\alpha$, $s = 2, 3$, не впливаючи на їх ортогональність відповідно до $e_\alpha^{(1)}, e_{(1)}^\alpha$, яка була використана раніше. У цьому разі \tilde{L}'^α_β представляє одновимірне перетворення Лоренца (див. підрозд. 2.1):

$$\|\tilde{L}'\| = \begin{pmatrix} L(2 \times 2) & 0 \\ 0 & I(2 \times 2) \end{pmatrix},$$

де $I(2 \times 2)$ – одинична 2×2 матриця. Оскільки $\|\tilde{L}'\| = \|O'\| \cdot \|L\| \cdot \|O\|$, звідси

$$\|L\| = \|O'\|^{-1} \cdot \|\tilde{L}'\| \cdot \|O\|^{-1}. \quad (1.7)$$

Таким чином, **матриця перетворення з власної ГЛ може бути подана як правий і лівий добутки (1.7) двох матриць тривимірного обертання на матрицю одновимірного перетворення Лоренца.**

Додаток 2

ВЛАСТИВОСТІ УДАРНИХ АДІАБАТ

2.1. Рівняння стану нормальної речовини

Строге доведення зростання тиску в ударному переході та релятивістського аналогу теореми Цемплена базується на певних математичних припущеннях, що реалізуються для так званих нормальних середовищ [1, 2]. Релятивістський розгляд (див., напр., [3]) подібний нерелятивістській гідродинаміці [1, 2]. Нижче ми окреслимо основні моменти релятивістського доведення за аналогією з [1, 2] у скороченому варіанті, не вдаючись до детального розгляду умов, які характеризують нормальні середовища.

Нехай S – питома ентропія на один баріон, n^* – інваріантна густина баріонного числа, $X = (\varepsilon + p)/(n^*)^2$ – узагальнений питомий об'єм. Вважатимемо, що функції, які задають рівняння стану $p = p(X, S)$, $\varepsilon = \varepsilon(X, S)$, а також $S = S(X, p)$, є достатньо гладкими, причому адіабати Пуассона $S(X, p) = \text{const}$ в області змінних $X > 0$ і $p > 0$ мають такі властивості:

а) через кожну точку цієї області проходить одна й тільки одна адіабата Пуассона, причому відповідна функція $p = p(X, S)$, $S \equiv \text{const}$ є монотонно спадаючою та опуклою вниз, що відповідає умові опуклості

рівняння стану (6.22) (розд. 6, ч. 1): $\left(\frac{\partial X}{\partial p^2}\right)_s > 0$;

б) при $k < 0$, $b > 0$ на прямій $p = kX + b$ ентропія має одну й тільки одну стаціонарну точку X_m , де вона досягає максимуму, причому

в цій точці зазначена пряма дотикається до адиабати Пуассона, $\frac{df}{dX} > 0$, $X < X_m$, $\frac{df}{dX} < 0$, $X > X_m$, де $f(X) = S(X, kX + b)$ (рис. 2.1).

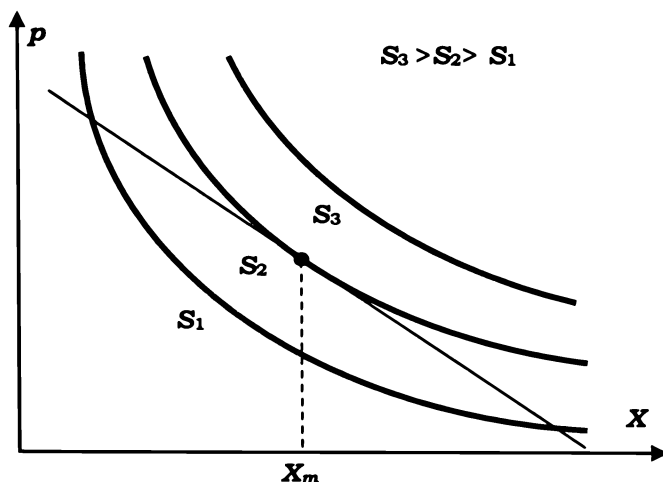


Рис. 2.1. Типова поведінка адиабат Пуассона $S = \text{const}$ (виділені лінії) при нормальному рівнянні стану. Пряма дотикається до адиабати $S(p, x) = S_2$ лише в одній точці

Зазначені властивості мають місце для широкого класу середовищ. Вони не є цілком незалежними: властивість (б) можна подати як наслідок від (а) за деяких загальних обмежень на рівняння стану [2].

2.2. Ентропія і тиск уздовж ударної адиабати

Позначимо, для фіксованої точки X_0, p_0 , $n_0 = n^*(X_0, p_0)$:

$$H(X, p) = (n^*)^2 X^2 - n_0^2 X_0^2 - (X + X_0)(p - p_0). \quad (2.1)$$

З основного термодинамічного співвідношення

$$TdS = pd\left(\frac{1}{n^*}\right) + d\left(\frac{\varepsilon}{n^*}\right) = (p + \varepsilon)d\left(\frac{1}{n^*}\right) + \frac{d\varepsilon}{n^*} \quad (2.2)$$

маємо

$$d(n^* X) = \frac{d(p + \varepsilon)}{n^*} + (p + \varepsilon) d\left(\frac{1}{n^*}\right) = \frac{dp}{n^*} + TdS, \quad (2.3)$$

звідси

$$dH = 2n^* XTdS + (X - X_0)dp - (p - p_0)dX. \quad (2.4)$$

Нехай $X = X_H(p)$ є розв'язком рівняння $H(p, X) = 0$, тобто це ударна адіабата із центром у точці (X_0, p_0) . Припускаємо, що функція $X = X_H(p)$ добре означена й диференційовна. Розглянемо питому ентропію, як функцію тиску вздовж ударної адіабати ($dH = 0$). У силу (2.4) маємо

$$2n^* XT \left(\frac{dS}{dp} \right)_H = (p - p_0) \frac{dX_H}{dp} - (X - X_0), \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dp} \left(2n^* XT \frac{dS}{dp} \right) \Big|_H = (p - p_0) \frac{d^2 X_H}{dp^2}, \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2}{dp^2} \left(2n^* XT \frac{dS}{dp} \right) \Big|_H = (p - p_0) \frac{d^3 X_H}{dp^3} + \frac{d^2 X_H}{dp^2}. \quad (2.7)$$

Послідовно обчислюючи похідні в точці $p = p_0$, з (2.5) – (2.7) маємо

$$\left(\frac{dS}{dp} \right)_{H, p=p_0} = 0, \quad \left(\frac{d^2 S}{dp^2} \right)_{H, p=p_0} = 0, \quad \left(\frac{d^3 S}{dp^3} \right)_{H, p=p_0} = \frac{1}{2n^* XT} \left(\frac{d^2 X_H}{dp^2} \right)_{p_0}.$$

Звідси, розкладаючи питому ентропію в околі цієї точки вздовж $X = X_H(p)$, маємо

$$S(X_H(p), p) - S(X_0, p_0) = \frac{(p - p_0)^3}{12n^* XT} \left(\frac{d^2 X}{dp^2} \right)_{H, p=p_0}$$

з точністю до вищих порядків розкладу. Тепер перейдемо від $\left(\frac{d^2 X}{dp^2} \right)_H$ до $\left(\frac{\partial^2 X}{\partial p^2} \right)_S$, де $X = X(p, S)$ задає рівняння стану $S = S(X, p)$ в інших термодинамічних змінних. Маємо

$$\left(\frac{dX}{dp} \right)_H = \left(\frac{\partial X}{\partial p} \right) + \left(\frac{\partial X}{\partial S} \right) \left(\frac{dS}{dp} \right)_H,$$

$$\left(\frac{d^2X}{dp^2}\right)_H = \frac{\partial^2 X}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial p \partial S} \left(\frac{dS}{dp}\right)_H + \frac{\partial^2 X}{\partial S^2} \left(\frac{dS}{dp}\right)_H^2 + \frac{\partial X}{\partial S} \left(\frac{d^2S}{dp^2}\right).$$

Беручи до уваги, що при $p = p_0$ перша й друга похідні від питомої ентропії дорівнюють нулю, маємо

$$\left(\frac{d^2X}{dp^2}\right)_H = \frac{\partial^2 X}{\partial p^2} \Big|_{S=S_0, p=p_0}$$

Остаточно,

$$S(X_H(p), p) - S(X_0, p_0) = \frac{(p - p_0)^3}{12n * XT} \frac{\partial^2 X}{\partial p^2} \Big|_{S=S_0, p=p_0} + O((p - p_0)^4).$$

Таким чином, в околі $p = p_0$ ($p_0 < p_1$) уздовж ударної адіабати питомої ентропія зростає:

$$\left(\frac{dS}{dp}\right)_H > 0. \quad (2.7)$$

Покажемо, що ця нерівність виконується для всієї ділянки ударної адіабати між (p_0, p_1) . Припустимо від супротивного, що в деякій точці $p = p_2$ похідна $(dS/dp)_H$ змінює знак:

$$\left(\frac{dS}{dp}\right)_H = 0,$$

тоді з (2.4) маємо в цій точці

$$\left(\frac{dX}{dp}\right)_H = \frac{X_2 - X_0}{p_2 - p_0}, \quad X_2 = X_H(p_2).$$

Це означає, що пряма $X = \frac{X_2 - X_0}{p_2 - p_0}(p - p_0) + X_0$ є дотичною в точці $p = p_2$ до ударної адіабати. Розглянемо тепер функцію H уздовж цієї прямої:

$$h(p) = H\left(\frac{X_2 - X_0}{p_2 - p_0}(p - p_0) + X_0, p\right).$$

Оскільки $h(p_2) = h(p_0) = 0$, за теоремою Ролля

$$\exists p_3 : \left. \frac{dh}{dp} \right|_{p=p_3} = 0, \quad p_3 \in (p_1, p_2).$$

Уздовж цієї самої прямої $(X - X_0)dp = (p - p_0)dX$, тобто $dH = 2nXTdS$. Звідси в точці $p = p_3$ уздовж прямої $dH = 0 \rightarrow dS = 0$; питома ентропія S має ще одну стаціонарну точку (окрім $p = p_2$) уздовж прямої, яка з'єднує точки ударної адіабати при $p = p_2$ і $p = p_0$. Це суперечить умові (б), тобто припущення про невиконання (2.7) неправомірне.

Таким чином, у нормальному середовищі питома ентропія S зростає уздовж ударної адіабати зі зростанням тиску p . Із формул (6.20) розд. 6, ч. 1 видно, що $p_1 - p_0$ і $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ мають однаковий знак. Звідси маємо властивість (а) з розд. 6, ч. 1: **допустимі ударні хвилі завжди є хвилями стиснення** (рис. 2.2).

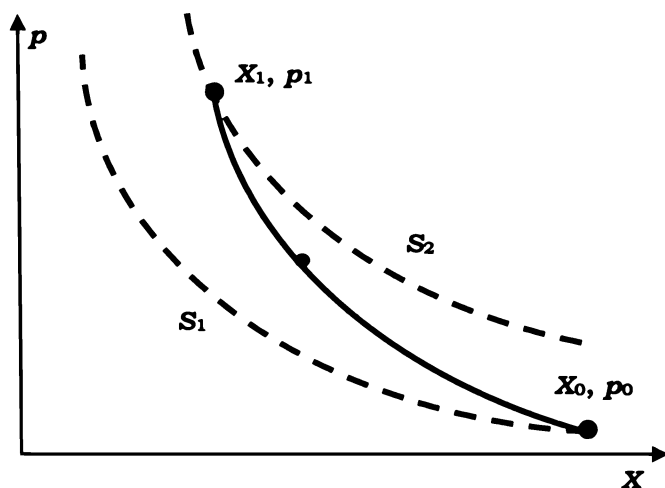


Рис. 2.2. Ударна адіабата (суцільна лінія) у переході "0"→"1" з'єднує точку (X_0, p_0) з (X_1, p_1) , які лежать на адіабатах Пуассона (пунктир), $S_2 > S_1$

Додатково з'ясуємо, як змінюються в ударному переході величини n^* і X . Із рівняння ударного переходу у формулі (6.18) ч. 1 маємо

$$\frac{(n_1^*)^2}{(n_0^*)^2} - 1 = \frac{(\varepsilon_1 + p_1)(\varepsilon_1 + p_0)}{(\varepsilon_0 + p_0)(\varepsilon_0 + p_1)} - 1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(\varepsilon_1 + \varepsilon_0 + p_1 + p_0)}{(\varepsilon_0 + p_0)(\varepsilon_0 + p_1)},$$

при $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$, маємо $n_1^* > n_0^*$. Рівняння ударного переходу "0" → "1" (рівняння ударної адіабати із центром у точці "0") можна переписати через узагальнений питомий об'єм:

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{\varepsilon_0 + p_1}{\varepsilon_1 + p_0}. \quad (2.8, \text{ а})$$

Звідси

$$\frac{X_1}{X_0} - 1 = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - p_1 + p_0}{\varepsilon_1 + p_0}. \quad (2.8, \text{ б})$$

Із формул (6.19, а, б) ч. 1 для нормальної компоненти 4-швидкості видно, що знак $\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - p_1 + p_0$ збігається зі знаком $p_1 - p_0$, тому $X_1 < X_0$. Цим доведено, що в допустимому ударному переході власна густина кількості баріонів зростає, а узагальнений питомий об'єм спадає.

Для подальшого розгляду знадобляться формули, які пов'язують нормальні компоненти 4-швидкості $V_{(1)} = U_{(1)}^\alpha N_\alpha$, $V_{(2)} = U_{(2)}^\alpha N_\alpha$ (див. розд. 6, ч. 1) з різницею тисків із $X_1 - X_0$. Із формул (6.19) ч. 1, застосовуючи (2.8, б), маємо

$$\frac{1 - v_{(0)}^2 / c^2}{(n_0^*)^2 (v_{(0)} / c)^2} = V_{(0)}^{-2} (n_0^*)^{-2} = \frac{X_0 - X_1}{p_1 - p_0}. \quad (2.9)$$

2.3. Теорема Цемплена

Розглянемо функцію $s(p) = S[k(p - p_0) + X_0, p]$, де $k = \frac{X_1 - X_0}{p_1 - p_0}$, причому внаслідок отриманих нерівностей $k < 0$. За властивістю (б) у точці $p = p_0$ маємо $(ds/dp)_{p_0} > 0$ або

$$\frac{dS}{dp} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_X - \left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)_p \frac{X_0 - X_1}{p_1 - p_0} \right]_{X_0, p_0} > 0. \quad (2.10)$$

Далі припустимо, що питома ентропія зростає зі збільшенням X при сталому тиску: $\left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)_p > 0$. Це узагальнює відому нерелятивістську властивість тіл, які розширюються при нагріванні [4]. Із нерівності (2.10) тоді

$$\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_X}{\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_p} > \frac{X_0 - X_1}{p_1 - p_0}, \quad (2.11)$$

причому обидві частини нерівності додатні. Ліва частина нерівності виражається через похідну $(dX/dp)_S$ уздовж адіабати Пуассона $S = \text{const}$:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_X + \left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_p \left(\frac{dX}{dp}\right)_S = 0,$$

звідси та з (2.9), (2.11)

$$-\frac{1}{(n^*)^2} \left(\frac{dp}{dX}\right)_S < \frac{(v_{(0)}/c)^2}{1 - v_{(0)}^2/c^2}. \quad (2.12)$$

Пов'яжемо ліву частину нерівності зі швидкістю звуку

$$c_s = c \sqrt{\left(\frac{dp}{d\varepsilon}\right)_S}.$$

Із рівняння (2.2) на адіабаті Пуассона $dS = 0$ маємо

$$\frac{p + \varepsilon}{(n^*)^2} dn^* = \frac{d\varepsilon}{n^*}, \text{ тобто } \left(\frac{dn^*}{d\varepsilon}\right)_S = \frac{n^*}{p + \varepsilon},$$

звідси

$$\begin{aligned} \left(\frac{dX}{d\varepsilon}\right)_S &= \frac{1}{(n^*)^2} \left(\frac{d(p + \varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_S - \frac{2}{(n^*)^3} (p + \varepsilon) \left(\frac{dn^*}{d\varepsilon}\right)_S = \\ &= \frac{1}{(n^*)^2} \left[\left(\frac{dp}{d\varepsilon}\right)_S + 1 \right] - \frac{2}{(n^*)^3} (p + \varepsilon) \frac{n^*}{p + \varepsilon} = \frac{c_s^2/c^2 - 1}{(n^*)^2}. \end{aligned}$$

У точці $p = p_0$:

$$-\frac{1}{(n^*)^2} \left(\frac{dp}{dX}\right)_S = \frac{c_{s(0)}^2/c^2}{1 - c_{s(0)}^2/c^2}.$$

Порівняння з (2.12) дає

$$c_{s(0)}^2 < v_{(0)}^2, \quad (2.13)$$

тобто швидкість (за абсолютною величиною) ударної хвилі відносно середовища перед фронтом більша за швидкість звуку в цьому середовищі.

Повторюючи всі міркування в точці "1", аналогічно дістанемо

$$c_{s(1)}^2 > v_{(1)}^2, \quad (2.14)$$

тобто швидкість (за абсолютною величиною) ударної хвилі відносно середовища за фронтом менша від швидкості звуку в цьому середовищі. Нерівності (2.13), (2.14) відомі як умови еволюційності ударних хвиль; їх можна отримати з більш загальних міркувань [4].

Умова опуклості рівняння стану може порушуватися в так званих аномальних середовищах, наприклад, в околі фазових переходів [4]. У цьому разі умова зростання ентропії виявляється недостатньою, тому необхідно вводити більш жорсткі критерії існування ударних хвиль. Аномальні середовища добре відомі в нерелятивістській гідродинаміці [1]; їх уперше розглянув Г. Бете. Виявляється, що в аномальних середовищах стають можливими ударні хвилі розрідження й прості хвилі стиснення, але умови (2.13), (2.14) залишаються в послабленому варіанті (тут стає можливий знак рівності). Розгляд цих питань у релятивістській області див. у [5, 6].

Література

1. *Рождественский Б.А., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978.
2. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. – М.: Наука, 1981.– 368 С.
3. *Lichnerowicz A.* Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics. – N.Y.: Benjamin, Inc., 1967.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
5. *Bugaev K.A., Gorenstein M.I., Zhdanov V.I.* Relativistic shocks in the systems containing domains with anomalous equations of state and quark baryonic matter hadronisation // *Zeit. Phys. C.* – 1988. – Vol. 39. – P. 365–370.
6. *Bugaev K.A., Gorenstein M.I., Kampfer B., Zhdanov V.I.* Generalized shock adiabatics and relativistic nuclear collisions // *Phys. Rev. D.* – 1989. – Vol. 40. – P. 2903–2913.

Додаток 3

УМОВИ ІНТЕГРОВНОСТІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Розглянемо систему нелінійних рівнянь у частинних похідних відносно функцій $A^p(x^0, \dots, x^{n-1})$, $p = 1, \dots, N$:

$$\frac{\partial A^p}{\partial x^\mu} = F_\mu^p(A^1, \dots, A^N, x^0, \dots, x^{n-1}), \quad \mu = 0, \dots, n-1; \quad (3.1)$$

з умовою

$$A^p(0) = A_0^p. \quad (3.1, a)$$

Припустимо, що F_μ^p є гладкими функціями від своїх аргументів. Розв'язок шукаємо також у класі гладких функцій в околі точки $x^\mu = 0$. Продиференціюємо (3.1) за ∂x^ν :

$$\frac{\partial^2 A^p}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial F_\mu^p}{\partial x^\nu} + \sum_{q=1}^N \frac{\partial F_\mu^p}{\partial A^q} \frac{\partial A^q}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F_\mu^p}{\partial x^\nu} + \sum_{q=1}^N \frac{\partial F_\mu^p}{\partial A^q} F_\nu^q,$$

де знов застосовано (3.1). За умови неперервності других похідних звідси випливає необхідна умова

$$\frac{\partial F_\mu^p}{\partial x^\nu} + \sum_{q=1}^N \frac{\partial F_\mu^p}{\partial A^q} F_\nu^q = \frac{\partial F_\nu^p}{\partial x^\mu} + \sum_{q=1}^N \frac{\partial F_\nu^p}{\partial A^q} F_\mu^q, \quad (3.2)$$

причому ця рівність має виконуватися хоча б на розв'язках системи (3.1). У загальному випадку це дає додаткові рівняння для функцій A^p , що мають виконуватися разом з (3.1). Проте можлива ситуація, коли ця рівність виконується тотожно для будь-яких A^p і x^α . Покажемо, що тоді співвідношення (3.2) є достатньою умовою існування розв'язку системи (3.1) з початковою умовою (3.1, a) в околі точки $x^\mu = 0$. Нехай співвідношення (3.2) має місце в околі початкових умов (3.1, a) і точки $x^\mu = 0$, x^μ – деяка точка із цього околу.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь¹:

$$\frac{\partial Y^P}{\partial t} = x^\mu F_\mu^P(Y, tx), \quad (3.3)$$

у яку x^μ входить як параметр, $Y = Y(t, x)$. Накладаємо початкову умову

$$Y^P(0, x) = A_0^P. \quad (3.3, a)$$

За відомою теоремою² для звичайних диференціальних рівнянь система (3.3) має розв'язок в околі точки $t = 0$. Проте для наших цілей необхідно довести існування розв'язку не лише в околі цієї точки, але й за всіх $t \in [0, 1]$. Покажемо, що розв'язок існує для $\forall t \in [0, 1]$, принаймні, якщо величина

$$\varepsilon = \sum_{\mu=0}^{n-1} |x^\mu|$$

є досить малою. У цьому разі в околі точки $x^\mu = 0$ і в деякій обмеженій області Ω значень Y , яка містить точку $Y^P = A_0^P$, маємо умову Ліпшица:

$$\sum_{p=1}^N |F_\mu^P(Y, tx) - F_\mu^P(Y', tx)| < C \sum_{p=1}^N |Y^P - Y'^P|,$$

де константа $C < \infty$ може бути оцінена через частинні похідні $\partial F^\mu / \partial Y^P$, тоді

$$\sum_{p=1}^N |x^\mu (F_\mu^P(Y, tx) - F_\mu^P(Y', tx))| < \varepsilon C \sum_{p=1}^N |Y^P - Y'^P|. \quad (3.4)$$

Системі (3.3) відповідають інтегральні рівняння

$$Y^P = R^P(Y), \quad (3.5)$$

де оператором R є

$$R^P(Y)(t) = A_0^P + \int_0^t d\zeta x^\mu F_\mu^P(Y(\zeta), \zeta x).$$

У банаховому просторі неперервних на $[0, 1]$ функцій з нормою

¹ У дод. 3 за наявності одного верхнього та одного нижнього грецьких індексів (наприклад, μ), розуміємо суму від 0 до $n-1$.

² Див., наприклад: Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970.

$$\|Y\| = \sup \left\{ \sum_{p=1}^N |Y^p(t)|, t \in [0,1] \right\} \text{ маємо } \|R(Y) - R(Y')\| \leq \varepsilon C \|Y - Y'\|$$

принаймні для вищезгаданої області $\Omega \ni A_0$.

За досить малих ε маємо $\varepsilon C < 1$, що дозволяє використати міркування методу стискувальних відображень, аналогічно теоремі існування розв'язку для звичайних диференціальних рівнянь. Умови застосування методу тут виконані для всіх $t \in [0,1]$, звідки випливає існування неперервного розв'язку для цього інтервалу. Звідси також випливає, що розв'язок Y системи (3.3) має неперервні частинні похідні за сукупністю змінних t і x^μ .

Беручи до уваги існування та властивості $Y(t, x)$, розглянемо функції

$$g_\mu^p(t, x) = \frac{\partial Y^p}{\partial x^\mu} - t F_\mu^p(Y, tx), \quad Y = Y(t, x)$$

і покажемо, що $g_\mu^p \equiv 0$, якщо виконується (3.2).

Диференціюючи початкову умову за x^μ при $t = 0$, маємо $\partial Y^p / \partial x^\mu = 0$, звідси

$$g_\mu^p(0, x) = \frac{\partial Y^p}{\partial x^\mu}(0, x) = 0, \quad \forall x. \quad (3.6)$$

Обчислимо похідну

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (g_\mu^p) &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial Y^p}{\partial t} - F_\mu^p - t \left(\frac{\partial F_\mu^p}{\partial x^\alpha} x^\alpha + \sum_{q=1}^N \frac{\partial F_\mu^p}{\partial Y^q} \frac{\partial Y^q}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (x^\alpha F_\alpha^p) - F_\mu^p - t x^\alpha \left[\frac{\partial F_\mu^p}{\partial x^\alpha} + \sum_{q=1}^N \frac{\partial F_\mu^p}{\partial Y^q} F_\alpha^q \right]. \end{aligned}$$

Застосуємо умову (3.2), за допомогою якої замість виразу у квадратних дужках дістанемо аналогічний вираз із переставленими індексами μ і α . Тоді, розкривши похідну в першому доданку, матимемо співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (g_\mu^p) &= x^\alpha \sum_{q=1}^N \frac{\partial F_\alpha^p}{\partial Y^q} \frac{\partial Y^q}{\partial x^\mu} + t x^\alpha \frac{\partial F_\alpha^p}{\partial x^\mu} - t x^\alpha \left[\frac{\partial F_\alpha^p}{\partial x^\mu} + \sum_{q=1}^N \frac{\partial F_\alpha^p}{\partial Y^q} F_\mu^q \right] = \\ &= x^\alpha \sum_{q=1}^N \frac{\partial F_\alpha^p}{\partial Y^q} \left(\frac{\partial Y^q}{\partial x^\mu} - t F_\mu^q \right) \end{aligned}$$

або

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_\mu^p) = x^\alpha \sum_{q=1}^N \frac{\partial F_\alpha^p}{\partial Y^q} g_\mu^q, \quad (3.7)$$

яке можна розглядати як лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь з неперервними коефіцієнтами відносно g_μ^p . З урахуванням рівняння (3.6) єдиним розв'язком (3.7) є $g_\mu^p \equiv 0$ для всіх x^μ з околу нуля:

$$\frac{\partial Y^p}{\partial x^\mu} - t F_\mu^p(Y, tx) \equiv 0.$$

Поклавши $t = 1$, бачимо, що $A^p(x) = Y^p(1, x)$ дає розв'язок вихідної системи (3.1).

Додаток 4

ТЕТРАДНИЙ ФОРМАЛІЗМ

Нехай у всьому чотиривимірному багатовиді задано четвірку (те траду) полів лінійно незалежних векторів $e_{(a)}^\alpha$, $a = 0, 1, 2, 3$, причому

$$e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta g_{\alpha\beta} = \eta_{(a)(b)}, \quad (4.1)$$

де $\eta_{(a)(b)}$ деяка стала¹ симетрична матриця з сигнатурою -2 ; обернену до цієї матриці позначимо $\eta^{(a)(b)}$; тетрадні індекси будемо брати в дужки, щоб відрізнити їх від тензорних індексів. Будь-яке векторне поле можна розкласти за векторами тетради. Часто розглядають ортонормовану тетраду, де один вектор часоподібний, а решта – просторовоподібні; у цьому разі $\eta_{(a)(b)}$ – тензор Мінковського. У тетраді Ньюмена – Пенроуза всі вектори ізотропні, при цьому два з них є дійсними, а два – комплексними.

¹ У деяких роботах розглядають також більш загальний варіант зі змінною правою частиною (4.1).

Завдяки незалежності векторів $e_{(a)}^\alpha$ можна ввести вектори $e_\alpha^{(a)}$ взаємної тетради такі, що

$$e_\alpha^{(a)} e_{(b)}^\alpha = \delta_{(b)}^{(a)}. \quad (4.2)$$

Звідси $e_\alpha^{(a)} \left(e_{(b)}^\alpha e_\beta^{(b)} \right) = e_\beta^{(a)}$, тобто (знову завдяки незалежності $e_{(a)}^\alpha$)

$$e_{(b)}^\alpha e_\beta^{(b)} = \delta_\beta^\alpha \quad \text{або} \quad e_{(b)\alpha} e_\beta^{(b)} = g_{\alpha\beta}. \quad (4.3)$$

Це дає вираз метрики через вектори тетради. Згорнемо (4.3) з $e_{(a)}^\alpha$:

$$e_{(a)}^\alpha e_{(b)\alpha} e_\beta^{(b)} = e_{(a)\alpha} = e_{(a)}^\alpha g_{\alpha\beta},$$

звідки з урахуванням (4.1) $\eta_{(a)(b)} e_\beta^{(b)} = e_{(a)\alpha}$ або $e_\beta^{(b)} = e_{(a)\alpha} \eta^{(a)(b)}$, тобто тетрадні індекси можна піднімати та опускати за допомогою $\eta^{(a)(b)}, \eta_{(a)(b)}$. Будь-яке тензорне співвідношення можна переписати, розкладаючи його за допомогою проєкцій на вектори тетради. Наприклад, $A_\alpha = K^{(a)} e_{(a)\alpha}$, $K^{(a)} = A_\beta e^{(a)\beta}$; $A_{\alpha\beta} = K^{(a)(b)} e_{(a)\alpha} e_{(b)\beta}$, $K^{(a)(b)} = A_{\mu\nu} e^{(a)\mu} e^{(b)\nu}$ тощо. За допомогою векторів тетради можна переписати всі геометричні співвідношення, рівняння Ейнштейна тощо.

Розглянемо, наприклад, як можна ввести коваріантну похідну конструктивно, зменшуючи при цьому розгляд координатних перетворень, на відміну від підрозд. 5.3, ч. 2. Будемо виходити знову з Означення 5.3: коваріантною похідною від тензора $T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ у точці m називаємо новий тензор, компоненти якого в локально-геодезичній у m системі збігаються в цій точці з компонентами звичайної похідної:

$$\nabla_\alpha T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \Big|_m \equiv \partial_\alpha T_{v_1 \dots v_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} \Big|_m.$$

Звідси безпосередньо випливає правило диференціювання лінійної комбінації та правило Лейбніца диференціювання добутку, а також

$$\nabla_\alpha \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \quad (\text{похідна від скалярної функції}); \quad \nabla_\alpha g_{\mu\nu} \equiv 0, \quad \nabla_\alpha \delta_\nu^\mu \equiv 0,$$

$\nabla_\alpha g^{\mu\nu} \equiv 0$. Користуючись цими властивостями, розглянемо коваріантну похідну від коваріантного вектора, розкладаючи його за векторами тетради:

$$\begin{aligned}
\nabla_\gamma A_\alpha &= \nabla_\gamma \left[e_{(a)\alpha} A_\beta e^{(a)\beta} \right] = \left(\nabla_\gamma e_{(a)\alpha} \right) A_\beta e^{(a)\beta} + e_{(a)\alpha} \partial_\gamma \left(A_\beta e^{(a)\beta} \right) = \\
&= \left(\nabla_\gamma e_{(a)\alpha} \right) A_\beta e^{(a)\beta} + e_{(a)\alpha} \left(\partial_\gamma A_\beta \right) e^{(a)\beta} + e_{(a)\alpha} A_\beta \left(\partial_\gamma e^{(a)\beta} \right) = \\
&= \partial_\gamma A_\alpha - F_{\gamma\alpha}^\sigma A_\sigma,
\end{aligned}$$

де також враховано (4.2) і позначено величини

$$F_{\gamma\alpha}^\sigma = - \left(\nabla_\gamma e_{(a)\alpha} \right) e^{(a)\sigma} - e_{(a)\alpha} \left(\partial_\gamma e^{(a)\sigma} \right) = \left[\partial_\gamma e_{(a)\alpha} - \nabla_\gamma e_{(a)\alpha} \right] e^{(a)\sigma},$$

що не залежать від A_α . В останньому перетворенні використано рівність $e_{(a)\alpha} \left(\partial_\gamma e^{(a)\sigma} \right) = - \left(\partial_\gamma e_{(a)\alpha} \right) e^{(a)\sigma}$, що є наслідком диференціювання формули $e_{(a)\alpha} e^{(a)\sigma} = \delta_{\alpha}^\sigma$.

Покажемо, що $F_{\gamma\alpha}^\sigma$ симетричні за нижніми індексами, маємо

$$F_{\gamma\alpha}^\sigma - F_{\alpha\gamma}^\sigma = \left[\partial_\gamma e_{(a)\alpha} - \partial_\alpha e_{(a)\gamma} - \nabla_\gamma e_{(a)\alpha} + \nabla_\alpha e_{(a)\gamma} \right] e^{(a)\sigma}.$$

Прямим обчисленням легко перевірити, що величини $\partial_\gamma e_{(a)\alpha} - \partial_\alpha e_{(a)\gamma}$ утворюють тензор, тому $F_{\gamma\alpha}^\sigma - F_{\alpha\gamma}^\sigma$ є тензором. Із визначення коваріантної похідної, за допомогою переходу в локально-лоренцову систему маємо, що цей тензор дорівнює нулю, тобто в усіх системах $F_{\gamma\alpha}^\sigma = F_{\alpha\gamma}^\sigma$.

Після того, як коваріантна похідна від коваріантного вектора визначена за допомогою об'єкта $F_{\gamma\alpha}^\sigma$, легко отримати коваріантні похідні для тензорів будь-якої будови. Це можна зробити розглядаючи згортки з коваріантними й контраваріантними тензорами, або розкладаючи тензори за векторами тетради, наприклад:

$$\begin{aligned}
\nabla_\gamma A_{\alpha\beta} &= \nabla_\gamma \left[e_{(a)\alpha} e_{(b)\beta} A_{\mu\nu} e^{(a)\mu} e^{(b)\nu} \right] = \\
&= \nabla_\gamma \left[e_{(a)\alpha} e_{(b)\beta} \right] A_{\mu\nu} e^{(a)\mu} e^{(b)\nu} + e_{(a)\alpha} e_{(b)\beta} \partial_\gamma \left(A_{\mu\nu} e^{(a)\mu} e^{(b)\nu} \right).
\end{aligned}$$

Розкриваючи звичайні та коваріантні похідні (що виражаються через об'єкт $F_{\alpha\beta}^\sigma$), після простих перетворень, які враховують (4.3), отримаємо $\nabla_\gamma A_{\alpha\beta} = \partial_\gamma A_{\alpha\beta} - F_{\gamma\alpha}^\sigma A_{\sigma\beta} - F_{\gamma\beta}^\sigma A_{\alpha\sigma}$. Тепер можна встановити явний вигляд $F_{\gamma\alpha}^\sigma$ через метрику. Підставляючи в останню формулу $g_{\mu\nu}$ замість $A_{\mu\nu}$ і враховуючи, що, як зазначено, коваріантна похідна від метрич-

ного тензора дорівнює нулю, маємо $g_{\alpha\beta,\gamma} = F_{\gamma\alpha}^{\sigma} g_{\sigma\beta} + F_{\gamma\beta}^{\sigma} g_{\sigma\alpha}$. Розглядаючи за допомогою цієї формули вираз

$$g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma} = 2F_{\alpha\beta}^{\sigma} g_{\sigma\gamma},$$

отримаємо

$$F_{\alpha\beta}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} (g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma}) \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma},$$

тобто $F_{\alpha\beta}^{\sigma}$ – це символи Крістоффеля. Звідси отримуємо всі стандартні співвідношення для коваріантних похідних.

Введемо коефіцієнти обертання Річчі:

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = e_{(a)\mu;\nu} e_{(b)}^{\mu} e_{(c)}^{\nu}. \quad (4.4)$$

Завдяки сталості $\eta_{(a)(b)}$ маємо $e_{(a)\mu;\nu} e_{(b)}^{\mu} = -e_{(a)\mu} e_{(b);\nu}^{\mu} = -e_{(a)}^{\mu} e_{(b)\mu;\nu}$, звідки

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = -\gamma_{(b)(a)(c)}. \quad (4.5)$$

Розглядають також скалярні величини,

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = \gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(a)(c)(b)} = [e_{(a)\mu;\nu} - e_{(a)\nu;\mu}] e_{(b)}^{\mu} e_{(c)}^{\nu}.$$

Легко перевірити обернений вираз

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2} (\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(b)(c)(a)} - \lambda_{(c)(a)(b)}). \quad (4.6)$$

Введемо похідну (звичайну) уздовж напрямку вектора тетради. Для скалярного поля Φ :

$$\Phi_{,(a)} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}} e_{(a)}^{\alpha}.$$

Величини $A_{(a)} \equiv A_{\alpha} e_{(a)}^{\alpha}$ для вектора A_{α} також є скалярами, тому

$$A_{(a),(b)} \equiv e_{(b)}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (A_{\alpha} e_{(a)}^{\alpha}) \equiv e_{(b)}^{\beta} \nabla_{\beta} (A_{\alpha} e_{(a)}^{\alpha})$$

(оскільки коваріантна похідна від скаляра збігається зі звичайною), звідси

$$A_{(a),(b)} = A_{\alpha;\beta} e_{(a)}^{\alpha} e_{(b)}^{\beta} - A^{(c)} \gamma_{(c)(a)(b)} \quad \text{або} \quad A_{\alpha;\beta} e_{(a)}^{\alpha} e_{(b)}^{\beta} = A_{(a),(b)} + A^{(c)} \gamma_{(c)(a)(b)}. \quad (4.7)$$

Отримаємо вираз для тетрадних компонент тензора Рімана із формули (7.1, а), ч. 2, для комутатора коваріантних похідних

$$2e_{(a)\beta; [\gamma\delta]} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{(a)}^{\alpha}.$$

Звідси

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = 2e_{(a)\beta; [\gamma\delta]} e_{(b)}^{\beta} e_{(c)}^{\gamma} e_{(d)}^{\delta} \equiv (e_{(a)\beta; \gamma\delta} - e_{(a)\beta; \delta\gamma}) e_{(b)}^{\beta} e_{(c)}^{\gamma} e_{(d)}^{\delta}.$$

Диференціюючи співвідношення

$$e_{(a)\beta; \gamma} = \gamma_{(a)(b')(c')} e_{\beta}^{(b')} e_{\gamma}^{(c')},$$

що є наслідком (4.4), з використанням (4.7) розпишемо

$$\begin{aligned} e_{(a)\beta; \gamma\delta} e_{(b)}^{\beta} e_{(c)}^{\gamma} e_{(d)}^{\delta} &= e_{(d)}^{\delta} \nabla_{\delta} \left(\gamma_{(a)(b')(c')} e_{\beta}^{(b')} e_{\gamma}^{(c')} \right) e_{(b)}^{\beta} e_{(c)}^{\gamma} = \\ &= \gamma_{(a)(b)(c),(d)} + e_{(d)}^{\delta} \gamma_{(a)(b')(c')} \left(e_{\beta;\delta}^{(b')} e_{\gamma}^{(c')} + e_{\beta}^{(b')} e_{\gamma;\delta}^{(c')} \right) e_{(b)}^{\beta} e_{(c)}^{\gamma} = \\ &= \gamma_{(a)(b)(c),(d)} + \gamma_{(a)(b')(c)} \gamma_{(b)(d)}^{(b')} + \gamma_{(a)(b)(c')} \gamma_{(c)(d)}^{(c')}. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо вираз для тензора Рімана через коефіцієнти обертання Річчі:

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} &= \gamma_{(a)(b)(c),(d)} - \gamma_{(a)(b)(d),(c)} + \gamma_{(a)(f)(c)} \gamma_{(b)(d)}^{(f)} - \\ &- \gamma_{(a)(f)(d)} \gamma_{(b)(c)}^{(f)} + \gamma_{(a)(b)(f)} \left(\gamma_{(c)(d)}^{(f)} - \gamma_{(d)(c)}^{(f)} \right). \end{aligned}$$

Аналогічно можна записати всі співвідношення, необхідні для отримання тетрадного представлення динамічних рівнянь теорії [1–5]. Тетрадний формалізм, зокрема у варіанті, запропонованому Ньюєном і Пенроузом, виявився потужним засобом дослідження вакуумних гравітаційних полів у ЗТВ, а також гравітаційних полів за наявності електромагнітного поля [4, 5].

Література

1. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. – М.: Мир, 1975.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1988.
3. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. – Т. 1–3. – М.: Мир, 1977.
4. *Новиков И.Д., Фролов В.П.* Физика черных дыр. – М.: Наука, 1986.
5. *Чандрасекар С.* Математическая теория черных дыр. – М.: Мир, 1986. – Ч. 1–2.

Додаток 5

РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ЕЙКОНАЛУ

Як було видно в розд. 8, ч. 2, ейконал зберігається вздовж геодезичних. Цю властивість можна використати для побудови розв'язку рівняння ейконалу. У загальному випадку для цього необхідні певні початкові умови. Розглянемо важливий із фізичного погляду випадок, коли ейконал задано на часоподібній світовій лінії випромінювача. Нехай джерело, що створює поле випромінювання, рухається вздовж часоподібної траєкторії $x^\mu = X_0^\mu(s)$. Нехай на цій траєкторії $\Omega(X_0(s)) = f(s)$, де $f(s)$ – задана функція. Побудуємо розв'язок рівняння ейконалу ((8.19) ч. 2), що задовольняє цю умову, а також умову випромінювання з траєкторії $X_0(s)$, тобто за умови, що траєкторії променів – розв'язки рівнянь (8.21) ч. 2 – починаються на $X_0(s)$.

Нехай $q^\mu(\tau, a, b, s)$ – сім'я ізотропних геодезичних, які починаються при $\tau = 0$ на $X_0(s)$ і заповнюють увесь багатовид або деяку його область, що розглядається, τ – канонічний параметр уздовж геодезичних, a і b визначають напрямок просторової частини 4-вектора $dq^\mu/d\tau$ при $\tau = 0$ (це можуть бути, наприклад, кути у сферичній системі координат). Умова, що геодезичні починаються на $X_0(s)$ має вигляд (для довільних a, b):

$$q^\mu(0, a, b, s) = X_0^\mu(s). \quad (5.1)$$

Припустимо, що для кожної точки x існує геодезична із цієї сім'ї, яка сполучає цю точку з точкою $X_0(s_x)$ світової лінії джерела, де s_x – визначається з рівнянь $q^\mu(\tau_x, a_x, b_x, s_x) = x^\mu$; $q^\mu(0, a_x, b_x, s_x) = X_0^\mu(s_x)$. Очікуємо, що шуканий розв'язок $\Omega(x)$, у силу властивості (8.22), ч. 2, поширюється вздовж ізотропних геодезичних із сім'ї, тому покладемо

$$\Omega(x) = f(s_x). \quad (5.2)$$

Перевіримо, що визначена таким чином функція (5.2) дійсно задовольняє рівняння ейконалу ((8.19), ч. 2). Зауважимо, що функція $\Omega(x)$ є сталою на світловому конусі, створеному ізотропними геодезичними

$q^\mu(\tau, a, b, s)$ при фіксованому s : $\Omega(q^\mu(\tau, a, b, s)) \equiv f(s)$, тому, диференціюючи за змінними τ, a, b , дістанемо

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^\mu}{\partial \tau} = 0; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^\mu}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} \frac{\partial q^\mu}{\partial b} = 0. \quad (5.3)$$

Покажемо, що дотичний вектор до геодезичних $\partial q^\mu / \partial \tau$ ортогональний до $\partial q^\mu / \partial a$ і $\partial q^\mu / \partial b$. Переходячи до коваріантного диференціювання вздовж геодезичних $q^\mu(\tau)$, дістаємо

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{\partial q^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial q^\nu}{\partial a} \right) = \frac{\delta}{\partial \tau} \left(g_{\mu\nu} \frac{\partial q^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial q^\nu}{\partial a} \right) = g_{\mu\nu} \frac{\partial q^\mu}{\partial \tau} \frac{\delta}{\partial \tau} \left(\frac{\partial q^\nu}{\partial a} \right), \quad (5.4)$$

де використано $\frac{\delta}{\partial \tau} g_{\mu\nu} = 0$, а також $\frac{\delta}{\partial \tau} \frac{\partial q^\mu}{\partial \tau} = 0$.

Далі врахуємо, що

$$\frac{\delta}{\partial \tau} \left(\frac{\partial q^\nu}{\partial a} \right) = \frac{\partial^2 q^\nu}{\partial a \partial a} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{\partial q^\alpha}{\partial \tau} \frac{\partial q^\beta}{\partial a} = \frac{\delta}{\partial a} \left(\frac{\partial q^\nu}{\partial \tau} \right),$$

тоді вираз (5.4) дорівнює

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial q^\mu}{\partial \tau} \frac{\delta}{\partial a} \left(\frac{\partial q^\nu}{\partial \tau} \right) = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\partial a} \left(g_{\mu\nu} \frac{\partial q^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial q^\nu}{\partial \tau} \right) = 0, \quad (5.5)$$

оскільки геодезичні $q^\mu(\tau)$ ізотропні:

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial q^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial q^\nu}{\partial \tau} = 0. \quad (5.5')$$

Звідси випливає збереження скалярного добутку $g_{\mu\nu} \frac{\partial q^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial q^\nu}{\partial a}$ уздовж геодезичних, а оскільки з (5.1) маємо $\partial q^\mu / \partial a = 0$ при $\tau = 0$, то

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial q^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial q^\nu}{\partial a} = 0. \quad (5.6)$$

Аналогічно дістаємо

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial q^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial q^\nu}{\partial b} = 0. \quad (5.7)$$

Порівняємо рівності (5.3) з (5.5') – (5.7). Очевидно, що як $\partial\Omega/\partial x^\mu$, так і $g_{\mu\nu}\partial q^\mu/\partial\tau$ ортогональні трьом незалежним векторам $\partial q^\nu/\partial\tau$, $\partial q^\nu/\partial a$, $\partial q^\nu/\partial b$ у кожній точці чотиривимірної області, де проходять геодезичні $q^\mu(\tau, a, b, s)$. Звідси випливає тотожність (для деякої функції $\chi \neq 0$):

$$\chi \frac{\partial\Omega}{\partial x^\mu} = g_{\mu\nu} \frac{\partial q^\nu}{\partial\tau} \quad \text{або} \quad \frac{\partial q^\nu}{\partial\tau} = \chi g^{\mu\nu} \frac{\partial\Omega}{\partial x^\mu}.$$

Підстановка цього виразу в (5.5') або в перше з рівнянь (5.3) дає рівняння ейконалу для $\Omega(x)$.

Додаток 6

СИМЕТРІЇ ПРОСТОРУ-ЧАСУ

6.1. Групи рухів у рімановому просторі та вектори Кіллінга

Спочатку розглянемо приклад, коли величина A є інваріантною при обертаннях усіх спостерігачів навколо деякого центра, тоді можна ввести сферичні координати r, θ, φ і дослідити інваріантність $A(r, \theta, \varphi)$ відносно таких обертань. Відповідь виглядає просто: якщо A – скаляр, тоді він має залежати тільки від r . Альтернативний підхід полягає в тому, щоб дати процедуру перевірки інваріантності, незалежну від системи координат. Якщо A – це тензорна величина, задача ускладнюється, оскільки компоненти тензорів, що мають різний функціональний вигляд, можуть представляти один і той самий об'єкт. Нагадаємо, що дві метрики (метричні тензори) $g_{\mu\nu}(x)$ і $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x})$, задані на багатовиді M у системах координат $\{x\}$ і $\{\tilde{x}\}$, еквівалентні, якщо існує координатне перетворення $x \rightarrow \tilde{x} = \tilde{x}(x)$ таке, що

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}(x)). \quad (6.1)$$

Аналогічні питання виникають при дослідженні інваріантності фізичних об'єктів відносно переміщень спостерігача, що описуються певними групами рухів.

Розглянемо елементи математичного апарату, за допомогою якого можна описувати сім'ю еквівалентних метрик, що може виникати під час руху спостерігачів, які бачать гравітаційне поле незмінним (у випадку сферичної симетрії – це обертання відносно деякої системи координат). Перетворення координат вважаємо, як завжди, не виродженими та диференційовними необхідного порядку. Нехай функції

$$\tilde{x}^\alpha = f^\alpha(x, \mu), \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad (6.2)$$

де $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_r]$ – вектор параметрів, які задають сім'ю перетворень координат ріманового багатовиду $x \equiv \{x^\alpha\}$. Вважаємо, що параметри $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_r]$ є незалежними; кожному перетворенню сім'ї взаємно однозначно відповідає свій набір параметрів.

Логічно припустити, що перетворення (6.2) утворюють групу. Нагадаємо, що множина елементів G є групою, якщо задана відповідність (груповий добуток), що визначає для впорядкованої пари g_1, g_2 елементів із цієї множини деякий елемент $g_3 \in G$, причому для групового добутку $g_3 = g_1 \circ g_2$:

а) має місце асоціативність

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3); \quad (6.3)$$

б) існує одиничний елемент e :

$$e \circ g = g \quad (\forall g \in G); \quad (6.4)$$

γ) $\forall g \in G$ існує обернений елемент g^{-1} : $g^{-1} \circ g = e$.

Звідси випливає, що ліва одиниця є також правою одиницею: $g \circ e = g$, а лівий обернений елемент є також правим оберненим елементом: $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$. Для групи перетворень груповий добуток означає суперпозицію перетворень ($x \equiv \{x^\alpha\}$): для двох перетворень із сім'ї

$$x' = f(x, \mu_1), \quad x'' = f(x', \mu_2),$$

їх добутком є перетворення із цієї ж сім'ї, тобто

$$f(f(x, \mu_1), \mu_2) \equiv f(x, \mu_3),$$

для деякого параметра $\mu_3 = \varphi(\mu_1, \mu_2)$, що визначається параметрами μ_1, μ_2 .

Далі вважаємо, що функція φ , що задає груповий добуток у багатовиді параметрів G_μ , є достатньо гладкою, тоді кажуть, що багатовид G_μ є групою Лі. У випадку однопараметричної групи дифеоморфізмів можливий вибір параметра $\mu \in R$ таким чином, що функція φ , яка задає груповий добуток, є сумою: $\varphi(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 + \mu_2$. Тоді, якщо формула $x = f(x, \mu)$ подає однопараметричну групу, то

$$f(x, 0) = x, \quad f(f(x, \mu_1), \mu_2) = f(x, \mu_1 + \mu_2). \quad (6.5)$$

Для фіксованої точки $x_0 \in M$ крива $x(t) = f(x_0, t)$, визначає деяку траєкторію в M , причому з властивості (6.5) впливає

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x), \quad \text{де } \xi(x) = \left. \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) \right|_{t=0}; \quad \xi = \{\xi^\alpha\}. \quad (6.6)$$

Для малого t маємо інфінітезимальне перетворення

$$\tilde{x}^\alpha = f^\alpha(x, t) = x^\alpha + \xi^\alpha(x)t. \quad (6.7)$$

Векторному полю $\xi^\alpha(x)$ зіставляють оператор

$$X = \xi^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

У разі r -параметричної групи G_μ можна ввести r лінійно незалежних операторів (їх також називають генераторами або інфінітезимальними операторами групи) X_1, \dots, X_r , що утворюють базис групи.

Будь-яка одновимірна підгрупа відповідає деякому оператору (з точністю до сталого множника); причому цей оператор є лінійною комбінацією генераторів базису. Щоб r операторів групи утворювали базис, необхідно й достатньо, щоб комутатори цих операторів знову були лінійною комбінацією цих самих операторів (теорема Лі)

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^s X_s, \quad i, j, s = 1, \dots, r;$$

C_{ij}^s називають структурними константами групи, вони визначають групу Лі з точністю до локального ізоморфізму.

Таким чином, інваріантний опис групи перетворень можливий за допомогою векторів ξ^α чи операторів базису. Далі нас цікавитимуть групи рухів – групи перетворень, що залишають незмінним гравітаційне поле, тобто метричний тензор (з урахуванням співвідношення еквівалентності (6.1)). Це питання зручно розглядати за допомогою інфінітезимальних перетворень (6.7). Нехай у результаті такого перетворення функціональний вигляд метричного тензора залишається незмінним: $\forall x : g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x)$, тоді

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta}(x') =$$

$$= g_{\mu\nu}(x) + t \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} g_{\alpha\nu} + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} g_{\nu\beta} + g_{\mu\nu,\alpha} \xi^\alpha \right)$$

з точністю до лінійних членів включно за малим параметром t . Звідси

$$\xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\nu\alpha} \partial_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha = 0. \quad (6.8)$$

Це можна переписати в явно коваріантному вигляді, як *рівняння Кіллінга*:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (6.9)$$

Вектори ξ_α , що задовольняють рівняння (6.9), називають векторами Кіллінга.

Умови інтегрованості системи (6.9) накладають сильні обмеження на метричний тензор. Таким чином, дослідження інваріантності простору-часу зводиться до вивчення певної групи рухів з відповідними структурними співвідношеннями та аналізу існування розв'язку рівнянь Кіллінга (6.9).

Розглянемо деякі наслідки рівняння (6.9). Із формули для комутатора двох коваріантних похідних

$$\left(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu \right) \xi_\alpha = -R^\sigma_{\alpha\mu\nu} \xi_\sigma, \quad (6.10)$$

розглядаючи суму трьох циклічних перестановок за символами μ, ν, α , отримаємо

$$\xi_{\alpha;\nu;\mu} - \xi_{\alpha;\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu;\alpha} - \xi_{\nu;\alpha;\mu} + \xi_{\mu;\alpha;\nu} - \xi_{\mu;\nu;\alpha} = \left(R^\sigma_{\alpha\nu\mu} + R^\sigma_{\nu\mu\alpha} + R^\sigma_{\mu\alpha\nu} \right) \xi_\sigma = 0,$$

де використано тотожність Річчі. Тут можна привести подібні завдяки (6.9) ($\xi_{\nu;\mu} = -\xi_{\mu;\nu}$), тоді маємо $\xi_{\alpha;\nu;\mu} + \xi_{\nu;\mu;\alpha} + \xi_{\mu;\alpha;\nu} = 0$, звідси

$$\xi_{\alpha;v;\mu} = -\xi_{v;\mu;\alpha} - \xi_{\mu;\alpha;v} = \xi_{\mu;v;\alpha} - \xi_{\mu;\alpha;v} = R^{\sigma}{}_{\mu\nu\alpha} \xi_{\sigma}$$

де знову використано (6.9) і (6.10).

Остаточо

$$\xi_{\alpha;v;\mu} = R^{\sigma}{}_{\mu\nu\alpha} \xi_{\sigma}. \quad (6.11)$$

Звідси можна обчислити й усі старші похідні диференціюванням (6.11). Це дає змогу побудувати ξ_{μ} у вигляді степеневого ряду, якщо в деякій точці відомі величини $\xi_{\sigma}(x_0)$ і перші похідні $\xi_{\sigma;p}(x_0)$.

Таким чином, у чотиривимірному просторі-часі, якщо задано метричний тензор $g_{\mu\nu}$, для однозначного визначення $\xi_{\sigma}(x)$ необхідно задати 4 константи $\xi_{\sigma}(x_0)$ і $4(4-1)2 = 6$ констант $\xi_{\sigma;p}(x_0)$ при $\mu \neq \nu$ (нагадаємо, що завдяки (6.9) тензор $\xi_{\mu;v}$ є антисиметричним). Відповідно може бути не більше 10 лінійно незалежних векторів Кілінга $\xi_{\alpha}(x)$ – розв'язків рівняння (6.9).

Ріманів простір з метрикою, що допускає максимальну кількість векторів Кілінга, називають максимально симетричним; можна показати, що цей випадок відповідає вимогам однорідності та ізотропії. Тривимірний однорідний та ізотропний ріманів простір, що розглянуто в підрозд. 13.1, ч.2 є максимально симетричним; відповідно чотиривимірний простір-час релятивістської космології є прикладом ріманового простору з максимально симетричним тривимірним підпростором.

6.2. Сферична симетрія

За наявності сферичної симетрії простір-час можна розглядати як ріманів багатовид з максимально-симетричними двовимірними підпросторами, що відповідають двовимірним сферам додатної кривини. Нижче ми розглянемо це питання безпосередньо на основі рівняння Кілінга.

У декартових координатах $\{x^i\}$ група обертань навколо центра симетрії $x_0^i = 0$, $i = 1, 2, 3$ – це група лінійних перетворень координат, що зберігають квадратичну форму $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2$. Генератори цієї групи (у декартових координатах)

$$\mathbf{X}_0 = [\mathbf{r} \times \nabla] \text{ або } X_i = \varepsilon_{ijk} x^j \partial_k. \quad (6.12)$$

У сферичних координатах

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta \quad (6.13)$$

генератори групи мають вигляд

$$X_1 = - \left[\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right],$$

$$X_2 = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Ці співвідношення залишаються в силі в чотиривимірному просторі з координатами t, r, θ, φ ($x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$). Генераторам відповідають контраваріантні вектори (у сферичних координатах):

$$\xi_{(1)}^\alpha = (0, 0, -\sin \varphi, -\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi), \quad (6.14)$$

$$\xi_{(2)}^\alpha = (0, 0, \cos \varphi, -\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi), \quad (6.15)$$

$$\xi_{(3)}^\alpha = (0, 0, 0, 1). \quad (6.16)$$

Співвідношення (6.14) – (6.16) задають компоненти векторів Кіллінга, що мають задовольняти рівняння Кіллінга, які тепер виглядають як обмеження на метричний тензор. Рівняння Кіллінга для контраваріантних векторів (6.14) – (6.16) зручніше аналізувати у формі (6.8). Підставляючи $\xi_{(3)}^\alpha$ у (6.8), отримуємо

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \varphi} = 0. \quad (6.17)$$

Підставляючи $\xi_{(1)}^\alpha$ і $\xi_{(2)}^\alpha$ з урахуванням (6.17), дістанемо

$$\begin{aligned} & -\sin \varphi \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \theta} - g_{\nu 2} \partial_\mu (\sin \varphi) - g_{\nu 3} \partial_\mu (\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi) + \\ & -g_{\mu 2} \partial_\nu (\sin \varphi) - g_{\mu 3} \partial_\nu (\operatorname{ctg} \theta \cos \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \theta} + g_{\nu 2} \partial_{\mu} (\cos \varphi) - g_{\nu 3} \partial_{\mu} (\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi) + \\ + g_{\mu 2} \partial_{\nu} (\cos \varphi) - g_{\mu 3} \partial_{\nu} (\operatorname{ctg} \theta \sin \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Далі розглядаємо попарно (6.18) і (6.19), послідовно для зазначених нижче індексів μ, ν . При $\mu = 0, 1$; $\nu = 0, 1$ легко отримати

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial \theta} = \frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} = \frac{\partial g_{01}}{\partial \theta} = 0. \quad (6.20)$$

При $\mu = 0$, $\nu = 2$ отримаємо систему двох однорідних рівнянь відносно g_{03} і $\partial_{\theta} g_{02}$, звідки

$$g_{03} = 0. \quad (6.21)$$

Аналогічно, при $\mu = 0$, $\nu = 3$ дістанемо

$$g_{02} = 0. \quad (6.22)$$

Рівняння при $\mu = 1 = \nu$ задовольняються в силу (6.20). При $\mu = 1$, $\nu = 2$ із системи (6.18), (6.19) дістаємо

$$g_{13} = 0. \quad (6.23)$$

При $\mu = 1$, $\nu = 3$, з урахуванням (6.23),

$$g_{12} = 0. \quad (6.24)$$

При $\mu = \nu = 2$ дістанемо

$$g_{23} = 0, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} = 0. \quad (6.25)$$

При $\mu = 2$, $\nu = 3$ дістанемо

$$g_{33} = g_{22} \sin^2 \theta. \quad (6.26)$$

Це завершує аналіз умов на метрику, що випливає з рівнянь Кіллінга. Вигляд квадрата інтервалу з урахуванням (6.17), (6.20) – (6.26) такий:

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{00}(t, r) dt^2 + 2g_{01}(t, r) dt dr + g_{11}(t, r) dr^2 + \\ + g_{22}(t, r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \end{aligned}$$

Подальший аналіз цієї метрики використовує перетворення координат t, r , що дозволяє позбавитися компоненти g_{01} і перейти до координат кривин (з урахуванням лоренцової сигнатури відповідно до фізичної інтерпретації). Це приводить до представлення сферично-симетричного поля згідно з формулою (9.13), ч. 2.

Література

1. Вейнберг С. Гравитация и космология. – М.: Мир, 1975.
2. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. – М.: Наука, 1966.
3. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947.
4. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. – М.: ИЛ, 1947.
5. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы преобразований. – М.: Наука, 1973.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М.: Наука, 1979.

Додаток 7

АЛГЕБРАЇЧНА КЛАСИФІКАЦІЯ ГРАВІТАЦІЙНИХ ПОЛІВ ЗА ПЕТРОВИМ

7.1. Локальна класифікація тензора Вейля

Класифікація гравітаційних полів за Петровим [1–3] базується на локальних алгебраїчних властивостях тензора Рімана, розглянутих у розд. 7, ч. 2:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad (7.1)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0. \quad (7.2)$$

У вакуумі з рівнянь Ейнштейна маємо для тензора Річчі

$$R_{\alpha\beta} = 0. \quad (7.3)$$

У загальному випадку розглянемо тензор конформної кривини Вейля:

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2}(R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} + R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} - R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}) + \frac{1}{6}R(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}). \quad (7.4)$$

Тензор Вейля дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ріманів багатовид є конформно плоским¹. У вакуумі ($R_{\alpha\beta} = 0$) маємо $W_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Для тензора Вейля справедливі співвідношення, аналогічні (7.1) – (7.3):

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} = -W_{\alpha\beta\delta\gamma} = -W_{\beta\alpha\gamma\delta} = W_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad (7.5)$$

$$W_{\alpha\beta\gamma\delta} + W_{\alpha\gamma\delta\beta} + W_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0, \quad (7.6)$$

$$W_{\alpha\beta} = 0. \quad (7.7)$$

Для класифікації розглядають можливі типи тензора $W_{\alpha\beta\gamma\delta}$, що задовольняє умови (7.5) – (7.7); цей розгляд далі проводиться для фіксованої точки простору-часу окремо у відповідній локально-лоренцовій системі. З урахуванням (7.5) зручно перенумерувати компоненти цього тензора, утворивши 6×6 матрицю w_{ab} , де кожний з індексів a, b пробігає значення від 1 до 6 і відповідає впорядкованій парі (α, β) , $\alpha < \beta$ відповідно до таблиці:

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow (0, 1); & 2 &\leftrightarrow (0, 2); & 3 &\leftrightarrow (0, 3); \\ 4 &\leftrightarrow (2, 3); & 5 &\leftrightarrow (3, 1); & 6 &\leftrightarrow (1, 2). \end{aligned}$$

Наприклад, $w_{00} = W_{0101}$ і т.д. Матриця w_{ab} є симетричною. З урахуванням співвідношень (7.6), (6.7), які легко переписати через компоненти w_{ab} , цю матрицю можна переписати у вигляді

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

де M, N – симетричні безшпурові 3×3 матриці, які таким чином однозначно визначені в розглядуваній точці простору-часу.

Розглянемо комплексну задачу на власні значення

$$(M + iN)v = \lambda v, \quad (7.9)$$

де v – (тривимірний) власний вектор. Задача зводиться до пошуку трьох комплексних коренів $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ полінома $P(\lambda) = \det(M + iN - \lambda E)$, де E – одинична матриця. Оскільки шпур матриці $M + iN$ дорівнює нулю,

$$\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)} + \lambda_{(3)} = 0. \quad (7.10)$$

Відповідно до кількості незалежних власних векторів маємо такі випадки гравітаційних полів:

¹ Багатовид є конформно плоским, якщо його метричний тензор пропорційний метричному тензору плоского простору.

Тип I. Існують три незалежні власні вектори $\nu_{(1)}, \nu_{(2)}, \nu_{(3)}$ задачі на власні значення (7.9). Кількість дійсних параметрів, що визначають діагональний вид матриць M, N , дорівнює чотирьом (одне з власних значень виражається через інші завдяки (7.10)). Можливий вироджений випадок, коли пара ненульових власних значень збігається, наприклад, $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)}$; цей випадок називають типом D (від англ. *degenerate*). Слід відзначити, що важливі точні розв'язки Шварцшильда та Керра описують поля типу D. Випадок, коли всі власні значення дорівнюють нулю, є тривіальним і відповідає $W_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ (конформно плоский простір-час) або у вакуумі $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ (плоский простір-час);

Тип II. Кількість незалежних векторів, що є розв'язками задачі (7.9), дорівнює двом. У цьому випадку власні значення не можуть бути всі різними, наприклад, має бути $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)}$. Кількість дійсних параметрів, які визначають цей тип, дорівнює двом. У виродженому випадку (тип N) усі власні значення дорівнюють нулю, але тензор Вейля не дорівнює нулю. Тип N важливий для опису гравітаційного випромінювання, саме він реалізується на великих відстанях від ізольованої системи мас у асимптотично плоскому просторі-часі.

Тип III. Існує лише один незалежний власний вектор ν – розв'язок задачі (7.9). Тут маємо лише одне трикратно вироджене власне значення, яке дорівнює нулю, але тензор Вейля не дорівнює нулю. У разі типу III і типу N усі інваріанти, які можна отримати алгебраїчно з тензорів Вейля чи Рімана (у вакуумі) є нульовими. Після перших робіт Петрова з алгебраїчної класифікації полів тяжіння виникло багато інших підходів до введення типів I, II, III, зокрема, з використанням формалізму Ньюмена – Пенроуза та спірного представлення тензора Вейля (див., напр., [4–7]). Досить компактно формулювання можна подати в термінах так званих головних векторів Дебеве l^α (див., напр., [7]).

7.2. Теорема Сакса

В асимптотично плоскому просторі-часі (без космологічної сталої) має місце теорема Сакса про послідовне виродження (від англ. *peeling-off*) гравітаційного поля ізольованої системи мас на нескінченності [8] (див. також [4, 5]). Основне твердження теореми можна подати як асимптотичну формулу для тензора Рімана вздовж ізотропних геоде-

зичних, що йдуть у майбутнє від світової трубки, де зосереджені всі маси. Формула подає тензор Рімана у вигляді асимптотичного розкладу за від'ємними степенями відстані r , що відраховується від початку просторових координат усередині обмеженої системи мас, причому коефіцієнтами при кожному степені є тензори, що відповідають певним типам Петрова. За теоремою Сакса, при зростанні r послідовно "відщеплюються"¹ члени типу I, II (у т. ч., типу D) і на великих відстанях домінує структура тензора кривини² типу N:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = r^{-1} [N_{\alpha\beta\gamma\delta} + \varepsilon(r)], \quad (7.12)$$

де $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Таким чином, гравітаційне поле випромінювання у вакуумі подається тензором Рімана типу N.

Література

1. *Петров А.З.* Классификация пространств, определяемых полями тяготения // Ученые записки Казанск. ун-та. – 1954. – Т. 114, кн. 8.
2. *Петров А.З.* Пространства Эйнштейна. – М.: Физматгиз, 1961.
3. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. – М.: Наука, 1966.
4. *Пенроуз Р.* Структура пространства-времени. – М.: Мир, 1972.
5. *Фролов В.П.* Метод Ньюмана – Пенроуза в общей теории относительности // Труды ФИАН. – 1977. – Т. 96.
6. *Чандрасекар С.* Математическая теория черных дыр. – Ч. 1–2. – М.: Мир, 1986.
7. *Захаров А.Ф.* Гравитационные линзы и микролинзы. – М.: Янус-К, 1997.
8. *Sachs R.K.* Gravitational waves in General Relativity. VIII. Waves in asymptotically flat spaces // Proc. Roy. Soc. London, 1962. – Vol. 270. – P. 103–126.

¹ Тому це твердження інколи називають теоремою Сакса про відщеплення.

² Більш повний результат за цією теоремою містить доданки до r^{-5} включно.

Додаток 8

ЕНЕРГІЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ

8.1. Ізольовані системи

Визначення маси-енергії гравітаційного поля в ЗТВ досить специфічне й вимагає певної обережності [1–4]. Гравітаційне поле суттєво відрізняється від локальних гравітаційних полів, які мають додатно-визначену густину енергії.

Передусім відзначимо, що повна енергія фізичної системи має сенс, якщо цю систему можна вважати ізольованою¹. Поняття ізольованої системи вже зустрічалося в ч. 1, але при розгляді питань, пов'язаних з енергією, воно вимагає уточнення. Умова ізольованості вимагає, щоб тензор енергії-імпульсу негравітаційних полів досить швидко спадав на просторовій нескінченності, а для розв'язків рівнянь Ейнштейна виконувалися певні граничні умови. За принципом еквівалентності, загальна інертна маса ізольованої системи тотожна гравітаційній масі, яку визначають за прискореннями пробних тіл на відстанях, де працює ньютонівське наближення.

Будемо називати систему ізольованою, якщо існує система координат $\{x^\alpha\} = \{ct, x, y, z\}$, де метричний тензор має таку асимптотичну поведінку: при $r \rightarrow \infty$ ($r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (8.1)$$

причому

$$|h_{\mu\nu}| = O(r^{-1}), \quad |\partial_\alpha h_{\mu\nu}| = O(r^{-2}), \quad |\partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu}| = O(r^{-3}). \quad (8.2)$$

Зробимо застереження щодо застосування граничних умов (8.2). Вони вимагають спадання тензора Рімана на просторовій нескінченності й несумісні з космологічними моделями, де поняття ізольованої системи втрачає зміст. Подальший розгляд обмежений ситуаціями, коли можна знехтувати космологічною кривиною та космологічною сталою.

¹ Як правило, у нелінійній теорії поля неможливо розглядати енергії окремих підсистем, якщо вони взаємодіють.

З аналізу наближення слабкого поля випливає, що статичну систему можна вважати ізольованою в розумінні умови (8.2), якщо права частина $T_{\mu\nu}$ рівнянь Ейнштейна досить швидко спадає при $r \rightarrow \infty$. Це цілком узгоджується з інтуїтивними уявленнями про ізольовану систему. Зокрема, така поведінка має місце у випадку обмеженої статичної системи мас, коли $T_{\mu\nu} = 0$ за $r > R_{\max}$ для деякого R_{\max} . У цьому разі метричний тензор на нескінченності має асимптотичний розклад

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \frac{2GM}{c^2 r} \delta_{\alpha\beta} + O(r^{-2}), \quad (8.3)$$

який дозволяє визначити масу через коефіцієнт при r^{-1} . Перетворення Лоренца координат $\{ct, x, y, z\}$ приводить до нової системи відліку, де розглядувана ізольована система має ненульову просторову компоненту 4-імпульсу P^α . Структура $h_{\alpha\beta}$, що цьому відповідає в загальному випадку, відрізнятиметься від (8.3), але умови (8.1) і (8.2) залишаться незмінними.

Здавалося б, що умови (8.2) сильно обмежують розгляд у разі випромінювання нестационарної системи, коли величини $h_{\alpha\beta}$ матимуть хвильову поведінку на нескінченності $\partial_\alpha h_{\beta\gamma} \sim 1/r$ тощо. Це можна врахувати, розглядаючи замість (8.2) інші асимптотичні умови щодо метричного тензора, які диктує теорема Сакса про послідовне виродження поля випромінювання (дод. 7). З іншого боку, треба мати на увазі, що фізична система не може випромінювати нескінченно. Як показують розрахунки гравітаційного поля нестационарної системи, неврахування цієї обставини призводить до розбіжностей в пострадіаційних порядках наближених методів. Це суттєво відрізняє рівняння гравітаційного поля від класичної електродинаміки, де нескінченна генерація випромінювання, обумовлена періодичним рухом зарядів, не призводить до непорозумінь. У ЗТВ рівняння руху тіл пов'язані з рівняннями поля¹ й не можуть бути задані довільно.

Таким чином, фізично прийнятна постановка задачі вимагає, щоб система не випромінювала в нескінченному минулому. Коли система починає випромінювати, починаючи з деякого моменту $t = t_0$, умова (8.2) однаково зберігатиметься при $t > t_0$ завдяки скінченній швидкості поширення збурень метрики, що описують випромінювання.

¹ Через умови інтегровності рівнянь Ейнштейна (10.12).

Після закінчення процесу випромінювання при $t \rightarrow \infty$ встановлюється асимптотика (8.2) для великих (фіксованих) r , що відповідає новим значенням R^α .

8.2. Енергія-імпульс ізольованої системи

У тензорі Ейнштейна виділимо частину, яка містить другі похідні від метричного тензора:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\beta}g^{\nu\delta}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\delta,\beta\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma}) - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\beta\delta}g^{\alpha\gamma}(2g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - 2g_{\alpha\gamma,\beta\delta}) + \dots$$

За допомогою формул

$$g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\gamma,\beta} = g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x^\beta}, \quad g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu,\beta} = -g^{\mu\alpha},_{\beta}g_{\alpha\nu},$$

це співвідношення можна переписати у вигляді

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{1}{2(-g)}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\left[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})\right] - \tau^{\mu\nu}, \quad (8.4)$$

де $\tau^{\mu\nu}$ не містить члени з другими похідними від метричного тензора. Ані перший доданок у правій частині (8.4), ані $\tau^{\mu\nu}$, окремо не утворюють тензор. Сукупність компонент

$$t^{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G(-g)}\tau^{\mu\nu}$$

називають псевдотензором енергії-імпульсу гравітаційного поля. Зауважимо, що виділення членів з другими похідними в тензорі Ейнштейна (8.4), а з ним і вибір $t^{\mu\nu}$, неоднозначні. Вибір представлення (8.4) відповідає псевдотензору Ландау – Ліфшица [2], симетричному за індексами μ, ν .

Рівняння поля (10.22) перепишемо у вигляді

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\left[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})\right] = \frac{16\pi G}{c^4}(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}). \quad (8.5)$$

Вираз у квадратних дужках в лівій частині (8.5) є антисиметричним за індексами ν, α . Звідси, диференціюючи (8.5), отримуємо закон збереження в диференціальній формі:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} [(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})] = 0. \quad (8.6)$$

З урахуванням граничних умов (8.1), (8.2), звідси отримуємо інтегральний закон збереження для величин

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{x} (-g)(T^{\mu 0} + t^{\mu 0}). \quad (8.7)$$

Ці величини визначаються асимптотикою метричного тензора на великих відстанях. Дійсно, підставляючи в (8.7) вираз $(-g)(T^{\mu 0} + t^{\mu 0})$, обчислений за допомогою (8.5), маємо

$$P^\mu = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} [(-g)(g^{\mu 0} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{0\beta})] =$$

(враховуючи, що із суми випадає нульове значення індексу α)

$$= \frac{c^4}{16\pi G} \int d^3\mathbf{x} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^\beta} [(-g)(g^{\mu 0} g^{i\beta} - g^{\mu i} g^{0\beta})].$$

Переходимо до інтегрування по нескінченній поверхні, що охоплює весь тривимірний простір:

$$P^\mu = \frac{c^3}{16\pi G} \oint dS_i \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(-g)(g^{\mu 0} g^{i\beta} - g^{\mu i} g^{0\beta})]. \quad (8.8)$$

Якщо вибрати цю поверхню у вигляді сфери нескінченного радіуса,

$$P^\mu = \frac{c^3}{16\pi G} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_{S_r} dO r^2 n^i \frac{\partial}{\partial x^\beta} [(-g)(g^{\mu 0} g^{i\beta} - g^{\mu i} g^{0\beta})] \right\}, \quad (8.9)$$

де інтегрування йде по сфері S_r радіуса r , $dO = \sin(\theta)d\theta d\phi$ – елемент тілесного кута, n^i – декартові компоненти зовнішньої нормалі до S_r ; суму за індексом i беремо від 1 до 3.

При $\mu = 0$ з урахуванням граничних умов (8.2) маємо величину $E = P^0 c$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{c^4}{16\pi G} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_{S_r} dO r^2 n^i \frac{\partial}{\partial x^j} [(-g)(g^{00} g^{ij} - g^{0i} g^{0j})] \right\} = \\ &= \frac{c^4}{16\pi G} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_{S_r} dO r^2 n^i \frac{\partial}{\partial x^j} [(-g)(g^{00} g^{ij})] \right\}, \end{aligned} \quad (8.10)$$

яку можна інтерпретувати як повну енергію системи разом з гравітаційним полем. Проте, незважаючи на інтегральну формулу (8.7), t^{00} не можна пов'язати з локально-визначеною густиною енергії гравітаційного поля. Зокрема, у кожній точці можна вибрати локально-геодезичну систему координат, де (у цій точці) t^{00} обертається на нуль. Тим не менше, формула (8.10) дає фізично прийнятне визначення енергії, яке визначається поведінкою поля на великих відстанях від системи мас, що створюють поле.

Обчислимо повну енергію системи для метрики з асимптотикою (8.3). Із точністю до членів, що спадають на нескінченності швидше за $1/r^2$,

$$\frac{\partial}{\partial x^j} [(-g)(g^{00}g^{ij})] = -\frac{\partial}{\partial x^j} \left(1 + \frac{4MG}{c^2 r} \right) \delta^{ij} = \frac{4MG}{c^2 r^3} x^i,$$

звідки, підставляючи в (8.10), маємо $E = Mc^2$.

8.3. Додатність маси-енергії

Як було зазначено вище, компонента псевдотензора t^{00} не є додатно-визначеною, тому не очевидно, що маса чи енергія гравітаційного поля, визначена співвідношеннями (8.7) чи (8.10), є додатною. Проблема додатності маси-енергії гравітаційного поля привертала увагу багатьох видатних спеціалістів з математичної фізики. Розв'язання цієї проблеми дано в роботах П. Шона та С. Яо [5-7], а також Е. Віттена [8], див. також роботи [9, 10] та огляди [11, 12]. Зауважимо, що в цих роботах часто використовують інше представлення для енергії, що виникає у формалізмі Арновітта – Дезера – Мізнера [13], але в межах асимптотичних умов для ізольованої системи воно тотожне визначенню Ландау – Ліфшица [2]. Для ізольованих систем у ЗТВ доведено теореми про додатність загальної маси-енергії, які гарантують, що енергія завжди додатна: $E \geq 0$, причому $E = 0$ тоді й тільки тоді, коли простір-час є плоским. Теореми про додатність енергії вимагають виконання рівнянь Ейнштейна за певних умов на тензор енергії-імпульсу матерії та негравітаційних полів $T^{\mu\nu}$, що гарантують невід'ємність локальної густини маси цих полів у кожній точці. Варіанти цих теорем допускають наявність чорних дір усередині ізольованої системи.

Література

1. Вейнберг С. Гравитация и космология. – М.: Мир, 1975.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1988.
3. Меллер К. Теория относительности. – М.: Атомиздат, 1975.
4. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. – Т.1–3. – М.: Мир, 1977.
5. Schoen P., Yau S.T. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity // *Commun. Math. Phys.* – 1979. – Vol. 65. – P. 45–76.
6. Schoen P., Yau S.T. The energy and the linear momentum of spacetimes in general relativity // *Commun. Math. Phys.* – 1981. – Vol. 79. – P. 47–51.
7. Schoen P., Yau S.T. Proof of the positive mass theorem. II // *Commun. Math. Phys.* – 1981. – Vol. 79. – P. 231–260.
8. Witten E. A new proof of the positive energy theorem // *Commun. Math. Phys.* – 1981. – Vol. 80. – P. 381–402.
9. Reula O. Existence theorem for solutions of Witten's equation and nonnegativity of total mass // *Phys. Journ. Math.* – 1982. – Vol. 23. – P. 810–814.
10. Ashtekar A., Horowitz G.T. Energy-momentum of isolated systems cannot be null // *Phys. Lett. A.* – 1982. – Vol. 89. – P. 181–184.
11. Фаддеев Л.Д. Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна // *УФН.* – 1982. – Т. 136. – Вып. 3. – С. 435–457.
12. Choquet-Bruhat Y. Positive energy theorems // *Relativity, groups and topology* / Eds. B.S. DeWitt and R. Stora. – Elsevier. – 1984. – P. 740–785.
13. Arnowitt R., Deser S., Misner C.W. The Dynamics of General Relativity // *Gravitation to Current Research* / Ed. L. Witten. – Wiley, N.Y., 1962. – P. 227–265.

Навчальне видання

ЖДАНОВ Валерій Іванович

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Навчальний посібник

Редактор *Л.П. Львова*

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Виконавець *Р.А. Титов*



Підписано до друку 30.12.08. Формат 70x100^{1/16}. Вид. № 495. Гарнітура Bookman Old Style.
Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 200. Ум. друк. арк. 23,2. Обл.-вид. арк. 22,0. Зам. № 28-4441

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"

01601, Київ, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43

☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 61; тел./факс (38044) 239 31 28

E-mail: vydav_polygraph@univ.kiev.ua

WWW: <http://vpc.univ.kiev.ua>

Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02



До 175-річчя
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка