СОНЯЧНА СИСТЕМА

«ВИЩА ШКОЛА»

С. Г. КУЗЬМЕНКОВ
В. СОКОЛ

СОНЯЧНА СИСТЕМА

Збірник задач

«ВИЩА ШКОЛА»

С. Г. КУЗЬМЕНКОВ, І. В. СОКОЛ

СОНЯЧНА СИСТЕМА

Збірник задач

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Навчальний посібник
для студентів фізико-математичних
спеціальностей вищих
педагогічних навчальних закладів

КИЇВ
«ВИЩА ШКОЛА»
2007

УДК 523(076.3)
ББК 22.65я73
К89

Гриф надано Міністерством освіти і науки України (лист від 20 липня 2007 р. № 1.4/18-Г-1249)

Рецензенти: доктори фіз.-мат. наук, професори *А. П. Відьмаченко*, *О. О. Железняк* (Голов. астроном. обсерваторія НАН України); *Д. Ф. Лупішко* (Наук.-дослід. ін-т астрономії Харк. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна)

Редактор *Т. М. Глушко*

Кузьменков С. Г., Сокол І. В.

К89 Сонячна система: Зб. задач: Навч. посіб. — К.: Вища шк., 2007. — 167 с.: іл.

ISBN 978-966-642-370-5

Подано задачі з механіки та будови Сонячної системи загалом, внутрішньої будови та умов на поверхні планет, їх супутників і малих тіл Сонячної системи, фізики планетних атмосфер та припливних явищ. Окремий розділ присвячено питанням космонавтики. Задачі вирізняються фізичною спрямованістю, пізнавальним і творчим характером. Для більшості задач наведено докладні розв'язання з поясненнями та коментарями.

Для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів. Може бути корисним студентам університетів, які навчаються за спеціальністю «Астрономія», а також учителям та учням загальноосвітніх шкіл.

УДК 523(076.3)
ББК 22.65я73

ISBN 978-966-642-370-5

© С. Г. Кузьменков, І. В. Сокол, 2007

ЗМІСТ

Передмова 4

1. КІНЕМАТИКА СОНЯЧНОЇ СИСТЕМИ 6

2. ДИНАМІКА СОНЯЧНОЇ СИСТЕМИ 10

3. ЕЛЕМЕНТИ КОСМОНАВТИКИ 17

4. СПОСТЕРЕЖУВАНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАНЕТ 23

5. ПРИРОДА ПЛАНЕТ 29

6. АТМОСФЕРИ ПЛАНЕТ 39

7. ПРИПЛИВНІ ЯВИЩА 48

8. МАЛІ ТІЛА СОНЯЧНОЇ СИСТЕМИ 55

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА ВІДПОВІДІ 67

Довідкові дані 161

Список використаної та рекомендованої літератури 167

ПЕРЕДМОВА

Моє серце тремтить, як лист.
В снах моїх — кружляння планет,
Підступили зорі до ліжка:
Я обертаюсь і сплю,
Ти, Земле, — моя колиска.

М. Мерсер

Астрономію у XXI ст., мабуть, неможливо вивчати так, як вивчали її у XX. Потрібні нові підходи й акценти. Астрофізика як розділ астрономії вже давно стала найвагомішою її частиною, роль якої все більше зростає. Вона перебуває також в авангарді сучасної фізики. Астрофізика буквально переповнена фізичними ідеями і має, так би мовити, величезний позитивний зворотний зв'язок із сучасною фізикою, стимулюючи багато досліджень, як теоретичних, так і експериментальних.

Нині майже немає збірників задач з астрофізики для вищих навчальних закладів, крім деяких зарубіжних (наприклад, [12, 20]), а задач з фізики планет взагалі дуже мало.

Є очевидним, що вивчення фізики без розв'язування задач неможливе. Разом з тим під час навчання астрономії розв'язуванню задач традиційно відводять якщо не останнє, то одне з останніх місць. Навчальний процес зазвичай складається з лекційного курсу, що супроводжується епізодичними астрономічними спостереженнями, та лабораторного практикуму.

Не применшуючи ролі спостережень, слід зазначити, що свідоме розуміння студентами суті астрономічних явищ, природи та еволюції космічних тіл і їх систем неможливе без систематичного розв'язування задач. До того ж цей процес, безумовно, активізує процес навчання, привчає студентів самостійно (особливо під час виконання домашніх завдань) розв'язувати «маленькі» наукові проблеми, наближує навчальне пізнання до наукового, робить його, зрештою, ефективнішим. Крім того, розв'язування астрофізичних задач допоможе майбутнім учителям фізики та астрономії глибше усвідомити вже відому їм фізику, навчить застосовувати відомі їм закони в космічних умовах, сприятиме розширенню горизонту їх фізичного мислення.

Подані задачі розміщені у певній послідовності, що відповідає визначеній логіці вивчення матеріалу. Майже всі задачі мають не тільки відповіді, а й докладні та розгорнуті розв'язання з поясненнями і коментарями. Це виправдано в умовах інтенсифікації навчального процесу, збільшення частки самостійної роботи студента, появи екстернатної форми навчання.

За цих умов, а також в умовах будь-якого обмеження аудиторних форм занять (заочна або дистанційна освіта, самоосвіта) особливої актуальності набувають задачі пізнавального характеру. В таких задачах студентам подається нова для них інформація, і на її підставі вони самі під час розв'язування здобувають нову інформацію про реальні об'єкти або явища.

Вкрай корисними є задачі про історію астрономії. З одного боку, вони нагадують, що історія астрономії тісно пов'язана з історією розвитку нашої цивілізації, з іншого — створюють додаткову інтригу, допомагають активізувати процес розв'язування.

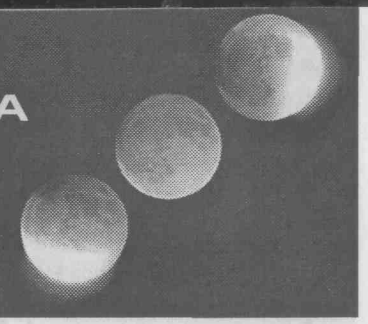
Нині в освіті особливу увагу приділяють розвитку творчої особистості, спрямовану на вільне розкриття тими, хто навчається (школярі, студенти), свого творчого потенціалу, індивідуальних здібностей. Щоправда, слід зауважити, що теоретичних і практичних досліджень, присвячених розвитку творчого мислення у студентів, не так багато.

Астрономія як наука, що завершує фізико-математичну освіту, надає великі можливості для розвитку творчого мислення. Розв'язування творчих задач — основа майбутньої творчої діяльності.

Збірник містить багато задач творчого характеру, наприклад, з надлишковими або неповними даними. Під час підготовки посібника автори свідомо відійшли від складання рафінованих задач (де в умові подано тільки необхідну інформацію), оскільки в житті, коли перед дослідником постає нове завдання, для його розв'язання він особисто відбирає необхідні дані. Зауважимо, що всю потрібну для цього інформацію ретельно відібрано і подано у розділі «Довідкові дані».

Розвитку творчого мислення сприяють також задачі за схемою: «що б сталося, якби...», задачі-парадокси, задачі, складені за уривком з художнього твору, розв'язання однієї задачі різними способами. Ідеї деяких задач (іноді в дещо зміненому вигляді), як досить плідні, фізично змістовні, вдалі, запозичено з інших збірників (посилання в цих випадках наведено після умови задачі).

1. КІНЕМАТИКА СОНЯЧНОЇ СИСТЕМИ



...Блуждают, сбившись в кучу,
Небесные тела.

Б. Пастернак

1.1. Екліптика у народних прислів'ях. Народні прислів'я зазвичай ґрунтуються на спостережливості людини. Наприклад, про день літнього сонцестояння кажуть: «Сонце вкорочує хід, а Місяць йде на прибуток» або «Місяць взимку ходить, як Сонце влітку». Яке астрономічне явище покладено в основу цих спостережень?

1.2. Час — зупинись! З якою швидкістю і в якому напрямку має летіти літак біля екватора Землі, щоб місцевий сонячний час на його борту зупинився [24]?

1.3. Видимість Меркурія. Чи можна спостерігати Меркурій на сході ввечері? Визначте максимальну видиму відстань Меркурія від Сонця [5].

Вказівка: вважайте орбіту Меркурія коловою.

1.4. Спостерігаємо Землю з інших планет. У яких основних конфігураціях можна спостерігати Землю з Меркурія і Марса? На яку найбільшу видиму відстань віддаляється Місяць від Землі під час спостереження з цих планет [24]?

Вказівка: вважайте орбіти планет і Місяця коловими.

1.5. Фізика спрощує виведення відомих формул — 1. Сонячна доба. Використовуючи поняття кутової частоти, виведіть співвідношення між тривалістю сонячної доби на планеті й періодом обертання її навколо осі. Чи впливає на це співвідношення нахил осі обертання до площини орбіти планети?

1.6. Тривалість тропічного року. Тропічний рік (його покладено в основу нашого сонячного календаря) визначають як проміжок часу між двома послідовними проходженнями Сонця через точку весняного рівнодення. У свою чергу, внаслідок прецесії земної осі точка весняного рівнодення переміщується по екліптиці назустріч видимому річному руху Сонця з періодом $2{,}578 \cdot 10^4$ років. Використовуючи поняття кутової частоти і

знаючи період обертання Землі навколо Сонця (орбітальний період, або зоряний рік) $T_{орб} = 3{,}155815014 \cdot 10^7$ с, визначте тривалість тропічного року. Наскільки тривалість тропічного року відрізняється від величини $T_{орб}$?

1.7. Скільки секунд у добі? Відомо, що до 1955 р. секунду визначали як $\frac{1}{86400}$ частину середньої сонячної доби. Визначте:

а) тривалість середньої сонячної доби в секундах, знаючи, що період осьового обертання Землі (зоряна доба) становить $T_{ос} = 23^h 56^m 03{,}445^s$;

б) скільки середніх сонячних діб міститься у тропічному році?

Вказівка: див. розв'язання задачі 1.5.

1.8. Метонів цикл. Стародавній афінський астроном Метон (V ст. до н. е.) визначив період, після закінчення якого фази Місяця припадають на ті самі числа року сонячного календаря. Обчисліть тривалість цього так званого метонового циклу.

1.9. Поглиблюємо розуміння поняття «сонячна доба». Уявіть, що обертання Землі навколо осі відбувається з тим самим періодом, але у зворотному напрямку. Визначте:

а) як зміниться при цьому тривалість сонячної доби?

б) скільки середніх сонячних діб при цьому міститиме тропічний рік?

в) чому дорівнюватиме сонячна доба, якщо Земля перестане обертатися навколо своєї осі?

Вказівка: див. розв'язання задачі 1.5.

1.10. Як змінюється тривалість справжньої сонячної доби? Унаслідок еліптичності своєї орбіти Земля 3 січня 2000 р. була найближче до Сонця — на відстані 147 млн км, а 3 липня якнайдалі від нього — на відстані 152 млн км. Визначте різницю ΔT_s між тривалостями справжніх сонячних діб у зазначені дні.

1.11. Тривалість доби на інших планетах. Визначте тривалість сонячної доби на:

а) Меркурії;

б) Венері;

в) Урані.

Вказівка: див. розв'язання задачі 1.5.

1.12. Світ без сходу Сонця. Визначте, за яких умов на планеті не відбуватимуться зміни дня й ночі [24].

1.13. Фізика спрощує виведення відомих формул — 2. Рівняння синодичного руху. Використовуючи поняття кутової частоти, отримайте рівняння синодичного руху планети.

1.14. Рік на Венері. Із спостережень відомо синодичний період обертання Венери. Визначте сидеричний період її обертання.

1.15. Земля як «вранішня зоря». Земля для спостерігачів на Марсі є, подібно до Венери, то вранішнім, то вечірнім світилом. Через які проміжки часу можна спостерігати Землю на Марсі як вранішню зорю?

Вказівка: див. розв'язання задачі 1.13.

1.16. Синодичний і сидеричний періоди Місяця. Із спостережень можна визначити проміжок часу між двома однойменними фазами Місяця (синодичний період) $S_{☾} = 29{,}53059^{d}$:

а) обчисліть період обертання Місяця навколо Землі (сидеричний період);

б) тривалість сонячної доби на Місяці.

Вказівка: див. розв'язання задачі 1.13.

1.17. Частота обмерзань Землі. Згідно з теорією М. Міланковича, обмерзанню Землі сприяє положення, коли перигелій земної орбіти є близьким до точки зимового сонцестояння (за порівняно значного ексцентриситету, що, як з'ясувалося, змінюється з часом). Перигелій орбіти Землі зміщується у напрямку руху Землі по орбіті з періодом $T_{п} \approx 10^{5}$ років. Як відомо, точка весняного рівнодення, а з нею і точка зимового сонцестояння переміщуються по орбіті у зворотному напрямку з періодом $T_{♈} \approx 2{,}6 \cdot 10^{4}$ років (явище прецесії земної осі). Визначте період, з яким повторюється взаємне розміщення перигелію і точки зимового сонцестояння.

Вказівка: див. розв'язання задачі 1.13.

1.18. Супутники Марса — 1. Видимість над горизонтом. Супутники Фобос і Деймос обертаються в екваторіальній площині Марса і напрямки обертань супутників і планети збігаються. Скільки часу від сходу до заходу ці супутники можна бачити над горизонтом Марса?

1.19. Тривалість сходу (заходу) Сонця. Визначте, за який час сонячний диск перетинає лінію горизонту на екваторі й на полюсі Землі [25].

1.20. Схід Землі на Місяці. У відомому кінофільмі «Червона шапочка» звучить пісенька з такими словами:

«А на Луне, на Луне — на голубом валуне
Лунные люди смотрят, глаз не сводят,
Как над Луной, над Луной шар голубой, шар земной
Очень красиво всходит и заходит».

На який час потрібно запастися терпінням «місячним людям», щоб дочекатися сходу Землі на Місяці [25]?

1.21. Скільки часу М. Ломоносов міг спостерігати проходження Венери по диску Сонця? Визначте час проходження Венери по диску Сонця, якщо проходження центральне. Як Венера переміщується по диску під час спостереження з середніх широт

північної півкулі — справа наліво чи навпаки? Під час розв'язування задачі вважайте, що орбіти Землі й Венери лежать в одній площині [6].

1.22. Перевіряємо класика — 1. У романі «Гектор Сервадак» Ж. Верн описує комету Галлія з відстанню від Сонця в афелію 820 млн км і періодом обертання 2 роки. З'ясуйте, чи може існувати така комета [5, 24].

1.23. Корисні й повчальні співвідношення. Припускаючи, що орбіти планет є коловими, встановіть співвідношення між радіусами орбіт і:

а) лінійними швидкостями v руху планет;

б) кутовими швидкостями ω руху планет.

Порівняйте отримані співвідношення для кеплерівського руху із співвідношеннями для обертального руху твердого тіла.

1.24. Сонячні затемнення на Землі. Можна вважати, що в середньому на Землі трапляється одне повне сонячне затемнення на рік:

а) визначте розмір повної тіні на Землі, яку утворює Місяць;

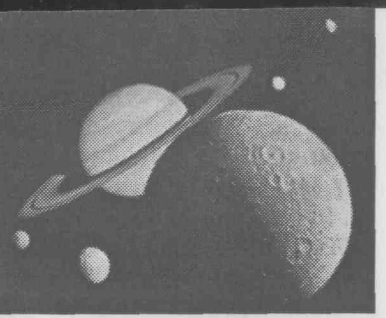
б) оцініть, через який проміжок часу повне затемнення повторюється в тому самому місці, наприклад у вашому місті, якщо протяжність смуги затемнення зазвичай становить 10^{4} км [24];

в) відомі випадки, коли спостереження сонячного затемнення проводилися з літака, тому вдавалося значно продовжити фазу повного затемнення. З якою швидкістю має летіти літак?

1.25. Супутники Марса — 2. Можливість затемнень. Які розміри мають супутники Марса Фобос і Деймос для спостерігача на Марсі? Чи можна спостерігати повне сонячне затемнення на Марсі?

1.26. Де сонячне затемнення найдовше? З'ясуйте, на якій з планет можна спостерігати повне сонячне затемнення найбільшої тривалості [24].

2. ДИНАМІКА СОНЯЧНОЇ СИСТЕМИ



По яйцевидному пути
Летит могучая комета.
О чем хлопочет пляской света?
Что нужно в мире ей найти?

К. Бальмонт

2.1. Питання для першокурсників. Чи можуть вітри та океанські течії Землі гальмувати обертання планети?

2.2. Центр мас Сонячної системи. Визначте, де знаходиться центр мас Сонячної системи. При цьому знехтуйте масами усіх планет, крім Юпітера.

2.3. Прискорення Місяця. Чому дорівнюють величина і напрямок прискорення Місяця в таких конфігураціях:

а) новий Місяць;

б) перша чверть;

в) повний Місяць [27].

Вказівка: вважайте орбіту Місяця навколо Землі коловою.

2.4. Другий закон Кеплера. Невеличке тіло масою m рухається по еліптичній орбіті, в одному з фокусів якої є масивне космічне тіло масою M. Використовуючи закон збереження моменту імпульсу, доведіть сталість секторіальної швидкості першого тіла.

2.5. Зв'язок фізики з геометрією — 1. Невеличке тіло масою m рухається по еліптичній орбіті, в одному з фокусів якої є масивне космічне тіло масою M. Велика піввісь орбіти дорівнює a, ексцентриситет — e. Виразіть повну механічну енергію першого тіла через параметри орбіти.

2.6. Третій закон Кеплера — 1. Невеличке тіло масою m рухається по коловій орбіті радіусом r навколо масивного космічного тіла масою M:

а) аналізуючи рух першого тіла, виведіть співвідношення між періодом обертання і радіусом орбіти;

б) запишіть отриману формулу як співвідношення між циклічною частотою обертання і радіусом орбіти.

2.7. Третій закон Кеплера — 2. Випадок порівнянних мас. Нехай два тіла масами M_1 і M_2 обертаються по колових орбітах

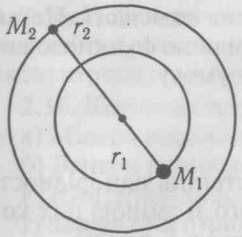


Рис. 1

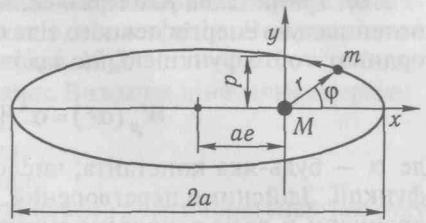


Рис. 2

відповідно з радіусами r_1 і r_2 навколо центра мас цієї системи (рис. 1). Доведіть, що період обертання залежить тільки від суми мас, а не від відношення мас цих тіл.

2.8. Зв'язок фізики з геометрією — 2. Невеличке тіло масою m рухається навколо масивного космічного тіла масою M. Властивості простору і часу, вимірність простору, а також співвідношення кінетичної і потенціальної енергій невеличкого тіла зумовлюють форму його траєкторії. Можна довести, що в умовах однорідності часу, ізотропності й тривимірності простору рівняння траєкторії у полярних координатах r та φ має вигляд (рівняння конічного перерізу з фокусом на початку координат, де є масивне космічне тіло):

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

де p і e — відповідно параметр і ексцентриситет орбіти, пов'язані з повною енергією W та моментом імпульсу J невеликого тіла співвідношеннями

$$p = \frac{J^2}{GMm^2}; \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2W}{m}\left(\frac{J}{GMm}\right)^2}.$$

Випадок еліптичної орбіти зображено на рис. 2:

а) з'ясуйте, за яких значень повної енергії W невелике тіло взагалі може рухатися по еліптичній орбіті, а також за яких умов еліпс може перетворитися на коло, параболу і гіперболу;

б) період обертання по еліптичній орбіті можна визначити за допомогою закону збереження моменту імпульсу у формі «інтеграла площ». Інтегруючи рівність $J = 2m\frac{dS}{dt}$, де $\frac{dS}{dt}$ — секторіальна швидкість (див. задачу 2.4), виведіть співвідношення між періодом обертання T і великою піввіссю a орбіти (третій закон Кеплера).

2.9. Третій закон Кеплера — 3. Вимірювання мас в астрономії. Запропонуйте способи вимірювання маси Місяця.

2.10. Третій закон Кеплера — 4. Механічна подібність. Нехай потенціальна енергія певного тіла є однорідною функцією координат, тобто функцією, що задовольняє умову

$$W_p(\alpha\vec{r}) = \alpha^k W_p(\vec{r}),$$

де α — будь-яка константа; число k — степінь однорідності функції. Здійснимо перетворення, за якого зі зміною цих координат у α разів одночасно змінюється час у β разів:

$$\vec{r} \to \alpha\vec{r}, \qquad t \to \beta t.$$

Усі швидкості змінюються при цьому в $\frac{\alpha}{\beta}$ разів, а кінетична енергія у $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ разів. Якщо зв'язати α та β умовою $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k$, тобто $\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$, то рівняння руху припускають геометрично подібні траєкторії, причому всі часи руху (між відповідними точками траєкторій) відносяться, як

$$\frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{1-\frac{k}{2}},$$

де $\frac{r_1}{r_2}$ — відношення лінійних розмірів двох траєкторій.

З'ясуйте, за якого k і в яких полях виконується третій закон Кеплера.

2.11. Подібності у Сонячній системі — 1. Як змінилися б орбітальні періоди тіл Сонячної системи, якби усі відстані й розміри змінилися у k разів, а середня щільність цих тіл залишилася незмінною [27].

2.12. Подібності у Сонячній системі — 2. Доведіть, що орбіти всіх тіл, у яких на одиницю маси припадає однакова енергія, відповідають однаковим періодам обертання.

Вказівка: для спрощення вважайте, що маси тіл набагато менші від маси центра, який притягує (випадок обмеженої задачі двох тіл).

2.13. Орбітальна швидкість на еліптичній траєкторії. Використовуючи закон збереження енергії, виведіть формулу швидкості космічного тіла для будь-якої точки еліптичної орбіти.

2.14. Орбітальна швидкість планет. Визначте орбітальну швидкість руху в перигелію й афелію для:

а) Землі;

б) Меркурія;

в) Плутона.

2.15. Популярна задача. Швидкість певного астероїда в перигелію своєї орбіти втричі більша, ніж в афелію. Чому дорівнює ексцентриситет його орбіти [5, 6, 12]?

2.16. Кінетична енергія планет. Визначте кінетичну енергію:

а) Місяця відносно Землі;

б) Венери відносно Сонця;

в) Юпітера відносно Сонця;

г) порівняйте отримані результати з кінетичною енергією руху Землі відносно Сонця.

2.17. Теорема віріала — 1. Доведіть, що у разі руху планети навколо Сонця по колу її повна і кінетична енергії пов'язані співвідношенням $W = -W_k$, а у разі руху по еліпсу — співвідношенням $\overline{W} = -\overline{W}_k$, де риска над літерою означає усереднення за часом [23].

2.18. Робота у космосі. Знайдіть мінімальну роботу, яку потрібно виконати, щоб доставити масу в 1 кг з поверхні Землі на поверхню Місяця. Опором повітря знехтуйте [23].

2.19. Як визначають час руху по ділянці орбіти? Одна з найяскравіших комет XX ст. — комета Гейла—Боппа — пройшла перигелій своєї орбіти 1 квітня 1997 р. на відстані 0,91 а. о. від Сонця. Визначте, через який час вона була на відстані 2 а. о. від Сонця, якщо ексцентриситет її орбіти становив $e = 0{,}995$.

2.20. Падіння на Сонце. Три способи розв'язання. Космічний зонд починає падати на Сонце з орбіти Землі без початкової швидкості. Оцініть час падіння [5, 6, 24].

Вказівка: зробіть це трьома способами:

а) припускаючи, що прискорення вільного падіння є сталим і таким, що є в початковий момент;

б) за допомогою третього закону Кеплера, вважаючи, що зонд рухається по дузі дуже витягнутого еліпса, у фокусі якого перебуває Сонце;

в) проінтегрувавши рівняння руху зонда.

2.21. Падіння Місяця.

«... Что румяная луна
В небе задрожала
И на бедного слона
Кубарем упала.
Вот была потом забота —
За луной нырять в болото
И гвоздями к небесам приколачивать!»

(К. Чуковський)

Скільки часу Місяць падав би на Землю, якби його рух припинився [5]?

2.22. Характеристичні швидкості кеплерівського руху. Космічний корабель рухається навколо планети масою M. Використовуючи формулу для орбітальної швидкості на еліптичній траєк-

торії (див. задачу 2.13) і розглядаючи рух по колу і по параболі як граничні випадки еліптичного руху, отримайте формули для колової та параболічної швидкостей.

2.23. Перша космічна швидкість. Космічний корабель масою m рухається зі швидкістю v по коловій орбіті навколо планети масою M на відстані r від її центра. Чому дорівнює відцентрова сила, що діє на цей корабель? Чому дорівнює гравітаційна сила, що діє на корабель? Виразіть v через r, прирівнюючи гравітаційну силу до відцентрової (формула колової швидкості). Що таке перша космічна швидкість?

2.24. Друга космічна швидкість. З умови рівності нулю повної механічної енергії космічного корабля, що рухається навколо планети масою M, отримайте формулу для параболічної швидкості. Чи однакові поняття «параболічна швидкість» і «друга космічна швидкість»?

2.25. Задача з майбутнього. Космічний корабель підлетів до невідомої планети. Запропонуйте спосіб визначення середньої щільності речовини цієї планети [24].

2.26. Навколосвітня подорож по астероїду. Космічний корабель спустився на астероїд радіуса 5 км (пізніше дізнаєтесь, що такі малі космічні тіла зі щільністю, типовою для планет, сферичної форми не бувають) і середньою щільністю 2500 кг/м^3. Космонавти вирішили об'їхати астероїд по екватору на всюдиході за 2 год. Чи зможуть вони це зробити [24]?

Вказівка: вважайте, що астероїд не обертається навколо своєї осі.

2.27. Парадокс часу обльоту. Обчисліть мінімальний час обльоту Місяця і Землі. Поясніть, чому за менших розмірів Місяця мінімальний час обльоту його виявляється більшим.

2.28. Шахта крізь Землю. Уявіть, що крізь земну кулю по діаметру від полюса до полюса прорито шахту. Доведіть, що якщо в цю шахту кинути будь-який предмет, то він здійснюватиме коливання відносно центра Землі з періодом, який, припускаючи, що Земля є однорідною кулею, дорівнює періоду обертання супутника, що рухається над самою поверхнею Землі. Опором повітря знехтуйте [6, 24].

2.29. Стрибок з Деймоса. Чи зможе космонавт, підстрибнувши, назавжди покинути супутник Марса Деймос?

Вказівка: вважайте Деймос кулею радіусом 6 км, а також те, що початкова швидкість стрибка мало залежить від сили гравітації.

2.30. Задача на вислизання. Як має зменшитися маса Землі, щоб Місяць покинув її назавжди [5]?

2.31. Задача на утримання. Чи утримає Сонце Землю, якщо його маса раптом зменшиться вдвічі? А що станеться з іншими планетами?

2.32. Задача на зникнення. Якби Сонце раптом зникло, то що сталося б із Сонячною системою [24]?.

2.33. Момент імпульсу планети. Визначте момент імпульсу планети масою M, що рухається по коловій орбіті радіусом r. Результат виразіть через r, M і масу Сонця $M_\odot$.

2.34. Який момент імпульсу більший? Порівняйте величину орбітального моменту імпульсу Землі з величиною власного обертального моменту, припускаючи, що Земля — однорідна куля.

2.35. Проблема моменту. Оцініть момент імпульсу Сонячної системи, для чого оцініть і порівняйте внески від його складових:

а) орбітальних моментів планет;

б) власних обертальних моментів планет;

в) обертального моменту Сонця.

Як ви гадаєте, в чому полягає проблема?

Вказівка: вважайте, що всі планети і Сонце обертаються як однорідні тверді тіла з кутовою швидкістю, що спостерігається на екваторі.

2.36. Як утворилися супутники планет? За сучасними уявленнями супутники планет могли утворитися з речовини, що була первісно сконцентрована у кільцевих структурах, які оберталися навколо планет (рис. 3). Нехай пилове кільце у вигляді тонкого диска із зовнішнім радіусом r_2 і внутрішнім r_1 з однорідним розподілом щільності трансформується у невеликий супутник, власним обертанням якого можна знехтувати. Знайдіть радіус r_0 орбіти супутника [23].

2.37. Теорема віріала — 2. Виразіть кінетичну, потенціальну і повну енергії планети масою M, що рухається по коловій орбіті радіусом r, через момент імпульсу J і порівняйте їх між собою.

2.38. Положення рівноваги. Обчисліть, на якій відстані від Землі на лінії Земля—Місяць перебуває точка, де сили притягання нашої планети і Місяця однакові. Вважайте, що відстань між ними дорівнює 60 радіусам Землі, а відношення мас становить 1 : 81. Чи може космічний корабель зависнути у цій точці нерухомо [5, 23, 24]?

2.39. Сфера впливу: а) доведіть, що геометричним місцем точок, в яких сили притягання Сонця і Землі однакові, є сфера радіусом

$$r_0 \approx a_\oplus \sqrt{\frac{M_\oplus}{M_\odot}},$$

де $M_\oplus$ і $M_\odot$ — відповідно маси Землі й Сонця. Знайдіть місцезна-

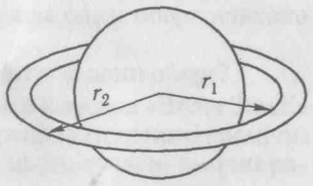


Рис. 3

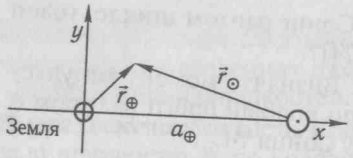


Рис. 4

ходження центра цієї сфери. Порівняйте величину r_0 з відстанню від Землі до Місяця [12];

б) знайдіть відношення сил притягання Місяця Сонцем і Землею;

в) поясніть, чому Місяць є супутником Землі.

Вказівка до пункту а): введіть систему координат, як зображено на рис. 4, і врахуйте симетрію відносно осі x.

Вказівка до пункту в): порівняйте прискорення, що надається Місяцю Землею, з різницею прискорень, що надаються Землі й Місяцю Сонцем.

2.40. Гравітаційний дефект мас. Обчисліть дефект маси системи Земля—Місяць.

2.41. Сила сонячного вітру. Основною «ударною силою» сонячного вітру є протони, які в районі земної орбіти мають швидкість у середньому $v_0 \approx 300$ км/с і концентрацію $n_0 = 10$ см$^{-3}$. Оцініть, з якою силою тисне цей «вітер» на Меркурій.

2.42. Нова орбіта Землі. Визначте параметри (велику піввісь a, період обертання T і ексцентриситет e) нової орбіти Землі, якщо Сонце перетвориться на білий карлик масою $M_{WD} = = 0{,}6 M_\odot$. Розгляньте граничні випадки:

а) дуже повільну втрату маси на стадії червоного гіганта;

б) швидке скидання оболонки наприкінці цієї стадії (граничний випадок — миттєва втрата маси).

3. ЕЛЕМЕНТИ КОСМОНАВТИКИ

Я верю, друзья: караваны ракет
Помчат нас вперед, от звезды до звезды!
На пыльных тропинках далеких планет
Останутся наши следы.

В. Войнович

3.1. Виведення на орбіту штучного супутника Землі (ШСЗ). Яку швидкість потрібно надати ШСЗ у горизонтальному напрямку на висоті 200 км над поверхнею Землі, щоб вивести його на колову орбіту? Яке прискорення має створювати ракета-носій, щоб доставити ШСЗ на цю висоту за 200 с? Опором повітря знехтуйте.

3.2. Параметри орбіти. Обчисліть велику піввісь орбіти, її ексцентриситет, висоту апогею і період обертання ШСЗ, якому на висоті 200 км над поверхнею Землі в горизонтальному напрямку надано швидкість 8,5 км/с.

3.3. Вплив опору повітря — 1. Після відокремлення від супутника ракета-носій рухається спочатку за супутником, але потім обганяє його. Чому?

3.4. Вплив опору повітря — 2. Як упливає опір повітря на рух супутника в атмосфері по коловій орбіті? Як може бути, що опір збільшує швидкість супутника? Чи змінюється момент імпульсу супутника відносно центра Землі?

3.5. Вплив опору повітря — 3. Штучний супутник Землі масою $m = 100$ кг і поперечним перерізом $S = 1$м^2 рухається по коловій орбіті на висоті $h = 150$ км, де щільність атмосфери дорівнює $\rho \approx 10^{-9}$ кг/м^3. Оцініть:

а) силу опору повітря, яку зазнає супутник;

б) як змінюється висота супутника за один оберт навколо Землі?

в) як змінюється швидкість супутника за один оберт?

3.6. «Втеча Землі». У романі Франсіса Карсака «Втеча Землі» планети Земля і Венера були перетворені на гігантські космічні кораблі. Чи можна використати для цього сучасні хімічні ракетні двигуни?

3.7. Болюче питання. На скільки можна буде зменшити масу пального ракети, якщо температуру його згоряння підвищити у 4 рази?

3.8. До першої задачі Ціолковського. Дві ракети масою m_0 кожна стартують одночасно у вільному просторі, де силою гравітації можна знехтувати. Перша ракета рухається з постійною затратою пального μ, а інша — зі сталим прискоренням a. Відносні швидкості витікання газів в обох ракетах є однаковими, постійними і дорівнюють u. Визначте:

а) закон зміни маси для кожної ракети;

б) відношення мас ракет у той момент, коли маса першої ракети зменшиться вдвічі;

в) відношення швидкостей ракет у той момент, коли маса першої ракети зменшиться вдвічі [23].

3.9. До другої задачі Ціолковського. Нехай у полі тяжіння Землі (вважайте його однорідним) вертикально вгору рухається ракета. За яким законом має змінюватися затрата пального $\mu(t)$, щоб рух відбувався з постійним прискоренням a? Швидкість витікання продуктів згоряння вважайте постійною і такою, що дорівнює u [23].

3.10. Прискорення і швидкість ракети на першій хвилині польоту. Із космодрому Землі стартувала ракета і рухалася вертикально вгору з початковим прискоренням $a_0 = 1{,}5g$. Швидкість витікання газів відносно ракети $u = 2$ км/с. Вважаючи затрату пального за одиницю часу μ постійною і нехтуючи опором повітря, знайдіть, якими будуть через $t = 1$ хв польоту:

а) прискорення ракети;

б) швидкість ракети [23].

3.11. Максимальна кінетична енергія і максимальний імпульс ракети. Ракета з початковою масою m_0 починає рухатися зі стану спокою в одному напрямку за відсутності дії зовнішніх сил. Швидкість викидання продуктів згоряння відносно ракети u є постійною. Визначте:

а) за якої швидкості ракети кінетична енергія, якої набуває ракета, буде максимальною;

б) за якої маси ракети імпульс, якого набуває ракета, буде максимальним [23].

3.12. Коефіцієнт корисної дії ракети. Коефіцієнт корисної дії ракети η можна визначити як відношення кінетичної енергії W_k, якої набула ракета, до енергії пального Q, що згоріло. Обчисліть величину η, якщо швидкість, якої досягла ракета, становить $v = 10$ км/с, питома теплота згоряння пального $q = 4 \cdot 10^7$ Дж/кг, а швидкість викидання продуктів згоряння відносно ракети $u = 2{,}5$ км/с.

3.13. Чому є потреба у багатоступеневих ракетах? Припустимо, що потрібно вивести на орбіту Землі супутник масою всього 100 кг. Для отримання необхідних орбітальних параметрів йому потрібно надати швидкість $v = 8$ км/с. Відомо, що сучасне ракетне пальне має швидкість витоку газів із сопла ракети $u = 2{,}5$ км/с. Чи можливе виведення такого супутника за допомогою одноступеневої ракети?

3.14. Що краще — ракета чи гармата? Чи можливо пострілом з гармати відправити космічний зонд із поверхні Землі:

а) на Місяць;

б) на Марс;

в) на орбіту ШСЗ;

г) в якому випадку витрати енергії менші: у разі запуску зонда за допомогою ракети чи з гармати [24]?

Відповідь обґрунтуйте.

3.15. Перевіряємо класика — 2. З гармати на Місяць. Якою має бути довжина гармати у романі Ж. Верна «Із Землі на Місяць прямим шляхом за 97 годин 20 хвилин», щоб мандрівники зазнали під час пострілу прискорення, не більшого ніж $10g$ [24]?

3.16. Віддалення з прискоренням. Космічний корабель вертикально віддаляється від Землі з постійним прискоренням $g = 9{,}8$ м/с^2. Як при цьому змінюється вага космонавтів [24]?

3.17. Зміна швидкості. Космічний корабель після згоряння всього пального на висоті 200 км над поверхнею Землі мав швидкість 12 км/с. Якою буде його швидкість на відстані від Землі, що становить:

а) 10^4 км;

б) 10^6 км;

в) 10^8 км?

3.18. Куди «дивляться» супутникові телевізійні антени? Супутникові телевізійні антени напрямлені на так звані геостаціонарні супутники, що ввесь час висять над тією самою точкою земної поверхні. Обчисліть радіус геостаціонарної орбіти. Чи може такий супутник «висіти» над Херсоном [6, 24]?

3.19. Полярний супутник. Скільки витків навколо Землі має зробити супутник, який рухається по полярній коловій орбіті (у площині орбіти перебувають полюси Землі) на висоті 271 км, щоб приземлитися в районі старту?

3.20. Маневри на орбіті — 1. Супутник рухається по коловій орбіті на висоті $h_1 = 3R_\oplus$ від поверхні Землі ($R_\oplus$ — радіус Землі). Як перевести його на колову орбіту з висотою $h_2 = R_\oplus$ з найменшими енергетичними затратами? Відтворіть траєкторію спуску і визначте швидкість маневрування.

3.31. На шляху до комети Галлея. Космічні апарати «Вега-1» і «Вега-2» на шляху до комети Галлея здійснили гравітаційний маневр біля Венери. Звільнившись від притягання Землі, вони рухались по еліпсу з афелієм біля орбіти Землі та перигелієм біля орбіти Венери (еліпс Гомана—Цандера). Обчисліть, з якою швидкістю відносно Венери вони наблизились до планети.

3.32. Гравітаційний маневр біля Юпітера. Космічний корабель, долетівши до Юпітера по гоманівській траєкторії (у перигелію ця еліптична траєкторія торкається орбіти Землі, а в афелію — орбіти Юпітера), облітає його по параболічній орбіті й віддаляється від нього. Визначте швидкість корабля відносно Сонця після цього маневру. Чи зможе він залишити Сонячну систему?

3.33. Політ до Сонця. З якою швидкістю і в якому напрямку потрібно запустити із Землі космічний зонд, щоб він досяг Сонця? З якої планети, Землі чи Марса, доцільніше, з енергетичних міркувань, це зробити? Чому найпопулярнішим способом досягання Сонця залишається політ до нього через Юпітер [6, 24]?

3.34. Третя космічна швидкість. Під поняттям «третя космічна швидкість» розуміють швидкість, яку потрібно надати космічному кораблю відносно Землі, щоб він залишив Сонячну систему назавжди. Виведіть формулу для визначення третьої космічної швидкості загалом, а також обчисліть її мінімальне й максимальне значення.

4. СПОСТЕРЕЖУВАНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАНЕТ

Дивись і запам'ятай. Пильніше дивись
У саму глибину синяви небесної,
У безмежність якої моляться люди.
І говори, кричи, благай дива.
Відповість? Що ж почуєш у відповідь?

К. Шапіро

4.1. «Як виміряти Землю?» — 1. Запропонуйте способи визначення радіуса Землі.

4.2. «Як виміряти Землю?» — 2. Під час знаменитого градусного вимірювання дуги меридіана, зробленого пулковськими астрономами під керівництвом В. Я. Струве (1816—1835), було встановлено, що відстань між Фугленесом ($\varphi = 70°50'$) і Старо-Некрасовкою ($\varphi = 45°20'$) становить 2822 км. Визначте радіус Землі, припускаючи її сферичність [5].

4.3. Дальність горизонту. Обчисліть дальність видимого горизонту і порівняйте отримані результати між собою:

а) на Землі з висоти очей людини (h = 1,8 м);
б) на Землі з висоти Евересту (h = 8848 м);
в) на Місяці з висоти очей людини;
г) на Марсі з висоти очей людини.

4.4. Шкала відстаней у Сонячній системі — 1. Точність визначення однієї з основних астрономічних сталих — астрономічної одиниці, яка задає шкалу відстаней у Сонячній системі, майже цілком залежить від точності горизонтального паралакса Сонця. Проте безпосереднє вимірювання горизонтального паралакса Сонця звичайним способом дає надто грубі результати внаслідок віддаленості Сонця та великих помилок під час спостережень, що виникають від нагрівання інструмента сонячними променями. Тому під час визначення горизонтального паралакса Сонця віддають перевагу непрямим методам. Наприклад, до XX ст. для цього використовували спостереження Марса під час його великих протистоянь. Покажіть, як це можна зробити.

4.5. Шкала відстаней у Сонячній системі — 2. Визначте відстань від Землі до Сонця (астрономічну одиницю), використовуючи явище аберації світла і знаючи, що стала річної аберації дорівнює $\varkappa = 20{,}496''$.

4.6. «Усе пізнається у порівнянні» — 1. Знаючи, що горизонтальні паралакси Сонця і Місяця становлять відповідно 8,8″ і 57′, а їх середній кутовий радіус — 16′, обчисліть у радіусах Землі:

а) відстань до Місяця;

б) лінійний радіус Місяця;

в) радіус Сонця;

г) у скільки разів відстань від Землі до Сонця більша, ніж до Місяця.

4.7. Вчимося доводити — 1. Які спостереження виявили б, що комети не перебувають у земній атмосфері, як це вважалося у давнину?

4.8. Парадокс «близького» Місяця.

«Надо мной в лазури ясной
Светит звездочка одна.
Справа запад темно-красный,
Слева близкая Луна».

(М. Ходасевич)

1. Чому поет назвав Місяць «близьким»?

2. У якому випадку видимий діаметр Місяця більший, якщо він спостерігається біля зеніту або горизонту?

3. Спробуйте пояснити причину ефекту «близького Місяця».

4.9. Що можна побачити на Місяці? Деталі якого найменшого розміру можна побачити на Місяці неозброєним оком [6]?

4.10. Канали на Марсі? А на Землі? Який мінімальний розмір рельєфних утворень на Марсі може розпізнати космічний телескоп ім. Габбла під час великих протистоянь? Деталі якого мінімального розміру цей телескоп міг би розпізнати на Землі?

4.11. А все-таки вона обертається! У книзі Г. Галілея «Діалог про дві найголовніші системи світу: Птолемеєву і Коперникову» Симплічіо, який виступає з позицій фізики Арістотеля, заявляє: «*А я, воістину, як простак, дав переконати себе, нібито каміння не можуть бути відкинуті обертанням Землі! Зрікаюся цього і заявляю, що якби Земля рухалась, то каміння, слони, башти і міста неминуче полетіли б у небо, а якщо це не так, я стверджую, що Земля не рухається.*» Як спростувати цю заяву Симплічіо? З якою швидкістю має обертатися Земля, щоб «каміння, слони, башти і міста полетіли до небес»?

4.12. Вчимося доводити — 2. Ви — вчитель фізики і астрономії початку третього тисячоліття від Різдва Христового. Наведіть якомога більше доказів обертання Землі:

а) навколо своєї осі;

б) навколо Сонця.

4.13. Вимірювання мас — 1. Як «зважити» Землю? Як можна визначити масу Землі?

4.14. Вимірювання мас — 2. Місяць. Обчисліть масу Місяця, знаючи, що перший штучний супутник Місяця «Луна-10» обертався навколо нього з періодом $2^h\,58^m$ у межах висоти над його поверхнею від 361 до 1007 км [24].

4.15. Вимірювання мас — 3. Система Плутон—Харон. Визначте масу системи Плутон—Харон, використовуючи відомі орбітальні характеристики Харона.

4.16. Вчимося доводити — 3. Доведіть, що планети світять відбитим сонячним світлом.

4.17. Альбедо Землі. До розвитку космонавтики відбивальну здатність (альбедо) Землі визначали за допомогою так званого попелястого світла Місяця, а саме яскравості темної частини Місяця, на яку потрапляє сонячне світло, відбите Землею. Порівнюючи яскравість попелястого світла з яскравістю тієї частини Місяця, що безпосередньо освітлюється Сонцем, визначте у такий спосіб альбедо Землі.

4.18. Чи мав рацію Галілей? Г. Галілей стверджував: «... *Місяць й усі інші планети всередині темні й виблискують тільки тоді, коли їх освітлює Сонце. Отже, їх поверхня має бути шорсткою, бо якби вона була гладенькою та слизькою, як дзеркало, то відбите від них світло не досягало б нас, і вони залишалися б невидимі*». Визначте:

а) як виглядав би Місяць, якби був дзеркальною кулею;

б) чи змінилася б освітленість від дзеркального Місяця порівняно з тим, що є зараз [24]?

4.19. Яка з планет отримує більше теплоти? Яка з планет — Венера чи Земля — отримує більше теплоти від Сонця? Яка з планет порівняно із Землею загалом отримує більше теплоти від Сонця й у скільки разів?

4.20. Де освітленість вища? Місяць відбиває в середньому близько 7 % сонячного світла, що на нього падає. Визначте:

а) чому Місяць освітлює Землю у сотні тисяч разів слабкіше за Сонце [24];

б) у скільки разів земна освітленість Місяця більша за місячну освітленість Землі;

в) на якому боці Місяця — на видимому чи зворотному — світліше у місячний день. У місячну ніч;

г) супутник Юпітера Іо перебуває приблизно на такій самій відстані від планети, як Місяць від Землі. Що освітлює сильніше: Земля Місяць чи Юпітер Іо.

4.21. Як виглядає Сонце на краю Сонячної системи? Уявіть, що мандруєте зовнішніми планетами Сонячної системи. Як виглядатиме Сонце з Урана, Нептуна і Плутона? Знайдіть:

а) кутовий діаметр Сонця;

б) освітленість, яку утворює Сонце на цих планетах. Порівняйте її з освітленістю на Землі від Сонця і від Місяця;

в) зоряну величину Сонця.

4.22. Пояс Койпера. За орбітою Нептуна знаходиться група транснептунових об'єктів — малих тіл на зразок комет і астероїдів (перший з цих об'єктів — 1992QB1 — було відкрито у 1992 р.). Припускають, що на геліоцентричних відстанях від 35 до 85 а. о. є десятки тисяч тіл розміром ~100 км і більше (пояс Койпера). Наприкінці 2000 р. їх виявлено вже понад 100 з великими півосями 34—48 а. о. Оцініть мінімальні розміри тіл пояса Койпера, які можна виявити за допомогою космічного телескопа ім. Габбла.

Вказівка: вважайте, що проникна здатність космічного телескопа становить 28^m, а альбедо цих об'єктів — 0,2.

4.23. Де тепліше? Обчисліть температуру рівноважного теплового випромінювання (так звану радіаційну температуру):

а) нашої планети;

б) Марса;

в) Нептуна.

4.24. Як гаряче на Меркурії? Обчисліть температуру поверхні Меркурія в підсонячній точці у перигелію та афелію його орбіти. У чому полягає складність застосування до Меркурія поняття радіаційної температури?

4.25. Сьома подорож комети. Температура поверхні. У 1986 р. усьоме, починаючи з 1456 р., повернулася в околиці Сонця комета Галлея. 9 лютого під час проходження перигелію було виміряно відстань між нею і Сонцем, що становила 0,587 а. о.:

а) знайдіть ексцентриситет орбіти і найбільшу відстань, на яку комета віддаляється від Сонця;

б) за дослідженнями космічних апаратів «Вега-1», «Вега-2» і «Джотто» поверхня ядра комети виявилась дуже темною, з альбедо близько 4 %. Враховуючи результати пункту а), обчисліть температуру поверхні комети Галлея у підсонячній точці у перигелію та афелію її орбіти.

4.26. Визначення ексцентриситету. Визначте ексцентриситет земної орбіти, якщо зі спостережень відомо, що найбільший видимий діаметр Сонця $\theta_{max} = 32'36{,}4''$, найменший — $\theta_{min} = 31'31{,}8''$.

4.27. Вплив ексцентриситету — 1. Ексцентриситет земної орбіти змінюється під впливом малих збурень інших планет з характерним періодом близько 10^5 років, досягаючи максимального значення $e_{max} = 0{,}0658$. Для з'ясування впливу цього параметра орбіти на клімат Землі знайдіть:

а) відношення освітленостей Землі у перигелію та афелію її орбіти;

б) наскільки відрізняється кількість теплоти, яку отримує Земля нині, порівняно з коловою орбітою?

4.28. Вплив ексцентриситету — 2. ...І нахилу осі обертання. Як змінилася б тривалість дня у різних точках Землі у різні пори року, самі пори року і клімат на Землі, якби:

а) вісь обертання Землі була перпендикулярна до площини екліптики;

б) ексцентриситет земної орбіти дорівнював нулю;

в) ексцентриситет земної орбіти збільшився до 0,5;

г) поширте цей аналіз на Марс.

4.29. «Усе пізнається у порівнянні» — 2. Порівняйте відношення кількості теплоти, яку отримує на одиницю площі Київ ($\varphi = 50°27'$) у дні літнього і зимового сонцестоянь та у дні проходження Землі через перигелій (взимку) та афелій (влітку). У скільки разів вплив нахилу сонячних променів більший за вплив зміни відстані від Сонця?

4.30. Ексцентриситет і життя. Визначте максимальний ексцентриситет земної орбіти, за якого життя на її поверхні у відомій нам формі могло б ще існувати [20].

4.31. Клімат на Урані. Розгляньте розміщення кліматичних поясів на Урані. Як відбувається там зміна пір року? Знайдіть відношення кількостей теплоти, яку отримує Уран на широті $\varphi = 7°$ у дні літнього і зимового сонцестоянь.

4.32. Спектр планети, що швидко обертається. Одна із задач, що дає змогу розв'язати спектр планети, — це знаходження періоду осьового обертання планети. Це можливо за допомогою ефекту Допплера:

а) поясніть якісно, який вигляд повинний мати спектр планети, що швидко обертається навколо своєї осі, якщо щілину спектрографа спрямувати вздовж її екватора?

б) нахил ліній сонячного спектра, що спостерігаються у спектрі східного і західного країв Юпітера, дав змогу визначити сумарну променеву швидкість $v = 25{,}3$ км/с (на екваторі). Знайдіть період обертання Юпітера навколо своєї осі.

4.33. Власне тепло Землі. Середній по Землі градієнт температури вздовж радіуса планети становить $\frac{dT}{dr} = 0{,}02$ К/м:

а) взявши коефіцієнт теплопровідності таким, що дорівнює $\varkappa = 3$ Дж/(м·с·К) (для суміші гранітів і базальтів), оцініть тепловий потік, що надходить з надр Землі в розрахунку на одиницю площі поверхні планети. Порівняйте цей результат із сонячною сталою;

б) обчисліть повний тепловий потік, що надходить із надр Землі.

4.34. Трохи сейсмології. Для характеристики пружних властивостей надр планети застосовують сталі Ламе μ і λ. Величина μ описує зв'язок між деформаціями зсуву та дотичними напруженнями і має назву модуля зсуву. Величина λ визначає різницю між нормальними та дотичними напруженнями за однакових відносних деформацій. Виявляється, що ці величини пов'язані з поздовжніми v_p і поперечними v_s сейсмічними хвилями такими формулами:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

де ρ — щільність речовини.

Використовуючи виміряні характерні значення v_p і v_s у ядрі й мантії Землі, знайдіть відповідні значення μ і λ. Для кожного шару в таблиці наведено середнє значення щільності:

Шар Землі	ρ, кг/м^3	v_p, км/с	v_s, км/с
Внутрішнє ядро	13 000	11	3,5
Зовнішнє ядро	11 000	9	0
Мантія	4550	10	5

4.35. Вік Землі. Оцініть вік Землі, розглядаючи розпад Урану ^{235}U: $^{235}U \to {}^{207}Pb + 7\,{}^{4}He + 4e^-$. Період його піврозпаду $T_{1/2} = 7{,}038 \cdot 10^8$ років. Вимірювання дають відношення числа атомів, що розпалися, до числа атомів, що залишилися. Для цього нукліду Урану: $\frac{6{,}33}{0{,}0725}$ [20].

...На луне не растет
Ни одной былинки.

О. Мандельштам

5.1. Гравітаційне поле планети. Знайдіть гравітаційний потенціал і напруженість гравітаційного поля, що утворюються однорідною планетою масою M і радіусом R, залежно від відстані до її центра. Результати подайте у вигляді графіків.

5.2. Гравітаційна енергія планети. Знайдіть власну гравітаційну енергію однорідної планети масою M і радіусом R.

5.3. Фігури планет — 1. Випадок рідкої планети. Ще Х. Гюйгенс та І. Ньютон розуміли, що рівноважна фігура планети, що обертається, не може бути точною сферою, а має бути сфероїдом, у якого екваторіальний радіус $R_{екв}$ більший за полярний $R_{пол}$ (рис. 7):

а) за допомогою рис. 7 оцініть різницю між екваторіальним і полярним радіусами Землі, припускаючи, що Земля є рідкою планетою. Назвіть основну причину розходження з даними вимірювань;

б) виконайте відповідні розрахунки для Юпітера і Сатурна.

5.4. Фігури планет — 2. Стиснення і параметр обертання. Стійка фігура планети, яка обертається, має таку властивість, що її поверхня у будь-якій точці перпендикулярна до векторної суми гравітаційного і відцентрового прискорень (див. рис. 7). Відношення величин цих прискорень

$$q = \frac{\omega^2 R_{екв}}{g} = \frac{\omega^2 R_{екв}^3}{GM}$$

є головним параметром (так званим параметром обертання), від якого залежить фігура планети. Фігури планет близькі до сферичних, а відхилення від сферичності виявляється насамперед у стисненні планети вздовж осі обертання

$$\varepsilon = \frac{R_{екв} - R_{пол}}{R_{екв}}.$$

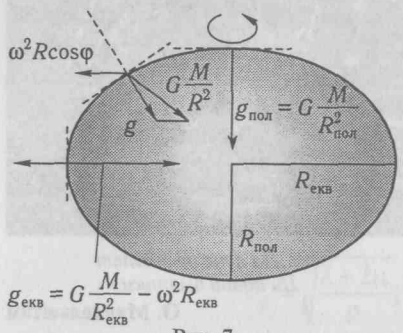


Рис. 7

Виявляється, що стиснення планет у досить грубому наближенні $\varepsilon \sim q$.

Обчисліть параметри обертання для Землі й Сатурна та порівняйте їх зі значеннями геометричного стиснення.

5.5. Фігури планет — 3. Лінійне наближення. У лінійному наближенні фігурою гідростатично врівноваженої планети є еліпсоїд обертання (так званий сфероїд Клеро), стиснення якого

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(3J_2 + q),$$

де q — параметр обертання планети (див. задачу 5.4); J_2 — гравітаційний момент, який визначається через моменти інерції C і A відносно полярної і екваторіальної осей та характеризує відхилення гравітаційного поля реальної Землі від сферичносиметричного (див. «Довідкові дані про Землю»).

Обчисліть стиснення Землі у лінійному наближенні й порівняйте його з виміряним значенням.

5.6. Фігури планет — 4. Час релаксації Землі. Перші розрахунки форми самогравітуючої маси рідини, що рівномірно обертається як ціле, належать К. Маклорену (1742). Шуканою формою є сплющений уздовж осі обертання еліпсоїд обертання (сфероїд Маклорена). Є рівняння (досить громіздке), за яким визначають залежність геометричного стиснення еліпсоїда від кутової швидкості його обертання. Для існуючої швидкості $\varepsilon_0 = 1/299{,}67$, а виміряне значення геометричного стиснення становить $\varepsilon = 1/298{,}18$. Останнє значення більше за обчислене і тому відповідає більшій швидкості обертання планети — $1{,}002\omega_\oplus$. Зважаючи, що уповільнення обертання Землі є сталим і дорівнює $\dot{\omega}_\oplus = -4{,}81 \cdot 10^{-22}$ с$^{-2}$, визначте, як у минулому Земля оберталася з такою швидкістю.

5.7. Висота гір. Чим визначається висота гір на планетах? Оцініть максимальну висоту гір на планетах земної групи. Результати обчислень порівняйте з результатами спостережень. Спробуйте пояснити причину розходжень [6, 20].

Вказівка: порівняйте потенціальну енергію однієї молекули на вершині гори з теплотою плавлення речовини в розрахунку на одну молекулу в основі гори. Для обчислень візьміть теплоту плавлення гірських порід $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Запропонуйте інші способи оцінювання.

5.8. Граничні параметри сферичної планети. Визначте критичні розміри і масу космічного тіла, за яких воно перестає бути сферичної форми. Обчислення виконайте для середньої щільності речовини тіла, що становить 3000 кг/м^3.

Вказівка: можна вважати, що космічне тіло перестає бути сферичним, коли максимальна висота гір (див. задачу 5.7) на ньому виявляється порядку радіуса цього космічного тіла. Для розрахунків візьміть теплоту плавлення гірських порід $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^5$ Дж/кг.

5.9. Звільнення енергії під час утворення планети. Оцініть повну гравітаційну енергію, що виділилась під час утворення Землі, припускаючи однорідний розподіл речовини планети. До якої максимальної температури могла б нагрітися Земля, якщо вважати, що середня теплоємність речовини планети становить $6 \cdot 10^{27}$ Дж/К? Як цей результат узгоджується з гіпотезою О. Ю. Шмідта про відносно холодний початковий стан Землі?

5.10. Гравітаційна диференціація. Оцініть енергію, що виділилася під час гравітаційної диференціації речовини Землі від однорідного стану до стану з лінійним зростанням щільності від поверхні до центра. Щільності на поверхні й у центрі вважайте такими, що дорівнюють відповідно 2700 і 13 000 кг/м^3.

5.11. Охолодження Землі — 1. Повний тепловий потік, що надходить із надр Землі, становить $3{,}1 \cdot 10^{13}$ Вт (див. задачу 4.33):

а) припускаючи сталість цієї величини, обчисліть втрату теплоти Землею за час її існування;

б) вважаючи, що маси силікатної оболонки і ядра Землі становлять відповідно $M_{об} = 4 \cdot 10^{24}$ кг і $M_я = 2 \cdot 10^{24}$ кг, а їх питомі теплоємності — $c_{об} = 1{,}26 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) і $c_я = 420$ Дж/(кг · К), визначте, на скільки градусів охолонула Земля за час її існування.

5.12. Гаряче ядро Землі. Оскільки у металах основну роль у перенесенні теплоти відіграють вільні електрони, то теплопровідність металів прямо пропорційна електропровідності, а саме: коефіцієнт теплопровідності $\varkappa$ пов'язаний із коефіцієнтом електропровідності σ формулою (закон Відемана—Франца)

$$\varkappa = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k}{e}\right)^2 \sigma T,$$

де k — стала Больцмана; e — заряд електрона. Згідно з однією з сучасних моделей внутрішньої будови Землі, середня температура і коефіцієнт електропровідності ядра Землі є відповідно $\overline{T}_я \approx 5000$ К і $\sigma_я \approx 3 \cdot 10^5$ Ом$^{-1}$ · м$^{-1}$, а градієнт температури на

межі ядро—мантія становить ≈ 0,001 К/м. Беручи для радіуса ядра значення $R_я = 3486$ км, оцініть:

а) коефіцієнт теплопровідності земного ядра і порівняйте його з величиною $\varkappa$ для суміші гранітів і базальтів, що становить $\varkappa = 3$ Дж/(м · с · К);

б) тепловий потік із ядра в мантію і порівняйте його з повним тепловим потоком Землі (див. задачі 4.33 і 5.11).

5.13. Охолоджування Землі — 2. Розподіл температури у надрах великих космічних тіл на якісному рівні дає змогу усвідомити розмірне співвідношення (його складають методами теорії розмірностей)

$$\tau \sim \frac{\ell^2}{\chi},$$

де $\chi = \frac{\varkappa}{c_p \rho}$ — коефіцієнт температуропровідності; $\varkappa$ — коефіцієнт теплопровідності; c_p — питома теплоємність за сталого тиску; ρ — щільність; τ — проміжок часу, за який температури помітно вирівнюються у точках тіла на відстані ℓ. Застосуйте це співвідношення до Землі. Взявши для величини χ значення $\chi \approx 5 \cdot 10^{-7}$ кр м^2/с (характерне значення для гірських порід) та не враховуючи надходження теплоти від Сонця, оцініть:

а) характерний час охолодження Землі;

б) характерну товщину зовнішнього шару Землі, з якого за час існування планети ~$4{,}5 \cdot 10^9$ років міг відбуватися відтік теплоти до земної поверхні.

5.14. Відхилена модель. Повний тепловий потік, що надходить з надр Землі, становить $3{,}1 \cdot 10^{13}$ Вт. Розгляньте модель, згідно з якою вся теплота утворюється внаслідок розпаду радіоактивної речовини, рівномірно розподіленої по всьому об'єму планети. Проаналізуйте, чи відповідає ця модель дійсності, якщо, згідно з сучасними оцінками, температура у центрі Землі не перевищує 6000 К. Візьмемо для коефіцієнта теплопровідності земних порід значення $\varkappa = 3$ Дж/(м · с · К) [27].

Вказівка: скористайтесь аналогом закону Гаусса: повний потік теплоти крізь замкнену поверхню дорівнює кількості теплоти, що виділилася в об'ємі, який міститься всередині цієї поверхні.

5.15. Однорідна модель. Виведіть формулу для гідростатичного тиску в центрі однорідної планети. Обчисліть тиск у центрі Землі й Місяця, припускаючи однорідність моделі.

Вказівка: нехтуючи обертанням планети і тепловими ефектами, скористайтеся рівнянням гідростатичної рівноваги

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g,$$

де ρ — щільність; g — прискорення вільного падіння.

5.16. Чиє ядро більше? Відомо, що безрозмірний момент інерції однорідної кулі дорівнює $I/MR^2 = 0{,}4$ (M і R — відповідно маса і радіус кулі). Вимірювання показали, що Меркурій має найменший безрозмірний момент інерції серед планет земної групи — 0,324. Безрозмірний момент для Землі становить 0,3309, для Місяця — 0,391. Які висновки (на якісному рівні) можна зробити:

а) про розподіл щільності з глибиною для Меркурія, Землі й Місяця;

б) про відносні розміри ядер цих космічних тіл?

5.17. Модель Меркурія. Згідно з однією зі спрощених моделей будови Меркурія, він складається з ядра щільністю $\rho_1 = 9500$ кг/м^3 і радіуса $R_я$, який дорівнює 0,74 радіуса планети, та оболонки щільністю $\rho_2 = 3300$ кг/м^3. Визначте, на якій відстані від центра планети R_0 величина прискорення вільного падіння g максимальна і в скільки разів g_{max} більша за величину g на поверхні [23]?

5.18. Рівняння Адамса—Вільямсона. 1923 р. американські геофізики Л. Г. Адамс і Е. Д. Вільямсон для визначення детального ходу щільності у надрах Землі запропонували використовувати сейсмічний параметр $\Phi(r) = \frac{K}{\rho}$, де K — модуль стиснення; $\rho = \rho(r)$ — щільність. За означенням

$$K = -V\frac{dP}{dV} = \rho\frac{dP}{d\rho}.$$

Величину $\Phi(r)$, у свою чергу, визначають через сталі Ламе λ і μ (див. задачу 4.34) та швидкості сейсмічних хвиль відповідно v_p і v_s, які можуть бути виміряні:

$$\Phi(r) = \frac{1}{\rho}\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) = v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2.$$

Використовуючи рівняння гідростатичної рівноваги, знайдіть зв'язок між градієнтом щільності і сейсмічним параметром (відоме рівняння Адамса—Вільямсона).

5.19. Механічні параметри Землі. Щільність Землі на різних глибинах уздовж радіуса, згідно зі стандартною моделлю [11], дорівнює:

r, км	0	1217,1	3485,7	5701,0	5951,0	6336,0	6371
ρ, кг/м^3	13 012	12 704	9909	4377	3768	3320	2720
	—	12 139	5550	4077	3553	2920	—

Подвійні значення щільності на тій самій глибині означають стрибок щільності. Припускаючи, що Земля має сферично-симетричну ферму і радіус 6371 км, обчисліть:

а) момент інерції Землі й порівняйте його з моментом інерції однорідної планети;

б) осьовий момент імпульсу Землі;

в) кінетичну енергію осьового обертання Землі.

5.20. Океани Землі. Гідросфера Землі містить $1{,}4 \cdot 10^{21}$ кг води (97 % — в океанах, 2,5 % — у льодовиках, переважно Антарктиди і Гренландії, решта припадає на прісноводні водоймища й водяну пару в атмосфері):

а) яку частку маси планети це становить?

б) обчисліть глибину Світового океану, припускаючи, що поверхня Землі є правильною сферою;

в) враховуючи, що океани займають площу, що становить 70,8 % площі поверхні усієї Землі, знайдіть дійсну середню глибину Світового океану.

5.21. Умови існування океанів. Океаном називають значний шар рідини на поверхні планети з різкою межею між ним і атмосферою. Спробуйте сформулювати загальні умови існування океану на поверхні планети.

5.22. Танення льодовиків. 2,5 % гідросфери Землі перебуває у льодовиках:

а) розрахуйте, на скільки підніметься рівень Світового океану в разі танення цих льодовиків;

б) як у цьому разі зміниться момент інерції Землі;

в) як при цьому зміниться тривалість доби.

Вказівка: зверніть увагу на те, що основна маса льоду зосереджена у льодовиках Антарктиди і Гренландії, а це — біляполярні області (рис. 8). Знехтуйте також нерегулярним розподілом водних мас океанів по поверхні планети і вважайте Землю ідеальною сферою радіусом 6371 км (за цього припущення, очевидно, що рівень Світового океану підніметься на меншу величину). Середній момент інерції Землі

$$I = \frac{C + 2A}{3} = 0{,}331 M R_{\text{екв}}^2,$$

де C і A — відповідно моменти інерції відносно полярної та екваторіальної осей.

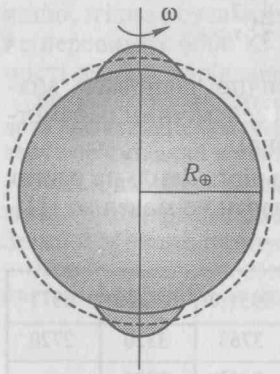


Рис. 8

5.23. Запаси холоду океанських глибин. Оцініть запаси холоду, що містяться у глибинах Світового океану, враховуючи, що його середня температура $t_{\text{ок}} = t_{\text{ок}} = 3{,}5\ °\text{C}$, а поверхні Землі $t_{\text{пов}} = 15\ °\text{C}$. Маса океану дорівнює $M_{\text{ок}} = 1{,}37 \cdot 10^{21}$ кг.

Порівняйте отриманий результат з енергією, що була витрачена на танення льодовиків останнього льодовикового періоду, коли рівень Світового океану був на 80 м нижчим за сучасний.

5.24. Прогрівання океанів. Відомо, що запізнення температур по Землі порівняно з освітленням становить приблизно місяць, а місячний приріст температури навесні у середніх широтах близько 3 °С. Відомо також, що турбулентність і поверхневі течії переміщують верхній шар океанів на глибину, що приблизно дорівнює $\ell \approx 100$ м. Визначте, за який час цей поверхневий шар Світового океану прогріється Сонцем на 3 °С.

5.25. Енергія океанських течій. Характерні швидкості океанських течій $v_{\text{ок}} \sim 0{,}1$ м/с, а їх характерна глибина дорівнює $v_{\text{ок}}/\omega$, де ω — кутова швидкість осьового обертання Землі. Оцініть кінетичну енергію течій Світового океану. Порівняйте її з кінетичною енергією атмосфери (характерна швидкість вітрів на Землі становить $v_{\text{в}} \sim 10$ м/с).

5.26. Цікаві особливості місячного ґрунту. Американські астронавти на поверхні Місяця виявили цікаві особливості ґрунту. З одного боку, він утворює пагорби з крутішими схилами, ніж пісок на Землі, а саме так, як вологий пісок. З іншого боку, під час збирання совком зразків місячного ґрунту вони висковзували з нього за найменших прискорень совка. З чим пов'язані ці явища: з фізичними особливостями самого місячного ґрунту чи з меншою, ніж на Землі, силою гравітації на поверхні Місяця?

5.27. Вода на Венері. Уся вода на Венері зосереджена в її атмосфері у вигляді водяної пари, причому води там приблизно у 50 000 разів менше, ніж на Землі:

а) чому на Венері немає води у рідкому стані, адже тиск на поверхні там у 95 разів більший за земний;

б) яким би був тиск на поверхні Венери, якби запаси води там відповідали земним (див. задачу 5.20)?

5.28. Вода на Марсі — 1. За сучасними уявленнями, вода на Марсі може бути у шарі вічної мерзлоти та у полярних шапках. Чому на Марсі немає води у рідкому стані навіть у тропіках, де температура піднімається вище за 0 °С?

5.29. Вода на Марсі — 2. Виявлення на Марсі русел річок, які «висохли», є свідченням того, що вода на поверхні колись була. За результатами аналізу альтиметричних даних, отриманих супутником «Марс глоубел сервейєр» (1999 р.), є докази існування у минулому на низовинах північної півкулі Марса великого океану. Мабуть, у деякі періоди історії Марса на тих низовинах було два басейни: ударного походження біля Утопії і неправильної форми біля полюса. Якщо глибина басейнів у деякі моменти перевищувала 1000 м, то обидва водоймища з'єднувалися,

на картах простежено вузький канал, що їх з'єднує. Сукупність даних дає змогу оцінити об'єм басейну Північного океану Марса $V = 1{,}4 \cdot 10^7$ км^3:

а) за якими особливостями рельєфу і хімічного складу ґрунту може відрізнятися (і насправді відрізняється) дно океану, що був на Марсі, від решти його поверхні?

б) обчисліть глибину марсіанського океану, за умови, що поверхня планети є правильною сферою, і порівняйте із середньою глибиною Світового океану Землі (див. задачу 5.20).

5.30. Юпітер — рідка планета? Аналіз характеру руху космічних апаратів у гравітаційному полі планети дає змогу робити висновки про будову надр планети, про її фігуру і стан речовини. З'ясувалося, що фігура Юпітера є математично ідеальною, якою може бути тільки рідка планета:

а) поясніть, як це узгоджується з тим, що водень може бути рідиною тільки за температур, не вищих ніж 33 К (критична точка для нього 33 К і 1,3 МПа), а середня температура на рівні видимої поверхні Юпітера близько 130 К;

б) чи має Юпітер тверду поверхню?

5.31. Чому температури видимої поверхні планет-гігантів вищі, ніж очікувалось? — 1. Гравітаційне стиснення. Вимірювання показують, що з надр Юпітера надходить потік теплоти у 1,9 раза більший, ніж потік енергії, що надходить від Сонця:

а) на скільки при цьому збільшується температура видимої поверхні планети;

б) найпоширеніші гіпотези, що визначають джерела цієї величезної додаткової енергії, — це гравітаційна диференціація (за однією з гіпотез, важчий гелій повільно занурюється до центра планети), перехід водню в металічний стан (див. розв'язання попередньої задачі) з виділенням теплоти фазового переходу, а також гравітаційне стиснення.

Оцініть, як має зменшуватися радіус Юпітера внаслідок гравітаційного стиснення, щоб забезпечити це додаткове нагрівання планети?

5.32. Чому температури видимої поверхні планет-гігантів вищі, ніж очікувалось? — 2. Метеоритне бомбардування. У 1973—1974 рр. за допомогою космічних апаратів «Піонер» було виявлено ще одне джерело енергії Юпітера — потоки метеорної речовини поблизу планети. Оцініть, який потік метеорної речовини має падати на Юпітер, щоб забезпечити додаткове нагрівання видимої поверхні планети на 28 К.

5.33. Магнітосфери планет. Характерний розмір $R_м$ магнітосфери планети визначають рівністю тисків магнітного поля планети та потоку плазми, що набігає від Сонця (рис. 9):

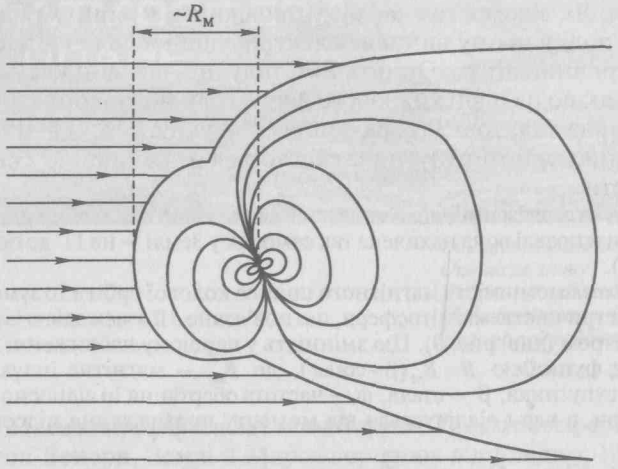


Рис. 9

а) визначте величину $R_м$ через темп випаровування плазми з корони Сонця $\dot{M}$, швидкість сонячного вітру v, відстань планети від Сонця r і магнітну індукцію поля на поверхні планети B_0;

б) обчисліть характерний розмір $R_м$ земної магнітосфери (в радіусах Землі), якщо $\dot{M} = 9{,}5 \cdot 10^8$ кг/с, $v = 300$ км/с, $B_0 = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ Тл;

в) знайдіть характерний розмір $R_м$ магнітосфери Меркурія (в радіусах планети), якщо на екваторі $B_0 = 3{,}5 \cdot 10^{-7}$ Тл, та визначте, у скільки разів магнітосфера Меркурія менша, ніж магнітосфера Землі;

г) обчисліть характерний розмір $R_м$ магнітосфери Юпітера (в радіусах планети), якщо на рівні хмарового шару планети дипольна складова утворює поле з індукцією $B_0 \approx 4 \cdot 10^{-4}$ Тл. У скільки разів магнітосфера Юпітера більша за магнітосферу Землі?

Вказівка: магнітні поля планет вважайте диполями.

5.34. Обділені Венера і Марс. З одного боку, Венера за масою і радіусом подібна до Землі, але власного магнітного поля у неї майже немає. З іншого — маса Марса вдвічі більша, ніж Меркурія, набагато швидше обертання, але магнітного поля також майже немає (або воно надзвичайно слабке). Чим це може бути зумовлено?

5.35. Електромагнітна індукція всередині супутника. Супутник Юпітера Іо обертається навколо планети всередині магніто-

сфери. Як відомо, під час руху провідника у змінному магнітному полі в ньому виникає електрорушійна сила і відповідно електричний струм. Оцініть ЕРС індукції, що виникає в супутнику, якщо на рівні хмарового шару в районі екватора планети дипольна складова утворює поле з індукцією $B_0 \approx 4 \cdot 10^{-4}$ Тл і площина орбіти супутника збігається з площиною екватора планети.

Вказівка: вважайте, що вісь диполя збігається з віссю обертання планети (насправді вона нахилена так само, як у Землі — на 11° до осі обертання).

Підказка: змінність магнітного поля за колової орбіти Іо зумовлена несиметричністю магнітосфери, що пов'язано з її взаємодією із сонячним вітром (див. рис. 9). Цю змінність у першому наближенні можна задати функцією $B = B_m(\beta + \cos\omega t)$, де B_m — магнітна індукція на орбіті супутника; β — стала, ω — частота обертання Іо відносно магнітосфери, а час t відлічується від моменту проходження підсонячної точки.

5.36. Кільця Сатурна. Товщина кілець Сатурна не перевищує 3 км:

а) доведіть, що кільця Сатурна не є суцільним утворенням;

б) з якою характерною швидкістю стикаються між собою частинки кілець?

в) відомо, що щілина Кассіні — це проміжок між кільцями *A* й *B*, центр якого розміщений на відстані 119 760 км від центра планети. Ще задовго до початку космічної ери стало зрозуміло, що щілина Кассіні утворена гравітаційним впливом одного із супутників Сатурна. Якого і чому?

Ось застелений імлою
Ось засяє знову.
Вітряно у небі.
Над весняною завірюхою
Блукає сяйво Місяця.

Сьотецу (XV ст.)

6.1. Маси атмосфер планет земної групи. Тиск атмосфери біля поверхні Венери, Землі й Марса дорівнює відповідно: 10^7 Па, 10^5 Па і $6 \cdot 10^2$ Па. Визначте маси їх атмосфер. Яку частку маси планети вони містять у кожному випадку?

6.2. Хімічний склад атмосфер планет земної групи. На Венері й Марсі основними компонентами атмосфери є вуглекислий газ і азот, а на Землі — азот і кисень (див. «Довідкові дані», табл. 4). Вважають, що сучасна атмосфера Землі є вторинною, а первинна атмосфера була дуже подібною до атмосфер Венери і Марса. У чому полягають причини такої еволюції атмосфери на Землі?

6.3. Моделі атмосфер. Нехай тиск і густина атмосфери біля поверхні планети є відповідно P_0 і ρ_0. Відомо, що густина атмосфер планет зменшується з висотою. Доведіть, що в цьому разі залежність тиску від висоти описується диференціальним рівнянням (відоме рівняння гідростатичної рівноваги)

$$\frac{dP}{dh} = -\rho(h)g.$$

Використовуючи це рівняння, знайдіть розподіл тиску і густини з висотою для:

а) ізотермічної атмосфери ($T = \text{const}$);

б) адіабатичної атмосфери $\left(P\rho^{-\gamma} = \text{const}\right)$.

6.4. Шкала висот в атмосфері. Висотою однорідної атмосфери *H* називають висоту в ізотермічній атмосфері, на якій тиск і густина зменшуються у $e = 2{,}718...$ раза. Обчисліть і порівняйте висоту однорідної атмосфери *H* для Венери, Землі й Марса.

6.5. Адіабатичний градієнт температури. Використовуючи рівняння гідростатичної рівноваги (див. задачу 6.3), знайдіть градієнт температури для адіабатичної атмосфери (так званий адіабатичний градієнт).

Зверніть увагу на те, що температура такої атмосфери лінійно зменшується з висотою.

Обчисліть адіабатичний градієнт для атмосфер Венери, Землі й Марса та порівняйте їх між собою.

Вказівка: як відомо [10], молекула CO_2 є лінійною, тому для атмосфери Марса вважайте, що вона має п'ять ступенів вільності, а для атмосфери Венери врахуйте також коливальні ступені вільності.

6.6. Стійкість відносно конвекції. Уявіть, що два елементи газу одиничної маси, що перебували на різних висотах (різниця висот dh) в атмосфері планети, помінялись місцями. Якщо при цьому енергія системи зменшиться, то це означає, що такий обмін вигідний і первісний розподіл є нестійким. Навпаки, якщо енергія системи загалом збільшиться, то первісний розподіл є стійким. Отже, умову стійкості атмосфери запишемо у вигляді

$$\frac{dU}{dh}+\frac{PdV}{dh}>0,$$

де загалом для внутрішньої енергії можна записати

$$U=\frac{PV}{\gamma-1},$$

тут γ — показник адіабати.

Використовуючи рівняння гідростатичної рівноваги (див. задачу 6.3), доведіть, що атмосфера з температурним градієнтом, який перевищує адіабатичний, буде нестійкою відносно конвекції [6, 10].

6.7. Водяна пара в атмосфері Землі. Відомо, що за температури 15 °C — середньої температури по всій Землі — тиск насиченої водяної пари дорівнює 1700 Па, а за 100 °C — 10^5 Па (1 атм). На підставі цієї інформації дайте відповіді на такі запитання:

а) яка маса води міститься у земній атмосфері;

б) чи змогли б утворитися відкриті водоймища на поверхні Землі, якби на ній було стільки води, скільки міститься нині в атмосфері;

в) яким стане тиск атмосфери, якщо температура на поверхні Землі підвищиться до 100 °C? Чи закипить при цьому Світовий океан;

г) за якої температури вся вода випарується в атмосферу (це трапиться у далекому майбутньому, коли Сонце перетвориться на червоного гіганта)? Яким стане тиск біля поверхні Землі у цьому разі?

6.8. Атмосферний кисень. Під дією ультрафіолетової частини випромінювання Сонця молекули води на висотах 30—50 км розщеплюються, утворюючи водень і кисень. Вивітрювання

водню у космос (див. задачу 6.24) спричинює зменшення води на Землі й збільшення вмісту кисню в атмосфері. Щосекунди з атмосфери звітрюється близько 1 кг водню. Вважаючи швидкість цих втрат сталою, обчисліть:

а) чи надовго вистачить води, що міститься у земній гідросфері, маса якої дорівнює $1{,}4\cdot10^{21}$ кг;

б) скільки за час існування Землі утворилося кисню таким способом? Порівняйте цей результат з умістом кисню в сучасній атмосфері;

в) як пояснити, що рослини виробляють щосекунди близько $3\cdot10^6$ кг кисню, але його вміст в атмосфері нині не зростає?

6.9. Озоновий шар. Молекули озону O_3 утворюються в земній атмосфері на висотах від 10 до 100 км, причому найбільша їх концентрація на висотах від 15 до 30 км. На частку озону припадає $6\cdot10^{-7}$ маси атмосфери Землі. Якою буде товщина шару озону, якщо його стиснути до поверхні Землі й він знаходитиметься за нормальних умов ($P=10^5$ Па, $t=20$ °C)?

6.10. Присмерки. На якій висоті знаходяться шари атмосфери Землі, які ще здатні помітно розсіювати сонячне світло, наприкінці:

а) громадянських присмерків;

б) астрономічних присмерків [5]?

Вказівка: явище громадянських присмерків закінчується тоді, коли висота Сонця під горизонтом досягає $h=-7°$, астрономічних — $h=-18°$.

6.11. Іоносфера Землі. Показник заломлення іоносфери для радіохвиль із частотою 16 МГц дорівнює $n=0{,}9$:

а) визначте концентрацію вільних електронів в іоносфері;

б) враховуючи результати, отримані в пункті а), знайдіть, з якої частоти іоносфера стає прозорою для радіохвиль.

6.12. Термосфера Землі. Тиск повітря у термосфері Землі на висоті 300 км не перевищує у середньому $3{,}4\cdot10^{-4}$ Па, а температура оцінюється у 800 К. Оцініть для цієї висоти і порівняйте з відповідними величинами біля поверхні Землі:

а) концентрацію молекул повітря;

б) довжину вільного пробігу за умови, що ефективний переріз зіткнень молекул повітря за порядком величини дорівнює $\sigma\sim10^{-19}$ м^2;

в) густину повітря.

Поясніть, чому штучні супутники, що літають і на менших висотах, не розігріваються до такої температури?

6.13. Екзосфера та екзобаза. Шар, що є перехідним від атмосфери планети до міжпланетного середовища, називають *екзо-*

сферою. Екзосфера починається від так званої *екзобази* — критичного рівня h_c, на якому довжина вільного пробігу часточок зрівнюється з висотою однорідної атмосфери (шкалою висот) $\ell(h_c) = H(h_c)$ (див. задачу 6.4). З критичної висоти h_c починається дисипація часточок з атмосфери і насамперед водню (див. задачу 6.24). Оцініть:

а) висоту екзобази h_c (для водню), якщо на нижній межі екзосфери $T \approx 1100$ K;

б) концентрацію водню на рівні екзобази, якщо діаметр його молекул оцінюється величиною $d = 0{,}25$ нм;

в) висоту екзобази та концентрацію водню на її рівні для Марса, якщо експериментальні оцінки дають для нижньої межі його екзосфери значення температури $T \approx 300$ K.

6.14. Атмосфера Венери — 1. Тиск атмосфери біля поверхні Венери досягає $\approx 10^7$ Па:

а) визначте густину атмосфери біля поверхні;

б) з чим пов'язана така велика відмінність венеріанського тиску від земного: різницею в густині, температурі близько чи молекулярній масі?

в) з'ясуйте, чому температура біля поверхні планети лишається майже сталою незалежно від часу доби, а також широти місця.

6.15. Атмосфера Венери — 2. Хмари. За допомогою космічних апаратів, що спускалися на поверхню Венери (переважно апарати «Венера-8» — «Венера-14»), було встановлено, що нижня межа хмар знаходиться на висоті 49 км і має температуру 110 °C. Знайдіть:

а) адіабатичний градієнт температури;

б) якому показнику адіабати та якої кількості ступенів вільності молекул атмосфери Венери це відповідає;

в) у скільки разів змінюється тиск на цьому діапазоні висот?

6.16. Атмосфера Марса. Відомо, що тиск біля поверхні Марса у 160 разів менший, ніж біля поверхні Землі на рівні моря. Чи може на певній висоті густина атмосфери Марса бути більшою, ніж густина атмосфери Землі?

6.17. Пилові бурі на Марсі. Великі, а іноді й глобальні пилові бурі на Марсі характерні саме для великих протистоянь:

а) з'ясуйте у чому полягає причина цього;

б) під час глобальних пилових бур у високі шари атмосфери Марса піднімаються часточки радіусами $R_0 \sim 1$ мкм. Вважаючи густину поверхневих шарів Марса $\rho = 2300$ кг/м^3, оцініть масу пилу, що піднімається в атмосферу під час бурі, якщо концентрація пилинок біля поверхні дорівнює близько $n_0 \approx 10^8$ м$^{-3}$.

6.18. Швидкість звуку на Венері й Марсі. Знайдіть характерну швидкість звуку в атмосферах Венери і Марса (біля поверхонь

планет) та порівняйте з характерною швидкістю звуку в атмосфері Землі.

Вказівка: для розрахунків використайте середню температуру атмосфери біля поверхонь (див. «Довідкові дані», табл. 4), а також скористайтеся вказівкою до задачі 6.5.

6.19. Можливість повітряної навігації.

«Оптимісти вигадують літак, песимісти — парашут».

(Закон двох каверз Фортена.
«Мерфологія — загальна та приватна»)

Проаналізуйте можливість повітряних польотів в атмосферах Венери і Марса:

а) за якої швидкості руху літак зазнаватиме такої самої піднімальної сили, що й на Землі;

б) чи можливо застосовувати на цих планетах парашут. З якою швидкістю опускатиметься парашутист на цих планетах, якщо на Землі він опускається зі швидкістю 5 м/с?

6.20. Можливість бачити зорі. Використовуючи поняття оптичної товщини

$$\tau_\lambda = \int_0^h \varkappa_\lambda \rho \, dh,$$

де $\varkappa_\lambda$ — коефіцієнт послаблення в розрахунку на одиницю маси (він враховує як розсіювання, так й істинне поглинання); ρ — густина, дайте відповідь на запитання: чи можна побачити зорі з поверхні:

а) Венери вночі;

б) Марса вдень;

в) за якої оптичної товщини атмосфери досягається максимум яскравості неба?

Примітка: земна атмосфера (без хмар, пилу та аерозолів) має оптичну товщину по нормалі до поверхні $\tau \approx 0{,}1$ на довжині хвилі $\lambda = 550$ нм.

6.21. Колір неба. Чому небо на Землі блакитного кольору? Обчисліть, куди внаслідок розсіювання в атмосфері зміщується максимум у розподілі енергії випромінювання Сонця.

Якого кольору небо на Венері й Марсі?

Вказівка: а) вважайте, що у позаатмосферному спектрі Сонця розподіл енергії чорнотілий із максимумом на $\lambda_0 = 550$ нм; б) для спрощення розрахунків можна використовувати наближення Віна (за цих умов це цілком коректно); в) у разі молекулярного розсіювання (що насправді викликається тепловими флуктуаціями показника заломлення) інтенсивність розсіяного світла $I_\lambda \propto \lambda^{-4}$ (закон Релея) і оптична товщина атмосфери $\tau_\lambda \propto \lambda^{-4}$.

6.22. Чому Сонце на горизонті червоне?

«Червоне-червоне сонце
У пустельній далечині... Але холодить
Безжалісний вітер осінній».

(Басьо, XVII ст.)

Скільки блакитного ($\lambda_B = 450$ нм) і червоного ($\lambda_R = 650$ нм) світла, що випромінюється Сонцем, проходить крізь атмосферу, коли Сонце знаходиться у зеніті та на горизонті?

Вказівка: скористайтеся законом Бугера, приміткою до задачі 6.20, а також пунктом в) вказівки до задачі 6.21.

6.23. Прозорість атмосфери для рентгенівського випромінювання. Для жорсткого рентгенівського випромінювання ($h\nu \geq 7$ кеВ) поглинання в атмосфері Землі переважно зумовлене томсонівським розсіюванням, переріз якого дорівнює $\sigma_T = 6{,}65 \cdot 10^{-29}$ м^2. Обчисліть оптичну товщину (див. задачу 6.20) атмосфери Землі у рентгенівському діапазоні.

Вказівка: коефіцієнт послаблення $\varkappa$ пов'язаний з перерізом томсонівського розсіювання σ_T формулою

$$\varkappa = \frac{\mu_e}{m_p}\sigma_T,$$

де m_p — маса протона; μ_e — середня кількість нуклонів на один електрон.

6.24. Дисипація атмосфер — *1*. Можливість космічного тіла утримувати газ, що входить до складу атмосфери цього тіла, залежить від співвідношення потенціальної енергії W_g (енергії гравітаційного притягання), молекули з масою μm_{H} (μ — відносна молекулярна маса цього газу, m_{H} — маса атома Гідрогену) та її середньої кінетичної енергії W_k. Для існування стабільної атмосфери відношення $\xi = \dfrac{W_g}{W_k}$ має бути значно більшим за одиницю:

а) переконайтесь, що величину ξ можна розглядати і як відношення квадратів другої космічної швидкості для планети та середньої квадратичної швидкості теплового руху молекул атмосфери цієї планети, або як відношення радіуса планети до висоти однорідної атмосфери;

б) знайдіть величини ξ для планет земної групи, наприклад для атомарного Гідрогену, і порівняйте їх між собою. Зробіть висновки;

в) порівняйте отримані результати з аналогічною величиною ξ для Юпітера.

Вказівка: під час розрахунків для планет земної групи візьміть середню температуру атмосфери біля поверхонь планет, а для Юпітера на рівні видимої поверхні (див. «Довідкові дані», табл. 4).

6.25. Дисипація атмосфер — 2. Титан і Місяць. Відомо, що супутник Сатурна Титан має дуже щільну атмосферу, густина якої біля поверхні у 4,5 раза більша, ніж густина земної. Поясніть, чому за сумірних, порівнянних розмірів і мас Титана і Місяця на першому збереглася така потужна атмосфера, а на Місяці її зовсім немає.

Вказівка: температура поверхні Титана за вимірюванням космічного апарата «Вояджер-1» дорівнює 94 К.

6.26. Турбулентні властивості атмосфери Землі. Нехай характерний лінійний масштаб широкого турбулентного потоку в атмосфері — L. Згідно із законом Колмогорова — Обухова, дисперсія різниці швидкостей повітря для двох точок, розділених відстанню $r << L$, має вигляд

$$\Delta v^2 = C^2 r^{\frac{2}{3}},$$

де C — певна стала порядку одиниці. Оцініть характерний розмір ℓ_0 вихору в турбулентному потоці (турбулентної комірки), якщо динамічна в'язкість повітря $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с).

6.27. Загальна циркуляція атмосфер. Енергія сонячного випромінювання, що надходить на планету, перетворюється на енергію механічного руху повітряних мас із коефіцієнтом корисної дії η. Характерний час перенесення кінетичної енергії повітряних мас за порядком величини є $\tau \sim \dfrac{R}{v_0}$ — час, за який повітряна маса переміщується на відстань радіуса планети з характерною швидкістю вітру v_0. Оцініть величини v_0 і τ для:

а) Венери;

б) Землі;

в) Марса.

Зробіть аналіз результатів, при цьому майте на увазі, що за даними вимірювань космічних апаратів, що спускалися на поверхні планет, швидкість вітру біля поверхні Венери зазвичай не перевищує 1 м/с, а біля поверхні Марса — 10 м/с (хоча трапляється, що досягає й 100 м/с).

Вказівка: загалом ККД атмосфери у першому наближенні можна записати як

$$\eta = \beta \frac{\delta T}{T_{\max}},$$

де $T_{\max}$ — найвища температура в атмосфері; δT — характерна різниця температур між найбільш нагрітою та найхолоднішою частинами атмосфери (наприклад, на Землі «нагрівником« і «холодильником» є відповідно екваторіальна зона і зона полюсів). Коефіцієнт β визначає ефективність атмосфери як теплової машини. Оскільки точне його оцінювання для різних планет є складним, вважайте, що для всіх трьох планет ККД атмосфери $\eta \approx 0{,}5\,\%$.

6.28. Класифікація атмосфер за ступенем подібності. Щоб виявити подібності загальної циркуляції атмосфер у різних планет, використовують безрозмірну величину — обертальне число

Маха. Воно визначає вплив обертання планети на загальну циркуляцію її атмосфери і дорівнює відношенню

$$\Pi_{\omega} = \frac{\omega R}{v_{зв}},$$

де ω — кутова швидкість осьового обертання планети; R — її радіус; $v_{зв}$ — швидкість звуку в атмосфері.

Обчисліть обертальне число Маха для атмосфер планет Сонячної системи і спробуйте класифікувати їх за ступенем подібності.

Вказівка: див. вказівку до задачі 6.18 та її розв'язання.

6.29. Перший зонд в атмосфері Юпітера. 7 грудня 1995 р. зонд космічного апарата «Галілео» ввійшов в атмосферу Юпітера. Починаючи з рівня з тиском $3{,}5 \cdot 10^4$ Па, зонд почав передавати інформацію на орбітальний модуль. Сеанс радіозв'язку продовжувався всього 58 хв, після чого перервався. За цей час зонд заглибився в атмосферу на 150 км, тиск за бортом при цьому досяг $2{,}4 \cdot 10^6$ Па, а температура 420 К. Знайдіть, чому дорівнювала густина атмосфери Юпітера на цій глибині. Наскільки це відрізняється від густини повітря біля поверхні Землі?

6.30. Блискавки на Юпітері. На зонді з космічної станції «Галілео», який першим проник в атмосферу Юпітера, було встановлено прилад для реєстрації блискавок як оптичним, так і радіометодом. Спалахи не були зареєстровані, але радіовипромінювання віддалених блискавок приймалося постійно. Виявилося, що за потужністю спалахи блискавок приблизно у 10 разів перевищують земні, проте й на одиницю площі їх менше також у 10 разів. Поясніть, як це узгоджується з існуванням в атмосфері Юпітера метану, адже на Землі добре відомий «болотний» газ метан, який легко займається від невеликої іскри.

6.31. Хмаровий шар Юпітера і Сатурна. У 30-х роках XX ст. за допомогою спектрального аналізу вдалося встановити наявність в атмосферах Юпітера і Сатурна аміаку і метану. Певний час навіть існувала думка про «метаново-аміачну» атмосферу цих планет. Проте з часом з'ясувалося, що атмосфери Юпітера і Сатурна насправді складаються переважно з водню і гелію. Склад хмар на цих планетах, на відміну від хмар Землі, що складаються тільки з води, містить різні сполуки (наприклад, NH_3, CH_4, H_2O, NH_3, H_2S та ін.) щонайменше шести елементів (H, C, N, O, S, P) і визначається тиском, температурою, освітленістю від Сонця і рухами атмосфери:

а) за допомогою рис. 10 [16], на якому зображено температурні профілі атмосфер Юпітера і Сатурна, визначте основну сполуку, що створює видимий хмаровий покрив на цих планетах;

б) оскільки структура і склад хмарового шару обох планет подібні, нижня температурна межа хмар становить 150 К (див. рис. 10). Чому так разюче не збігаються верхні межі хмарового шару на цих планетах?

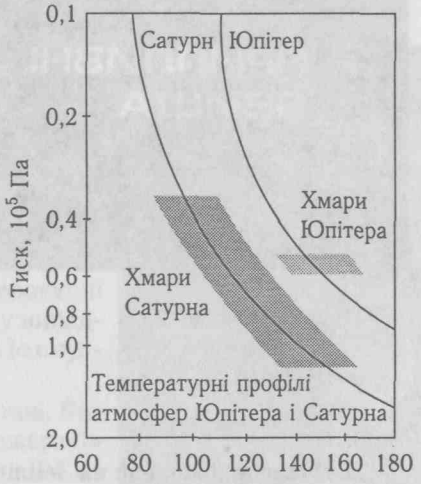


Рис. 10

6.32. Атмосфера Титана. Завдяки місіям «Вояджерів» удалося отримати багато нової інформації про атмосферу найбільшого супутника Сатурна Титана (і єдиного супутника у Сонячній системі, що має потужну атмосферу). З'ясувалося, що атмосфера Титана на 85 % складається з азоту. Температура верхніх шарів атмосфери близько 150 К, а поверхні — 94 К. Тиск біля поверхні становить $1{,}6 \cdot 10^5$ Па. Визначте:

а) масу атмосфери Титана. Яку частку вона становить від маси самого супутника? Порівняйте ці результати з аналогічними параметрами земної атмосфери (див. задачу 6.1);

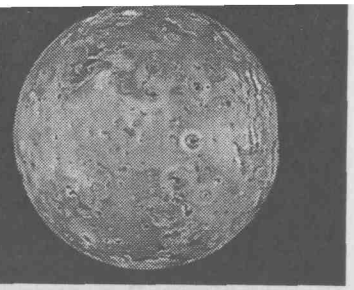
б) густину атмосфери Титана біля його поверхні та порівняйте її з густиною повітря біля поверхні Землі;

в) на скільки більше азоту міститься в атмосфері Титана, ніж в атмосфері Землі;

г) висоту однорідної атмосфери Титана і порівняйте її з аналогічним параметром земної атмосфери.

6.33. Чому Уран і Нептун мають синьо-зелене забарвлення? Із спектрального аналізу планет-гігантів випливає, що дуже потужні смуги пари аміаку, притаманні Юпітеру, в Сатурна ледь помітні, а Уран і Нептун не мають їх зовсім. Зате смуги поглинання метану цих планет стають дуже широкими і займають значну частину спектра у червоній області. Чим пояснюються такі явища? Чи можуть ці явища бути причиною синьо-зеленого забарвлення Урана і Нептуна?

7. ПРИПЛИВНІ ЯВИЩА



Вот так и ведется
На нашем веку
На каждый прилив по отливу.

Б. Окуджава

7.1. Місячні припливи на Землі — 1. Ексцентриситет орбіти Місяця становить 0,0549. У скільки разів припливна сила від Місяця на Землю в перигею більша, ніж в апогею?

Вказівка: загалом припливна сила у будь-якій точці поверхні планети є векторною різницею сил, з якими тіло, що зумовлює припливи, притягує центр та цю точку поверхні планети. У першому наближенні сила, що діє з боку Місяця на Землю (на лінії, що з'єднує їх центри), дорівнює

$$F_{\text{пр}} = F_1 - F_2 \approx \left|\frac{\partial F}{\partial r}\right| \Delta r = \frac{2GM_{\oplus}M_{☾}}{r^3} R_{\oplus}.$$

7.2. Місячні припливи на Землі — 2. Вважаючи, що відношення висоти припливу до радіуса планети дорівнює відношенню припливного прискорення до прискорення вільного падіння на поверхні планети, обчисліть висоту припливів, зумовлених Місяцем на Землі.

Вказівка: скористайтеся вказівкою до задачі 7.1.

7.3. Чиї припливи сильніші? Яке співвідношення висот припливних горбів (див. задачу 7.2), що індукуються Сонцем і Місяцем на Землі?

7.4. Де висота припливів більша? У скільки разів висота припливу (див. задачу 7.2) під час сизигій (*сизигіями* називають новий Місяць і повний Місяць) має бути більшою за приплив під час чвертей Місяця?

7.5. Густота розміщення кратерів на галілеєвих супутниках. Чому густота розміщення кратерів на поверхні галілеєвих супутників Юпітера (фото 1) монотонно зменшується від Калісто до Іо [24]?

7.6. Причина вулканічної діяльності Іо. Вулканічна діяльність на супутнику Юпітера Іо зумовлена припливною дією планети на цей супутник:

а) обчисліть, у скільки разів припливна сила від Юпітера на Іо більша, ніж від Землі на Місяць;

б) оскільки осьове обертання Іо синхронізовано з орбітальним, обчисліть висоту статичного (рівноважного) припливу в тілі Іо, зумовленого Юпітером (див. задачу 7.2);

в) через синхронне обертання (і тому статичність припливів) припливне тертя на Іо має відігравати дуже малу роль у сучасній еволюції його надр — таку саму, як і у випадку Місяця. Чому все-таки на Іо є вулкани?

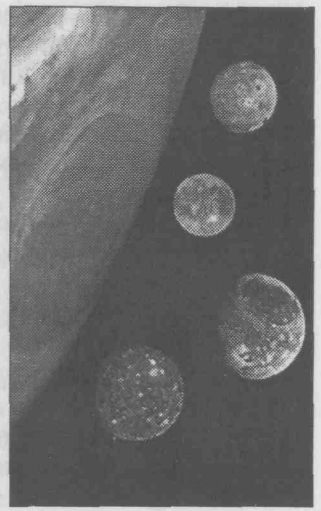


Фото 1. Галілеєві супутники Юпітера

7.7. Припливні хвилі на Титані. Виміряна за допомогою «Вояджера-1» температура поверхні Титана (94 К) виявилася вищою за температуру плавлення метану, що дорівнює 90 К, і нижчою за критичну температуру, що дорівнює 191 К. Тиск атмосфери біля поверхні Титана виявився у 1,6 раза більшим, ніж тиск земної атмосфери. За цих умов цілком імовірне існування метанового океану на Титані. Яка висота припливних хвиль (див. задачу 7.2), зумовлених Сатурном на цьому супутнику?

7.8. Парадокс системи Земля—Місяць. У системі Земля—Місяць відбувається парадоксальне явище: внаслідок припливного тертя зменшується кутова швидкість осьового обертання Землі й Місяця, а також орбітальна кутова швидкість Місяця. Як це узгоджується із законом збереження моменту імпульсу і законом збереження енергії в системі Земля—Місяць [24]?

7.9. Припливне тертя у системі Земля—Місяць. Припливне тертя призводить до того, що максимуми припливної деформації (припливні горби) перебувають не на прямій, що з'єднує центри Землі й Місяця, а виносяться осьовим обертанням планети вперед (рис. 11). Це явище виникає внаслідок відхилення земних надр від ідеальної пружності та тертя морських припливних хвиль об дно у неглибоких морях (особливо

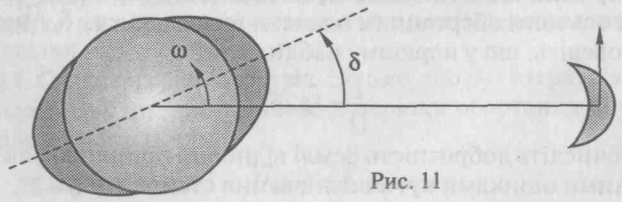


Рис. 11

у морях Північного Льодовитого океану та Охотському). Місяць, притягуючи найближчий горб, створює момент сили, який сповільнює обертання Землі. Однаковий за величиною і протилежний за напрямком момент сили, зумовлений дією горба на Місяць, збільшує енергію і момент імпульсу Місяця так, що він віддаляється від Землі, а його орбітальна швидкість зменшується.

Із спостережень відоме вікове сповільнення осьового обертання Землі $\dot{\omega}_{\oplus} = -986''/(100\ \text{років})^2 = -4{,}81\cdot10^{-22}$ рад/с^2. Знайдіть:

а) наскільки збільшується період осьового обертання Землі щороку;

б) енергію, що дисипує у Землі щосекунди $\dot{W}_{\text{дис}}$. Порівняйте її з величиною теплового потоку з надр Землі (див. задачу 5.11). Чи відіграє будь-яку роль це джерело енергії у розігріванні Землі;

в) яка частка енергії, на яку зменшується кінетична енергія осьового обертання Землі $\dot{W}_{k\oplus}$, витрачається на збільшення повної енергії Місяця $\dot{W}_{☾}$ щосекунди? Доведіть, що

$$\frac{\dot{W}_{☾}}{\dot{W}_{k\oplus}} = \frac{T_{\oplus}}{T_{☾}},$$

де $T_{\oplus}$ і $T_{☾}$ — відповідно осьовий і орбітальний періоди обертання Землі й Місяця?

Вказівка: для спрощення вважайте, що земна вісь перпендикулярна до площини місячної орбіти.

7.10. Добротність Землі. Інтенсивність процесу дисипації енергії осьового обертання планети внаслідок припливної взаємодії зі своїм супутником (або з іншим припливоутворювальним тілом) характеризується дисипативною функцією (або добротністю) Q, яку визначають так:

$$\frac{2\pi}{Q} = \frac{\Delta W}{W},$$

де W — максимальна енергія припливних деформацій; ΔW — енергія, що дисипує за повний припливний цикл. Припливне тертя (див. попередню задачу) призводить до того, що максимуми припливних деформацій (припливні хвилі) перебувають не на прямій, що з'єднує центри планети і супутника, а виносяться осьовим обертанням планети вперед на кут δ (рис. 11):

а) доведіть, що у першому наближенні

$$\frac{1}{Q} = \operatorname{tg} 2\delta;$$

б) обчисліть добротність Землі відносно припливів, якщо за сучасними оцінками кут запізнювання становить $\delta \approx 2°$.

Вказівка: якщо припливоутворювальний потенціал періодично змінюється з частотою 2ω (дві припливні хвилі на добу) і пропорційний $\cos 2\omega t$, то швидкість припливних деформацій пропорційна $\sin 2(\omega t - \delta)$. Тоді потужність

$$\frac{dW}{dt} = K\cos 2\omega t \sin 2(\omega t - \delta),$$

де K — коефіцієнт пропорційності, який не залежить від часу.

Підказка: для отримання значень ΔW і W потрібно інтегрувати цей вираз за повним періодом та за чвертю періоду відповідно.

7.11. Віддалення Місяця. З рис. 11 видно, що припливні горби Землі «тягнуть» за собою Місяць. Унаслідок цієї дії Місяць повільно віддаляється від Землі. Враховуючи, що через припливне тертя період обертання Землі навколо осі збільшується за рік на $\Delta T_{\oplus} = 1{,}8\cdot10^{-5}$ с, знайдіть, як змінюються при цьому за рік:

а) велика піввісь місячної орбіти;

б) потенціальна і кінетична енергії Місяця;

в) тривалість орбітального періоду Місяця.

Вказівка: для спрощення вважайте, що земна вісь перпендикулярна до площини місячної орбіти.

7.12. Коли настане повна синхронізація? На підставі вивчення океанських припливів з використанням супутникових даних знайдено усереднене вікове сповільнення орбітального руху Місяця $\dot{\omega}_{☾} = -25{,}2''/(100\ \text{років})^2$. Це сповільнення продовжуватиметься доти, доки кутова швидкість орбітального руху Місяця навколо Землі не дорівнюватиме кутовій швидкості осьового обертання Землі. Визначте:

а) яким буде загальний період обертання системи Земля—Місяць;

б) через скільки років система Земля—Місяць буде повністю синхронізованою?

Вказівка: для спрощення вважайте, що земна вісь перпендикулярна до площини місячної орбіти.

7.13. Що відбудеться у разі повної синхронізації? Місяць своєю припливною дією гальмує осьове обертання Землі. Через певний час (див. попередню задачу) їхні обертання синхронізуються і Земля буде постійно повернута до Місяця одним своїм боком (так, як нині Місяць). Визначте, якою при цьому буде:

а) середня відстань між Землею і Місяцем;

б) тривалість сонячної доби на Землі?

Вказівка: для спрощення вважайте, що земна вісь перпендикулярна до площини місячної орбіти.

7.14. Синхронізація Меркурія. Відомо, що рух Меркурія є синхронізованим так, що три осьові періоди обертання дорівнюють двом орбітальним

$$3T_{\text{ос}} = 2T_{\text{орб}}:$$

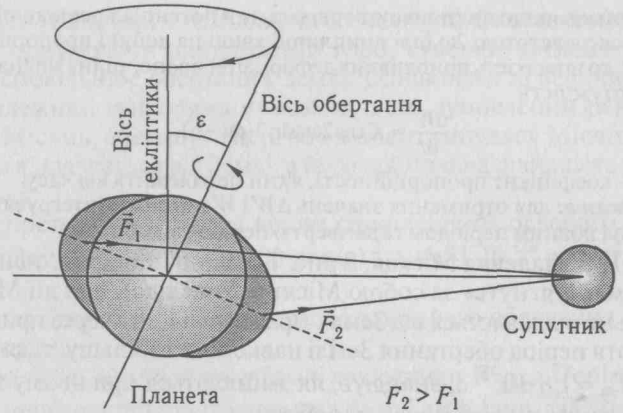


Рис. 12

а) поясніть, чому це так;

б) яким був би період осьового обертання Меркурія, за умови, що його орбіта є коловою?

Підказка: обчисліть кутову швидкість Меркурія у перигелію та афелію його орбіти і порівняйте її з кутовою швидкістю осьового обертання планети.

7.15. Повністю синхронізована система. Чому система Плутон—Харон повністю синхронізована (планета і супутник завжди повернуті один до одного одним боком), а система Земля—Місяць ні?

7.16. Прецесія — 1. Явище вимушеної прецесії виникає у разі, якщо вісь обертання планети не перпендикулярна до площини своєї орбіти або до орбітальної площини її супутника. Зокрема, земна вісь прецесує з обох цих причин. Як відомо, внаслідок осьового обертання планета набуває форми еліпсоїда, при цьому її можна умовно поділити на сферичне тіло й екваторіальний пояс. І якщо, наприклад, рух супутника відбувається не в площині екватора планети, то припливні сили, прикладені до екваторіального поясу, прагнуть розвернути вісь обертання планети. В результаті вісь обертання описуватиме певний конус навколо орбітальної осі (рис. 12). Кутову швидкість прецесії визначають за формулою

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{3}{2}\frac{GM}{\omega r^3}\frac{C-A}{C}\cos\varepsilon,$$

де M — маса тіла, що зумовлює прецесію; r — відстань до нього; ω — кутова швидкість осьового обертання планети; C і A — відповідно моменти інерції планети відносно полярної та екваторіальної осей; ε — кут між екваторіальною і орбітальною площинами. Відношення $\frac{C-A}{C}$ називають *сталою вільної прецесії*, або *динамічним стисненням* (див. «Довідкові дані», табл. 2).

Обчисліть періоди прецесії земної осі, зумовлені:

а) Сонцем;

б) Місяцем;

в) Сонцем і Місяцем разом (так звана місячно-сонячна прецесія).

7.17. Прецесія — 2. Вільну (твердотілу або ейлерівську) прецесію планети можна розглядати як рух за конусом осі симетрії планети відносно нерухомої осі обертання. Цей рух здійснюється з частотою, пропорційною частоті осьового обертання, а коефіцієнтом пропорційності є стала вільної прецесії (див. попередню задачу), тобто

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{C-A}{C}\omega_{\text{ос}}.$$

Використовуючи формулу для кутової швидкості вимушеної прецесії з попередньої задачі, отримайте:

а) співвідношення між чотирма планетодинамічними періодами: періодом обертання планети навколо Сонця $T_{\text{орб}}$, періодом її осьового обертання $T_{\text{ос}}$, періодом вільної прецесії $T_{\text{пр}}$ та періодом вимушеної сонячної прецесії $T_{\text{пр}\odot}$, а також перевірте, чи виконується це співвідношення для Землі;

б) аналогічне співвідношення для періодів у разі, якщо прецесія зумовлена супутником планети. Перевірте його для системи Земля—Місяць.

7.18. Припливний радіус Роша — 1. Відстань, починаючи з якої притягувальне тіло руйнує інше самогравітуюче тіло, називають *припливним радіусом Роша*. Знайдіть припливний радіус планети R_p для супутника з щільністю $\rho_{\text{сп}}$. Радіус і щільність планети позначте відповідно $R_{\text{пл}}$ і $\rho_{\text{пл}}$ [20].

7.19. Припливний радіус Роша — 2. Припливний радіус Роша (див. попередню задачу) загалом було визначено для рідких тіл, рівновага яких підтримується унаслідок самогравітації. У твердих тілах рівновага забезпечується також кристалічною структурою. Визначте максимальний розмір кам'янистого астероїда зі щільністю, що дорівнює щільності Місяця, який не руйнуватиметься біля поверхні Землі. Вважайте, що внутрішні сили зчеплення астероїда дорівнюють $\sigma = 10^8$ Н/м^2.

7.20. Припливний радіус Роша — 3. Знайдіть припливний радіус Сатурна і порівняйте його з розміром кілець Сатурна. Поясніть, чому супутники від Атласа до Енцелада є всередині кілець?

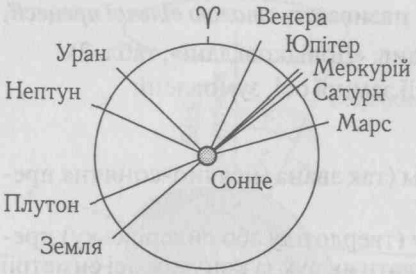


Рис. 13

7.21. Припливи і сонячна активність. Є припущення, що періодичність активності Сонця пов'язана з припливною дією на нього планет. Найбільший вплив Сонце зазнає з боку Юпітера та Венери.

Визначте, через який проміжок часу на сонячній поверхні повторюються припливи максимальної висоти. Чи близький цей проміжок часу до тривалості циклу сонячної активності?

7.22. Малий парад планет 2000 р. У травні 2000 р. відбувався так званий малий парад планет (рис. 13). Планети Венера, Меркурій, Юпітер, Сатурн і Марс розміщувались у секторі, ширина якого 16 травня не перевищувала 40°. Є припущення, що це нечасте явище (попереднє відбулося у лютому 1982 р., а наступне відбудеться у квітні 2675 р.) має катастрофічні наслідки для Землі.

Визначте розміри припливних горбів і припливне прискорення, яке зумовлюють ці планети у разі такого розміщення на Сонці та яке прискорення вони додають до припливного прискорення з боку Сонця на Землю?

Вказівка: для спрощення вважайте, що ці планети були розміщені на одній лінії.

8. МАЛІ ТІЛА СОНЯЧНОЇ СИСТЕМИ

Густеет яркое ядро,
Й уменьшается орбита,
Комета светится сердито
Сплошной пожар — её нутро!

К. Бальмонт

8.1. Голова і хвіст комети — суцільне середовище? Концентрація часточок у газовому хвості комети дорівнює $n_{хв} = 10^7 - 10^8$ м$^{-3}$, а в голові — $n_г = 10^{15} - 10^{19}$ м$^{-3}$:

а) беручи для ефективного діаметра часточок значення $d = 0{,}35$ нм (характерний розмір молекул N_2, O_2, H_2O, CO_2, CH_4), оцініть середню довжину вільного пробігу ℓ часточок у голові й хвості комети;

б) порівнюючи величину ℓ часточок з характерним розміром хвоста, який може досягати 1 а. о., і голови, що може досягати розмірів Сонця, дайте відповідь: чи можна ці утворення вважати суцільним середовищем?

в) чи можна вважати суцільним середовищем пиловий хвіст із характерною щільністю $\rho \sim 10^{-16}$ кг/м^3, якщо радіус пилинок $R_п = 0{,}3$ мкм, а їх щільність $\rho_п = 2800$ кг/м^3?

8.2. Траєкторії часточок кометного хвоста. Траєкторії часточок кометного хвоста, по яких вони рухаються навколо Сонця, зображено на рис. 14:

а) що можна сказати для кожної траєкторії про відношення сил відштовхування і притягання від Сонця [20];

б) якою буде траєкторія часточки, якщо ці сили дорівнюють одна одній?

8.3. Відстань між пилинками у хвості комети. Масу пилового хвоста комети Мркоса 1957 р. було оцінено у $2 \cdot 10^{11}$ кг. Вважаючи, що довжина видимого хвоста становила 12° на відстані 1,1 а. о. від Землі, й апроксимуючи комету конусом з діаметром основи 8°, оцініть середню відстань між пилинками, якщо радіус пилинки $R_п = 0{,}3$ мкм, а щільність $\rho_п = 2800$ кг/м^3 [20].

8.4. Скільки втрачають комети? Активність ядер комет на віддалях, більших ніж 2—2,5 а. о. від Сонця, пов'язана із сублімацією льоду з CO_2 та інших більш летких льодів, а на менших віддалях — із сублімацією водяного льоду. На відстані 1 а. о. від

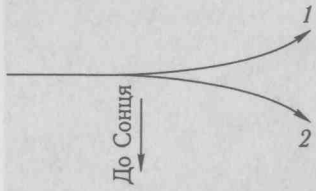


Рис. 14

Сонця швидкість сублімації водяного компонента становить $\lambda \sim 10^{22}$ молекул/(м$^2 \cdot$ с):

а) яку масу втрачає комета з перигелійною відстанню 1 а. о. під час кожного наближення до Сонця, якщо від перигелію до відстані у 2 а. о. комета з ексцентриситетом 0,9 проходить за $t = 0{,}3$ року (як цей час підрахувати, див. задачу 2.19). Для спрощення вважайте ядро комети сферичним радіусом $R = 5$ км;

б) враховуючи результат, отриманий у пункті а), оцініть, яку товщину втрачає зовнішній шар ядра комети під час кожного наближення до Сонця.

8.5. Наскільки вистачить комети Галлея? У березні 1986 р. космічні апарати «Вега-1», «Вега-2» і «Джотто» зблизилися з ядром комети Галлея і передали на Землю його зображення (фото 2). Воно виявилося крижаною брилою, вкритою темною кіркою з альбедо ≈ 4 %. Зовні ядро нагадує стоптаний черевик з довжиною великої осі близько 14 км та малих осей по 7,5 км. Його маса приблизно дорівнює $6 \cdot 10^{14}$ кг. Завдяки досить високій температурі поверхні ядра біля Сонця лід під кіркою тане і струмені пари вириваються з-під неї назовні. Разом із парою викидаються й інші гази, насамперед вуглекислий, а також пил. Поблизу перигелію ядро комети втрачає щосекунди близько 45 т газу та 5—8 т пилу:

а) визначте, яку температуру мала поверхня ядра у перигелію (осьове обертання ядра становить 53 год). Велика піввісь орбіти $a = 17{,}95$ а. о., ексцентриситет $e = 0{,}967$;

б) припускаючи швидкість втрат речовини ядра сталою упродовж 0,25 року поблизу перигелію, оцініть, наскільки вистачить комети Галлея.

8.6. Дальність викидів з комет. Із ядра комети викидається у бік Сонця зі швидкістю v_0 часточка. Відношення прискорень, зумовлених відповідно силами відштовхування і притягання від Сонця, дорівнює ζ:

а) доведіть, що часточка не віддалиться від ядра далі, ніж на відстань, що дорівнює

$$r_0 = \frac{v_0^2 r^2}{2(\zeta - 1) G M_\odot},$$

де r — відстань комети від Сонця (притяганням часточки до ядра комети знехтуйте);

б) у комети Мркоса 1957 р. максимум яскравості голови у променях NaI був на відстані $r_0 = 2000$ км від ядра у напрямку

Фото 2. Ядро комети Галлея, зафіксоване космічним апаратом «Джотто»

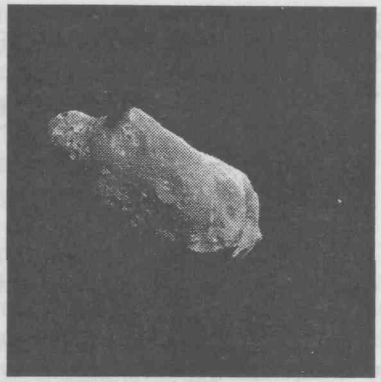


Фото 3. Астероїд Іда і його супутник Дактиль

на Сонце, коли комета була на відстані $r = 0{,}58$ а. о. від Сонця. Визначте швидкість викиду з ядра, якщо взяти значення $\zeta = 55$ [20].

8.7. Бомбардування Землі міні-кометами. За однією з гіпотез, основним джерелом кисню в атмосфері й води у верхній атмосфері може бути захоплювання Землею снігових ядер міні-комет, які приносять в атмосферу $\sim 3 \cdot 10^9$ кг води за добу (це відповідає захоплюванню, наприклад, 20 стотонних ядер міні-комет щохвилини). Загальна кількість вільного кисню в атмосфері дорівнює $1{,}2 \cdot 10^{18}$ кг. За який час захоплювання міні-комет може забезпечити оновлення всього атмосферного кисню?

8.8. Подвійні астероїди. У серпні 1993 р. американська міжпланетна станція «Галілео» на шляху до Юпітера пролетіла крізь пояс астероїдів. У зв'язку з пошкодженнями головної антени космічної станції зібрана під час польоту інформація надходила на Землю зі значною затримкою. Лише наприкінці березня 1994 р. співробітники лабораторії реактивного руху NASA у Пасадені обробили зображення астероїда № 243 Іда. Виявилось, що Іда має картоплеподібну форму (фото 3), довжина астероїда близько 56 км, а на відстані близько 100 км навколо Іди обертається крихітний супутник із поперечним розміром усього 1,5 км. У 1995 р. супутник дістав назву Дактиль.

Оцініть найбільшу можливу відстань від 50-кілометрового астероїда до його супутника — астероїда, подібного до Дактиля. Вважайте, що характерна щільність речовини астероїдів дорівнює 3000 кг/м^3.

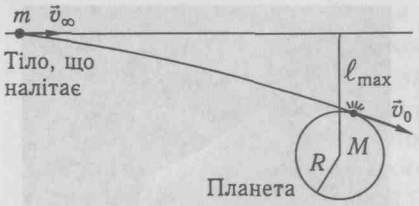


Рис. 15

8.9. Ефективний переріз зіткнення планети з космічними тілами. Ефективний переріз зіткнення планети з будь-яким космічним тілом можна визначити так:

$$\sigma = \pi \ell_{max}^2,$$

де ℓ_{max} — найбільше допустиме значення прицільного параметра (*прицільним параметром* називають висоту перпендикуляра, проведеного з центра планети на початковий напрямок дотичної до траєкторії тіла, коли воно перебувало на нескінченності (рис. 15)). Умова зіткнення полягає у нерівності $r_{min} \le R$, де r_{min} — відстань від центра планети радіусом R до найближчої точки траєкторії тіла. Величину ℓ_{max} визначають з умови $r_{min} = R$:

а) визначте ефективний переріз σ зіткнення космічного тіла масою m з поверхнею планети масою M і радіусом R;

б) як змінюється величина ефективного перерізу σ порівняно з геометричною площею перерізу Землі, якщо швидкість космічного тіла на нескінченності (див. рис. 15) дорівнює $v_\infty = 2{,}8$ км/с?

в) знайдіть величину швидкості космічних тіл на нескінченності v_∞, якщо вважати, що максимальна прицільна відстань, за якої вони ще падають на планету, дорівнює $\ell_{max} = 2R$.

Підказка до пункту а): застосуйте закон збереження енергії для системи планета—космічне тіло, припускаючи, що $m << M$, а також закон збереження моменту імпульсу для тіла відносно планети.

8.10. Зустріч з метеорним роєм. Нехай Земля зіштовхується з метеорним роєм діаметром 50 000 км. Яка частина рою впаде на Землю, якщо швидкість рою відносно Землі становить 2,8 км/с [23]?

Вказівка: див. попередню задачу.

8.11. Юпітер — поглинач космічного пилу. Як зміниться маса Юпітера у разі проходження крізь пилову хмару з середньою густиною $\rho = 10^{-13}$ кг/м^3 і товщиною вздовж напрямку руху $\ell = 10^7$ км? Швидкість Юпітера відносно пилової хмари візьміть такою, що дорівнює $v = 10$ км/с.

Вказівка: див. розв'язання задачі 8.9.

8.12. Прямолінійний рух пилинок. Пилинки у Сонячній системі зазнають дії двох сил: сили притягання до Сонця (вдалині від планет) та сили світлового тиску, пропорційної їхньому поперечному перерізу;

а) з'ясуйте, як від параметрів пилинок залежить відношення сил гравітаційного притягання до Сонця та радіаційного відштовхування від нього;

б) визначте радіус сферичних пилинок, що рухатимуться відносно Сонця прямолінійно у будь-якому напрямку. Вважайте, що пилинки мають щільність $\rho = 3000$ кг/м^3 і поглинають усе світло, що на них падає.

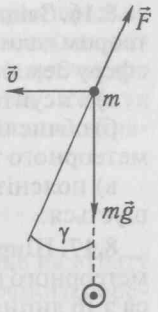


Рис. 16

8.13. Ефект Пойнтінга—Робертсона. Маленька часточка, що обертається навколо Сонця, не рухатиметься по кеплерівському еліпсу. Фотони, що випромінюються Сонцем, під час поглинання їх часточкою передають їй свій імпульс, напрямлений радіально, тоді як вектор швидкості, а отже, й імпульс часточки напрямлені по дотичній до траєкторії. Часточка зазнаватиме постійного гальмування, яке не компенсується перевипромінюванням поглинутих фотонів у всіх напрямках. Унаслідок цього в часточки зменшується момент імпульсу відносно Сонця і її траєкторія перетворюється на спіраль, спрямовану до Сонця. У системі координат, пов'язаних із часточкою, явище виглядає так: спостерігач, який рухається разом із часточкою, внаслідок аберації світла сприйматиме фотони, що надходять від Сонця, не в напрямку Сонце — часточка (рис. 16), а в напрямку вектора $\vec{F}$ — сили, зумовленої тиском світла. У разі колової орбіти вектор $\vec{F}$ створює з напрямком на Сонце кут аберації

$$\gamma = \frac{v}{c},$$

де v — швидкість часточки, c — швидкість світла.

Оцініть час падіння на Сонце залізних і пухких ($\rho = 1000$ кг/м^3) часточок радіусом 10 мкм, які перебувають поблизу орбіти Землі і обертаються навколо Сонця по коловій орбіті.

8.14. Закони розподілу метеорних часточок. Закон розподілу кількості метеорних часточок за розмірами загалом має вигляд

$$N(R)dR = N(R_0)\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\beta} dR,$$

де для часточок, що складають зодіакальне світло (радіус часточок $R \sim 1$—10 мкм), $\beta = -2{,}5$, а для більших — $\beta = -2$. Визначте закон розподілу часточок за масами [20].

8.15. Загальна кількість метеорів. Зі спостережень відомо, що у середньому на Землі реєструють 10 метеорів за годину в межах поля зору 60°, що дає на висоті 80 км площу ≈ 5000 км^2. Визначте загальну кількість метеорів, що можна спостерігати на всій Землі за добу [20].

8.16. Звідки прилітають метеорні тіла? Спостереження за метеором дали змогу виміряти швидкість його входження в атмосферу Землі, що становить 75 км/с:

а) з'ясуйте, чи належить це космічне тіло Сонячній системі;

б) обчисліть максимальну і мінімальну швидкості входження метеорного тіла в атмосферу Землі;

в) поясніть, чому наприкінці ночі кількість метеорів збільшується.

8.17. Ширина метеорного потоку. Оцініть приблизну ширину метеорного потоку Персеїд, якщо відомо, що він спостерігається з 16 липня по 22 серпня [5].

8.18. Кінетична енергія метеорної часточки. Обчисліть кінетичну енергію метеорної часточки масою 1 г, що рухається зі швидкістю 45 км/с, і порівняйте її з кінетичною енергією автомобіля, масу і швидкість якого виберіть самі. На що витрачається енергія часточки під час польоту в атмосфері Землі?

8.19. Гальмування метеороїдів в атмосфері. У разі проникнення метеороїдів в атмосферу Землі їх рух сповільнюється внаслідок обміну імпульсами між ними і молекулами повітря, з якими вони зіштовхуються. Припускаючи, що швидкість молекул повітря є малою порівняно зі швидкістю v метеороїда, доведіть, що його гальмування можна виразити формулою

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\Gamma \rho S v^2}{m},$$

де S — ефективний поперечний переріз метеороїда; m — його маса; ρ — густина повітря; Γ — числовий коефіцієнт, який залежить від того, якими є зіткнення: пружними чи ні ($\Gamma \sim 1$).

8.20. Коефіцієнт форми. Гальмування метеорного тіла в атмосфері планети пропорційне відношенню (характерному для цього тіла) ефективного поперечного перерізу тіла до його маси (див. попередню задачу). Зазвичай це відношення записують так (чіткіше видно залежність гальмування метеорного тіла від його маси і щільності):

$$\frac{S}{m} = \frac{A}{\left(m\rho^2\right)^{\frac{1}{3}}},$$

де через A позначають величину $S/V^{\frac{2}{3}}$, яку називають *коефіцієнтом форми*. Насправді форма метеорних тіл є неправильною, але часто її вважають сферичною (для тіл, що швидко обертаються, це є досить обґрунтованим). Знайдіть коефіцієнт форми для:

а) куба;

б) кулі.

8.21. Абляція метеорних тіл. Маса метеорних тіл зменшується внаслідок відколювання окремих шматочків або внаслідок випаровування. Цей процес називають *абляцією*. Враховуючи, що абляція визначається передаванням тілу енергії від молекул повітря, які з ним зіштовхуються, доведіть, що рівняння втрати маси має вигляд

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\Lambda \rho S v^3}{2q},$$

де q — питома енергія абляції, тобто енергія, що йде на втрату метеорним тілом одиниці маси; S — площа поперечного перерізу тіла; ρ — густина повітря; v — швидкість метеорного тіла. Величина Λ має значення коефіцієнта теплопередачі, оскільки через ефекти екранування молекулами, що випаровуються з тіла, не всі молекули повітря, що стикаються з тілом, передають йому свою енергію.

8.22. Як гальмується метеороїд під час абляції? Визначте, як змінюється швидкість метеороїда v (див. задачу 8.19) у земній атмосфері, якщо його маса внаслідок абляції (див. задачу 8.21) зменшується у сто разів. Вважайте, що швидкість входження в атмосферу дорівнює $v_0 = 20$ км/с, енергія для розігріву і випаровування речовини метеороїда (питому енергію абляції) — $q = 8 \cdot 10^6$ Дж/кг, а числові коефіцієнти Γ і Λ у наведених формулах близькі між собою, тобто $\Gamma \approx \Lambda$.

8.23. Умова пролітання метеороїда над Землею. Відомі випадки, коли метеороїди пролітали крізь атмосферу Землі без падіння і летіли далі у космічний простір (наприклад, 10 серпня 1972 р. спостерігався болід над штатом Вайомінг (США), мінімальна висота пролітання 58 км). Визначте, яких розмірів має бути метеороїд щільністю $\rho_м$, щоб він пролетів над поверхнею Землі без падіння. Виконайте розрахунки для $\rho_м = 2000$ кг/м^3.

Вказівка: а) атмосферу Землі вважайте однорідним шаром із характерним розміром, що дорівнює висоті однорідної атмосфери H; б) ефектами нагрівання та руйнування метеороїда знехтуйте.

8.24. Чи небезпечно потрапити під метеоритний дощ? На поверхню Землі регулярно падають поодинокі метеорити, але час від часу трапляються «метеоритні дощі», що виникають унаслідок руйнування великого метеороїда в атмосфері. За останні три століття було зафіксовано близько 60 метеоритних дощів, кожний з яких приносив від кількох десятків до кількох тисяч уламків (один із найвідоміших — Сіхоте-Алінський метеорит).

Нехай унаслідок метеоритного дощу розсіяно 1000 уламків на площі 10 км^2. Оцініть:

а) як близько від очевидця у середньонаселеній місцевості може впасти метеорит у цьому разі;

Фото 4. Кратер Берринджер в Аризоні (США)

ся в Аризоні (США). Він має діаметр 1265 м, глибину 175 м і утворився близько 25—30 тис. років тому під час падіння метеороїда масою близько 10^9 кг. Оцініть швидкість зіткнення і радіус метеороїда, якщо його щільність дорівнює ≈ 7000 кг/м^3. Границю міцності гірських порід візьміть такою, що дорівнює $\sigma = 10^7$ Н/м^2, а їх щільність $\rho = 3000$ кг/м^3.

Вказівка: див. задачу 8.27.

8.31. Причина загибелі динозаврів. Гірські породи, сформовані наприкінці крейдяного періоду, можуть бути непрямим підтвердженням «астероїдної» гіпотези загибелі динозаврів. У цих породах міститься тонкий шар Іридію, хімічного елемента, що іноді трапляється в метеоритах, але дуже рідкісного на Землі. Такий астероїд мав би бути досить великим, принаймні 10 км діаметром й мати масу, не меншу ніж 10^{16} кг. 1992 р. Д. Крілл і У. Бойнтон з університету штату Аризона (США) відкрили на півострові Юкатан у Мексиці гігантський кратер, який нині знаходиться повністю під землею. Кратер дістав назву Чиксулуб, його діаметр 180 км, утворився він саме в той час, коли вимерли динозаври, тобто 65 млн років тому.

Оцініть:

а) швидкість зіткнення, якщо межа міцності гірських порід $\sigma \approx 10^7$ Н/м^2, а їх щільність $\rho \approx 3000$ кг/м^3;

б) енергію вибуху в тротиловому еквіваленті (енергія вибуху 1 кг тротилу дорівнює 4,2 МДж).

Вказівка: див. задачу 8.27.

8.32. Кут зрушення осі обертання планети. Виведіть формулу, яка визначала б максимальний кут зрушення осі обертання планети з моментом інерції I, радіусом R і періодом осьового обертання T, як наслідок її зіткнення з астероїдом масою $m_а$ і швидкістю $v_а$. Оцініть масу космічного тіла (у масах Землі), яке могло б зрушити вісь обертання Землі на 23°26′. Вважайте, що швидкість тіла дорівнює 35 км/с [20].

8.33. Кратери на Місяці. Найпоширенішим рельєфним утворенням на поверхні Місяця є кратери:

а) чи звертали ви увагу на форму кратерів? Усі вони мають майже симетричну колову форму й усі кратери одного розміру подібні між собою. Чому це так, адже космічні тіла падали на поверхню Місяця під різними кутами?

б) як відомо, кількість місячних кратерів зменшується зі збільшенням їх розміру за степеневим законом

$$N \propto D^{-2},$$

де D — діаметр валу кратера. Поясніть, чому це так;

в) близько 150 років тривала боротьба двох гіпотез щодо утворення місячних кратерів: вулканічної та метеоритної. Нині астрономи переконані у справедливості метеоритної гіпотези. Наведіть докази на її користь.

8.34. Метеорити на Місяці. На Землі до 1998 р. було знайдено 12 метеоритів, що прилетіли до нас з Місяця і Марса (так звані SNS-метеорити). Чи можна на Місяці знайти метеорити, що прилетіли із Землі? З Марса?

Вказівка: знайдіть мінімальну швидкість падіння метеорита на Місяць.

8.35. Метеорити з Марса. Є кінцева ймовірність падіння на Землю метеоритів, що прилетіли з Марса. Причиною цього є падіння, можливо у далекому минулому, на Марс досить великого метеороїда (астероїда). Унаслідок зіткнення розлітаються уламки, які врешті-решт можуть долетіти до Землі. Щоб покинути поле тяжіння Марса, тиск вибуху в момент метеоритного удару за розрахунками має досягати $1{,}5 \cdot 10^{11}$ Па. Проте за таких тисків породи руйнуються і плавляться. Дослідження «марсіанських» метеоритів виявили, що насправді вони зазнали не більше чверті від розрахованого тиску:

а) як все-таки виникають марсіанські метеорити;

б) з якою мінімальною швидкістю мають розлітатися уламки з поверхні Марса, щоб долетіти до Землі?

8.36. Руйнування Місяця. Ударною міцністю w називають енергію, що надається тілу під час удару в розрахунку на одиницю маси, достатню для катастрофічного руйнування тіла. Катастрофічним вважають таке руйнування, під час якого найбільший фрагмент має масу, що не перевищує половини маси первісного тіла. З експериментів випливає, що ударна міцність, наприклад, для водяного льоду за 0 °С дорівнює $w_л = 13$ Дж/кг, а для базальтів та інших вивержених порід — $w_б = 400$ Дж/кг. Оцініть, яким має бути розмір астероїда щільністю $\rho = 3000$ кг/м^3, щоб за швидкості його зіткнення з поверхнею Місяця $v = 6$ км/с наш супутник зазнав катастрофічного руйнування.

8.37. Способи запобігання астероїдній небезпеці. Запропоновано чимало способів запобігання зіткненням Землі з астероїдами:

а) безпосередня механічна дія на астероїд через удар космічного апарата та передавання астероїду імпульсу;

б) вибух на астероїді, який утворює досить великий кратер так, щоб реактивний імпульс під час викидання речовини з кратера змінив траєкторію астероїда на безпечну;

в) зруйнування астероїда за допомогою ядерного заряду;

г) зміна траєкторії астероїда за допомогою двигуна великої тяги, який було доставлено на астероїд;

д) зміна траєкторії астероїда за допомогою електродвигуна малої тяги, який доставляється на астероїд;

е) зміна траєкторії за допомогою сонячного паруса;

є) фарбування поверхні астероїда.

Які із запропонованих способів є найреалістичнішими для малих ($R \leq 500$ м) і великих астероїдів, астероїдів, виявлених заздалегідь і на небезпечній відстані від Землі?

8.38. Уникнення зіткнення з астероїдом. Невеликий астероїд масою $m = 10^{13}$ кг летить у напрямку до центра Землі. Щоб уникнути катастрофи, запускається ракета з ядерним зарядом 10 Мт (тротилового еквівалента), яка влучає в астероїд перпендикулярно до напрямку його руху і вибухає. Оцініть, на якій відстані від Землі ракета має влучити в астероїд, щоб він пролетів на відстані радіуса Землі від її поверхні. Вважайте, що під час вибуху з астероїда перпендикулярно до його траєкторії вилітає уламок з $\alpha = 10^{-4}$ маси астероїда і вся енергія заряду переходить у кінетичну енергію відкинутої речовини. Вважайте також удар центральним. Енергія вибуху 1 кг тротилу дорівнює 4,2 МДж.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА ВІДПОВІДІ

1. Кінематика Сонячної системи

1.1. Коли Місяць повний — це означає, що він знаходиться у напрямку, протилежному напрямку до Сонця. Тому повний Місяць опівночі взимку має знаходитися на небі приблизно там, де Сонце — опівдні влітку. Отже, Місяць взимку вночі повторює шлях Сонця влітку вдень.

1.2. Літак має летіти на захід зі швидкістю обертання Землі на екваторі $v = 0{,}5$ км/с.

1.3. Ні, оскільки максимальна видима відстань Меркурія від Сонця дорівнює 27°. Якщо орбіту Меркурія вважати коловою, то максимальна видима відстань дорівнюватиме 23°.

1.4. Відносно Меркурія Земля є зовнішньою планетою і тому періодично буває у сполученні, протистоянні й квадратурах. Відносно Марса Земля є внутрішньою планетою і тому періодично буває у нижньому і верхньому сполученнях та елонгаціях. Найбільша кутова відстань Місяця від Землі у разі спостереження з Меркурія становить 17′, з Марса — 24′.

1.5. Кутова частота наступності сонячних діб

$$\omega_S = \omega_{ос} - \omega_{орб},$$

де $\omega_{ос}$ — частота осьового обертання планети; $\omega_{орб}$ — частота орбітального руху планети (це справедливо лише для областей з широтами, що не перевищують 90° — ε, де ε — кут відхилення осі обертання від нормалі до площини орбіти планети).

1.6. Оскільки внаслідок прецесії точка ♈ переміщується назустріч видимому річному руху Сонця, то циклічна частота наступності рівнодень є сумою частот: частоти орбітального руху Землі й частоти прецесії земної осі

$$\omega_{троп} = \omega_{орб} + \omega_{♈}.$$

Звідси

$$T_{троп} = \frac{T_{орб} T_{♈}}{T_{орб} + T_{♈}} = 3{,}1556926 \cdot 10^7 \text{ с}.$$

$T_{троп}$ менший за $T_{орб}$ на $20^m 24^s$.

1.7. а) Оскільки осьове і орбітальне обертання Землі відбувається в одному напрямку, то середня циклічна частота наступності сонячних діб є різницею частот осьового обертання Землі й наступності рівнодень

$$\bar{\omega}_S = \omega_{ос} - \omega_{троп}.$$

Тоді

$$\bar{T}_S = \frac{T_{\text{ос}} T_{\text{троп}}}{T_{\text{троп}} - T_{\text{ос}}} = 86\,400\,\text{с},$$

де $T_{\text{ос}} = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}}$; $T_{\text{троп}}$ — тривалість тропічного року, $\left(T_{\text{троп}} = 3{,}1556926 \cdot 10^7\ \text{с}\right)$;

б) $\dfrac{T_{\text{троп}}}{\bar{T}_S} = 365{,}2422^{\text{d}}$.

1.8. $T_{\text{троп}} = 235 S_{☾}$, де $S_{☾}$ — синодичний період Місяця, $S_{☾} = 29{,}53059^{\text{d}}$.

1.9. а) Із рівняння

$$\omega_S = -\omega_{\text{ос}} - \omega_{\text{орб}},$$

де $\omega_{\text{ос}}$ і $\omega_{\text{орб}}$ — частоти відповідно осьового й орбітального обертання планети, матимемо

$$T_S = -\frac{T_{\text{ос}} T_{\text{орб}}}{T_{\text{орб}} + T_{\text{ос}}} = -23^{\text{h}}52^{\text{m}}08^{\text{s}}.$$

Що означає в цьому разі знак «мінус»?

б) $\dfrac{T_{\text{троп}}}{T_S} \approx 367{,}25^{\text{d}}$;

в) якщо $\omega_{\text{ос}} = 0$, то $\omega_s = -\omega_{\text{орб}}$, або $T_s = -T_{\text{орб}}$.

1.10. Зміна частоти наставання сонячних діб

$$\omega_S = \omega_{\text{ос}} - \omega_{\text{орб}},$$

де $\omega_{\text{ос}}$ і $\omega_{\text{орб}}$ — частоти відповідно осьового й орбітального обертання, зумовлені у цьому разі тільки зміною $\omega_{\text{орб}}$, тобто

$$d\omega_S = -d\omega_{\text{орб}}.$$

Застосовуючи третій закон Кеплера

$$\omega_{\text{орб}}^2 r^3 = \text{const},$$

отримуємо

$$2\frac{d\omega_{\text{орб}}}{\omega_{\text{орб}}} = -3\frac{dr}{r}.$$

Отже,

$$d\omega_S = \frac{3}{2}\omega_{\text{орб}}\frac{dr}{r}.$$

Переходячи до періодів та кінцевих проміжків, дістанемо

$$\Delta T_S = -\frac{3}{2}\frac{T_S^2}{T_{\text{орб}}}\frac{\Delta r}{r} = -11{,}86\,\text{с}.$$

1.11. Див. «Довідкові дані», табл. 2.

1.12. За умови, що

$$\omega_{\text{ос}} = \omega_{\text{орб}},$$

де $\omega_{\text{ос}}$ і $\omega_{\text{орб}}$ — частоти відповідно осьового й орбітального обертання планети. (Це справедливо лише для областей з широтами, які не перевищують 90° — ε, де ε — кут відхилення осі обертання від нормалі до площини орбіти планети.)

1.13. Оскільки планети обертаються в одному напрямку, то циклічна частота наставання певної конфігурації є різницею частот обертання планети і Землі навколо Сонця:

$$\omega_S = \omega_{\text{пл}} - \omega_{\oplus} \text{ — для внутрішніх планет;}$$

$$\omega_S = \omega_{\oplus} - \omega_{\text{пл}} \text{ — для зовнішніх.}$$

Звідси отримуємо рівняння синодичного руху в класичному вигляді

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\text{пл}}} - \frac{1}{T_{\oplus}} \text{ — для внутрішніх планет;}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_{\text{пл}}} \text{ — для зовнішніх.}$$

1.14. $224{,}7^{\text{d}}$.

1.15. Період цього явища дорівнює синодичному періоду Марса, тобто $779{,}9^{\text{d}}$.

1.16. а) $T_{☾} = \dfrac{S_{☾} T_{\oplus}}{S_{☾} + T_{\oplus}} = 27{,}321661^{\text{d}}$;

б) $T_{S☾} = S_{☾} = 29{,}53059^{\text{d}}$.

1.17. $T_0 = \dfrac{T_n T_{♈}}{T_n + T_{♈}} = 2{,}1 \cdot 10^4$ років.

1.18. Оскільки напрямки обертань супутників навколо Марса і Марса навколо осі збігаються, то частота певної конфігурації

$$\omega_S = \omega_{\text{сп}} - \omega_{♂},$$

де $\omega_{\text{сп}}$ і $\omega_{♂}$ — частоти відповідно орбітального руху супутника й осьового обертання планети.

Звідси видимість супутників над горизонтом

$$\tau = \frac{T_S}{2} = \frac{T_{\text{сп}} T}{2(T - T_{\text{сп}})}.$$

Отже, Фобос можна спостерігати над горизонтом Марса $\tau = 5^{\text{h}}46{,}17^{\text{m}}$, а Деймос $\tau = -65^{\text{h}}\,23{,}04^{\text{m}}$. Знак «мінус» означає, що Деймос на марсіанському небі рухається назустріч обертанню Марса навколо осі, тобто він сходить на сході й заходить на заході.

1.19. На екваторі Сонце перетинає горизонт майже під прямим кутом, тому його схід триватиме $\approx \dfrac{0{,}5°}{15°/\text{год}} = 2$ хв.

На полюсі добове обертання не переміщує Сонце відносно горизонту, тому потрібно враховувати рух Сонця тільки по екліптиці. Сонце перетинає горизонт на полюсі під кутом 23,5° з кутовою швидкістю 360°/рік, тому проекція його швидкості на вертикальний напрямок становить 360°sin23,5°/рік = 0,4°/добу. Отже, схід (або захід) Сонця на полюсі триватиме 1,25 доби.

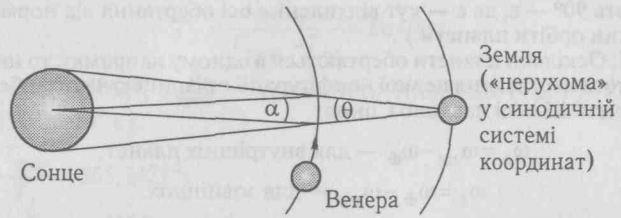


Рис. 17

1.20. Оскільки Місяць завжди повернений до Землі одним боком, то майже на усій частині його видимої півкулі Землю можна бачити постійно і вона ніколи не заходить. Проте у вузькій області вздовж межі видимого і зворотного боків Місяця можна спостерігати схід і захід Землі через невеликі погойдування (так звані лібрації) Місяця відносно напрямку на Землю. Лібрації за довготою ($\pm 7°54'$) зумовлені тим, що Місяць обертається навколо осі зі сталою швидкістю, а навколо Землі — зі змінною через еліптичність своєї орбіти. Лібрації за широтою ($\pm 6°50'$) виникають унаслідок нахилу місячного екватора до площини місячної орбіти, який дорівнює (у середньому) $6°40{,}7'$.

Оцінимо тривалість сходу Землі в районі місячного екватора (широтні лібрації можна не враховувати). Шлях, який проходить Земля на місячному небі за 27,3 доби, через довготні лібрації дорівнює $4 \times 7°54' = 31°36'$, отже, середня кутова швидкість Землі становить $1°10'$ за добу. Оскільки видимий кутовий діаметр Землі на місячному небі приблизно дорівнює $1°54'$, то «місячним людям» знадобиться не менше ніж 1,6 доби, щоб спостерігати «красивий схід блакитної кулі».

1.21. Для земного спостерігача Венера перетинає диск Сонця тоді, коли знаходиться у нижньому сполученні. При цьому відстань між нею і Землею становить 0,28 а. о. (див. «Довідкові дані», табл. 1). У цьому разі Венера проходить у своєму синодичному русі (рис. 17) дугу α, що дорівнює $\alpha \approx \theta \frac{0{,}28}{0{,}72}$, де $\theta \approx 0{,}5°$ — кутовий діаметр Сонця, видимий із Землі. Для цього потрібний час $\tau = \alpha / \omega_{S♀}$, де $\omega_{S♀}$ — кутова швидкість синодичного руху Венери $(\omega_{S♀} = 2\pi / S_♀)$. Підставляючи числові дані, матимемо $\tau \approx 7{,}6$ год.

Якщо дивитися на Сонячну систему з боку Північного полюса Землі, то і Венера, і Земля рухаються навколо Сонця проти руху годинникової стрілки (так, як зображено на рис. 17). При цьому Венера рухається швидше, ніж Земля. Тому диск Сонця Венера перетинатиме зліва направо або зі сходу на захід.

1.22. Застосовуючи третій закон Кеплера, для великої півосі орбіти комети матимемо $a = 1{,}588$ а. о. ≈ 238 млн км. З рівняння

$$r_П + r_A = 2a,$$

де $r_П$ і r_A — відповідно перигелійна й афелійна відстані комети, отримуємо $r_П < 0$, що неможливо. Отже, параметри орбіти комети, вигадані Ж. Верном, не узгоджені між собою.

1.23. Для двох планет отримуємо:

а) $\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}}$.

1.24. а) Оскільки кутові розміри Сонця і Місяця для спостерігача на Землі однакові, то можна обчислити висоту конуса місячної тіні за формулою

$$h \approx 57{,}3° \frac{2R_☾}{\theta_☾},$$

де $R_☾$ — радіус Місяця; $\theta_☾$ — його кутовий діаметр, у градусах. Дістанемо $h = 398\,350$ км, що ненабагато більше середньої відстані між Місяцем і Землею $r_{⊕☾} = 384\,400$ км. Тоді середнє значення діаметра місячної тіні на Землі становитиме

$$d = \frac{(h - r_{⊕☾} + R_⊕)\ \theta_☾}{57{,}3°} = 180 \text{ км},$$

де $R_⊕$ — радіус Землі;

б) оскільки щоразу смуга затемнення покриває випадкову область на Землі, то, використовуючи поняття геометричної ймовірності, для періоду затемнень у визначеному місці матимемо

$$T = \frac{4\pi R_⊕^2}{\nu l d},$$

де $\nu = 1$ рік$^{-1}$ — середня частота сонячних затемнень; l — довжина смуги затемнення; d — діаметр місячної тіні. Враховуючи результат пункту а), отримуємо $T = 250$ років;

в) під час сонячного затемнення місячна тінь рухається по поверхні Землі приблизно з орбітальною швидкістю Місяця, що у середньому дорівнює 1 км/с. Тому літак має летіти з такою самою швидкістю у східному напрямку.

1.25. Сонячне затемнення може спостерігатись у тому разі, якщо кутовий розмір супутника буде не меншим, ніж кутовий розмір Сонця $\theta_⊙$, видимий з планети, тобто при $\theta_{сп} \geq \theta_⊙$. Для Марса $\theta_⊙ \approx \approx 0{,}5° / 1{,}52 = 19{,}7'$.

Спостережуваний з поверхні Марса кутовий розмір супутника (у хвилинах дуги) через його маленьку величину можна обчислити за формулою

$$\theta_{сп} = 3438' \frac{D}{r - R},$$

де D — характерний розмір супутника; r — відстань між супутником і планетою; R — радіус Марса. Оскільки Фобос і Деймос через приливну взаємодію з планетою зорієнтовані на Марс своїми великими осями, то їх максимальні кутові розміри становлять (див. «Довідкові дані», табл. 8):

$$\theta_Ф = 3438' \frac{21 \text{ км}}{9354 \text{ км} - 3398 \text{ км}} \approx 12';$$

$$\theta_Д = 3438' \frac{12\ км}{23\,460\ км - 3398\ км} \approx 2'.$$

Отже, умова затемнення не виконується ні для Фобоса, ні тим більше для Деймоса, тому повних сонячних затемнень на Марсі немає.

1.26. Умовою повного сонячного затемнення на будь-якій планеті є виконання нерівності $\theta_{сп} \geq \theta_{\odot}$, де $\theta_{сп}$ і $\theta_{\odot}$ — кутові розміри відповідно супутника планети і Сонця, видимих з планети.

Очевидно, що

$$\theta_{сп} = 3438' \frac{D}{r - R_{пл}} \text{ (у мінутах дуги)},$$

де D — діаметр супутника; r — відстань між супутником і планетою; $R_{пл}$ — радіус планети. Кутовий розмір Сонця становить

$$\theta_{\odot} = \frac{30'}{r_{\odot пл}\,(а.\ о.)},$$

де $r_{\odot пл}$ — відстань планети від Сонця в астрономічних одиницях.

Ураховуючи віддаленість від Сонця і параметри супутників (див. «Довідкові дані»), розглянемо найближчих конкурентів: системи Нептун—Тритон і Плутон—Харон. Для цих систем $\theta_{\odot} \leq 1'$. Кутовий діаметр Тритона становить $\theta_{Тр} = 28'$, а Харона — $\theta_X = 224'$, що у вісім разів більше. Орбітальна швидкість, яка зумовлює швидкість переміщення тіні від супутника по поверхні планети, у Тритона також вища, отже, сонячні затемнення у системі Плутон—Харон є найдовшими у Сонячній системі.

2. Динаміка Сонячної системи

2.1. Сили тертя, що виникають у результаті дії вітрів та океанських течій на Землю, є внутрішніми силами. За третім законом Ньютона, сумарний момент усіх внутрішніх сил дорівнює нулю. Отже, вітри й течії у середньому не гальмують рух Землі і не прискорюють його.

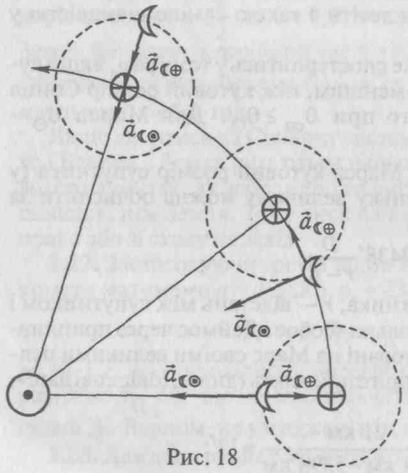


Рис. 18

2.2. Центр мас системи Сонце—Юпітер знаходиться від центра Сонця на відстані

$$r_0 = \frac{Mr}{M_{\odot} + M} = 7{,}4 \cdot 10^8\ м,$$

де $M_{\odot}$ і M — маси відповідно Сонця і Юпітера; r — відстань між Сонцем і Юпітером. Отриманий результат дещо перевищує радіус Сонця.

2.3. Загалом

$$\vec{a} = \vec{a}_{☾⊕} + \vec{a}_{☾\odot},$$

де $\vec{a}_{☾⊕}$ — прискорення Місяця, зумовлене Землею; $\vec{a}_{☾\odot}$ — прискорення Місяця, зумовлене Сонцем. У шуканих конфігураціях напрямки цих прискорень — різні (рис. 18). Оскільки орбіта Місяця за умовою задачі вважається коловою, то можна обчислити величину доцентрового прискорення $a_{☾⊕}$:

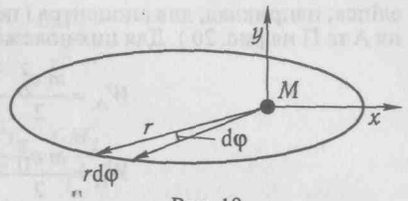


Рис. 19

$$a_{☾⊕} = \frac{4\pi^2 r_{☾⊕}}{T^2} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-3}\ м/с^2.$$

Під час обчислювання доцентрового прискорення $a_{☾\odot}$, зумовленого Сонцем, можна знехтувати відстанню Місяця від Землі порівняно з відстанню Землі від Сонця. Тоді

$$a_{☾\odot} \approx \frac{4\pi^2 r_{⊕\odot}}{T_⊕^2} \approx 6 \cdot 10^{-3}\ м/с^2.$$

Отже:

а) $a = a_{☾\odot} - a_{☾⊕} = 3 \cdot 10^{-3}\ м/с^2$ і спрямоване до Сонця;

б) $a = \sqrt{a_{☾⊕}^2 + a_{☾\odot}^2} = 6{,}6 \cdot 10^{-3}\ м/с^2$ і спрямоване під кутом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a_{☾⊕}}{a_{☾\odot}} \approx 24{,}2°$ до лінії Місяць—Сонце;

в) $a = a_{☾⊕} + a_{☾\odot} = 8{,}7 \cdot 10^{-3}\ м/с^2$ і спрямоване до Сонця.

2.4. Закон збереження моменту імпульсу в полярних координатах (початок координат розміщений у тому фокусі еліпса, де знаходиться масивне тіло, див. рис. 19) має вигляд

$$J = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}.$$

Вираз $\frac{1}{2} r r d\varphi$ є площею dS трикутника (сектора), утвореного двома нескінченно близькими радіусами-векторами та елементом дуги траєкторії. Тоді

$$J = 2m \frac{dS}{dt} = \text{const},$$

де $\frac{dS}{dt}$ — називають секторіальною швидкістю. Отже, збереження моменту імпульсу означає постійність секторіальної швидкості — за однакові проміжки часу радіус-вектор тіла, яке рухається, описує рівні площі, що і становить зміст другого закону Кеплера.

2.5. Оскільки під час руху тіла m його повна механічна енергія W зберігається, то її можна обчислити для таких положень тіла m, де його радіус-вектор і швидкість найпростіше виражаються через параметри

еліпса, наприклад, для апоцентра і перицентра (відповідно положення А та П на рис. 20). Для цих положень дістанемо

$$W_A = \frac{m v_A^2}{2} - \frac{GMm}{r_A};$$

$$W_П = \frac{m v_П^2}{2} - \frac{GMm}{r_П}.$$

Із закону збереження моменту імпульсу випливає

$$v_A r_A = v_П r_П.$$

Прирівнюючи $W_A = W_П$ і, враховуючи, що $r_A = a(1+e)$ та $r_П = a(1-e)$ остаточно отримаємо

$$W = -\frac{GMm}{2a}.$$

Зверніть увагу, що результат не залежить від ексцентриситету. З іншого боку, велика піввісь орбіти залежить тільки від енергії і не залежить від моменту імпульсу тіла, що рухається.

2.6. а) Період обертання є часом, за який тіло здійснює один повний оберт, тобто

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Швидкість руху v по орбіті можна знайти, використовуючи формулу для доцентрового прискорення

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}.$$

Остаточно отримуємо

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3.$$

Цей вираз відповідає третьому закону Кеплера: квадрат періоду є пропорційним кубу великої півосі орбіти (у разі колової орбіти — кубу її радіуса);

б) якщо замінити період T циклічною частотою обертання по орбіті ω, то третій закон Кеплера набуває лаконічного вигляду

$$\omega^2 r^3 = GM.$$

2.7. Оскільки, обертаючись навколо центра мас, ці тіла весь час перебувають на одній прямій, що з'єднує ці тіла і проходить крізь центр мас (див. рис. 1), то періоди обертання обох тіл однакові й можна записати $T_1 = T_2 = T$. Для першого тіла дістанемо

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1}.$$

Це тіло рухається з доцентровим прискоренням

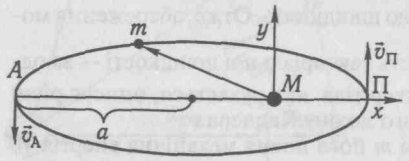


Рис. 20

$$\frac{v_1^2}{r_1} = \frac{GM_2}{r^2},$$

де $r = r_1 + r_2$.

Звідси отримуємо

$$\frac{4\pi^2 r_1}{T^2} = \frac{GM_2}{r^2}.$$

Аналогічно для іншого тіла знаходимо

$$\frac{4\pi^2 r_2}{T^2} = \frac{GM_1}{r^2}.$$

Підсумовуючи дві останні рівності, остаточно отримуємо

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} r^3.$$

Порівняйте з результатом попередньої задачі.

2.8. а) Для еліптичної орбіти ексцентриситет $0 < e < 1$. Зі співвідношення між ексцентриситетом і фізичними параметрами системи випливає, що це можливо тоді, коли $W < 0$.

При $e = 0$ еліпс перетворюється на коло. При цьому повна енергія тіла, що обертається, має найменше значення

$$W = -\frac{m}{2}\left(\frac{GMm}{J}\right)^2.$$

Для параболи $e = 1$. Отже, тіло рухатиметься по параболічній траєкторії тільки за умови, якщо $W = 0$, тобто у разі рівності його кінетичної та потенціальної енергій.

Якщо $W > 0$, то ексцентриситет $e > 1$, тобто траєкторія є гіперболою;

б) інтегруючи рівність $J = 2m\frac{dS}{dt}$ за часом від нуля до T, отримуємо

$$JT = 2mS,$$

де S — площа орбіти. Для еліпса $S = \pi ab$, де b — мала піввісь. Використовуючи відомі формули аналітичної геометрії, дістанемо

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{GMm}{2|W|}, \quad b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{J}{\sqrt{2m|W|}}.$$

Тут ураховано, що для еліптичної орбіти $W < 0$. За допомогою цих формул остаточно знаходимо

$$T^2 = \frac{(\pi GM)^2 m^3}{2|W|^3} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

Слід зазначити, що період обертання тіла залежить від його енергії і не залежить від моменту імпульсу.

2.9. Перший спосіб. Використовуючи розв'язання задачі 2.7 до системи Земля—Місяць, отримуємо

$$M_{☾} = \frac{4\pi^2 a_{\oplus☾}^3}{GT_{☾}^2} - M_{\oplus},$$

де $a_{\oplus☾}$ — велика піввісь орбіти Місяця; $M_{\oplus}$ — маса Землі; $T_{☾}$ — період обертання Місяця навколо Землі.

Другий спосіб. Можна запустити штучний супутник Місяця і визначити його період обертання T і велику піввісь його орбіти a. Тоді, нехтуючи масою супутника порівняно з масою Місяця, матимемо

$$M_{☾} = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}.$$

2.10. Третій закон Кеплера застосовний за ступеня однорідності $k = -1$, що виконується у гравітаційних (ньютонівських) і електростатичних (кулонівських) полях, оскільки потенціальна енергія у цих випадках обернено пропорційна відстані між тілами, що взаємодіють.

2.11. Нехай $r' = kr$ і $R' = kR$. Оскільки $\rho \infty \frac{M}{R^3}$, а за умовою задачі $\rho' = \rho$, то з рівності

$$\frac{M'}{R'^3} = \frac{M'}{k^3 R^3} = \frac{M}{R^3}$$

отримуємо, що $M' = k^3 M$.

Отже,

$$T'^2 = \frac{4\pi^2 r'^3}{GM'} = \frac{4\pi^2 r^3}{GM},$$

тобто орбітальні періоди усіх тіл Сонячної системи залишилися б незмінними.

2.12. Враховуючи розв'язання задачі 2.5, матимемо

$$a = \frac{GM}{2}\frac{m}{|W|}.$$

Тоді за третім законом Кеплера отримуємо

$$T^2 = \frac{(\pi GM)^2}{2}\left(\frac{m}{|W|}\right)^3,$$

тобто період залежить тільки від відношення m до $|W|$.

2.13. У разі руху невеличкого тіла масою m навколо масивного тіла масою M, застосовуючи закон збереження повної механічної енергії W, отримаємо

$$v^2 = \frac{2}{m}\left(W + \frac{GMm}{r}\right),$$

де r — відстань між тілами. Для еліптичних орбіт (див. задачу 2.5)

$$W = -\frac{GMm}{2a},$$

де a — велика піввісь. Отже,

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

2.14. Згідно з результатом попередньої задачі для перигелію, де $r_{\Pi} = a(1-e)$, орбітальну швидкість визначатимемо за формулою

$$v_{\Pi} = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}.$$

Для афелію, де $r_{\text{A}} = a(1+e)$, відповідно

$$v_{\text{A}} = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}.$$

Тоді

а) $v_{\Pi} = 30{,}4$ км/с; $v_{\text{A}} = 29{,}3$ км/с;

б) $v_{\Pi} = 58{,}9$ км/с; $v_{\text{A}} = 38{,}7$ км/с;

в) $v_{\Pi} = 6{,}1$ км/с; $v_{\text{A}} = 3{,}7$ км/с.

2.15. Використовуючи розв'язання попередньої задачі, дістанемо

$$\frac{v_{\Pi}}{v_{\text{A}}} = \frac{1+e}{1-e} = 3,$$

звідси $e = 0{,}5$.

2.16. а) $W_{☾} = 3{,}8 \cdot 10^{28}$ Дж;

б) $W_{\text{В}} = 3{,}0 \cdot 10^{33}$ Дж;

в) $W_{\text{Ю}} = 1{,}6 \cdot 10^{35}$ Дж;

г) $\frac{W_{☾}}{W_{\oplus}} = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$; $\frac{W_{\text{В}}}{W_{\oplus}} = 1{,}1$; $\frac{W_{\text{Ю}}}{W_{\oplus}} = 59$.

2.17. Повна енергія планети масою m дорівнює

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM_{\odot}m}{r},$$

де v — орбітальна швидкість планети; r — відстань до Сонця.

У разі руху по колу планета зазнає доцентрового прискорення, що дорівнює прискоренню вільного падіння на Сонце:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM_{\odot}}{r^2}.$$

Тоді

$$W = -\frac{GM_{\odot}m}{2r} = -W_k.$$

У разі руху по еліпсу міркуватимемо так. Нехай $\vec{p}$ — імпульс планети, $\vec{r}$ — радіус-вектор планети відносно Сонця. Тоді

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{p}\vec{r}) = (\vec{F}\vec{r}) + (\vec{p}\,\vec{v}) = -\frac{GM_{\odot}m}{r} + mv^2 = W_p + 2W_k = W + W_k,$$

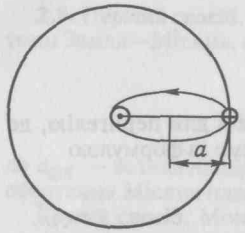


Рис. 21

де W_p — потенціальна енергія планети. Для періодичного руху середнє за часом значення $\frac{d}{dt}(\vec{p}\vec{r})$ дорівнює нулю, звідси і випливає потрібний результат $\bar{W}+\bar{W}_k=0$.

2.18. Мінімальну роботу з переміщення маси m із Землі на Місяць можна знайти як різницю потенціальних енергій цього тіла на поверхні Місяця і Землі відповідно:

$$A=-\frac{GM_{☾}m}{R_{☾}}-\left(-\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}}\right)=6\cdot10^7 \text{ Дж}.$$

2.19. Використовуючи відоме параметричне подання залежності радіуса-вектора r тіла, що рухається по еліптичній орбіті з великою піввіссю a, від часу t, отримуємо

$$r=a(1-e\cos\xi),\quad t=\sqrt{\frac{a^3}{GM_{\odot}}}(\xi-e\sin\xi)$$

(у момент $t=0$ тіло перебуває у перигелію). Повному оберту по еліпсу відповідає зміна параметра ξ від нуля до 2π.

За допомогою наведених формул визначаємо $t=82{,}3^{\text{d}}$.

2.20. а) Це досить грубе наближення дає

$$t=\sqrt{\frac{2r_{\oplus\odot}^3}{GM_{\odot}}}\approx82^{\text{d}};$$

б) траєкторією руху буде половина еліпса (з ексцентриситетом майже одиниця), велика піввісь якого пов'язана з відстанню до Сонця очевидним співвідношенням $a=\frac{r_{\oplus\odot}}{2}$ (рис. 21). Шуканий час — це половина періоду обертання по еліпсу $t=\frac{T}{2}$. Застосовуючи третій закон Кеплера і нехтуючи масою зонда порівняно з масою Сонця, отримуємо

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_{\oplus\odot}^3}{2GM_{\odot}}}\approx65^{\text{d}};$$

в) запишемо рівняння руху зонда

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{GM_{\odot}}{r^2}.$$

Помноживши ліву і праву частини цього рівняння на $\frac{dr}{dt}$, дістанемо перший інтеграл

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{GM_{\odot}}{r}+\text{const}.$$

Константу інтегрування визначаємо з умови: $\frac{dr}{dt}=0$, якщо $r=r_{\oplus\odot}$. Отримуємо

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{2GM_{\odot}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{\oplus\odot}}\right)}.$$

Зверніть увагу, що константу інтегрування можна перетворити на нуль, поставивши вимогу $\frac{dr}{dt}=0$, якщо $r\to\infty$. Тоді

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{r}}.$$

Отримано дуже важливий результат: якщо тіло починає свій рух зі стану спокою на нескінченності, то воно рухається з характеристичною швидкістю кеплерівського руху — параболічною швидкістю.

Проте повернімося до нашої задачі. Розділяючи змінні та вводячи заміну $\sqrt{r}=x$, приходимо до відомого інтеграла за змінною x:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}+\text{const}.$$

Підставляючи межі інтегрування, остаточно отримуємо такий самий результат, як і в пункті б).

2.21. Якщо скористатися точним розв'язанням попередньої задачі, то

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_{☾\oplus}^3}{2GM_{\oplus}}}\approx4{,}8^{\text{d}}.$$

2.22. Використовуючи формулу

$$v=\sqrt{GM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}.$$

врахуємо, що для випадку колової орбіти $r=a$. Тоді формула для колової швидкості на цій відстані r від планети набирає вигляду

$$v_{\text{кол}}=\sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Для параболічної траєкторії $a\to\infty$. Тоді параболічну швидкість на цій відстані r від планети визначаємо за формулою

$$v_{\text{пар}}=\sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

2.23. Відцентрова сила дорівнює

$$F_{\text{в}}=\frac{mv^2}{r},$$

гравітаційна —

$$F_g=G\frac{Mm}{r^2}.$$

Колову швидкість називають *першою космічною* v_{I}, якщо радіус орбіти r збігається з радіусом планети R, навколо якої обертається космічний корабель, тобто якщо $r = R$. Інакше кажучи, це швидкість, яку потрібно надати кораблю на поверхні планети в горизонтальному напрямку, щоб вивести його на колову орбіту над самою поверхнею.

2.24. Із умови

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = 0,$$

$$v_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Якщо $r = R$, де R — радіус планети, то параболічну швидкість називають *другою космічною*. Інакше кажучи, це швидкість, яку потрібно мати на поверхні будь-якого космічного тіла, щоб покинути його назавжди («швидкість вислизання»).

2.25. Щоб визначити середню щільність речовини планети потрібно перейти на якомога нижчу колову орбіту навколо цієї планети і скористатися третім законом Кеплера

$$\frac{T^2 M_{\text{пл}}}{R_{\text{пл}}^3} = \frac{4\pi^2}{G},$$

де взято, що радіус орбіти приблизно дорівнює радіусу планети $R_{\text{пл}}$. Тоді

$$\bar{\rho} = \frac{3\pi}{GT^2}.$$

2.26. Для того щоб це зробити за $t = 2$ години, всюдихід має рухатися зі швидкістю

$$v = \frac{2\pi R}{t} = 4{,}36 \text{ м/с} \approx 15{,}7 \text{ км/год}.$$

Проте ця швидкість не може перевищувати першу космічну швидкість, яка для цього астероїда дорівнює

$$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 4{,}18 \text{ м/с} \approx 15{,}0 \text{ км/год},$$

оскільки всюдихід відірветься від поверхні астероїда. Отже, космонавти не зможуть об'їхати астероїд за 2 години.

2.27. Мінімальний час обльоту буде у разі польоту над самою поверхнею. Тоді радіус орбіти приблизно дорівнюватиме радіусу космічного тіла, навколо якого здійснюється політ. Отже, для Місяця

$$T_{\min ☾} = \frac{2\pi R_☾}{v_{\mathrm{I}☾}},$$

де $v_{\mathrm{I}☾}$ — перша космічна швидкість

$$v_{\mathrm{I}☾} = \sqrt{\frac{GM_☾}{R_☾}}.$$

Отже,

$$T_{\min ☾} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\bar{\rho}_☾}} = 1{,}8^{\text{h}}.$$

Аналогічно для Землі

$$T_{\min ☾} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\bar{\rho}_{\oplus}}} = 1{,}5^{\text{h}}.$$

Виявляється, що розміри космічного тіла, навколо якого здійснюється політ, не мають значення. Мінімальний час обльоту залежить тільки від середньої щільності космічного тіла. Оскільки $\bar{\rho}_☾ < \bar{\rho}_{\oplus}$, то мінімальний час обльоту Місяця має бути більшим.

2.28. На відстані r від центра Землі предмет зазнає притягання тільки від тієї частини планети, що знаходиться всередині кулі радіусом r. Тоді він рухається з прискоренням

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2},$$

де $M(r)$ — маса кулі радіусом r, яка у разі однорідного розподілу речовини дорівнює

$$M(r) = M_{\oplus}\left(\frac{r}{R_{\oplus}}\right)^3.$$

Отже,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^3} r,$$

тобто на предмет діє сила, що повертає його, і яка прямо пропорційна зміщенню r від положення рівноваги — центра Землі (закон Гука). Отримане рівняння є рівнянням гармонічних коливань з періодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_{\oplus}^3}{GM_{\oplus}}}.$$

Супутник, що рухається над самою поверхнею Землі, обертається з першою космічною швидкістю v_{I}, отже,

$$T_{\text{сп}} = \frac{2\pi R_{\oplus}}{v_{\mathrm{I}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_{\oplus}^3}{GM_{\oplus}}}.$$

Твердження доведено.

Насправді до центра Землі щільність збільшується. Для спрощення можна розглянути інший випадок, коли вся маса Землі зосереджена в її центрі. Тоді рівняння руху матиме вигляд

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM_{\oplus}}{r^2}.$$

Саме за таким рівнянням описують рух усіх тіл Сонячної системи (кеплерівський рух). Інтегруючи його для періоду коливань, отримуємо вираз

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_{\oplus}^3}{2GM_{\oplus}}},$$

що у $\sqrt{2}$ менше, ніж у попередньому випадку. Таким чином, для реальної Землі період коливань знаходитиметься між цими граничними випадками і, отже, насправді він буде меншим від періоду обертання супутника, що рухається над самою поверхнею Землі.

2.29. Для того щоб покинути Деймос назавжди, космонавт у момент відриву від поверхні має розвинути другу космічну швидкість, яка для Деймоса становить

$$v_{\text{II}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 6{,}3 \text{ м/с}.$$

Оскільки початкова швидкість стрибка мало залежить від сили гравітації, то можна вважати, що космонавт стрибатиме з такою самою початковою швидкістю, як і на Землі. Вертикальну складову швидкості стрибуна на Землі можна оцінити за відомою формулою

$$v_0 = \sqrt{2g_{\oplus}h},$$

де h — висота, на яку піднімається центр ваги у стрибку. Розумною оцінкою є $h = 1$ м. Тоді $v_0 = 4{,}4$ м/с.

Виявляється, що $v_{\text{II}} > v_0$, але не набагато. Тому, якщо космонавт перед стрибком розбіжиться, то він (за наявності достатньої фізичної підготовки) зможе покинути Деймос назавжди.

2.30. Маса Землі має зменшитися не менше ніж удвічі.

2.31. Ні, оскільки сучасна швидкість руху Землі по майже коловій орбіті точно дорівнюватиме параболічній швидкості на цій відстані від «нового» Сонця. Доведіть це математично.

Унаслідок помітної еліптичності своїх орбіт Меркурій, Марс і Плутон зможуть зберегтися біля Сонця, якщо на момент зменшення його маси знаходитимуться поблизу своїх афеліїв.

2.32. Сонячна система зруйнувалася б. Можна було б гадати, що гравітаційним центром став би Юпітер, але він не зміг би утримати інші планети. Це видно хоча б з того, що Юпітер і зараз помітно не впливає на будь-яку планету.

Наприклад, розглянемо його найближчих сусідів — Марс і Сатурн. Юпітер зміг би утримати ці планети, якби швидкості їх відносно Юпітера були меншими від параболічної швидкості в його полі гравітації. У момент зникнення Сонця швидкості планет залишилися б колишніми. Тоді відносні швидкості Марса і Сатурна $v'_{\text{М}}$ і $v'_{\text{С}}$ відповідно дорівнюють (див. «Довідкові дані»)

$$v'_{\text{М}} = |v_{\text{М}} - v_{\text{Ю}}| = 11 \text{ км/с},$$
$$v'_{\text{С}} = |v_{\text{С}} - v_{\text{Ю}}| = 3{,}5 \text{ км/с}.$$

Параболічну швидкість розрахуємо для мінімальних відстаней планет від Юпітера

$$v_{\text{пар1}} = \sqrt{\frac{2GM_{\text{Ю}}}{r_{\text{МЮmin}}}} = 0{,}68 \text{ км/с},$$

$$v_{\text{пар2}} = \sqrt{\frac{2G(M_{\text{Ю}} + M_{\text{С}})}{r_{\text{СЮmin}}}} = 0{,}72 \text{ км/с}.$$

Таким чином, відносні швидкості навіть найближчих до Юпітера планет набагато більші, ніж параболічні швидкості на відповідних відстанях. Отже, розрахунки підтвердили, що Юпітер не зміг би запобігти руйнуванню Сонячної системи.

2.33. $J = M\sqrt{GM_{\odot}r}$.

2.34. Орбітальний момент Землі дорівнює

$$J_{\text{орб}} = M_{\oplus}v_{\oplus}r_{\oplus\odot} \approx 2{,}7\cdot10^{40} \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}.$$

Власний обертальний момент, припускаючи, що Земля — однорідний шар, становить

$$J_{\text{ос}} = \frac{2}{5}M_{\oplus}R_{\oplus}^2\frac{2\pi}{T_{\oplus}} \approx 7{,}1\cdot10^{33} \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}.$$

2.35. а) Результати подамо у такому вигляді:

Планета	$J_{\text{орб}}\cdot10^{39}$ кг·м²/с
Меркурій	0,9
Венера	18,5
Земля	26,7
Марс	3,6
Юпітер	19 372,4
Сатурн	7858,6
Уран	1698,4
Нептун	2520,8
Плутон	0,3

б) оскільки власний обертальний момент наймасивнішої, найбільшої планети і такої, що швидше від інших обертається навколо своєї осі, дорівнює $6{,}7\cdot10^{38}$ кг·м²/с, то зрозуміло, що власними обертальними моментами планет можна знехтувати порівняно з їхніми орбітальними;

в) припускаючи, що Сонце обертається як однорідне тверде тіло з кутовою швидкістю, яка спостерігається на екваторі, його обертальний момент дорівнює $1{,}1\cdot10^{42}$ кг·м²/с, що становить лише 3 % моменту імпульсу Сонячної системи. У цьому і полягає проблема. Вважається, що під час утворення планетної системи момент певним чином був переданий від Сонця планетам.

2.36. Визначаємо момент імпульсу кільця через його момент інерції

$$J_{\text{к}} = \int r^2\omega dm = \int_{r_1}^{r_2} r^2\left(\frac{GM}{r^3}\right)^{\frac{1}{2}} 2\pi r\rho dr,$$

де зроблено перехід від ω до r за допомогою третього закону Кеплера (див. задачу 2.6)

$$\omega^2 r^3 = GM,$$

а M — маса планети. Орбітальний момент імпульсу супутника дорівнює

$$J_{\text{сп}} = \int r_0^2 \omega_0 dm = \sqrt{GMr_0} \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \rho dr.$$

Оскільки момент імпульсу зберігається, то $J_{\text{к}} = J_{\text{сп}}$. Проінтегрувавши, отримуємо

$$r_0 = \frac{16}{25}\left(\frac{r_2^{\frac{5}{2}} - r_1^{\frac{5}{2}}}{r_2^2 - r_1^2}\right)^2.$$

2.37. Кінетична енергія дорівнює

$$W_k = \frac{J^2}{2Mr^2},$$

потенціальна —

$$W_p = -\frac{J^2}{Mr^2},$$

повна —

$$W = -\frac{J^2}{2Mr^2}.$$

Звідси випливає, що

$$W = -W_k = \frac{W_p}{2}.$$

2.38. Нехай x — відстань від центра Землі до шуканої точки на лінії Земля—Місяць. Рівновага сил у цій точці приводить до рівняння

$$\frac{81}{x^2} = \frac{1}{(60R_\oplus - x)^2},$$

розв'язавши яке, отримуємо два корені: $x_1 = 54R_\oplus$; $x_2 = 67{,}5R_\oplus$. Щоб з'ясувати, де перебуває положення рівноваги, нарисуйте вектори сил, прикладені до пробного тіла у цих точках. Очевидно також, що це не буде положенням стійкої рівноваги.

Унаслідок руху Місяця космічний корабель не зміг би зависнути навіть у першій точці. Щоб надовго зберігати нерухомість у цій точці по відношенню до Землі й Місяця, корабель має рухатися з такою самою кутовою швидкістю, як і система Земля—Місяць.

2.39. а) Оскільки шукана поверхня симетрична відносно лінії Земля—Сонце (вісь x), то достатньо знайти переріз цієї поверхні площиною $x0y$, тобто рівняння плоскої кривої вигляду $f(x, y) = 0$.

Умова рівноваги сил притягання пробного тіла до Землі й Сонця має вигляд

$$\frac{M_\oplus}{r_\oplus^2} = \frac{M_\odot}{r_\odot^2},$$

де, згідно з рис. 4,

$$r_\oplus^2 = x^2 + y^2, \quad r_\odot^2 = (x - a_\oplus)^2 + y.$$

Після перетворень отримуємо рівняння сфери притягання

$$\left(x + \frac{M_\oplus}{M_\odot - M_\oplus} a_\oplus\right)^2 + y^2 = \frac{M_\odot M_\oplus}{(M_\odot - M_\oplus)^2} a_\oplus^2$$

радіуса

$$r_0 = a_\oplus \sqrt{\frac{M_\odot M_\oplus}{(M_\odot - M_\oplus)^2}} \approx a_\oplus \sqrt{\frac{M_\oplus}{M_\odot}} \approx 259\,000 \text{ км}.$$

Центр сфери зміщений по осі x від центра Землі на відстань

$$x_c = -\frac{M_\oplus}{M_\odot - M_\oplus} a_\oplus \approx -\frac{M_\oplus}{M_\odot} a_\oplus = -449 \text{ км},$$

де знак «мінус» означає, що центр зміщений у бік, протилежний напрямку до Сонця.

Виявляється, що радіус сфери притягання навіть менший, ніж відстань між Землею і Місяцем;

б) відношення сил притягання Місяця Сонцем і Землею дорівнює

$$\frac{F_{☾\odot}}{F_{☾\oplus}} = \frac{M_\odot}{M_\oplus}\left(\frac{a_☾}{a_\oplus}\right)^2 = 2{,}2;$$

в) прискорення, що надається Місяцю Землею, становить (див. задачу 2.3)

$$a = \frac{GM_\oplus}{a_☾^2} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Різниця прискорень, що надаються Сонцем Місяцю і Землі відповідно, дорівнює у новий Місяць

$$\Delta a = \frac{GM_\odot}{(a_\oplus - a_☾)^2} - \frac{GM_\odot}{a_\oplus^2} \approx \frac{2GM_\odot}{a_\oplus^3} a_☾ \approx 3{,}1 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2.$$

Оскільки $\Delta a << a$, то Місяць, незважаючи на результати, отримані у пунктах а) і б), залишається супутником Землі.

2.40. Використовуючи відому формулу Ейнштейна, отримуємо

$$m = \frac{|W_p|}{c^2},$$

де $W_p = -\frac{GM_\oplus M_☾}{a_☾}$ — потенціальна енергія системи Земля—Місяць.

За розрахунками $m = 8{,}5 \cdot 10^{11}$ кг. Маса системи Земля—Місяць має бути на цю величину менша, ніж сума мас обох тіл. Саме ця різниця маси й утримує Місяць біля Землі.

2.41. За другим законом Ньютона сила дорівнює

$$F = \frac{d(mv)}{dt}.$$

За одиницю часу на одиницю площі диска Меркурія випадає nv частинок, передаючи імпульс $m_p v n v$, де m_p — маса протона. Концентрацію частинок поблизу орбіти Меркурія n можна оцінити з умови збереження повного числа частинок

$$na^3 = n_0 a_\oplus^3,$$

де a — велика піввісь меркуріанської орбіти. Швидкість частинок поблизу орбіти Меркурія v можна обчислити, застосовуючи закон збереження енергії

$$\frac{m_p v^2}{2} - \frac{GM_\odot m_p}{a} = \frac{m_p v_0^2}{2} - \frac{GM_\odot m_p}{a_\oplus}.$$

За розрахунками $v \approx v_0 \approx 300$ км/с.

Отже, імпульс, який отримує Меркурій за одиницю часу, тобто сила сонячного вітру, дорівнює

$$F = \pi R^2 n_0 \left(\frac{a_\oplus}{a}\right)^3 m_p v^2 = 4{,}8 \cdot 10^5 \text{ Н},$$

де R — радіус Меркурія.

2.42. а) Оскільки під час такої втрати маси Сонцем жодні сили, крім центральних, на Землю не діятимуть, її момент імпульсу збережеться, а орбіта залишиться коловою. Звідси матимемо

$$a_\oplus \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}} = a'_\oplus \sqrt{\frac{GM_{WD}}{a'_\oplus}}.$$

Отже, нова велика піввісь дорівнюватиме

$$a'_\oplus = a_\oplus \left(\frac{M_\odot}{M_{WD}}\right) = \frac{a_\oplus}{0{,}6} \approx 1{,}67 \text{ а. о.}$$

Рис. 22

За третім законом Кеплера новий період становитиме

$$T'_\oplus = T_\oplus \sqrt{\frac{M_\odot}{M_{WD}} \left(\frac{a'_\oplus}{a_\oplus}\right)^3} = T_\oplus \left(\frac{M_\odot}{M_{WD}}\right)^2 =$$

$$= \frac{T_\oplus}{(0{,}6)^2} \approx 2{,}78 \text{ сучасного року;}$$

б) у момент раптового зменшення маси Сонця Земля почне зазнавати меншої, ніж до цього, сили притягання з боку Сонця. Тому вона перейде з цієї, майже колової, орбіти на еліптичну з перигелієм у точці переходу на нову орбіту (рис. 22). Тоді швидкість Землі у цій точці має залишитися такою, як і була, тобто

$$\sqrt{GM_{WD}\left(\frac{2}{a_\oplus} - \frac{1}{a'_\oplus}\right)} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}}.$$

Звідси отримуємо

$$a'_\oplus = a_\oplus \frac{M_{WD}}{2M_{WD} - M_\odot} = 3a_\oplus = 3 \text{ а. о.}$$

За третім законом Кеплера новий період у цьому разі дорівнюватиме

$$T'_\oplus = T_\oplus \sqrt{\frac{M_\odot M_{WD}^2}{(2M_{WD} - M_\odot)^3}} \approx 6{,}71 \text{ сучасного року.}$$

Ексцентриситет знаходимо, використовуючи формулу для перигелійної відстані $a_\oplus = a'_\oplus(1-e)$, звідси $e = \frac{2}{3}$.

3. Елементи космонавтики

3.1.

$$v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}} = 7{,}8 \text{ км/с},$$

де $h = 200$ км;

$$a = 19{,}8 \text{ м/с}^2.$$

3.2. Оскільки надана супутнику швидкість 8,5 км/с більша за першу космічну (див. задачу 2.23), і, отже, більша за колову швидкість на висоті 200 км, то його орбіта буде еліптичною з перигеєм у точці надання супутнику зазначеної швидкості. Тому велику піввісь можна знайти, використовуючи формулу для орбітальної швидкості (див. задачу 2.13),

$$v = \sqrt{GM_\oplus\left(\frac{2}{r_\Pi} - \frac{1}{a}\right)},$$

де r_Π — відстань у перигею, що дорівнює

$$r_\Pi = R_\oplus + h_\Pi,$$

де $h_\Pi = 200$ км — висота перигею. За розрахунками $a = 8075$ км.

Тоді ексцентриситет дорівнює

$$e = 1 - \frac{r_\Pi}{a} = 0{,}186,$$

висота апогею

$$h_A = a(1+e) - R_\oplus = 3206 \text{ км.}$$

Період обертання знаходимо за допомогою третього закону Кеплера

$$T = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM_{\oplus}}} = 2 \text{ год.}$$

3.3. Застосуйте третій закон Кеплера.

3.4. Повна механічна енергія супутника W не зберігається внаслідок витрат, зумовлених опором повітря. Використовуючи теорему віріала

$$2W_k + W_p = 0,$$

де W_k і W_p — відповідно кінетична і потенціальна енергія супутника (це співвідношення легко довести для колової орбіти, якщо, наприклад, прирівняти відцентрову силу силі притягання, див. задачі 2.17 і 2.37), а також вираз для повної енергії

$$W = W_k + W_p,$$

матимемо

$$W = -W_k \text{ і } W = \frac{W_p}{2}.$$

Диференціюючи за часом, отримуємо

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dW_k}{dt} \text{ і } \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dW_p}{dt}.$$

Ці рівності означають, що швидкість витрат енергії на тертя об повітря $-\frac{dW}{dt}$ дорівнює швидкості приросту кінетичної енергії супутника $\frac{dW_k}{dt}$ і здійснюється це за рахунок зменшення потенціальної енергії (половина її йде на збільшення кінетичної енергії, інша половина переходить у теплоту). Отже, опір повітря справді спричинює збільшення швидкості супутника внаслідок переходу його на нижчу орбіту (див. попередню задачу).

Оскільки сила опору повітря не є центральною у системі супутник—Земля, то момент імпульсу супутника також не зберігається. Це видно також із формули для моменту імпульсу супутника, яку можна отримати для випадку колової орбіти (див. задачу 2.33):

$$J = m\sqrt{GM_{\oplus}r},$$

де m — маса супутника; r — радіус його орбіти.

3.5. а) Нехай супутник рухається зі швидкістю v. Тоді кількість ударів молекул газу об його обшивку за час dt дорівнює

$$N = nSvdt,$$

де n — концентрація газу. Під час зіткнення імпульс кожної молекули, якщо вважати удар непружним, змінюється на величину близько m_0v, де m_0 — маса молекули. Тоді сила опору повітря, яку зазнає супутник, за другим законом Ньютона дорівнює

$$F \approx \frac{d(Nm_0v)}{dt} = nm_0Sv^2 = \rho Sv^2.$$

Підставляючи вираз для колової швидкості на висоті h, матимемо

$$F = \frac{GM_{\oplus}\rho S}{(R_{\oplus}+h)} = 6{,}14\cdot 10^{-2} \text{ Н};$$

б) зменшення повної енергії супутника дорівнює роботі, що витрачається на подолання опору повітря, тобто за один оберт

$$A = -2\pi(R_{\oplus}+h)F.$$

За теоремою віріала (див. задачі 2.17 і 2.37 або розв'язання попередньої задачі) повна енергія дорівнює половині потенціальної енергії

$$W = \frac{W_p}{2} = -\frac{GM_{\oplus}m}{2(R_{\oplus}+h)}.$$

Із рівності

$$\Delta W = \frac{dW}{dh}\Delta h = A$$

отримуємо

$$\Delta h = -\frac{4\pi\rho S(R_{\oplus}+h)^2}{m} \approx -5{,}3 \text{ км}.$$

Зверніть увагу, що результат не залежить від маси Землі та гравітаційної сталої;

в) за теоремою віріала

$$W = -W_k = -\frac{mv^2}{2}.$$

Отже, збільшення кінетичної енергії (див. розв'язання попередньої задачі) за один оберт дорівнює роботі, що витрачається на подолання опору повітря. Тоді

$$mv\Delta v = FvT,$$

де T — період обертання супутника. Звідси

$$\Delta v = \frac{2\pi\rho S\sqrt{GM_{\oplus}(R_{\oplus}+h)}}{m} = 3{,}2 \text{ м/с}.$$

3.6. Швидкість витікання газів у сучасних хімічних ракетних двигунів не перевищує 3 км/с, що значно менше за другу космічну швидкість для Землі та Венери. Тому гази не зможуть покинути ці планети і передати їм імпульс.

3.7. Що вища температура згоряння пального T, то більша швидкість теплового руху молекул, атомів або іонів газу, який виникає при цьому, і, отже, тим більша швидкість витікання газу з ракетного двигуна. Отже, для швидкості витікання отримуємо $u \propto \sqrt{T}$.

За формулою Ціолковського, швидкість ракети дорівнює

$$v = u\ln\frac{m+m_n}{m} = u\ln z,$$

де m — маса ракети без пального, m_n — маса пального (зазвичай $m_n >> m$); z — число Ціолковського.

Якщо температуру згоряння пального підвищити у 4 рази $(T_2 = 4T_1)$, то число Ціолковського можна зменшити так:

$$z_2 = \sqrt{z_1}.$$

3.8. а) Для першої ракети

$$\mu = -\frac{dm_1}{dt} = \text{const},$$

звідси, інтегруючи, дістанемо так званий лінійний закон зміни маси

$$m_1(t) = m_0 - \mu t.$$

Для другої ракети рівняння Мещерського набирає вигляду

$$m_2 a = -u\frac{dm_2}{dt},$$

де $a = \text{const}$. Інтегруючи, отримаємо

$$m_2(t) = m_0 e^{-\frac{at}{u}} \text{ (так званий показниковий закон);}$$

б) нехай $m_1 = \frac{m_0}{2}$. Цьому відповідає момент часу $t = \frac{m_0}{2\mu}$. Тоді

$$\frac{m_2}{m_1} = 2e^{-\frac{m_0 a}{2\mu u}};$$

в) використовуючи формулу Ціолковського, для першої ракети, дістанемо

$$v_1 = u\ln\frac{m_0}{m} = u\ln 2;$$

для другої, оскільки $a = \text{const}$, то

$$v_2 = at = \frac{m_0 a}{2\mu}.$$

Отже,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{m_0 a}{2\mu u \ln 2}.$$

3.9. $\mu(t) = -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0(a+g)}{u} e^{-\frac{a+g}{u}t}$.

3.10. а) Використовуючи рівняння Мещерського і закон зміни маси за постійної витрати пального (див. задачу 3.8), отримаємо систему

$$\begin{cases} m_0 a_0 = \mu u - m_0 g; \\ ma = \mu u - mg; \\ m = m_0 - \mu t. \end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо затрату пального за одиницю часу

$$\mu = \frac{m_0(a_0 + g)}{u}.$$

За допомогою двох інших рівнянь отримуємо

$$a = \frac{a_0 u + g(a_0 + g)t}{u - (a_0 + g)t} \approx 82{,}6 \text{ м/с}^2;$$

б) інтегруючи рівняння Мещерського, дістанемо

$$(m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu u - (m_0 - \mu t)g,$$

звідси

$$v = u\ln\frac{u}{u - (a_0 + g)t} - gt \approx 2{,}1 \text{ км/с}.$$

3.11. а) За умови екстремуму кінетичної енергії

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0$$

отримуємо

$$\frac{v}{2}\frac{dm}{dt} + m\frac{dv}{dt} = 0.$$

Використовуючи рівняння Мещерського

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt},$$

знаходимо, що кінетична енергія, якої набуває ракета, буде максимальною, якщо $v = 2u$;

б) з умови екстремуму імпульсу ракети

$$\frac{d}{dt}(mv) = 0$$

і рівняння Мещерського випливає рівність $v = u$. Використовуючи формулу Ціолковського, дістанемо, що імпульс, якого набуває ракета, буде максимальним, якщо

$$m = \frac{m_0}{e}.$$

3.12.

$$\eta = \frac{W_k}{Q} = \frac{v^2}{2q\left(\frac{v}{e^u - 1}\right)} = 2{,}3\%.$$

3.13. За допомогою формули Ціолковського (для спрощення не враховуватимемо гравітаційне поле Землі) можна визначити число Ціолковського

$$z = \frac{v}{e^u} = 24{,}3.$$

За означенням

$$z = \frac{m_р + m_п + m_{сп}}{m_р + m_{сп}},$$

де $m_р$ — маса ракети; $m_п$ — маса пального; $m_{сп}$ — маса супутника.

Останню рівність можна переписати так:

$$z\left(1+\frac{m_{\text{сп}}}{m_{\text{р}}}\right)=s+\frac{m_{\text{сп}}}{m_{\text{р}}},$$

де s — так звана технічна характеристика ракети, яка за означенням дорівнює

$$s=\frac{m_{\text{р}}+m_{\text{п}}}{m_{\text{р}}}.$$

Через параметри z, s і $m_{\text{сп}}$ можна виразити масу ракети

$$m_{\text{р}}=\frac{z-1}{s-z}m_{\text{сп}}.$$

На жаль, для сучасних ракет s не перевищує 10. Це набагато менше за розраховане в цій задачі число Ціолковського. Оскільки маса ракети не може бути від'ємною, то вивести на орбіту супутник за допомогою одноступеневої ракети неможливо.

3.14. а), б) Якщо під час пострілу надати зонду такої швидкості, щоб за межами земної атмосфери він мав параболічну, то за правильним вибором напрямку пострілу зонд зможе досягти і Місяця, і Марса (оскільки Місяць є супутником Землі, то для його досягнення можна мати швидкість трохи меншу за параболічну, а для Марса — трохи більшу за параболічну);

в) зробити у такий спосіб зонд супутником Землі неможливо, оскільки, рухаючись після пострілу по еліптичній траєкторії та завершуючи перший оберт, зонд обов'язково повернеться у точку старту, що спричинить принаймні вторгнення у щільні шари атмосфери;

г) для надання зонду визначеної кінетичної енергії за допомогою гармати потрібно витратити менше енергії, оскільки під час пострілу майже вся енергія передається зонду, а під час запуску ракети більша частина енергії витрачається на підняття пального.

3.15. Щоб досягти Місяця, снаряд, вилітаючи зі ствола гармати, повинний мати швидкість близько другої космічної (див. відповідь до пункту а) попередньої задачі). Снаряд набирає швидкість, тільки знаходячись у стволі, тому, якщо для розрахунків взяти максимальне прискорення $a = 10g$, то довжина гармати має дорівнювати

$$l=\frac{v_{\text{II}}^2}{2a}=640\ \text{км}.$$

Жюль Верн явно не врахував цього.

3.16. Вага космонавтів зменшується від $2mg$ біля поверхні Землі до mg на нескінченності.

3.17. Використовуючи закон збереження енергії

$$\frac{mv_0^2}{2}-\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}+h}=\frac{mv^2}{2}-\frac{GM_{\oplus}m}{r},$$

де $v_0 = 12$ км/с; $h = 200$ км; r — відстань, на якій перебуває корабель, отримуємо:

а) $v = 10{,}1$ км/с;
б) $v = 4{,}8$ км/с;
в) $v = 4{,}7$ км/с.

3.18. Щоб супутник висів над тією самою точкою земної поверхні, потрібно, щоб період його обертання навколо Землі дорівнював періоду обертання Землі навколо своєї осі $T_{\oplus} = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}$. Звідси

$$r=\left(GM_{\oplus}\left(\frac{T_{\oplus}}{2\pi}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}\approx 42\,000\ \text{км}.$$

Геостаціонарний супутник не може висіти над Херсоном, оскільки площина кеплерівської орбіти має проходити через центр Землі.

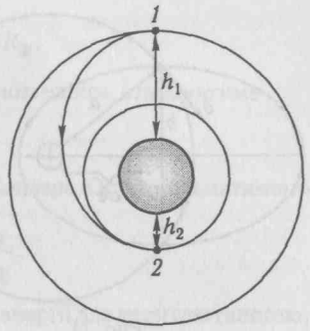


Рис. 23

3.19. Для приземлення в районі старту полярному супутнику потрібно, щоб у періоді вмістилося ціле число періодів обертання супутника, тобто кількість витків має дорівнювати

$$N=\frac{T_{\oplus}}{2\pi r}\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r}}=16,$$

де $r = R_{\text{пол}} + h$, $R_{\text{пол}}$ — полярний радіус Землі, $h = 271$ км.

3.20. Для переведення з однієї колової орбіти на іншу з меншим радіусом із мінімальними енергетичними затратами потрібно використовувати так звані гоманівські траєкторії — півеліптичні траєкторії з апогеєм на первісній орбіті й перигеєм на кінцевій (рис. 23). Переведення здійснюється за допомогою двохімпульсного маневру. Першим імпульсом супутник зменшує швидкість, сходить з першої орбіти на перехідну (точка *1*) і рухається по ній доти, доки не торкнеться другої орбіти. У точці *2* другим імпульсом супутник знову зменшує швидкість для переходу на остаточну колову орбіту.

Швидкості на колових орбітах відповідно дорівнюють

$$v_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}};\quad v_2=\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{2R_{\oplus}}}.$$

Велика піввісь перехідної гоманівської орбіти становитиме

$$a=\frac{h_1+2R_{\oplus}+h_2}{2}=3R_{\oplus}.$$

Використовуючи загальну формулу для орбітальної швидкості (див. задачу 2.13), розраховуємо швидкості в апогеєї і перигеєї гоманівської орбіти

$$v_{\text{A}}=\sqrt{GM_{\oplus}\left(\frac{1}{2R_{\oplus}}-\frac{1}{3R_{\oplus}}\right)}=\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{6R_{\oplus}}};$$

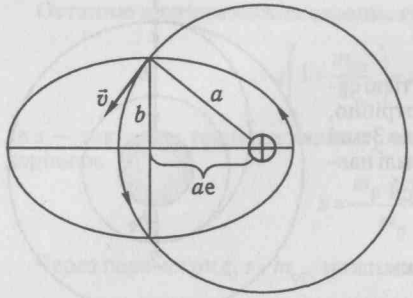


Рис. 24

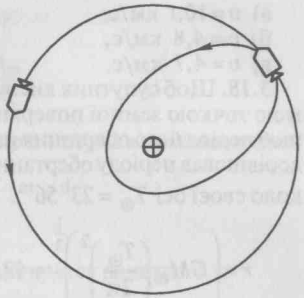


Рис. 25

$$v_{\Pi} = \sqrt{GM_{\oplus}\left(\frac{1}{R_{\oplus}} - \frac{1}{3R_{\oplus}}\right)} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{3R_{\oplus}}}.$$

Тоді швидкість першого маневру становитиме

$$\Delta v_1 = v_1 - v_{\text{А}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = 0{,}73 \text{ км/с},$$

другого —

$$\Delta v_2 = v_{\Pi} - v_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = 0{,}86 \text{ км/с}.$$

3.21. За умовою задачі супутник має перейти з еліптичної орбіти на колову, не змінюючи швидкості за абсолютною величиною (тільки за напрямком). Із формули для орбітальної швидкості (див. задачу 2.13)

$$v = \sqrt{GM_{\oplus}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

випливає, що швидкість стає коловою, якщо $r = a$, а це буде у точці перетину еліпса з малою віссю, оскільки (рис. 24)

$$(ae)^2 + b^2 = (ae)^2 + a^2\left(1 - e^2\right) = a^2.$$

Вектор швидкості супутника потрібно спрямувати так, щоб він став перпендикулярним до лінії супутник—Земля.

3.22. Пілот корабля, що летить позаду, має, як це не дивно, загальмувати свій корабель. Тоді він перейде на еліптичну орбіту, що в апогею торкається початкової колової орбіти (рис. 25). Оскільки велика піввісь нової орбіти менша, ніж радіус початкової колової орбіти, то й період обертання на ній буде коротшим. Можна так розрахувати цей період, що кораблі, завершуючи кожний свій оберт, зустрінуться у точці дотику. Це найсприятливіший варіант, якщо точка зустрічі кораблів збігається з точкою корекції орбіти корабля, що летить позаду.

3.23. Велика піввісь еліптичної орбіти приземлювання очевидно дорівнює

$$a = \frac{3R_{\oplus} + R_{\oplus}}{2} = 2R_{\oplus}.$$

Час спуску по траєкторії, що є половиною еліпса, становитиме

$$\tau = \frac{T}{2},$$

де період T знаходимо за третім законом Кеплера. Остаточно матимемо

$$\tau = 2\pi R_{\oplus}\sqrt{\frac{2R_{\oplus}}{GM_{\oplus}}}.$$

3.24. Застосовуючи закон збереження енергії для перигею і апогею, дістанемо

$$\frac{mv_{\Pi}^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{r_{\Pi}} = \frac{mv_{\text{А}}^2}{2} - \frac{GM_{\oplus}m}{r_{\text{А}}},$$

звідси

$$v_{\Pi}^2 - v_{\text{пар}}^2(\Pi) = v_{\text{А}}^2 - v_{\text{пар}}^2(\text{А}),$$

де $v_{\text{пар}}(\Pi)$ і $v_{\text{пар}}(\text{А})$ — параболічна швидкість відповідно у перигею та апогею орбіти.

Запишемо останню рівність так:

$$\left(v_{\Pi} - v_{\text{пар}}(\Pi)\right)\left(v_{\Pi} + v_{\text{пар}}(\Pi)\right) = \left(v_{\text{А}} - v_{\text{пар}}(\text{А})\right)\left(v_{\text{А}} + v_{\text{пар}}(\text{А})\right).$$

Оскільки завжди

$$v_{\Pi} + v_{\text{пар}}(\Pi) > v_{\text{А}} + v_{\text{пар}}(\text{А}),$$

то

$$v_{\Pi} - v_{\text{пар}}(\Pi) < v_{\text{А}} - v_{\text{пар}}(\text{А}).$$

Отже, розгін міжпланетного корабля до параболічної швидкості вигідніше робити в районі перигею проміжної орбіти.

3.25. а) У цьому разі, користуючись формулою Ціолковського, знаходимо

$$2v = u\ln\frac{m_0}{m},$$

де m_0 і m — відповідно початкова і кінцева маси корабля. Тобто втрата маси в результаті згоряння пального становитиме

$$m = m_0 e^{-\frac{2v}{u}};$$

б) інтегруючи рівняння Мещерського і використовуючи відому формулу для доцентрового прискорення, отримуємо

$$\frac{v^2}{r}\int_0^{\frac{T}{2}} dt = -u\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m},$$

де T — період обертання по колу, що дорівнює

$$T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Після інтегрування дістанемо

$$\pi v = u \ln \frac{m_0}{m},$$

або

$$m = m_0 e^{-\frac{\pi v}{u}}.$$

Отже, втрата маси (пального) у другому випадку буде більшою, тобто економічнішим є перший спосіб.

3.26. Рівняння руху космічного корабля у полі притягання Місяця має вигляд

$$m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt} + mg_{☾},$$

де $g_{☾}$ — прискорення вільного падіння, яке за умовою задачі можна вважати таким, що є на поверхні Місяця. Інтегруючи за часом, отримуємо

$$m(\tau) = m_0 e^{-\frac{v_0 + g_{☾}\tau}{u}},$$

де $m(\tau)$ — маса корабля після роботи двигуна впродовж часу τ. Отже, мінімальний запас пального для м'якої посадки на Місяць становить

$$m_{пал} = m_0\left(1 - e^{-\frac{v_0 + g_{☾}\tau}{u}}\right).$$

3.27. Тривалість перельоту τ від Землі до Марса очевидно дорівнює половині періоду обертання по гоманівській орбіті $\tau = \frac{T}{2}$.

Величину періоду T обчислимо за допомогою третього закону Кеплера

$$\frac{T^2}{T_\oplus^2} = \frac{a^3}{a_\oplus^3},$$

де a — велика піввісь гоманівського еліпса, яка очевидно дорівнює (див. рис. 6)

$$a = \frac{a_\oplus + a_M}{2},$$

де a_M — велика піввісь марсіанської орбіти.

Отже,

$$\tau = \frac{T_\oplus}{2^{\frac{5}{2}}}\left(1 + \frac{a_M}{a_\oplus}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 259^d.$$

3.28. а) Кут Земля—Сонце—Марс (див. рис. 6) у найсприятливіший для старту момент визначають зі співвідношення

$$\varphi = \pi - \omega_M \tau,$$

де ω_M — кутова швидкість Марса; τ — тривалість перельоту по гоманівській траєкторії. Враховуючи розв'язок попередньої задачі, дістанемо

$$\varphi = \pi\left(1 - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\frac{T_\oplus}{T_M}\left(1 + \frac{a_M}{a_\oplus}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = 0{,}77 \text{ рад} \approx 44°;$$

б) кут Марс—Сонце—Земля у найсприятливіший для старту момент можна визначити так. Оскільки в задачах з кінематики знак часу t можна замінити на протилежний (поміняти місцями початок і кінець явища), то картина польоту від Марса до Землі буде дзеркальним відображенням польоту від Землі до Марса.

У момент прильоту космічного корабля на Марс Земля випереджатиме Марс на кут

$$\psi = \omega_\oplus \tau - \pi.$$

У момент старту з Марса Земля має відставати від Марса на такий самий кут.

Отже,

$$\psi = \pi\left(\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\left(1 + \frac{a_M}{a_\oplus}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = 1{,}32 \text{ рад} \approx 75°;$$

в) час очікування t_0 на Марсі моменту, сприятливого для повернення на Землю, дорівнює часу, за який випередження Землі на кут ψ (див. пункт б)) зміниться на її відставання на кут $2\pi - \psi$. З урахуванням руху Марса й Землі по своїх орбітах дістанемо

$$t_0 = \frac{2\pi - 2\psi}{\omega_\oplus - \omega_M} = \left(1 - \frac{\psi}{\pi}\right)\frac{T_M T_\oplus}{T_M - T_\oplus} \approx 455^d.$$

Тоді повний час експедиції становитиме

$$t_{експ} = 2\tau + t_0 = 973^d.$$

3.29. Якщо використовувати гоманівську траєкторію (див. рис. 6), то

$$\Delta v = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r_{\odot\oplus}} - \frac{1}{a}\right)} - \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_{\odot\oplus}}},$$

де $a = \frac{r_{\odot\oplus} + r_{\odot M}}{2}$.

Остаточно матимемо

$$\Delta v = v_\oplus\left(\sqrt{\frac{2}{1+k}} - 1\right) \approx 3 \text{ км/с},$$

де $v_\oplus$ — орбітальна швидкість Землі, $k = \frac{r_{\odot\oplus}}{r_{\odot M}}$.

3.30. Розглянемо випадок, коли корабель наближається до однієї із зовнішніх планет. Якщо корабель рухався по гоманівській траєкторії, то орбітальна швидкість планети $v_{пл}$ буде більшою, ніж швидкість корабля в афелію своєї орбіти $v_к$, тобто планета наздоганятиме корабель. Швидкість входу корабля до сфери дії планети (див. задачу 2.39) дорівнює

$$\vec{v}_{вх} = \vec{v}_{пл} - \vec{v}_к,$$

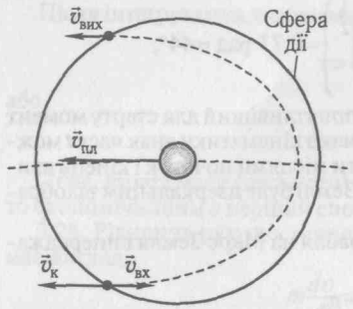


Рис. 26

і напрямлена у бік, протилежний орбітальній швидкості планети (рис. 26). Під дією гравітації планети корабель спочатку збільшуватиме свою швидкість, а після проходження перицентра (відносно планети) — зменшуватиме. В результаті такого гравітаційного маневру корабель у планетоцентричній системі координат змінить тільки напрямок своєї швидкості, не змінюючи при цьому модуля швидкості.

У геліоцентричній системі координат швидкість віддалення корабля становитиме

$$\vec{v}_{від} = \vec{v}_{пл} + \vec{v}_{вих}.$$

Якщо корабель пролітатиме відносно планети по параболічній траєкторії, то напрямок швидкості у планетоцентричній системі відліку зміниться на протилежний (це було б справді так за умови, якби планету вважали матеріальною точкою). Тоді вектор швидкості виходу збігатиметься з вектором орбітальної швидкості планети. У цьому разі швидкість відносно Сонця збільшиться на максимальну величину

$$\Delta v = 2v_{вх} = 2(v_{пл} - v_к).$$

Для реальних планет (кулеподібних тіл, а не матеріальних точок), а також у разі пролітання корабля відносно планети по гіперболічній траєкторії (що відбувається частіше), зміна швидкості корабля буде меншою.

Оскільки сфера дії планети по відношенню до гравітаційного поля Сонця є невеликою, то потенціальна геліоцентрична енергія корабля внаслідок пролітання крізь цю сферу майже не змінюється. Проте кінетична геліоцентрична енергія корабля може істотно збільшуватись або зменшуватись. Закон збереження енергії при цьому не порушується, тому що подібні збільшення або зменшення кінетичної енергії корабля здійснюються тільки завдяки орбітальній енергії планети.

3.31. Якщо використовувалась гоманівська траєкторія з перигелієм біля Венери, то швидкість входу до сфери дії планети дорівнювала

$$v_{вх} = v_В\left(\sqrt{\frac{2}{1+k}} - 1\right) = 2{,}71\ км/с,$$

де $v_В$ — орбітальна швидкість Венери; $k = \frac{a_В}{a_\oplus} = 0{,}723$ — відношення великих півосей орбіт Венери і Землі.

3.32. Загалом швидкість віддалення корабля від Юпітера $v_{від}$ у геліоцентричних координатах становить

$$\vec{v}_{від} = \vec{v}_Ю + \vec{v}_{вих},$$

де $v_Ю$ — орбітальна швидкість Юпітера; $v_{вих}$ — швидкість виходу корабля зі сфери дії планети у планетоцентричній системі координат (див. рис. 26).

В умовах «чистого» гравітаційного маневру $v_{вих} = v_{вх}$. Якщо траєкторія корабля відносно Юпітера параболічна, то (див. розв'язання задачі 3.30) $\vec{v}_{вих} = -\vec{v}_{вх}$. Тоді

$$v_{від} = v_Ю + v_{вих} = v_Ю\left(2 - \sqrt{\frac{2}{1+k}}\right) \approx 1{,}43 v_Ю > \sqrt{2} v_Ю \approx 18{,}5\ км/с,$$

де $k = \frac{a_Ю}{a_\oplus} = 5{,}2$.

Отже, корабель може покинути Сонячну систему.

3.33. По-перше, потрібно вирватися з поля притягання Землі; по-друге, погасити її орбітальну швидкість. Отже, стартувати потрібно у бік, протилежний напрямку орбітального руху Землі зі швидкістю

$$v = \sqrt{v_\oplus^2 + v_{II}^2} = \sqrt{(29{,}8\ км/с)^2 + (11{,}2\ км/с)^2} = 31{,}8\ км/с.$$

Оскільки друга космічна й орбітальна швидкості для Марса менші, ніж для Землі, то вигідніше запускати такий зонд з Марса.

Нині найпопулярнішим способом досягання Сонця є політ до нього з гравітаційним маневром біля Юпітера (див. задачі 3.30 і 3.32), тому що сучасні ракетні двигуни не дають змоги розвивати швидкість ~ 30 км/с.

3.34. Застосовуємо закон збереження енергії

$$\frac{mv_{ст}^2}{2} - \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

де $v_{ст}$ — стартова швидкість корабля, яку розраховують для поверхні Землі; v_∞ — швидкість корабля у той час, коли він покидає сферу дії планети. Звідси отримуємо

$$v_{ст}^2 = v_\infty^2 + v_{II}^2,$$

де v_{II} — друга космічна швидкість.

Після того як корабель вийде зі сфери дії Землі, швидкість його у геліоцентричній системі координат дорівнюватиме

$$\vec{v} = \vec{v}_\oplus + \vec{v}_\infty.$$

Підносячи до квадрата, отримуємо

$$v^2 = v_\oplus^2 + v_\infty^2 + 2v_\oplus v_\infty \cos\theta,$$

де θ — кут, під яким корабель виходить зі сфери дії Землі відносно напрямку її орбітального руху; $v_\oplus$ — орбітальна швидкість Землі.

Щоб залишити Сонячну систему, швидкість v має дорівнювати параболічній швидкості $v_{пар}$ на цій відстані від Сонця, тобто $v = v_{пар} = \sqrt{2} v_\oplus$. Отримуємо рівняння

$$v_\infty^2 + 2v_\oplus v_\infty \cos\theta - v_\oplus^2 = 0,$$

звідси

$$v_\infty = \left(\sqrt{1 + \cos^2\theta} - \cos\theta\right) v_\oplus.$$

(Інший корінь цього рівняння фізичного змісту не має.) Остаточно дістанемо

$$v_{\text{ст}} = \sqrt{\left(\sqrt{1+\cos^2\theta} - \cos\theta\right)^2 v_{\oplus}^2 + v_{\text{II}}^2}.$$

Найменше значення третьої космічної швидкості отримуємо за $\theta = 0$ (корабель запускається у напрямку орбітального руху Землі), а найбільше — за $\theta = \pi$. Отже,

$$v_{\text{ст}\,\min} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2 (29{,}8\ \text{км/с})^2 + (11{,}2\ \text{км/с})^2} \approx 16{,}7\ \text{км/с},$$

$$v_{\text{ст}\,\max} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2 (29{,}8\ \text{км/с})^2 + (11{,}2\ \text{км/с})^2} \approx 72{,}8\ \text{км/с}.$$

4. Спостережувані характеристики планет

4.1. Кулястість Землі дає змогу визначити її радіус способом, який уперше застосував Ератосфен у III ст. до н. е. Із рис. 27 випливає, що

$$R = \frac{180^\circ \cdot \ell}{\pi\alpha}.$$

Якщо точки A і B належать одному географічному меридіану, то $\alpha = \varphi_A - \varphi_B$, де φ — географічна широта точок A і B. Залишається тільки виміряти довжину дуги ℓ.

4.2. $R = \dfrac{180^\circ \cdot 2822\ \text{км}}{25{,}5^\circ \cdot \pi} = 6344\ \text{км}.$

4.3. $d \approx \sqrt{2Rh}$, де R — радіус космічного тіла:
а) $d = 4789$ м; б) $d = 336$ км;
в) $d = 2488$ м; г) $d = 3496$ м.

4.4. Нехай для спрощення у момент великого протистояння Марса Сонце, Земля і Марс перебувають на одній прямій (рис. 28), причому Земля — на середній відстані $a_\oplus = 1$ а. о. від Сонця, а Марс — у перигелію, на відстані

$$r_{\odot\text{M}} = a_{\text{M}}(1 - e_{\text{M}}),$$

де a_{M} — велика піввісь; e_{M} — ексцентриситет марсіанської орбіти.

Із рис. 28 випливає, що

$$R_\oplus = a_\oplus \sin p_\odot$$

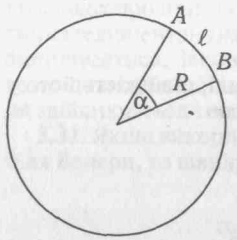


Рис. 27

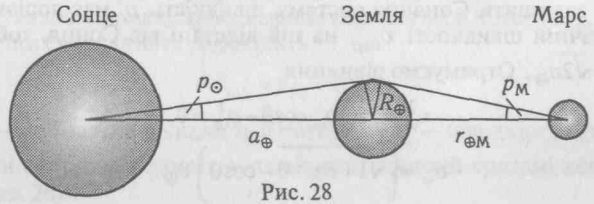


Рис. 28

і

$$R_\oplus = r_{\oplus\text{M}} \sin p_{\text{M}} = \left(a_{\text{M}}(1 - e_{\text{M}}) - a_\oplus\right)\sin p_{\text{M}},$$

де $p_\odot$ і p_{M} — горизонтальні екваторіальні паралакси відповідно Сонця і Марса.

Прирівнюючи праві частини та замінюючи синуси малих кутів самими кутами, отримуємо

$$p_\odot = \left(\frac{a_{\text{M}}}{a_\oplus}(1 - e_{\text{M}}) - 1\right) p_{\text{M}}.$$

Відношення $\dfrac{a_{\text{M}}}{a_\oplus}$ можна обчислити за третім законом Кеплера, а паралакс Марса та ексцентриситет його орбіти визначити зі спостережень.

4.5. За означенням стала річної аберації $\varkappa = 206264{,}8'' \dfrac{v_\oplus}{c}$, де $v_\oplus$ — орбітальна швидкість Землі; c — швидкість світла. Враховуючи, що ексцентриситет орбіти Землі дуже малий, дістанемо

$$a_\oplus = \frac{\varkappa c T_\oplus}{2\pi} = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{м},$$

де $T_\oplus$ — період обертання Землі навколо Сонця.

4.6. а) $r_{\oplus☾} \approx 60 R_\oplus$;
б) $R_☾ = 0{,}272 R_\oplus$;
в) $R_\odot \approx 109 R_\oplus$;
г) $\dfrac{r_{\oplus\odot}}{r_{\oplus☾}} \approx 390.$

4.7. Спостереження, що комети беруть участь у добовому обертанні небесної сфери, а також вимірювання їх паралаксів.

4.8. а) За усіма ознаками видно, що у вірші описано повний Місяць (або близько до цього), а невисоко над горизонтом Місяць завжди здається більшим, отже, ближчим;

б) насправді поблизу зеніту Місяць має виглядати трохи більшим, оскільки спостерігач у цьому разі знаходиться ближче до Місяця на величину радіуса Землі;

в) фотографічні вимірювання дають те саме значення кутового діаметра Місяця поблизу горизонту і біля зеніту. Отже, ефект «близького Місяця» — суто психологічний. Мабуть, у процесі своєї еволюції (особливо ранньої) людина більше уваги приділяла об'єктам, що знаходилися на Землі, ніж тим, що над головою (відсутність серйозної загрози з «повітря»).

Відомий американський астроном Ф. Л. Уїппл у книзі «Сім'я Сонця» [26], посилаючись також на психологів, стверджує, що цей ефект зумовлений особливими властивостями мозку та зору людини. Спостерігачу Місяць видається більш далеким, коли він знаходиться біля горизонту, ніж тоді, коли він високо в небі. Оскільки кутові розміри залишаються майже незмінними (див. пункт б)), то Місяць виглядає більшим біля горизонту, де він здається більш віддаленим.

У книзі «Астрономічний калейдоскоп: питання і відповіді» автор Б. І. Фесенко [29] наводить таке пояснення. Диск Місяця може здаватися більшим біля горизонту, оскільки у цьому разі він охоплює більше так званих стандартних одиниць вимірювань кута. Річ у тому, що коли оцінюють «на око» кутові розміри об'єкта, то як одиницю вимірювання використовують певний суб'єктивний «стандартний кут», який відповідає стандартному об'єкту на стандартній відстані від спостерігача, що збільшується з наближенням об'єкта до горизонту. Це зумовлює зменшення одиничного стандартного кута, оскільки його величина обернено пропорційна відстані (для досить малих кутів).

Зазначимо, що цей ефект спостерігається не тільки для Місяця, а й для Сонця та зоряних конфігурацій у сузір'ях, а також те, що розглянуту проблему неможливо вважати розв'язаною до кінця.

4.9. Роздільна здатність людського ока $\delta \approx 1'$. Отже,

$$\ell = r_{\oplus☾}\delta = \frac{384\,000 \text{ км} \cdot 60''}{206265''} \approx 112 \text{ км}.$$

4.10. Дифракційне розрізнення космічного телескопа з діаметром дзеркала $D = 2{,}4$ м на $\lambda = 500$ нм дорівнює

$$\delta = 1.22\frac{\lambda}{D} \qquad \delta = \frac{\lambda}{D} \approx 2{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ рад} \approx 0{,}043''.$$

Отже, мінімальний розмір рельєфних утворень, що може розпізнати цей телескоп на поверхні Марса під час великих протистоянь, становить

$$\ell \sim \frac{\lambda}{D}\left(a_{\text{М}}(1-e_{\text{М}}) - a_{\oplus}(1+e_{\oplus})\right) \approx 12 \text{ км}.$$

За відсутності атмосфери та наявності дифракційного розрізнення можна було б «побачити» на Землі деталі розміром $\ell = 12{,}5$ см. Проте земна атмосфера значно погіршує розрізнення. Наприклад, якщо дивитися з поверхні Землі у космос, то зображення зірок не буває зазвичай меншим ніж $1''$. Проте, оскільки на спотворення зображень переважно впливають найнижчі шари атмосфери, то розрізнення під час спостережень із космосу на Землю буде завжди кращим, ніж під час спостережень з поверхні Землі.

4.11. Уже Х. Гюйгенс (через 20 років після смерті Г. Галілея) зміг би відповісти на заперечення Симплічіо. Відцентрове прискорення на екваторі дорівнює

$$a_{\text{від}} = \left(\frac{2\pi}{T_{\oplus}}\right)^2 R_{\oplus} = 0{,}0339 \text{ м/с}^2.$$

Отже,

$$\frac{g}{a_{\text{від}}} = 289 = 17^2.$$

Це означає, що Земля має обертатися у 17 разів швидше, ніж зараз (з періодом $\frac{24}{17} \approx 1{,}4$ год), щоб відцентрове прискорення на екваторі зрівнялося з прискоренням вільного падіння. Якщо Земля обертатиметься ще швидше, то «каміння, слони, башти і міста» справді «полетять до небес».

4.12. а) Доказами осьового обертання Землі є:

1. Явище відхилення тіла від вертикалі до сходу, якщо воно падає, або до заходу, якщо воно злітає (Р. Гук, 1679 р.; Д. Гильменіні, 1792 р.). Величину цього відхилення можна підрахувати за формулою

$$\ell = \omega_{\oplus}\left(\frac{gt^3}{3} - v_0 t^2\right)\cos\varphi,$$

де $\omega_{\oplus}$ — кутова швидкість осьового обертання Землі; g — прискорення вільного падіння на поверхні; v_0 — початкова швидкість тіла, що злітає; φ — широта місця спостереження.

2. Явище відхилення тіл, що рухаються горизонтально, зумовлене наявністю сил інерції (Коріоліса), які діють у неінерціальних системах відліку (підмивання берегів річок, відхилення літаків, ракет, повітряних і морських течій тощо).

3. Маятник Фуко (Ж. Б. Л. Фуко, 1851 р.). Кутову швидкість обертання площини коливань маятника визначають за формулою

$$\omega = \omega_{\oplus}\sin\varphi.$$

4. Сплюснутість Землі біля полюсів (Х. Гюйгенс, І. Ньютон, XVII ст.). Різниця між екваторіальним і полярним радіусами дорівнює 21,385 км (див. задачі 5.3—5.6);

б) доказами орбітального руху Землі є:

1. Паралактичні зміщення зірок (В. Струве, Ф. Бессель, Т. Гендерсон, 1835—1840 рр.). Оскільки ці зміщення дуже малі, то кут p, під яким з певної зірки видно радіус земної орбіти $r_{\oplus\odot}$, становить

$$p = 206265''\frac{r_{\oplus\odot}}{r},$$

де r — відстань до зірки. Навіть для найближчих зірок $p < 1''$.

2. Аберація світла (Дж. Бредлі, 1727—1729 рр.). Унаслідок скінченності швидкості світла та орбітального руху Землі виникає абераційне зміщення зірок σ, яке визначають за формулою

$$\sigma = 206265''\frac{v_{\oplus}}{c}\sin\theta = 20{,}5''\sin\theta,$$

де $v_{\oplus}$ — орбітальна швидкість Землі; c — швидкість світла; θ — кут між видимим напрямком на зірку і напрямком руху спостерігача.

3. Орбітальний рух Землі можна виявити також, вимірюючи променеві швидкості зірок (проекції просторової швидкості зірок на напрямок спостерігач—зірка) за допомогою ефекту Допплера.

4.13. Так званий гравіметричний спосіб полягає у тому, що вимірюють прискорення вільного падіння g на поверхні Землі (наприклад, за допомогою математичного маятника). Тоді, знаючи радіус Землі (див. задачу 4.1) і величину гравітаційної сталої (Г. Кавендіш, 1798 р.), дістанемо

$$M_{\oplus} = \frac{gR_{\oplus}^2}{G} = 5{,}977 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

За іншого способу, відомого як спосіб Йоллі (Ф. Йоллі, 1878—1881 рр.) використовують подвійні чашкові терези. Цей спосіб детально описаний Я. Перельманом у «Цікавій астрономії».

Масу Землі можна також визначити за допомогою її супутника — Місяця (див. задачу 2.9) або за допомогою штучних супутників, використовуючи третій закон Кеплера.

4.14. На «підводний камінь» під час розв'язування цієї задачі зазвичай наштовхуються, коли обчислюють велику піввісь супутникової орбіти. Її потрібно обчислювати за формулою (чому це так, буде зрозуміло, якщо намалювати цю орбіту)

$$a = R_☾ + \frac{361\ \text{км} + 1007\ \text{км}}{2} = 2421\ \text{км}.$$

Тоді, за допомогою третього закону Кеплера, знаходимо

$$M_☾ = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{кг}.$$

4.15. $M_{\text{Пл}} + m_{\text{X}} = 1{,}47 \cdot 10^{22}$ кг.

4.16. Про це свідчить, по-перше, низька поверхнева яскравість, оскільки за помітних кутових розмірів планети мають блиск, порівнянний з блиском далеких зірок. Це означає, що температура поверхні досить низька.

По-друге, зменшення поверхневої яскравості планет з віддаленням від Сонця (точна залежність може маскуватися величиною альбедо планет).

По-третє, залежність блиску планети від фазового кута Сонце—планета—Земля.

Телескопічні спостереження внутрішніх планет дали б змогу виявити зміну фаз (як у Місяця).

4.17. Нехай $E_{\oplus\odot}$ — освітленість Землі Сонцем. Оскільки відстань Місяця від Землі $r_{\oplus☾}$ набагато менша за відстань Землі від Сонця $r_{\oplus\odot}$, то для яскравості боку Місяця, що освітлюється Сонцем, отримуємо

$$B_{☾\odot} = A_☾ E_{\oplus\odot} = \frac{A_☾ L_\odot}{4\pi r_{\oplus\odot}^2},$$

де $A_☾$ — альбедо Місяця; $L_\odot$ — світність Сонця. У першому наближенні можна вважати, що сонячне світло, яке відбивається Землею, однорідно розподіляється по півсфері денної півкулі. Тоді для яскравості темної частини Місяця, що освітлюється Землею (попелясте світло), запишемо

$$B_{☾\oplus} \approx \frac{A_☾ L_\oplus}{2\pi r_{\oplus☾}^2},$$

де $L_\oplus$ — «світність» денної півкулі Землі, що дорівнює

$$L_\oplus = A_\oplus \pi R_\oplus^2 E_{\oplus\odot} = \frac{A_\oplus \pi R_\oplus^2 L_\odot}{4\pi r_{\oplus\odot}^2}.$$

Порівнюючи величини $B_{☾\odot}$ і $B_{☾\oplus}$, знаходимо

$$A_\oplus = 2\frac{B_{☾\oplus}}{B_{☾\odot}}\left(\frac{r_{\oplus☾}}{R_\oplus}\right)^2.$$

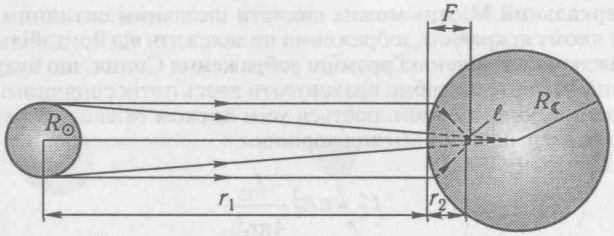


Рис. 29

4.18. а) З рис. 29 випливає, що зображення Сонця у дзеркальному Місяці буде уявним і зменшеним у

$$\frac{2R_\odot}{\ell} = \frac{r_1}{r_2}\ \text{разів},$$

де ℓ — діаметр зображення Сонця. Оскільки $r_1 >> R_☾$, то на Місяць падають майже паралельні промені. Тоді $r_2 \approx F$, а фокусна відстань F сферичного дзеркала дорівнює половині радіуса його кривини, отже,

$$r_2 \approx \frac{R_☾}{2}.$$

Кут, під яким на Землі можна було б спостерігати це зображення Сонця, дорівнює

$$\beta = \frac{\ell}{r_{\oplus☾}}.$$

(Тут знову-таки взято до уваги, що відстань між Землею і Місяцем $r_{\oplus☾} >> R_☾$.) Оскільки $r_1 \approx r_{\oplus\odot}$, тому що відстань між Землею і Сонцем $r_{\oplus\odot} >> r_{\oplus☾}$, то

$$\beta = \frac{R_☾}{2r_{\oplus☾}}\theta_\odot,$$

де $\theta_\odot = \frac{2R_\odot}{r_{\oplus\odot}} \approx 0{,}5°$ — кутовий діаметр Сонця. За розрахунками $\beta = 4''$.

Для неозброєного ока це — точкове джерело;

б) освітленість Землі Місяцем дорівнює

$$E_{\oplus☾} = \frac{L_☾}{2\pi r_{\oplus☾}^2},$$

де $L_☾$ — світність Місяця, освітленого Сонцем.

Для звичайного Місяця у повний Місяць справедлива формула

$$L_☾ = A_☾ \pi R_☾^2 \frac{L_\odot}{4\pi r_{\oplus\odot}^2},$$

де $A_☾$ — альбедо Місяця; $L_\odot$ — світність Сонця.

Дзеркальний Місяць можна вважати ідеальним оптичним приладом, у якому яскравість зображення не залежить від його збільшення. Незважаючи на маленькі розміри зображення Сонця, що будує дзеркальний Місяць, потрібно враховувати ввесь потік сонячного випромінювання, який перехоплюється усім диском Місяця. В результаті світність дзеркального Місяця дорівнює

$$L'_☾ = \pi R_☾^2 \frac{L_\odot}{4\pi r_{\oplus\odot}^2}.$$

Тут взято, що альбедо такого Місяця дорівнює $A'_☾ = 1$. Тоді для відношення освітленостей отримуємо

$$\frac{E'_{\oplus☾}}{E_{\oplus☾}} = \frac{1}{A_☾} = \frac{1}{0{,}07} = 14{,}3.$$

У зоряних величинах, згідно з формулою Погсона, це становить $2{,}9^m$. Таким чином, якщо у повний Місяць його зоряна величина дорівнює $m_☾ = -12{,}7^m$, то для дзеркального Місяця

$$m'_☾ = m_☾ - 2{,}9^m = -15{,}6^m.$$

Отже, Галілей справді мав рацію в тому, що якби Місяць був дзеркальним, то не було б видно його диска, але його яскравість була б навіть більшою (тут Галілей помилився), ніж для справжнього Місяця.

4.19. Виявляється, що, незважаючи на більшу відстань від Сонця, Земля, завдяки більшим розмірам та значно меншому альбедо, отримує більше теплоти, ніж Венера у

$$\left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^2 \frac{1-A_\oplus}{1-A}\left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^2 \approx 1{,}8 \text{ раза},$$

де R, A і a — відповідно радіус, альбедо та велика піввісь орбіти Венери.

Загалом Меркурій у перигелію своєї орбіти і гігант-Юпітер отримують приблизно вдвічі більше теплоти, ніж Земля.

4.20. а) Освітленість Землі Місяцем дорівнює

$$E_{\oplus☾} = \frac{L_☾}{2\pi r_{\oplus☾}^2},$$

де $L_☾$ — світність Місяця, освітленого Сонцем, яка у повний Місяць дорівнює

$$L_☾ = A_☾ \pi R_☾^2 E_{☾\odot}.$$

Оскільки $r_{\oplus\odot} >> r_{\oplus☾}$, то освітленість Місяця Сонцем приблизно дорівнює освітленості Землі Сонцем: $E_{☾\odot} \approx E_{\oplus\odot}$. Тоді відношення освітленостей Землі від Місяця і Сонця насправді становить

$$\frac{E_{\oplus☾}}{E_{\oplus\odot}} = \frac{A_☾}{2}\left(\frac{R_☾}{r_{\oplus☾}}\right)^2 = 7\cdot 10^{-7};$$

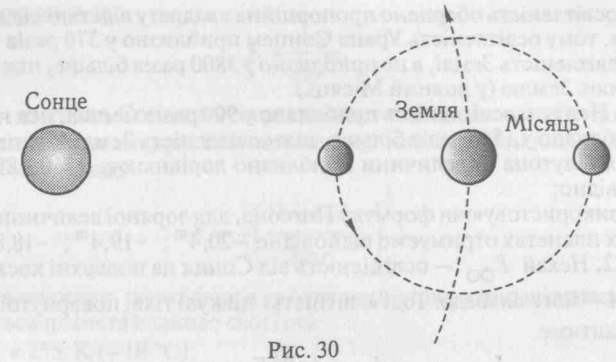


Рис. 30

б) освітленість Місяця Землею дорівнює

$$E_{☾\oplus} = \frac{L_\oplus}{2\pi r_{☾\oplus}^2} = \frac{A_\oplus}{2}\left(\frac{R_\oplus}{r_{☾\oplus}}\right)^2 E_{\oplus\odot}.$$

Отже, враховуючи пункт а), для відношення освітленостей Місяця Землею і Землі Місяцем дістанемо

$$\frac{E_{☾\oplus}}{E_{\oplus☾}} = \frac{A_\oplus}{A_☾}\left(\frac{R_\oplus}{R_☾}\right)^2 \approx 58;$$

в) світліше буває на зворотному боці Місяця, оскільки, коли там настає день, Місяць перебуває ближче до Сонця на діаметр своєї орбіти (рис. 30). А вночі світліше на видимому боці Місяця, тому що він освітлюється світлом, відбитим від денного боку Землі (згадайте так зване попелясте світло Місяця, див. задачу 4.17);

г) освітленість, з якою Юпітер освітлює Іо у момент, коли до Іо повернутий повністю освітлений диск Юпітера, дорівнює

$$E_{\text{Іо}Ю} = \frac{A_Ю \pi R_Ю^2 L_\odot}{2\pi r_{\text{Іо}Ю}^2 \cdot 4\pi r_{Ю\odot}^2}.$$

Отже, відношення освітленостей Іо Юпітером та Місяця Землею (в однакових конфігураціях) становить

$$\frac{E_{\text{Іо}Ю}}{E_{☾\oplus}} = \frac{A_Ю}{A_\oplus}\left(\frac{R_Ю}{R_\oplus}\frac{r_{☾\oplus}}{r_{\text{Іо}Ю}}\frac{r_{\oplus\odot}}{r_{Ю\odot}}\right)^2 \approx 9.$$

4.21. а) Кутові діаметри Сонця для спостерігача на Урані, Нептуні та Плутоні відповідно дорівнюють

$$\theta_{\odot У} \approx 1{,}7'; \quad \theta_{\odot Н} = 1{,}1'; \quad \theta_{\odot Пл} = 0{,}8'.$$

Це знаходиться на межі й нижче від роздільної здатності неозброєного ока;

б) освітленість обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла, тому освітленість Урана Сонцем приблизно у 370 разів менша, ніж освітленість Землі, а це приблизно у 3800 разів більше, ніж Місяць освітлює Землю (у повний Місяць).

На Нептуні освітленість приблизно у 900 разів менша, ніж на Землі й приблизно у 1540 разів більша, ніж освітленість Землі Місяцем.

Для Плутона ці величини приблизно дорівнюють 1560 і 890 разів відповідно;

в) використовуючи формулу Погсона, для зоряної величини Сонця на цих планетах отримуємо відповідно $-20{,}4^m$; $-19{,}4^m$; $-18{,}8^m$.

4.22. Нехай $E_{\odot\odot}$ — освітленість від Сонця на поверхні космічного тіла, A — його альбедо. Тоді «світність» півкулі тіла, повернутої до нас, становитиме

$$L_{\odot} = A\pi R^2 E_{\odot\odot},$$

де $r_{\oplus\odot}$ — відстань від тіла до Землі. Освітленості від Сонця на космічному тілі поясу Койпера $E_{\odot\odot}$ і на Землі $E_{\oplus\odot}$ співвідносяться як квадрати відстаней від Сонця

$$\frac{E_{\odot\odot}}{E_{\oplus\odot}} = \left(\frac{r_{\oplus\odot}}{r_{\odot\odot}}\right)^2.$$

Оскільки $r_{\oplus\odot} \ll r_{\odot\odot}$, то $r_{\oplus\odot} \approx r_{\odot\odot}$. Тому

$$\frac{E_{\oplus\odot}}{E_{\oplus\odot}} = \frac{A}{2}\frac{R^2 r_{\oplus\odot}^2}{r_{\odot\odot}^4}.$$

Використовуючи формулу Погсона, дістанемо

$$\frac{E_{\oplus\odot}}{E_{\oplus\odot}} = 10^{0,4(m_{\odot}-m)},$$

де m — видима зоряна величина тіла. Із двох останніх виразів отримуємо

$$R = \sqrt{\frac{2}{A}\frac{r_{\odot\odot}^2}{r_{\oplus\odot}}}\,10^{0,2(m_{\odot}-m)}.$$

Беручи $m = 28^m$, $m_{\odot} = -26{,}8^m$, $r_{\odot\odot} = 40$ а. о. (середина поясу Койпера), знаходимо, що $R \approx 8$ км. Оскільки $R \propto r_{\odot\odot}^2$, то на ближньому і на далекому краях поясу Койпера значення R відрізняються у $\left(\frac{5}{3}\right)^2 \approx 3$ рази.

4.23. Оскільки планета сприймає сонячне випромінювання площею свого диска, а випромінює площею кулі, то з умови теплового балансу планети матимемо

$$\pi R^2 (1-A) E = 4\pi R^2 \sigma T_e^4,$$

де R — радіус планети; A — її альбедо (сферичне); E — освітленість планети Сонцем; T_e — радіаційна температура; σ — стала Стефана — Больцмана.

Враховуючи, що

$$E = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2},$$

де $L_{\odot}$ — світність Сонця; r — середня відстань планети від Сонця (для обчислень можна використовувати велику піввісь орбіти планети), остаточно отримуємо

$$T_e = \frac{1}{2}\left(\frac{(1-A)L_{\odot}}{\pi\sigma r^2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Слід зауважити, що ця формула буде точнішою, якщо швидше обертатиметься планета навколо своєї осі:

а) $T_e = 255$ K (–18 °C);

б) $T_e = 216$ K (–57 °C);

в) $T_e = 33$ K (–240 °C).

4.24. Із умови теплового балансу в підсонячній точці матимемо

$$(1-A)E = \sigma T_s^4,$$

де T_s — шукана температура; E — освітленість Меркурія Сонцем, яка у перигелію та афелію відповідно дорівнює

$$E = \frac{L_{\odot}}{4\pi a^2 (1 \mp e)^2},$$

де e — ексцентриситет орбіти Меркурія.

За розрахунками:

$$T_{s\Pi} = 697 \text{ K}, \; T_{sA} = 565 \text{ K}.$$

Ці результати можуть бути трохи завищеними. Вони були б точними, якби Меркурій був завжди повернутий до Сонця одним своїм боком.

Складність застосування до Меркурія поняття радіаційної температури буде зрозумілою, якщо подивитися розв'язання попередньої задачі.

4.25. а) Знаючи перигелійну відстань r_{Π} і знаходячи велику піввісь орбіти a за допомогою третього закону Кеплера, можна обчислити ексцентриситет

$$e = 1 - \frac{r_{\Pi}}{a} = 0{,}967,$$

а потім афелійну відстань

$$r_A = a(1+e) = 35{,}4 \text{ а. о};$$

б) температура в підсонячній точці у перигелію дорівнює

$$T_{s\Pi} = \left(\frac{(1-A)L_{\odot}}{4\pi\sigma r_{\Pi}^2}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 509 \text{ K},$$

аналогічно в афелію — $T_{sA} \approx 66$ K.

4.26. $e=\dfrac{\theta_{max}-\theta_{min}}{\theta_{max}+\theta_{min}}=0{,}0168.$

4.27. а) Відношення освітленостей Землі у перигелію та афелію для малих ексцентриситетів дорівнює

$$\frac{E_{\oplus П}}{E_{\oplus А}}=\frac{(1+e)^2}{(1-e)^2}\approx(1+2e)^2\approx 1+4e;$$

б) Земля у перигелію своєї орбіти отримує теплоти більше, ніж в афелію (див. пункт а)), але рухається швидше, що деяким чином згладжує різницю між перигелієм та афелієм. Оскільки швидкість Землі у перигелію пропорційна $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$, а в афелію $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$, то відношення перевищення кількості теплоти, яку Земля отримує у перигелію, над недостачею його в афелію порівняно з рівнем, який був би у разі колової орбіти, до величини цього рівня дорівнює

$$\frac{1}{(1-e)^2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}-1-\left(1-\frac{1}{(1+e)^2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)=\frac{2}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}-2\approx 3e^2.$$

Це становить 0,08 %.

4.28. а) Скрізь і завжди день дорівнював би ночі, зміна пір року припинилася б, а клімат у певному місці визначався б насамперед географічною широтою цього місця;

б) пори року мали б однакову тривалість, а все інше не змінилося б;

в) у цьому разі відношення афелійної та перигелійної відстаней Землі дорівнювало б

$$\frac{r_А}{r_П}=\frac{1+e}{1-e}=3.$$

І ця обставина для клімату Землі виявилася б важливішою, ніж нахил осі обертання. Зима у Північній півкулі стала б дуже короткою і теплою, літо довгим, але холодним. Тривалість дня у різні пори року не змінилася б;

г) врахуйте сучасний нахил осі обертання Марса.

4.29. Кут падіння сонячних променів на будь-яку місцевість земної поверхні завжди дорівнює зенітній відстані $z_\odot$ Сонця, тому місцевість освітлюється Сонцем так:

$$E=E_0\cos z_\odot,$$

а зенітна відстань під час верхньої кульмінації світила (до півдня від зеніту) дорівнює

$$z_\odot=\varphi-\delta_\odot,$$

де φ — географічна широта місцевості; $\delta_\odot$ — схилення Сонця. У дні літнього та зимового сонцестоянь $\delta_\odot=\varepsilon=\pm 23°26'$.

Отже, вплив нахилу променів більший за вплив зміни відстаней від Сонця у

$$\frac{\dfrac{\cos(\varphi-\varepsilon)}{\cos(\varphi+\varepsilon)}}{\left(\dfrac{1+e}{1-e}\right)^2}=\frac{3{,}22}{1{,}03}=3{,}13 \text{ раза.}$$

4.30. Можна накласти таке обмеження: радіаційна температура Землі у перигелію не повинна досягати 100 °С. У разі незмінної великої півосі, а також без урахування парникового ефекту отримуємо

$$e=1-\frac{1}{4a_\oplus T_e^2}\sqrt{\frac{(1-A_\oplus)L_\odot}{\pi\sigma}}=0{,}53.$$

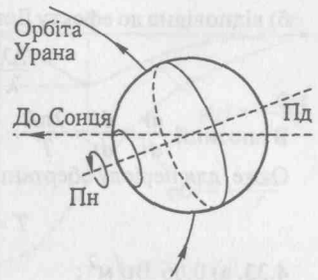


Рис. 31

Якщо врахувати сучасний парниковий ефект (завдяки йому середня температура на поверхні Землі нині на 32 градуси вища, ніж радіаційна), то ексцентриситет має не перевищувати $e=0{,}43$.

Слід зауважити, що підвищення температури на поверхні Землі матиме позитивний зворотний зв'язок. Наприклад, танення льодовиків зумовить зменшення альбедо, а зростання кількості водяної пари в атмосфері може призвести до збільшення парникового ефекту, тому максимальне значення ексцентриситету буде ще меншим.

На це вказують також дослідження С. Доула [9]. Виходячи з того, що будь-яка область поверхні планети буде придатною до життя, якщо коливання середньої річної температури перебувають у межах від 0 до 30 °С, а найвища середньодобова температура у найтеплішу пору року не перевищує 40 °С, Доул доходить висновку, що ексцентриситет має не перевищувати $e=0{,}2$.

4.31. Вісь обертання Урана нахилена на 98°, тому північний полюс планети знаходиться не з північного, а з південного боку від площини орбіти Урана (рис. 31). Уранографічні широти північного та південного тропіків становлять ±82°, широти північного та південного полярних кіл —±8°. За половину сидеричного періоду обертання планети схилення Сонця змінюється у межах від −82° до +82° і Сонце послідовно знаходиться у зеніті місцевостей з широтами від −82° до +82°, а полярні дні й ночі є від полюсів до широт $\varphi=\pm 8°$. Це зумовлює дуже різку зміну пір року.

Відношення кількостей теплоти на широті $\varphi=7°$ у дні літнього та зимового сонцестоянь дорівнює

$$\frac{\cos(7°-82°)}{\cos(7°+82°)}\approx 15.$$

4.32. а) Будь-яка точка поверхні біля лімба планети, що обертається, має швидкість (максимальну для точок на екваторі) за променем зору як відносно Сонця $\frac{dr}{dt}$, так і відносно земного спостерігача $\frac{d\ell}{dt}$. Це зумовлює зміщення спектральної лінії відносно її положення у центрі планети у фіолетовий бік на краю, що наближається, і у червоний бік на краю лімба, що віддаляється. Загалом уся спектральна лінія, якщо щілина спектрографа напрямлена вздовж екватора планети, буде нахилена відносно свого стандартного положення. Нахил буде тим більший, чим швидше обертатиметься планета. До того ж, оскільки променева швидкість прямо пропорційна відстані від центра диска, то нахилені лінії будуть прямими;

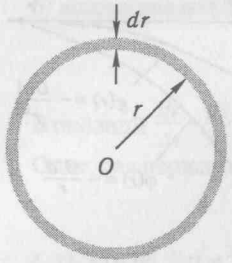


Рис. 34

5.2. За визначенням потенціальна енергія дорівнює

$$W_g = \frac{1}{2}\int_{(V)} \rho\varphi dV,$$

де ρ — щільність речовини; φ — потенціал поля. Межі інтегрування від 0 до ∞, оскільки ρ поза планетою дорівнює нулю, то інтегрування доцільне тільки у межах кулі.

Підставляючи знайдений у попередній задачі гравітаційний потенціал всередині планети, отримуємо

$$W_g = -4\pi^2 G\rho^2 \int_0^R \left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right) r^2 dr = -\frac{16\pi^2 G\rho^2 R^5}{15} =$$

$$= -\frac{3}{5}\frac{G}{R}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\rho\right)^2 = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}.$$

Цей результат можна отримати іншим способом. Розглянемо енергію взаємодії кулястого ядра радіусом r та кулястого шару завтовшки dr, що його оточує (рис. 34). Маса внутрішньої кулі дорівнює

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

Маса кулястого шару становить

$$dM = 4\pi r^2 \rho\, dr.$$

Тоді потенціальна енергія сил притягання між шаром і ядром дорівнює

$$dW_g = -\frac{GM\, dM}{r}.$$

Власну гравітаційну енергію планети радіусом R виражають інтегралом (інтегрування відповідає послідовному накладанню шарів на ядро доти, доки радіус кулі не досягне R):

$$W_g = -\int_0^R \frac{GM}{r} dM = -\frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2 \int_0^R r^4 dr = -\frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2 \frac{R^5}{5} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}.$$

5.3. а) Позначимо полярний радіус через R, тоді екваторіальний радіус становитиме $R + \Delta R$. Різниця прискорень вільного падіння на полюсі та екваторі очевидно дорівнює відцентровому прискоренню:

$$\frac{GM}{R^2} - \frac{GM}{(R+\Delta R)^2} = \omega^2 (R + \Delta R).$$

Після нескладних перетворень отримуємо

$$\frac{2GM\Delta R}{R^3} \approx \omega^2 R.$$

Звідси

$$\Delta R = \frac{\omega^2 R^4}{2GM} \approx 11 \text{ км};$$

б) для Юпітера $\Delta R \approx 3100$ км; для Сатурна $\Delta R \approx 4700$ км.

5.4. $q_\oplus = \frac{1}{290}$; $q_C = \frac{1}{6}$.

5.5. $\varepsilon_\oplus = \frac{1}{299}$.

5.6. Земля оберталась зі швидкістю, що відповідає сучасному геометричному стисненню, близько 10^7 років тому. Виявляється, що за такий характерний час земні породи, завдяки їх пластичності, перетікають у новий рівноважний стан, тобто фігура Землі з такою затримкою підлаштовується під її обертання.

5.7. Максимальну висоту гір H_{max} можна знайти з умови, що потенціальна енергія однієї молекули (масою m) на вершині гори не повинна бути більшою за теплоту плавлення речовини в основі гори у розрахунку на одну молекулу, інакше основа розплавиться і гора просяде. Отже, з рівності

$$mgH_{max} = \frac{\lambda M_г}{N} = \lambda m,$$

де N — кількість молекул, що складають гору, масою $M_г$, отримуємо лаконічну і наочну формулу

$$H_{max} = \frac{\lambda}{g}.$$

За розрахунками:

для Меркурія — $H_{max} = 68$ км;

для Венери — $H_{max} = 28$ км;

для Землі — $H_{max} = 25$ км;

для Марса — $H_{max} = 67$ км.

Те, що значення висот виявилися значно більшими за існуючі, легко пояснити: гори опускатимуться раніше, ще до розплавлення основи через пластичність порід.

Інший спосіб оцінювання максимальної висоти гір на планетах може бути таким: поставимо вимогу, щоб тиск на основу гори був не більшим за межу міцності порід σ, які створюють цю основу. Якщо гора має конічну форму, то з рівності

$$\frac{1}{3}\rho g H_{max} = \sigma$$

знаходимо

$$H_{max} = \frac{3\sigma}{\rho g}.$$

Зверніть увагу на залежність висоти гір від напруженості гравітаційного поля на поверхні планети.

Беручи $\sigma = 2{,}5 \cdot 10^8$ Па (для базальту) і $\rho \approx 3000$ кг/м^3, дістанемо ті самі результати.

5.8. Із умови

$$H_{\max} \approx R_{\text{кр}},$$

де $H_{\max}$ — максимальна висота гір; $R_{\text{кр}}$ — критичний радіус космічного тіла, а також, використовуючи розв'язання попередньої задачі, отримуємо

$$R_{\text{кр}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{G\rho}} \approx 500 \text{ км},$$

$$M_{\text{кр}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\lambda}{G}\right)^3} \approx 2{,}1\cdot 10^{21} \text{ кг} = 3{,}5\cdot 10^{-4} M_{\oplus}.$$

Якщо максимальну висоту гір визначити через межу міцності гірських порід σ, то

$$R_{\text{кр}} \approx \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\sigma}{G}}; \quad M_{\text{кр}} \approx \frac{3}{\rho^2}\sqrt{\left(\frac{\sigma}{G}\right)^3}.$$

Для базальтів ($\sigma = 2{,}5\cdot 10^8$ Па) це відповідає $R_{\text{кр}} \approx 600$ км і $M_{\text{кр}} \approx$ $\approx 2{,}4\cdot 10^{21}$ кг $= 4\cdot 10^{-4} M_{\oplus}$.

Оскільки справжня максимальна висота гір на планетах приблизно втричі менша за розраховану за допомогою спрощених моделей, що має своє пояснення (див. попередню задачу), то граничні розміри сферичних космічних тіл можна зменшити у $\sqrt{3}$ рази.

Слід зазначити, що параметри супутників Сатурна Енцелада, Мімаса — з одного боку (а саме сферичних), і Януса, Епіметея, Гіперіона та юпітеріанської Амальтеї — з іншого (неправильної форми), добре узгоджуються з отриманими оцінками (див. «Довідкові дані», табл. 6). Проте є й досі незрозумілі винятки: супутник Сатурна Феба має сферичну форму радіусом 110 км, а супутник Урана Пак — майже сферичну радіусом всього ≈ 85 км.

5.9. Припускаючи однорідність Землі, енергія, що виділилась під час її утворення, дорівнює

$$\Delta W_g \approx \frac{3}{5}\frac{GM_{\oplus}^2}{R_{\oplus}} = 2{,}26\cdot 10^{32} \text{ Дж}.$$

Максимальна температура, до якої могла нагрітися Земля, становить $T_{\max} \approx 37\,700$ К.

Однак слід зауважити, що частка енергії, що залишається у надрах планети, істотно залежить від способу її формування. Коли розглядають повільне стискання газової хмари під час утворення зірок, то застосовують теорему віріала, згідно з якою половина енергії, що звільняється при цьому, йде на нагрівання надр протозорі, а інша випромінюється в навколишній простір. Набагато менша частина енергії залишається в надрах планети під час її акумуляції з твердої речовини [22]. До того ж значна частина цієї енергії витрачається на створення пружної деформації самогравітуючої твердої планети.

5.10. Визначимо спочатку власну гравітаційну енергію планети з лінійною зміною щільності від поверхні до центра. Нехай

$$\rho(r) = ar + b.$$

Енергію у цьому разі краще обчислювати за формулою (див. задачу 5.2)

$$W_g = -\int_0^R \frac{GM}{r}\,\mathrm{d}M.$$

За таким розподілом щільності з глибиною дістанемо

$$\mathrm{d}M = 4\pi r^2 (ar + b)\mathrm{d}r,$$

$$M = 4\pi\int_0^r r_1^2 (ar_1 + b)\mathrm{d}r_1 = \frac{4}{3}\pi r^3\left(\frac{3}{4}ar + b\right).$$

Після інтегрування отримуємо

$$W_g = -\frac{3}{4}\frac{GM^2}{R}\frac{\frac{3}{7}a^2R^2 + \frac{7}{6}abR + \frac{4}{5}b^2}{\left(\frac{3}{4}aR + b\right)^2}.$$

Оскільки $\rho(R) = 2700$ кг/м^3 і $\rho(0) = 13\,000$ кг/м^3, то

$$\rho(r) = \left(-\frac{10\,300}{R}r + 13\,000\right) \text{кг/м}^3.$$

Підставляючи коефіцієнти a і b, отримуємо

$$W_g \approx -\frac{2}{3}\frac{GM^2}{R}.$$

Отже, енергія, що виділилася під час гравітаційної диференціації від однорідного стану до стану з лінійним зростанням щільності з глибиною, дорівнює

$$\Delta W = \left|\frac{2}{3}\frac{GM^2}{R} - \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\right| = 2{,}2\cdot 10^{31} \text{ Дж}.$$

Ця оцінка, незважаючи на спрощену модель процесу, добре узгоджується з оцінками Е. Люстіха ($1{,}5\cdot 10^{31}$ Дж), Г. Юрі ($2\cdot 10^{31}$ Дж) [17], та В. Жаркова ($1{,}47\cdot 10^{31}$ Дж) [11], які визначили кількість теплоти, що виділилась у надрах Землі від моменту її утворення.

5.11. а) Втрата теплоти Землею становить $4{,}6\cdot 10^{30}$ Дж;

б) на 800 К.

5.12. а) $\varkappa \approx 37\,\frac{\text{Дж}}{\text{м}\cdot\text{с}\cdot\text{К}}$, що більше ніж у 12 разів перевищує коефіцієнт теплопровідності для суміші гранітів і базальтів. Це свідчить про інший хімічний склад ядра порівняно з мантією;

б) тепловий потік із ядра в мантію становить $5{,}6\cdot 10^{12}$ Вт, що у 5,5 раза менше за повний тепловий потік Землі.

5.13. а) $\tau \sim \frac{R_{\oplus}^2}{\chi} \sim 10^{12}$ років;

б) $\ell \sim 300$ км. Докладніший аналіз [11] показує, що шар охолоджування має товщину 600—900 км. Тобто температура саме у цьому шарі спадає внаслідок охолодження, а у більш глибинних надрах планети розподіл температури мало змінюється відтоком теплоти до поверхні.

5.14. Згідно з вказівкою до цієї задачі

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi r^3 q,$$

де E — тепловий потік у розрахунку на одиницю площі; q — щільність джерел теплоти; r — довільний радіус всередині планети $(r < R_{\oplus})$.

За означенням

$$E = -\varkappa \frac{dT}{dr},$$

де $\frac{dT}{dr}$ — градієнт температури.

Величину q визначаємо з умови, що повний тепловий потік, який надходить із надр Землі, відомий і дорівнює

$$\Phi = \frac{4}{3}\pi R^3 q = 3{,}1 \cdot 10^{13} \text{ Вт}.$$

Отже, отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi}{4\pi R^3 \chi} r.$$

Інтегруючи це рівняння за граничної умови $T(R) = 0$, знаходимо

$$T(r) = \frac{\Phi}{8\pi R^3 \chi}\left(R^2 - r^2\right).$$

Звідси температура у центрі Землі $T(0) = 65000$ К. Отже, запропонована модель погано узгоджується із сучасними оцінками температури всередині планети.

5.15. Інтегруючи рівняння гідростатичної рівноваги

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g = -\rho \frac{GM}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi G \rho^2 r$$

від 0 до R і враховуючи, що тиск на поверхні планети дорівнює нулю, для тиску в центрі планети отримуємо

$$P_c = \frac{2}{3}\pi G \rho^2 R^2.$$

За розрахунками для Землі $P_{c\oplus} = 1{,}73 \cdot 10^{11}$ Па. У реальній Землі є помітна концентрація маси до центра. Внаслідок цього прискорення вільного падіння спадає помітно слабкіше, ніж в однорідній моделі й, відповідно тиск зростає сильніше і набуває у центрі приблизно вдвічі більше значення $\approx 3{,}6 \cdot 10^{11}$ Па [11].

Для Місяця $P_{c☾} = 4{,}71 \cdot 10^9$ Па. Вважається, що Місяць добре описується однорідною моделлю. Спробуйте пояснити, чому.

5.16. На підставі даних вимірювань можна зробити такі висновки:

а) місяць має розподіл щільності, найбільш наближений до однорідного. У Землі та Меркурія має бути помітна концентрація маси до центра;

б) Земля та Меркурій повинні мати масивні металічні ядра (для Землі це підтверджується даними сейсмології), однак у Меркурія ядро має бути відносно більшим.

5.17. Використовуючи закон Гаусса та умову неперервності $g(r)$ на межі ядро-оболонка, а також припускаючи центральну симетрію гравітаційного поля всередині Меркурія, отримуємо

$$g(r) = \begin{cases} -\frac{4}{3}\pi G \rho_я r, & 0 \le r \le R_я; \\ -\frac{4}{3}\pi G\left((\rho_я - \rho_{об})\frac{R_я^3}{r^2} + \rho_{об} r\right), & R_я \le r \le R, \end{cases}$$

де $\rho_я$ і $\rho_{об}$ — щільності відповідно ядра і оболонки; $R_я$ і R — радіуси відповідно ядра та всього Меркурія.

Легко переконатися, що величина g має максимальне значення (за абсолютною величиною) на межі ядра, тобто при $r = R_я$. Наприклад, похідна ліворуч від точки $r = R_я$ завжди від'ємна, а праворуч — додатна, якщо $\rho_я > \frac{3}{2}\rho_{об}$. Враховуючи, що графік функції $g = g(r)$ знаходиться нижче від осі абсцис (див. рис. 33), доходимо висновку, що $g(R_я) = g_{max}$ за абсолютною величиною.

Відношення максимального значення прискорення вільного падіння до значення прискорення на поверхні Меркурія дорівнює

$$\frac{g(R_я)}{g(R)} = \frac{\rho_я R_я}{R\left((\rho_я - \rho_{об})\left(\frac{R_я}{R}\right)^3 + \rho_{об}\right)} = 1{,}21.$$

5.18. Рівняння Адамса — Вільямсона має вигляд

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{\rho g}{\Phi}.$$

Це рівняння за допомогою вимірювань v_p і v_s на різних глибинах дає змогу визначити розподіл щільності в надрах планети і побудувати таким чином її реальну модель.

5.19. а) Уявлятимемо Землю такою, що складається з ядра та кількох кульових шарів, щільність всередині кожного з яких є сталою і дорівнює півсумі щільності на межах шару. Там, де є стрибок щільності, більше її значення приписуватимемо верхній межі більш наближеного до центра шару, а менше значення — нижній межі сусіднього зовнішнього шару.

Тоді повний момент інерції Землі дорівнюватиме сумі моментів інерції внутрішнього ядра Землі та кульових шарів, що його оточують:

$$I = \sum_{i=1}^{6} I_i,$$

де для i-го шару

$$I_i = \frac{2}{5} m_i r_i^2 - \frac{2}{5} m_{i-1} r_{i-1}^2 = \frac{8}{15}\pi\left(r_i^5 - r_{i-1}^5\right)\bar{\rho}_i .$$

Значення $i = 1$ відповідає внутрішньому ядру $(r_0 \approx 0)$. В результаті обчислень отримуємо $I = 8{,}01 \cdot 10^{37}$ кг·м^2, що дуже близько до середнього моменту інерції Землі (див. формулу в умові задачі 5.22), який дорівнює $8{,}05 \cdot 10^{37}$ кг·м^2.

Проте це істотно менше від моменту інерції однорідної Землі, який дорівнював би $9{,}68 \cdot 10^{37}$ кг·м^2. Поясніть, чому

б) осьовий момент імпульсу Землі дорівнює

$$J = I\omega = 5{,}84 \cdot 10^{33} \text{ Дж·с};$$

в) кінетична енергія осьового обертання Землі становить

$$W_к = \frac{I\omega^2}{2} = 2{,}13 \cdot 10^{29} \text{ Дж}.$$

5.20. а) Маса гідросфери становить $\approx 0{,}023$ % маси Землі;

б) $\ell_0 = \dfrac{M_{ок}}{4\pi R_\oplus^2 \rho} = 2600$ м;

в) $\ell \approx 3670$ м.

5.21. Для існування океану на будь-якій планеті потрібно:

1) щоб температура хоча б на частині поверхні планети була вищою, ніж температура плавлення тієї речовини, з якої складатиметься океан;

2) щоб парціальний тиск газу з тієї речовини біля поверхні планети був вищим, ніж тиск насиченої пари за цієї температури. А це можливо лише за досить великої загальної маси цієї речовини на планеті. Інакше ця хімічна сполука може цілком виявитися в атмосфері у вигляді газу;

3) щоб тиск або температура на планеті не перевищували критичних значень для певної хімічної сполуки, тому що в іншому разі не існуватиме поверхні поділу між рідкою та газоподібною фазами.

Усі ці вимоги безперечно задовольняє Земля з її водними океанами та, можливо, Титан, де припускається океан з метану.

5.22. а) Припускаючи, що поверхня Землі є ідеальною сферою, рівень світового океану підніметься на величину

$$\ell = \frac{m}{4\pi R_\oplus^2 \rho},$$

де m — маса льодовиків. За розрахунками $\ell = 67$ м;

б) зміна моменту інерції Землі відбудеться внаслідок того, що льодовики нині зосереджені біля осі обертання і тому мало впливають на сучасний момент інерції Землі, а після танення льодовиків вода розподілиться по кульовому шару завтовшки ℓ (див. рис. 8). Ураховуючи малу величину ℓ, можна вважати, що зміна моменту інерції Землі ΔI дорівнюватиме моменту інерції тонкостінної сфери. Тоді, скориставшись відомою формулою

$$\Delta I = \frac{2}{3} m R_\oplus^2 ,$$

де m — маса кульового шару, яка очевидно дорівнює масі льодовиків, отримуємо $\Delta I = 9{,}5 \cdot 10^{32}$ кг·м^2, що становить 0,0012 % сучасного моменту інерції Землі;

в) згідно з законом збереження моменту імпульсу, дістанемо

$$I\omega = (I + \Delta I)(\omega + \Delta\omega),$$

де ω — кутова швидкість осьового обертання Землі. Звідси знаходимо

$$\Delta\omega = -\frac{\omega \Delta I}{I + \Delta I} \approx -\omega \frac{\Delta I}{I}.$$

Період осьового обертання Землі зміниться на величину

$$\Delta T = -\frac{2\pi}{\omega^2}\Delta\omega = -\frac{T}{\omega}\Delta\omega = T\frac{\Delta I}{I} = 1 \text{ с}.$$

5.23. Запаси холоду Світового океану, тобто кількість теплоти, потрібної, щоб нагріти океан до 15 °С, дорівнює $6{,}6 \cdot 10^{25}$ Дж.

Маса льодовиків $m_л$ останнього льодовикового періоду, що розтанули, дорівнює масі води у верхньому шарі океану завтовшки $\ell = 80$ м. Тому з урахуванням площі, яку займають океани,

$$m_л = 0{,}71 \cdot 4\pi R_\oplus^2 \ell\rho \approx 3 \cdot 10^{19} \text{ кг}.$$

Для того щоб розтопити цю масу льоду, потрібна теплова енергія $9{,}9 \cdot 10^{24}$ Дж. З урахуванням нагрівання води хоча б до 3,5 °С, загальна кількість потрібної енергії становить 10^{25} Дж.

Порівнюючи ці результати, можна зробити висновок, що будь-яке посилення перемішування глибинних вод океану з поверхневими (див. наступну задачу) має спричиняти похолодання, а дуже інтенсивне їх перемішування може викликати глобальне похолодання і навіть льодовиковий період.

5.24. Час, за який на $\Delta T = 3$ К прогрівається активний поверхневий шар океанів, можна визначити так:

$$\tau = \frac{C_{ок}\Delta T}{\pi R_\oplus^2 (1 - A_\oplus) E_{\oplus\odot}},$$

де $C_{ок}$ — повна теплоємність цього шару; $A_\oplus$ — альбедо Землі; $E_{\oplus\odot}$ — сонячна стала. З урахуванням площі, яку займають океани, для теплоємності отримуємо

$$C_{ок} \approx 0{,}71 \cdot 4\pi R_\oplus^2 \ell\rho c,$$

де c — питома теплоємність води.

За розрахунками $\tau \approx 45$ діб.

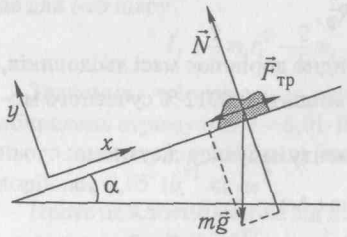


Рис. 35

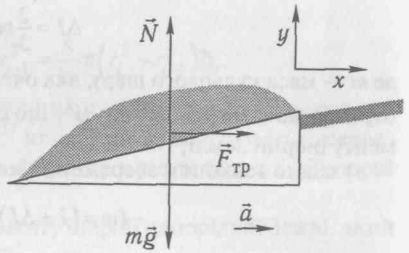


Рис. 36

5.25. Оцінкою кінетичної енергії океанських течій з урахуванням площі, яку займають океани, є

$$W_{ок} \approx \frac{0{,}71 \cdot 2\pi R_{\oplus}^2 \rho_{ок} v_{ок}^3}{\omega} \approx 2{,}6 \cdot 10^{18} \text{ Дж}.$$

Це на два порядки менше за кінетичну енергію атмосфери, яка оцінюється у $2{,}6 \cdot 10^{20}$ Дж, за умови, що характерна швидкість вітрів $v_в = 10$ м/с, що цілком природно, оскільки енергію океани отримують переважно від атмосфери. Течії, енергія яким передається безпосередньо сонячним випромінюванням, порівняно з вітровими менш інтенсивні.

5.26. Цю задачу можна звести до класичної задачі механіки про рівновагу тіла, що перебуває під дією кількох сил (наприклад, про рівновагу тіла, що перебуває на похилій площині).

Для того щоб утворився пагорб зі схилом α, потрібно виконати умову (рис. 35)

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0,$$

де m — маса деякої частини ґрунту; $\vec{N}$ — реакція опори; $\vec{F}_{тр}$ — сила тертя.

У проекціях на осі x і y, які вибрані так, як зображено на рис. 35, це рівняння має вигляд:

$$\begin{cases} F_{тр} - mg\sin\alpha = 0, \\ N - mg\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Оскільки $F_{тр} = \mu N$, де μ — коефіцієнт тертя, то розв'язком цих рівнянь є

$$\operatorname{tg}\alpha = \mu.$$

Звідси випливає, що оскільки місячний ґрунт утворює пагорби зі схилами, крутішими, ніж з піску на Землі, то коефіцієнт тертя часточок місячного ґрунту одна об одну має бути більший, ніж у земного піску.

Розглянемо, якими можуть бути граничні прискорення совка для збирання ґрунту на Місяці. Нехай совок переміщується з прискоренням $\vec{a}$ у горизонтальній площині (рис. 36). Місячний ґрунт масою m,

що є у совку, залишиться в ньому, якщо він також рухатиметься з тим самим прискоренням. За другим законом Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

У проекціях на осі x і y це рівняння запишемо так:

$$\begin{cases} ma = F_{тр}, \\ 0 = -mg + N. \end{cases}$$

Звідси граничне прискорення, за якого ґрунт залишиться у совку, дорівнює

$$a = \mu g.$$

Оскільки прискорення вільного падіння на Місяці у шість разів менше, ніж земне, то й допустимі прискорення a будуть на Місяці значно меншими.

Отже, явища, з якими зіткнулися на Місяці американські астронавти, пов'язані як із фізичними властивостями самого ґрунту, так і з меншою, ніж на Землі, силою гравітації.

5.27. а) Вище за критичну точку 374,2 °С вода не може залишатися у рідкому стані за будь-якого тиску;

б) $3{,}7 \cdot 10^7$ Па (≈ 370 атм).

5.28. Тиск біля поверхні Марса (див. «Довідкові дані», табл. 4) менший, ніж тиск, який відповідає потрійній точці води: $T = 273{,}16$ К (0,01 °С), $P = 610{,}6$ Па. Тому в сучасних умовах вода на Марсі може бути тільки у твердому або газоподібному стані.

5.29. а) Дно океану, який існував, може відрізнятися (і насправді відрізняється) плоским та рівним рельєфом, що пояснюється відкладеннями осадових порід, а також хімічним складом ґрунту, наприклад надлишковою концентрацією Сульфуру та Хлору, якщо океан був солоним;

б) марсіанський океан був значно менш глибоким, ніж земний (див. задачу 5.20). Якщо планету вважати правильною сферою, то глибина океану була б усього ≈ 100 м.

5.30. Щоб відповісти на поставлене запитання, потрібно врахувати хімічний склад Юпітера ($\approx 230 M_{\oplus}$ Гідрогену, $\approx 70 M_{\oplus}$ Гелію та $\approx 20 M_{\oplus}$ важких хімічних елементів) і фізичний стан, в якому перебуває речовина планети:

а) протяжність атмосфери Юпітера становить за різними оцінками від 1000 до 6000 км. На її «дні» температура за деякими оцінками сягає 2000 К. Температура, очевидно, зростає з глибиною, але ще швидше зростає тиск. За тиску $P > 10^6$ атм (в умовах Юпітера це відповідає глибинам від 12 000 до 20 000 км за різними оцінками) електронні оболонки атомів Гідрогену руйнуються, в результаті чого утворюється рідкий молекулярний водень. На більших глибинах відбувається перехід водню у металічний стан — також рідкий. У самому центрі, можливо, знаходиться металосилікатне ядро (яке може містити воду, аміак і метан) масою близько $5 M_{\oplus}$, що також перебуває у рідкому стані. Одну з моделей внутрішньої будови Юпітера зображено на рис. 37 [16];

б) швидше за все Юпітер справді є повністю газорідкою планетою і твердої поверхні не має.

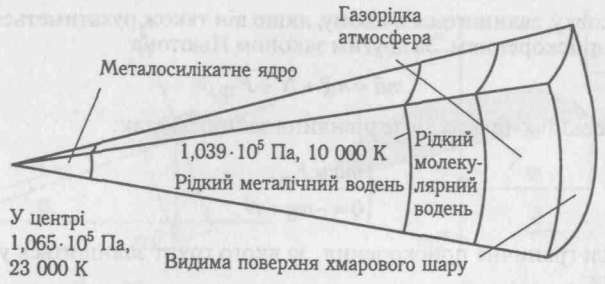


Рис. 37

5.31. а) Умова теплового балансу планети має вигляд

$$4\pi R^2\sigma T_e^4 = \pi R^2(1-A)E + \Phi,$$

де T_e — ефективна (радіаційна) температура видимої поверхні; A — альбедо; E — освітленість планети Сонцем; Φ — тепловий потік із надр. За умовою задачі

$$\Phi = 1{,}9\pi R^2(1-A)E,$$

звідси

$$T_e = \left(\frac{2{,}9(1-A)E}{4\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 118\ \text{K}.$$

Якби $\Phi = 0$, то ефективна температура дорівнювала б $T_{e0} = 90$ К. Отже, температура Юпітера на 28 К більша, ніж очікувалось;

б) нехай додаткове нагрівання Юпітера забезпечується зменшенням повної енергії планети. Тоді

$$\Phi = -\frac{dW}{dt}.$$

За теоремою віріала (нехтуючи енергією осьового обертального руху і енергією магнітного поля)

$$W = \frac{W_g}{2} \approx -\frac{GM^2}{2R},$$

де W_g — власна гравітаційна енергія планети. Вважаючи, що зменшення гравітаційної енергії відбувається внаслідок зменшення радіуса планети, знаходимо

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2\Phi R^2}{GM^2} = -\frac{3{,}8\pi R^4(1-A)E}{GM^2} \approx -1\ \text{мм/рік}.$$

5.32. Без додаткових джерел енергії рівняння теплового балансу має вигляд

$$4\pi R^2\sigma T_{e0}^4 = \pi R^2(1-A)E,$$

де T_{e0} — ефективна (радіаційна) температура видимої поверхні; A — альбедо; E — освітленість планети Сонцем.

Із додатковим джерелом енергії

$$4\pi R^2\sigma T_e^4 = \pi R^2(1-A)E + \Phi,$$

де Φ — потік теплоти, зумовлений випадінням на Юпітер метеорної речовини. З цих двох рівнянь отримуємо

$$\Phi = 4\pi R^2\sigma\left(T_e^4 - T_{e0}^4\right).$$

Цей потік теплоти забезпечується зменшенням повної енергії Юпітера W, яка за теоремою віріала дорівнює половині гравітаційної енергії планети (див. розв'язання пункту б) попередньої задачі), тобто

$$\Phi = -\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(-\frac{GM^2}{R}\right).$$

Оскільки зменшення гравітаційної енергії у цьому разі відбувається внаслідок збільшення маси, то остаточно знаходимо

$$\frac{dM}{dt} = \frac{4\pi R^3\sigma\left(T_e^4 - T_{e0}^4\right)}{GM} = 2{,}5\cdot 10^8\ \text{кг/с}.$$

5.33. Під характерним розміром магнітосфери розуміємо, як видно з рис. 9, відстань від центра диполя до підсонячної точки магнітосфери. Рівність тиску магнітного поля планети газодинамічному тиску плазми еквівалентна рівності густини енергій магнітного поля та руху частинок сонячного вітру

$$\frac{1}{2}\frac{B_м^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\rho v^2,$$

де $B_м$ — магнітна індукція на відстані $R_м$ від центра диполя; μ_0 — магнітна стала; ρ — густина плазми. Величину ρ визначають через темп випаровування плазми з корони Сонця $\dot{M}$ так:

$$\rho = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 v}.$$

Магнітну індукцію $B_м$ можна пов'язати з величиною B_0 на поверхні планети співвідношенням

$$B_м = \left(\frac{R}{R_м}\right)^3 B_0,$$

де R — радіус планети.

Підставляючи останні дві формули у першу рівність, отримуємо

$$R_м = \left(\frac{4\pi}{\mu_0\dot{M}v}\right)^{\frac{1}{6}}(B_0 r)^{\frac{1}{3}} R;$$

б) для Землі $R_м \approx 10R_\oplus$;

в) швидкість сонячного вітру мало змінюється з відстанню від Меркурія до Юпітера (див. задачу 2.41). Тому для Меркурія у перигелію його орбіти $R_м = 1{,}4R_М$, а в афелію — $R_м = 1{,}7R_М$, де $R_М$ — радіус

Меркурія. Це приблизно у 19 разів менше за магнітосферу Землі для перигелію і у 15 разів менше для афелію Меркурія;

г) для Юпітера $R_М \approx 40 R_Ю$, що майже у 43 рази більше за магнітосферу Землі.

Слід зауважити, що, по-перше, завдяки швидкому осьовому обертанню планети значний вплив на динаміку плазми у магнітосфері Юпітера мають відцентрові сили, внаслідок чого межа магнітосфери проходить на відстані $\approx 100 R_Ю$ (на денному боці) [2]. По-друге, магнітне поле планети насправді має дипольний характер лише у внутрішній частині магнітосфери розміром $\approx 10 R_Ю$ [2].

5.34. Згідно з теорією планетарного «магнітного динамо,» магнітне поле планети, що належить до планет земної групи, пов'язане з її ядром. Наявність ядра у планети знижує безрозмірний момент інерції, який для однорідної кулі дорівнює 0,4. Для Землі безрозмірний момент інерції дорівнює 0,3309, що відповідає ядру радіусом 0,57 радіуса планети. Для Марса відмінність від значення 0,4 значно менша — величина його моменту інерції становить 0,377. Це означає, що ядро Марса зовсім маленьке. За деякими оцінками [16], воно містить не більше ніж 9 % маси планети. До того ж високий вміст заліза у ґрунті Марса — вагоме свідчення того, що процес опускання важких хімічних елементів до ядра планети (гравітаційна диференціація) зайшов для Марса не так далеко, як для Землі, Венери та Меркурія (хоча це може бути наслідком падіння на Марс астероїдів, збагачених залізом на останніх етапах формування планети). Слід мати на увазі, що на Марсі через його значно меншу середню щільність взагалі має бути значно менше важких елементів порівняно з усіма планетами земної групи.

Отже, для Марса слід очікувати маленьке ядро у твердому стані, не дуже збагачене металами.

На відміну від Марса у Меркурія очікується дуже масивне залізно-нікелеве ядро (див. задачу 5.16), принаймні зовнішня частина якого перебуває у рідкому стані, що в результаті зумовлює магнітне поле цієї планети.

Проте оскільки підтверджень (сейсмологічних) знаходження ядра у рідкому стані поки немає, право на існування має гіпотеза про те, що магнітне поле Меркурія є реліктовим. Воно може бути результатом пресування магнітного поля Сонця в магнітних породах Меркурія (магнітних матеріалів там багато, а напруженість сонячного магнітного поля біля Меркурія була первісно високою).

Для Венери відсутність магнітного поля швидше за все зумовлена дуже повільним осьовим обертанням.

5.35. Згідно із законом електромагнітної індукції, електрорушійна сила дорівнює

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де Ф — магнітний потік, що пронизує Іо. Внаслідок асиметричності магнітосфери цей потік під час руху супутника змінюється. Згідно з підказкою до цієї задачі, для магнітного потоку можна записати

$$\Phi = \pi R_{Io}^2 B_М (\beta + \cos\omega t),$$

де R_{Io} — радіус Іо. Оскільки магнітосфера постійно відстежує напрямок на Сонце, то величина ω дорівнюватиме різниці частот орбітального руху Іо навколо Юпітера й орбітального руху Юпітера навколо Сонця

$$\omega = \omega_{Io} - \omega_Ю \approx \omega_{Io} = 4{,}12 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}.$$

Магнітна індукція $B_М$ на орбіті супутника, очевидно, пов'язана з індукцією на видимій поверхні планети співвідношенням

$$B_М = \left(\frac{R_Ю}{a_{Io}}\right)^3 B_0,$$

де a_{Io} — велика піввісь орбіти Іо.

Остаточно отримуємо

$$\mathscr{E} = \pi R_{Io}^2 \omega B_0 \left(\frac{R_Ю}{a_{Io}}\right)^3 \sin\omega t.$$

Амплітудне значення ЕРС дорівнюватиме ≈ 800 В.

5.36. а) Спектроскопічні спостереження за допомогою ефекту Допплера підтверджують, що ближчі до планети частини кільця мають швидкість обертання більшу, ніж віддаленіші. Для суцільного утворення результат був би протилежним;

б) під впливом різних збурень (насамперед за це відповідальні супутники Сатурна) орбіти частинок кілець трохи нахилені одна до одної. Тому за орбітальний період T кожна частинка двічі перетинає кільце завтовшки h. Звідси характерна швидкість зіткнень частинок у кільцях становитиме

$$v \approx \frac{2h}{T}.$$

Для середини основних кілець ($r = 1{,}8 R_C$, де R_C — екваторіальний радіус планети) за допомогою третього закону Кеплера знаходимо $T = 10$ год. Тоді $v \approx 0{,}6$ км/год;

в) знаючи відстань, на якій знаходиться щілина Кассіні, можна за допомогою третього закону Кеплера визначити орбітальний період частинок кільця для такої відстані. Він дорівнює 0,489 доби, що становить близько половини періоду обертання супутника Мімаса. Під впливом Мімаса у русі частинок по колових орбітах виникають збурення, які не дають змоги частинкам переміщуватися з одного кільця в інше (наприклад, із A у B), утворюючи так званий резонансний бар'єр.

Слід зауважити, що за допомогою космічних апаратів «Вояджер» вдалося виявити, що щілина Кассіні не зовсім порожня. Вона насправді заповнена речовиною, але з більшим ступенем роздрібненості та істотно меншою концентрацією.

6. Атмосфери планет

6.1. $M_{атм} \approx \dfrac{4\pi R^2 P}{g}$,

де R — радіус планети; P і g — відповідно тиск і прискорення вільного падіння біля її поверхні. Звідси

$$M_{атм♀} = 5{,}2 \cdot 10^{20} \text{ кг} = 1{,}1 \cdot 10^{-4} M_♀;$$

$$M_{\text{атм}\oplus} = 5{,}25 \cdot 10^{18}\ \text{кг} = 8{,}75 \cdot 10^{-7}\ M_{\oplus};$$

$$M_{\text{атм}\sigma} = 2{,}35 \cdot 10^{16}\ \text{кг} = 3{,}9 \cdot 10^{-8}\ M_{\sigma}.$$

6.2. 1) На Землі є багато води у рідкому стані, яка розчиняє CO_2 і перетворює його на осадові породи переважно у вигляді карбонату кальцію (крейда та вапняк). Причому існування живих морських організмів значно прискорює цей процес;

2) рослинний покрив Землі в результаті фотосинтезу переробляє CO_2 на O_2. Зауважимо, що оскільки великі рослини — дерева, квіти, трави — існують не більше ніж 600 млн років, то збагачення атмосфери киснем відбулося переважно завдяки синьозеленим водоростям;

3) унаслідок окиснення вільним киснем аміаку та інших нітрогеновмісних сполук в атмосфері у процесі її еволюції накопичувався N_2. Його збереженню сприяло також існування життя. Річ у тому, що під час кожного грозового розряду частина атмосферного N_2 сполучається з O_2, утворюючи оксиди нітрогену, які завдяки опадам потрапляють у ґрунт та океани. Однак у ґрунті оксиди нітрогену розкладаються денітрифікуючими бактеріями, які повертають N_2 в атмосферу.

6.3. Виділимо в атмосфері стовпчик газу та розглянемо два горизонтальні перетини цього стовпчика — на висоті h і на висоті $h + dh$. Різниця тисків на цих висотах дорівнює вазі цього стовпчика газу заввишки dh в розрахунку на одиницю площі

$$dP = P(h+dh) - P(h) = -\rho(h) g dh.$$

Знак «мінус» тут з'явився тому, що тиск з висотою падає.

Із цієї рівності випливає шукане рівняння.

а) Із рівняння Менделєєва — Клапейрона дістанемо

$$\rho = \frac{\mu m_{\text{H}} P}{kT},$$

де μ — відносна молекулярна маса; m_{H} — маса атома Гідрогену; k — стала Больцмана. Підставляючи вираз у рівняння гідростатичної рівноваги, отримуємо

$$\frac{dP}{dh} = -\frac{\mu m_{\text{H}} P g}{kT}.$$

Розділяючи змінні й інтегруючи їх, знаходимо

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu m_{\text{H}} g h}{kT}\right).$$

Тоді густина змінюється з висотою як

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu m_{\text{H}} g h}{kT}\right);$$

б) із рівняння адіабати отримуємо

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Підставляючи вираз у рівняння гідростатичної рівноваги, дістанемо

$$\frac{dP}{dh} = -\rho_0 g \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Інтегруючи з використанням табличного інтеграла

$$\int \frac{dx}{x^{\alpha}} = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \quad (\alpha \neq 1),$$

та за граничної умови $P = P_0$, якщо $h = 0$, отримуємо

$$P = P_0 \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

де $H = \dfrac{\gamma}{\gamma-1} \dfrac{P_0}{\rho_0 g}$.

Густина у цьому разі змінюється з висотою так:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

6.4. Для ізотермічної атмосфери зміну тиску з висотою можна записати так (див. розв'язання попередньої задачі)

$$P = P_0 e^{-\frac{h}{H}},$$

де

$$H = \frac{kT}{\mu m_{\text{H}} g}.$$

Величина H і є за означенням висотою однорідної атмосфери.

Висоту H можна обрахувати за такою формулою:

$$H = \frac{v_{\text{зв}}^2}{g},$$

де $v_{\text{зв}} = \sqrt{\dfrac{kT}{\mu m_{\text{H}}}}$ — так звана ізотермічна швидкість звуку.

Для Венери, Землі й Марса висота однорідної атмосфери відповідно дорівнює:

$$H_{♀} = 16\ \text{км};$$

$$H_{\oplus} = 8{,}3\ \text{км};$$

$$H_{\sigma} = 11\ \text{км}.$$

6.5. Відомо, що для адіабатичного процесу виконується співвідношення

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{const},$$

де γ — показник адіабати.

Диференціюючи по h, отримуємо

$$\frac{dT}{dh}=-\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{T}{P}\frac{dP}{dh}.$$

Використовуючи рівняння гідростатичної рівноваги і рівняння Менделєєва — Клапейрона, остаточно знаходимо

$$\frac{dT}{dh}=-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu m_{\text{H}}g}{k},$$

де μ — відносна молекулярна маса; m_{H} — маса атома Гідрогену.

Із останнього виразу випливає, що для певної планети адіабатичний градієнт — величина стала. Тому в адіабатичній атмосфері температура з висотою змінюється так:

$$T=T_0-\left|\frac{dT}{dh}\right|h.$$

Для атмосфери Венери з урахуванням коливальних ступенів вільності слід брати $\gamma=\frac{c_p}{c_V}=\frac{11}{9}$. Тоді

$$\left(\frac{dT}{dh}\right)_{♀}=-7{,}5\ \text{К/км}.$$

Беручи для атмосфери Землі та Марса, як для двохатомного газу $\gamma=\frac{7}{5}$, дістанемо

$$\left(\frac{dT}{dh}\right)_{\oplus}=-9{,}85\ \text{К/км};$$

$$\left(\frac{dT}{dh}\right)_{♂}=-5{,}6\ \text{К/км}.$$

6.6. Диференціюючи вираз для внутрішньої енергії по h і підставляючи у задану нерівність, отримуємо

$$\frac{V}{\gamma-1}\frac{dP}{dh}+\frac{\gamma}{\gamma-1}P\frac{dV}{dh}>0.$$

Щоб позбавитися похідної $\frac{dV}{dh}$, диференціюємо рівняння Менделєєва — Клапейрона і знаходимо

$$P\frac{dV}{dh}=\frac{k}{\mu m_{\text{H}}}\frac{dT}{dh}-V\frac{dP}{dh}.$$

Підставляючи у нерівність і використовуючи рівняння гідростатичної рівноваги

$$\frac{dP}{dh}=-\rho g,$$

отримуємо

$$\frac{\gamma k}{\mu m_{\text{H}}}\frac{dT}{dh}+(\gamma-1)\rho Vg>0.$$

Звідси випливає умова стійкості атмосфери відносно конвекції

$$\frac{dT}{dh}>-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu m_{\text{H}}g}{k}\rho V=-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu m_{\text{H}}g}{k}.$$

Праворуч отримали відомий вираз для адіабатичного градієнта температури (див. задачу 6.5). Отже, якщо існуючий температурний градієнт в атмосфері перевищує за абсолютною величиною адіабатичний, то виникають течії, які переміщують газ атмосфери і вирівнюють температуру, тобто виникає конвекція.

6.7. а) Масу води, що міститься в земній атмосфері, можна грубо оцінити, якщо припустити, що тиск насиченої пари за 15 °С і є парціальним тиском водяної пари біля поверхні планети. Звідси

$$m_{\text{H}_2\text{O}}=\frac{4\pi R_{\oplus}^2P_{\text{H}_2\text{O}}}{g}\approx 9\cdot 10^{16}\ \text{кг}.$$

Зауважимо, що це є оцінкою зверху;

б) у цьому разі відкриті водоймища утворитися не змогли б, оскільки для цього (див. задачу 5.21) на планеті має бути стільки води, щоб парціальний тиск водяної пари біля поверхні перевищував тиск насиченої пари за цієї температури;

в) якщо температура на поверхні Землі підніметься до 100 °С, то частина води випарується, перейде до атмосфери, тож парціальний тиск водяної пари біля поверхні океану дорівнюватиме 1 атм — саме тиску насиченої пари води за температури 100 °С. Загальний атмосферний тиск біля поверхні Землі дорівнюватиме 2 атм.

Океани при цьому не закиплять;

г) уся вода випарується за критичної температури $t_{\text{кр}}=374{,}2$ °С. При цьому межа вода—атмосфера зникне. А оскільки маса гідросфери у 267 разів більша за масу сучасної атмосфери, то загальний тиск біля поверхні Землі становитиме 268 атм.

6.8. 1 кг Гідрогену міститься у 9 кг води, тому:

а) земної води вистачить на $5\cdot 10^{12}$ років;

б) $\approx 10^{18}$ кг Оксигену, що становить приблизно його вміст у сучасній атмосфері Землі (слід пам'ятати, що набагато більше Оксигену було витрачено на приведення хімічної рівноваги Землі до сучасного стану);

в) нині встановилася динамічна рівновага — весь кисень, який виробляють рослини, витрачається на дихання тварин (зокрема, і людей), окиснення вулканічних газів, горіння і гниття мертвих рослин.

6.9. Із рівняння Менделєєва — Клапейрона дістанемо

$$h=\frac{mkT}{4\pi R_{\oplus}^2\mu m_{\text{H}}P}=3\ \text{мм}.$$

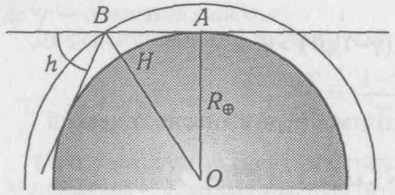


Рис. 38

6.10. Із трикутника AOB (рис. 38) отримуємо

$$\sin\angle ABO = \frac{R_\oplus}{R_\oplus + H}.$$

Очевидно, що

$$\angle ABO = \frac{180° - h}{2}.$$

Отже,

$$H = \frac{1-\cos\frac{h}{2}}{\cos\frac{h}{2}} R_\oplus.$$

За розрахунками:

а) $H = 10$ км;

б) $H = 80$ км.

6.11. а) Із відомої формули

$$n = \sqrt{1 - \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2}},$$

де N_0 — концентрація електронів; e і m_e — відповідно їх заряд і маса; ε_0 — електрична стала вакууму, знаходимо $N_0 \approx 6\cdot 10^{11}$ м$^{-3}$;

б) іоносфера прозора за дійсних значень n, отже, за $\omega > \omega_p$, де ω_p — плазмова частота, отримуємо

$$\omega_p = \sqrt{\frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}}.$$

Звідси

$$\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 7 \text{ МГц}.$$

6.12. а) $n = \frac{P}{kT} \approx 3\cdot 10^{16}$ м$^{-3}$;

б) $\ell \sim \frac{1}{n\sigma} \approx 300$ м;

в) $\rho = n\mu m_{\text{H}} \approx 1{,}45\cdot 10^{-9}$ кг/м^3.

Штучні супутники Землі не розігріваються до температури, характерної для термосфери, тому що у неї концентрація і густина атмосфери менші, а довжина вільного пробігу молекул більша, ніж біля поверхні Землі, у 10^9 разів.

6.13. а) Для Гідрогену отримуємо

$$h_c \approx \frac{kT}{\mu m_{\text{H}} g} \approx 500 \text{ км};$$

б) із рівності

$$\frac{1}{\sqrt{2} n_c \pi d^2} = \frac{kT}{\mu m_{\text{H}} g}$$

знаходимо $n_c \approx 7\cdot 10^{12}$ м$^{-3}$;

в) $h_c \approx 350$ км; $n_c \approx 10^{13}$ м$^{-3}$.

6.14. а) Густина атмосфери біля поверхні Венери дорівнює 66 кг/м^3, що у 52 рази більше за густину повітря біля поверхні Землі;

б) саме великою густиною переважно зумовлена така значна відмінність венеріанської атмосфери від земної;

в) унаслідок дуже великої маси (див. задачу 6.1) атмосфера Венери має величезні запаси внутрішньої енергії, а тому й велику теплову інерцію, яка не дає змоги помітно коливатися температурі упродовж сонячної доби. Водночас в атмосфері планети існує інтенсивна меридіональна циркуляція, яка вирівнює температуру між екватором і полюсами.

6.15. а) Адіабатичний градієнт очевидно дорівнює (див. задачу 6.5)

$$\frac{dT}{dh} = \frac{T_{\text{хм}} - T_0}{h} = -7{,}5 \text{ К/км},$$

де T_0 — температура біля поверхні планети, $h = 49$ км;

б) показник адіабати γ знаходимо зі співвідношення (див. задачу 6.5)

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\mu m_{\text{H}} g}{k}.$$

За розрахунками $\gamma = 1{,}2$.

Це значення дуже близьке до відношення $\frac{11}{9}$, що відповідає 9 ступеням вільності молекул атмосфери Венери. Оскільки атмосфера Венери складається переважно з молекул CO_2, а ці молекули вважаються лінійними [10], то, згідно з класичними уявленнями, це означає, що крім трьох поступальних та двох обертальних потрібно враховувати ще чотири коливальні ступені вільності. І це, незважаючи на те, що хоча температура атмосфери біля поверхні планети є високою, її (знову-таки згідно з класичними уявленнями) недостатньо для збудження коливань.

Зауважимо, що лабораторні вимірювання для CO_2 за таких тисків і температур дають саме таке значення $(\gamma = 1{,}2)$ для показника адіабати;

в) для адіабатичної атмосфери (див. задачу 6.3)

$$P = P_0\left(1 - \frac{h}{H}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

де

$$H = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_0}{\rho_0 g} \approx 100 \text{ км}.$$

Тоді відношення тисків на поверхні та на нижній межі хмар дорівнює

$$\frac{P_0}{P_{\text{хм}}} = \left(1 - \frac{49}{100}\right)^{-6} \approx 57.$$

$y'' - xy = 0$

6.16. Для ізотермічних атмосфер зі шкалами висот відповідно $H_\oplus$ і $H_М$ густина атмосфери Марса стане більшою за земну, починаючи з висоти

$$h = \frac{H_М H_\oplus}{H_М - H_\oplus} \ln \frac{\rho_{0\oplus}}{\rho_{0М}} = 158 \text{ км}.$$

6.17. а) Загалом початок пилових бур на Марсі пов'язують із настанням весни у кожній півкулі планети, що зумовлює швидке танення (випаровування) вуглекислої частини відповідної полярної шапки. При цьому збільшується концентрація вуглекислого газу, а отже, й тиск над нею. Виникають дуже сильні вітри (до 70 м/с, а іноді й до 100 м/с), які переносять великі маси газу в осінню півкулю, де відбувається конденсація. Таким чином утворюються зміни тисків протилежних знаків у Північній і Південній півкулях, що спричинює перекачування атмосфери з однієї півкулі в іншу.

При цьому розріджена атмосфера Марса майже не чинить гальмівної дії на часточки пилу, тому дуже дрібні часточки переносяться на великі відстані. Осідаючи, вони вибивають інші часточки, унаслідок чого бурі можуть охоплювати великі ділянки планети, а іноді й усю планету.

Бурі завжди починаються південніше від екватора, тому що перигелію, де планета через значний ексцентриситет орбіти отримує найбільше сонячної енергії, відповідає літо у Південній півкулі. А великі протистояння відбуваються саме тоді, коли Марс перебуває у перигелію своєї орбіти;

б) масу пилу, що піднімається в атмосферу Марса під час бурі, можна розрахувати так:

$$M = 4\pi R^2 m_0 n_0 \int_0^\infty e^{-\frac{h}{H}} dh,$$

де R — радіус Марса; H — шкала висот біля поверхні Марса; m_0 — маса однієї пилинки, яку обчислюємо за формулою

$$m_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho.$$

Отримуємо $M \approx 2 \cdot 10^{12}$ кг.

6.18. Швидкість звуку визначаємо за формулою

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{\gamma k T}{\mu m_Н}},$$

де γ — показник адіабати; μ — відносна молекулярна маса атмосферного газу; $m_Н$ — маса атома Гідрогену.

Для атмосфери Венери з урахуванням коливальних ступенів вільності $\gamma = \frac{11}{9}$ (див. задачу 6.15, пункт б)). Тоді $v_{зв♀} \approx 420$ м/с.

Для Марса і Землі слід брати $\gamma = \frac{7}{5}$, тоді $v_{зв♂} \approx 240$ м/с, а для Землі $v_{зв\oplus} \approx 340$ м/с.

6.19. а) Визначальним для піднімальної сили є динамічний тиск (або швидкісний натиск) $\frac{\rho v^2}{2}$ у рівнянні Бернуллі, де ρ — густина

середовища; v — швидкість потоку, що набігає. Оскільки густина атмосфери Венери біля поверхні у 52 рази (див. «Довідкові дані», табл. 5) більша, ніж густина земної атмосфери, то, наприклад, літак на Венері зазнаватиме такої самої піднімальної сили, що й на Землі, за швидкості польоту в $\sqrt{52} \approx 7$ разів меншої.

На Марсі ситуація протилежна — така сама піднімальна сила утворюватиметься за швидкості польоту в $\sqrt{90} \approx 9$ разів більшої, ніж на Землі, що робить повітряну навігацію на Марсі, незважаючи на знижену силу гравітації, досить проблематичною.

Зауважимо, що величина піднімальної сили прямо пропорційна також площі крила літака;

б) сила опору повітря, як відомо, для малих швидкостей (а саме такі слід очікувати на Венері) пропорційна

$$F \sim \rho S v,$$

де ρ — густина повітря; S — ефективна площа купола парашута. З таким самим парашутом, як на Землі, парашутист на Венері опускався б зі швидкістю ≈ 10 см/с.

На Марсі, щоб опускатися зі швидкістю, не більшою, ніж на Землі, потрібно було б мати парашут, радіус якого знаходимо з рівності

$$m g_М = \rho S v^2,$$

де $g_М$ — прискорення вільного падіння на Марсі; m — маса парашутиста.

Звідси

$$R = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{m g_М}{\pi \rho}}.$$

Отже, радіус парашута на Марсі має бути у $\sqrt{80\frac{g_М}{g_\oplus}} = 5{,}5$ раза більшим, ніж на Землі.

6.20. а) Використовуючи барометричну формулу, обчислюємо оптичну товщину атмосфери

$$\tau_\lambda = \int_0^\infty \varkappa_\lambda \rho_0 e^{-\frac{h}{H}} dh = \varkappa_\lambda \rho_0 H.$$

Оскільки для атмосфери Землі $\tau \approx 0{,}1$ (на $\lambda = 550$ нм), то, враховуючи, що густина атмосфери біля поверхні Венери у 52 рази більша за густину земної атмосфери і шкала висот $H_♀ > H_\oplus$ майже вдвічі (див. задачу 6.4), отримаємо для венеріанської атмосфери $\tau \approx 10$. Навіть якби на Венері не було хмарності, зірки вночі там побачити було б неможливо;

б) якщо вважати, що густина повітря змінюється відповідно до барометричної формули, то на Землі вона падає у 80 разів (як на поверхні Марса) на висоті $h = H_\oplus \ln 80 = 36$ км (стратосфера). Отже, на Марсі вдень можна побачити найяскравіші зірки;

в) якщо $\tau < 1$, то яскравість неба зростає зі збільшенням τ, оскільки, що більше τ, то більша частка фотонів не проходить крізь атмосферу, а розсіюється і тому впливає на яскравість неба.

Якщо $\tau > 1$, то зі збільшенням τ швидко збільшується частка фотонів, що зазнають багаторазового розсіювання в атмосфері й відбиваються нею назад у космічний простір. Тому зі збільшенням τ яскравість неба у цьому разі має зменшуватися.

Отже, максимум яскравості неба досягається за оптичної товщини атмосфери близько одиниці [12].

6.21. Положення максимуму у спектрі розсіяного світла визначаємо за стандартною процедурою

$$\frac{dI_\lambda}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{A}{\lambda^4} B_\lambda(T)\right)_{\lambda=\lambda_m} = 0,$$

де A — коефіцієнт пропорційності, що не залежить від λ, $B_\lambda(T)$ — функція Планка у наближенні Віна

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right).$$

Продиференціювавши, отримуємо рівняння, розв'язком якого є

$$\lambda_m = \frac{hc}{9kT}.$$

Якби розсіювання не було, то розв'язком рівняння

$$\left.\frac{dB_\lambda(T)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = 0,$$

як легко переконатися, було б

$$\lambda_0 = \frac{hc}{5kT}.$$

Отже, молекулярне розсіювання в земній атмосфері зумовлює зміщення максимуму розподілу енергії у випромінюванні Сонця у короткохвильову область: $\lambda_m = \frac{5}{9}\lambda_0 \approx 305$ нм. Це і спричинює блакитний колір неба Землі. Зауважимо, що це справедливо для безхмарної та незапиленої атмосфери.

Як відомо, густина атмосфери Марса біля поверхні у 80 разів менша за земну, що відповідає умовам на Землі на висоті ≈ 40 км (див. задачу 6.20), тому колір марсіанського неба — темно-синій.

На Венері густина біля поверхні у 52 рази більша за земну, тому τ_λ значно більше за одиницю. Якщо припустити, що $\tau_\lambda \infty \lambda^{-4}$ (хоча для Венери з її суцільною хмарністю це не зовсім коректно), то для синіх променів оптична товщина виявляється набагато більшою, ніж для червоних, тому короткохвильове випромінювання буде значно послаблене. Отже, колір неба на Венері за зробленого припущення має бути жовто-оранжевим.

6.22. Інтенсивність сонячного випромінювання, що проходить крізь атмосферу з оптичною товщиною τ_λ, дорівнює (закон Бугера)

$$I_\lambda = I_{0\lambda}\, e^{-\tau_\lambda}.$$

За молекулярного розсіювання $\tau_\lambda \propto \lambda^{-4}$ (закон Релея). Тоді

$$\tau_\lambda = \tau_V\left(\frac{\lambda_V}{\lambda}\right)^4,$$

де $\tau_V \approx 0{,}1$ — оптична товщина безхмарної атмосфери на довжині хвилі $\lambda_V = 550$ нм.

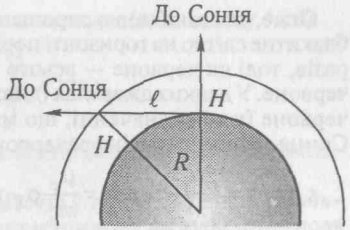


Рис. 39

З іншого боку, оптична товщина атмосфери, наприклад на довжині хвилі λ_V, під час спостереження Сонця у зеніті (на вертикальному промені зору) дорівнює (див. задачу 6.20)

$$\tau_{V_в} = \int_0^\infty \varkappa_V \rho_0 e^{-\frac{h}{H}} dh = \varkappa_V \rho_0 H,$$

де $\varkappa_V$ — коефіцієнт послаблення світла у розрахунку на одиницю маси (на λ_V); ρ_0 — густина атмосфери біля поверхні; H — шкала висот.

Отже, для нашої задачі достатньо вважати атмосферу однорідним сферичним шаром завтовшки $H = 8{,}3$ км. Тоді геометрична товщина атмосфери під час спостереження Сонця на горизонті (довжина горизонтального шляху променя) становитиме (див. рис. 39)

$$\ell = \sqrt{(R+H)^2 - R^2} \approx \sqrt{2RH}.$$

Тобто горизонтальна оптична товщина буде більшою, ніж вертикальна на будь-якій довжині хвилі у

$$\frac{\tau_г}{\tau_в} = \sqrt{\frac{2R}{H}} \text{ разів.}$$

Щоб не враховувати розподіл енергії у спектрі Сонця, можна діяти так. Знайти інтенсивність червоного світла, що проходить крізь атмосферу по вертикалі, відносно інтенсивності світла тієї самої довжини хвилі під час проходження по горизонталі. Далі знайти таке саме відношення для блакитного світла і порівняти їх між собою. Отримуємо:

1) для червоного світла ($\lambda_R = 650$ нм)

$$\frac{I_{R_в}}{I_{R_г}} = e^{-(\tau_{R_в} - \tau_{R_г})} = \exp\left(-\tau_V\left(\frac{\lambda_V}{\lambda_R}\right)^4\left(1 - \sqrt{\frac{2R}{H}}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(0{,}1\left(\frac{11}{13}\right)^4 38\right) = e^{1{,}95} = 7;$$

2) для блакитного ($\lambda_B = 450$ нм)

$$\frac{I_{B_в}}{I_{B_г}} = \exp\left(-\tau_V\left(\frac{\lambda_V}{\lambda_B}\right)^4\left(1 - \sqrt{\frac{2R}{H}}\right)\right) = \exp\left(0{,}1\left(\frac{11}{9}\right)^4 38\right) = e^{8{,}5} = 4915.$$

Отже, для такої дещо спрощеної моделі атмосфери ефект разючий — блакитне світло на горизонті порівняно із зенітом послаблюється у 4915 разів, тоді як червоне — всього у 7 разів. Тому Сонце на горизонті — червоне. У деяких джерелах (див. [12]) доведено, що воно навіть інфрачервоне (у тому значенні, що максимум у розподілі енергії в спектрі Сонця зміщується в інфрачервону область).

6.23. $\tau = \int_0^\infty \frac{\mu_e}{m_p}\sigma_T \rho dh = \frac{\mu_e}{m_p}\sigma_T \rho_0 \int_0^\infty e^{-\frac{h}{H}} dh = \frac{\mu_e}{m_p}\sigma_T \rho_0 H,$

де ρ_0 — густина атмосфери біля поверхні Землі.

Вважаючи, що $\mu_e = 2$, отримуємо $\tau \approx 300$.

6.24. а) Легко переконатися, що

$$\xi = \frac{2}{3}\frac{GM}{R}\frac{\mu m_{\text{H}}}{kT},$$

де M і R — відповідно маса і радіус планети; μ — відносна молекулярна маса відповідного газу атмосфери (або всієї атмосфери загалом); m_{H} — маса атома Гідрогену.

Величину ξ можна переписати як відношення квадратів другої космічної швидкості $v_{\text{II}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ та середньої квадратичної швидкості теплового руху молекул $v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu m_{\text{H}}}}$:

$$\xi = \left(\frac{v_{\text{II}}}{v_{\text{ср.кв}}}\right)^2.$$

Застосовуючи визначення висоти однорідної атмосфери (див. задачу 6.4), можна виразити величину ξ як відношення

$$\xi = \frac{2}{3}\frac{R}{H},$$

де H — шкала висот для окремо взятого газу або всієї атмосфери загалом;

б) за розрахунками величина ξ для планет земної групи становить:

для Меркурія $\xi \approx 2$;

для Венери $\xi \approx 6$;

для Землі $\xi \approx 18$;

для Марса $\xi \approx 5$;

в) для Юпітера $\xi = 1233$.

6.25. Щоб не враховувати хімічний склад атмосфер (для Місяця — втраченої), обчислимо відношення величин ξ (див. попередню задачу) для Титана і Місяця

$$\frac{\xi_{\text{T}}}{\xi_{☾}} = \frac{M_T}{M_☾}\frac{R_☾}{R_T}\frac{T_☾}{T_{\text{T}}} = 3{,}6.$$

Для Місяця було взято радіаційну температуру (див. задачу 4.23)

$$T_☾ = \left(\frac{(1-A_☾)E_{☾\odot}}{4\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 273\ \text{K}.$$

Атмосфера Титана залишилась переважно завдяки низькій температурі.

6.26. Відомо, що перехід ламінарних течій у турбулентні відбувається за чисел Рейнольдса $\text{Re} > 1000$. Використовуючи визначення числа Рейнольдса до умов цієї задачі, отримуємо

$$\text{Re} = \frac{\rho \ell_0 \sqrt{\overline{\Delta v^2}}}{\eta} \approx 1000,$$

де ρ — густина повітря (див. «Довідкові дані», табл. 5).

Звідси

$$\ell_0 \approx \left(\frac{1000\eta}{\rho C}\right)^{\frac{3}{4}} \approx 4\ \text{см}.$$

6.27. Потужність сонячної енергії, що надходить на планету і надає рух тепловій машині атмосфери, дорівнює $\eta\pi R^2(1-A)E$, де R — радіус планети; A — її альбедо; E — освітленість планети Сонцем. Цю потужність потрібно прирівняти до кінетичної енергії атмосфери (енергії атмосферних рухів — вітрів біля поверхні, оскільки основна маса атмосфери зосереджена саме біля поверхні), поділеної на час її перенесення:

$$\eta\pi R^2(1-A)E = \frac{M_{\text{ат}} v_0^2}{2\tau}.$$

Звідси

$$v_0 = \left(\frac{2\eta\pi(1-A)E}{M_{\text{ат}}}\right)^{\frac{1}{3}} R:$$

а) для Венери $v_0 = 2$ м/с, $\tau = 35$ діб.

Порівнюючи оцінку v_0 з даними вимірювань, можна зробити такі висновки: 1) незважаючи на спрощену модель явища, результати непогано узгоджуються між собою; 2) мабуть, ККД атмосфери Венери має бути ще меншим, ніж 0,5 % і, можливо, не перевищувати 0,1 %;

б) для Землі $v_0 \approx 11$ м/с, $\tau \approx 7$ діб.

ККД атмосфери Землі, мабуть, також дещо менший ніж 0,5 %, оскільки оцінка v_0 видається трохи завищеною. Проте слід мати на увазі, що, наприклад, на океанських просторах вітер зазвичай помітно вищий, ніж у середніх широтах на суші.

А ось оцінка $\tau \approx 1$ тиждень насправді збігається з характерним часом зміни погоди на Землі;

в) для Марса $v_0 \approx 30$ м/с, $\tau \approx 1$ доба.

Оскільки швидкість вітру біля поверхні насправді зазвичай не перевищує 10 м/с, то можна зробити висновок, що ККД атмосфери Марса, мабуть, приблизно такий самий, як у атмосфери Венери.

6.28. Під час розрахунків швидкість звуку обчислюємо за відомою формулою

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{\gamma kT}{\mu m_H}},$$

де γ — показник адіабати; μ — відносна молекулярна маса атмосфери; m_H — маса атома Гідрогену. Для планет земної групи можна використати середню температуру біля поверхонь, а для планет-гігантів — виміряну температуру на рівні видимої поверхні.

За результатами обчислень можна запропонувати таку класифікацію планет:

перша група — Меркурій і Венера: $\Pi_{\omega M} \approx \Pi_{\omega ♀} = 8 \cdot 10^{-3}$. Малість числа Маха означає практичну незалежність атмосферних рухів від обертання планети;

друга група — Земля і Марс: $\Pi_{\omega \oplus} = 1{,}4$; $\Pi_{\omega ♂} = 1$. Приблизна рівність термічних градієнтів тиску та сили Коріоліса формує найскладніший чарунковий тип циркуляції їх атмосфер;

третя група — планети-гіганти: для Юпітера і Сатурна $\Pi_\omega \approx 15$, Урана $\Pi_\omega = 8$, для Нептуна $\Pi_\omega = 6$. У цьому разі основну роль у формуванні загальної циркуляції відіграє швидке обертання планети. Тому циркуляція має переважно зональний характер, створюючи характерний смугастий зовнішній вигляд цих планет (в Урана і Нептуна він менш виразний, ніж у Юпітера і Сатурна).

6.29. На такій невеликій глибині густина атмосфери Юпітера вже дорівнює 1,52 кг/м^3, що трохи більше за густину повітря біля поверхні Землі (див. «Довідкові дані», табл. 5).

6.30. Блискавки в атмосфері Юпітера зовсім безпечні для метану, оскільки там відсутній вільний Оксиген, необхідний для запалювання.

6.31. а) Видимий хмаровий покрив Юпітера і Сатурна створює аміак NH_3. Температура його конденсації залежить від тиску і становить 130—200 К, що приблизно збігається з температурами, які спостерігаються на рівні хмар [16]. У хмарах аміак перебуває, мабуть, не тільки у вигляді кристалів, а й у вигляді аерозолю.

Конденсація метану за таких самих тисків потребує значно нижчої температури — менше ніж 80 К;

б) верхні межі хмарового шару на Юпітері й Сатурні так сильно не збігаються через те, що Сатурн отримує теплоти від Сонця майже в чотири рази менше, ніж Юпітер.

6.32. а) Маса атмосфери Титана дорівнює $9{,}8 \cdot 10^{18}$ кг, що майже вдвічі більше за масу атмосфери Землі. Це становить $\approx 7 \cdot 10^{-5}$ маси самого Титана, що на два порядки більше відповідного відношення для Землі;

б) густина атмосфери біля поверхні Титана дорівнює 5,8 кг/м^3, що у 4,5 раза більша за густину атмосфери біля поверхні Землі;

в) усього азоту в атмосфері Титана вдвічі більше, ніж в атмосфері Землі, а в атмосферному стовпі — у 12 разів;

г) хоча температура біля поверхні Титана є невисокою, шкала висот завдяки низькій силі гравітації дорівнює 20 км (див. задачу 6.4).

6.33. Причиною цього є низька температура видимого шару атмосфер Урана і Нептуна (56—58 К). За таких температур аміак вимерзає, а

смуги поглинання метану стають широкими та численними у червоній ділянці спектра, що й надає цим планетам синьо-зеленого забарвлення.

7. Припливні явища

7.1. Припливна сила від Місяця на Землю в перигею більша, ніж в апогею у

$$\frac{F_{пр}(П)}{F_{пр}(A)} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^3 = 1{,}39 \text{ раза.}$$

7.2. Висота припливів, які викликає Місяць на Землі, дорівнює

$$h = 2\left(\frac{M_☾}{M_\oplus}\right)\left(\frac{R_\oplus}{r_{\oplus☾}}\right)^3 R_\oplus \approx 0{,}75 \text{ м},$$

де $r_{\oplus☾}$ — відстань між Землею і Місяцем.

7.3. Висоти припливних горбів, що індукуються Сонцем і Місяцем на Землі, співвідносяться як

$$\frac{h_{\oplus\odot}}{h_{\oplus☾}} = \frac{M_\odot}{M_☾}\left(\frac{r_{\oplus☾}}{r_{\oplus\odot}}\right)^3 \approx \frac{1}{2}.$$

7.4. Припливні горби на лінії Земля—Місяць (або Земля—Сонце) існують водночас з депресіями (відпливами) у перпендикулярних напрямках, тому висота припливів під час сизигій більша, ніж під час чвертей Місяця приблизно у

$$\frac{h_{\oplus☾} + h_{\oplus\odot}}{h_{\oplus☾} - h_{\oplus\odot}} \approx 3 \text{ рази.}$$

7.5. У більш наближених до Юпітера супутників поверхня активно перероблюється тектонічними процесами, зумовленими припливною дією планети-гіганта, тому старі кратери регулярно зникають. Переконливою ілюстрацією цього є поверхня Іо, який серед галілеєвих супутників зазнає найбільшого впливу.

7.6. а) Припливна сила від Юпітера на Іо більша, ніж від Землі на Місяць у

$$\frac{M_Ю}{M_\oplus}\frac{M_{Io}}{M_☾}\left(\frac{a_☾}{a_{Io}}\right)^3 \frac{R_{Io}}{R_☾} \approx 300 \text{ разів,}$$

де $a_☾$ і a_{Io} — великі півосі відповідно орбіт Місяця та Іо;

б) висоту статичного припливу h знаходимо з умови

$$\frac{h}{R_{Io}} = \frac{a_{пр}}{g},$$

де R_{Io} — радіус Іо; $a_{пр}$ — припливне прискорення, зумовлене Юпітером; g — прискорення вільного падіння на поверхні супутника. Звідси

отримуємо

$$h = 2\frac{M_{Ю}}{M_{Io}}\left(\frac{R_{Io}}{a_{Io}}\right)^3 R_{Io} \approx 6 \text{ км};$$

в) під впливом збурень сусідніх супутників Іо не рухається по чітко коловій орбіті, тому припливна дія на супутник періодично змінюється. Це зумовлює в'язкі деформації у тілі супутника і спричинює виділення енергії. Оскільки висота статичного припливу значна, то навіть малі переміщення припливних горбів зумовлюють сильне розігрівання надр Іо, наслідком чого є потужна вулканічна діяльність.

7.7. Із умови

$$\frac{h}{R_T} = \frac{a_{пр}}{g},$$

де h — висота припливів на Титані; R_T — його радіус; $a_{пр}$ — припливне прискорення, зумовлене Сатурном (див. вказівку до задачі 7.1); g — прискорення вільного падіння на поверхні супутника, знаходимо

$$h = 2\frac{M_C}{M_T}\left(\frac{R_T}{r_{C.T}}\right)^3 R_T = 196 \text{ м}.$$

7.8. Унаслідок зменшення кутових швидкостей осьового обертання Землі й Місяця їх осьові моменти імпульсу зменшуються. Орбітальний момент імпульсу Місяця дорівнює

$$J_{☾орб} = M_☾ r_{⊕☾}^2 \omega_☾,$$

де $r_{⊕☾}$ — відстань між Землею і Місяцем.

За допомогою третього закону Кеплера (див. задачу 2.6)

$$\omega_☾^2 r_{⊕☾}^3 = G(M_⊕ + M_☾)$$

орбітальний момент можна записати у вигляді

$$J_{☾орб} = \frac{M_☾ (G(M_⊕ + M_☾))^{\frac{2}{3}}}{(\omega_☾)^{\frac{1}{3}}}.$$

Звідси випливає, що зі зменшенням $\omega_☾$ (осьова і орбітальна кутові швидкості Місяця, як відомо, однакові) $J_{☾орб}$ збільшується. Саме збільшення орбітального моменту Місяця компенсує зменшення осьового моменту Землі (осьовий момент Місяця дуже малий порівняно з $J_⊕$ і $J_{☾орб}$). При цьому їх сума, тобто загальний момент системи Земля—Місяць, зберігається (що й має бути, якщо вважати цю систему ізольованою).

А ось механічна енергія у цій системі не зберігається: зменшення енергії обертального (осьового) руху Землі не компенсується збільшенням енергії Місяця, оскільки частина її дисипує в Землі (переходить у теплоту) внаслідок припливного тертя (див. наступну задачу).

7.9. а) Період осьового обертання Землі збільшується на

$$\dot{T}_⊕ = -\frac{2\pi}{\omega_⊕^2}\dot{\omega}_⊕ = 1{,}8\cdot 10^{-5} \text{ с/рік};$$

б) енергію, що переходить у теплоту в процесі припливного тертя, знаходимо як різницю енергій сповільнення осьового обертання Землі та зміни орбітального руху Місяця

$$\frac{dW_{дис}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{C\omega_⊕^2}{2}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{M_☾ a_☾^2 \omega_☾^2}{2}\right),$$

де C — момент інерції Землі відносно полярної осі; $a_☾$ — велика піввісь місячної орбіти.

Врахуємо, по-перше, передавання моменту імпульсу в системі Земля—Місяць (осьовий момент імпульсу Місяця дуже малий і ним можна знехтувати)

$$\frac{d}{dt}(C\omega_⊕) = -\frac{d}{dt}\left(M_☾ a_☾^2 \omega_☾\right).$$

По-друге, за третім законом Кеплера

$$\omega_☾^2 a_☾^3 = G(M_⊕ + M_☾),$$

у результаті диференціювання дістаємо

$$3\omega_☾ \frac{da_☾}{dt} + 2a_☾ \frac{d\omega_☾}{dt} = 0.$$

Остаточно отримуємо

$$\frac{dW_{дис}}{dt} = C\left(\omega_⊕ - \omega_☾\right)\frac{d\omega_⊕}{dt} = 2{,}74\cdot 10^{12} \text{ Дж/с}.$$

Це становить 8,8 % теплового потоку, що надходить із надр Землі;

в) згідно з теоремою віріала повна енергія Місяця дорівнює кінетичній енергії його орбітального руху з протилежним знаком:

$$W_☾ = -W_{k☾} = -\frac{M_☾ a_☾^2 \omega_☾^2}{2}.$$

Враховуючи розв'язок пункту б), переконуємось, що

$$\frac{\dot{W}_☾}{\dot{W}_{k⊕}} = \frac{\omega_☾}{\omega_⊕} = \frac{T_⊕}{T_☾} = 3{,}7\ \%.$$

Отже, на збільшення повної енергії Місяця витрачається лише мала частина тієї енергії, на яку зменшується кінетична енергія осьового обертання Землі, а решта переходить у теплоту.

7.10. а) Енергія, що дисипує за повний припливний цикл, дорівнює

$$\Delta W = \int_0^{\pi/\omega} \frac{dW}{dt}dt = \frac{\pi K}{2\omega}\sin 2\delta,$$

а максимальна енергія припливних деформацій

$$W = \int_0^{\pi/4\omega} \frac{dW}{dt}dt = \frac{K}{4\omega}(\cos 2\delta - \sin 2\delta) \approx \frac{K}{4\omega}\cos 2\delta,$$

оскільки δ є малим.

Отже,

$$\frac{1}{Q}=\frac{1}{2\pi}\frac{\Delta W}{W}=2\operatorname{tg}\delta;$$

б) добротність Землі відносно припливів дорівнює $Q\approx 14$.

7.11. а) Якщо вважати систему Земля—Місяць ізольованою, то рівняння передавання моменту імпульсу матиме вигляд (осьовим моментом Місяця можна знехтувати порівняно з орбітальним)

$$\frac{d}{dt}(C\omega_\oplus)=-\frac{d}{dt}\left(M_☾a_☾^2\omega_☾\right),$$

де C — момент інерції Землі відносно полярної осі; $a_☾$ — велика піввісь місячної орбіти; $\omega_☾$ — орбітальна кутова швидкість Місяця, яка, як відомо, збігається з осьовою.

Використовуючи третій закон Кеплера і нехтуючи масою Місяця порівняно з масою Землі, отримуємо

$$\omega_☾=\sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_☾^3}}.$$

Тоді

$$C\frac{d\omega_\oplus}{dt}=-\frac{M_☾}{2}\sqrt{\frac{GM_\oplus}{a_☾}}\frac{da_☾}{dt}.$$

Оскільки

$$\frac{d\omega_\oplus}{dt}=-\frac{2\pi}{T_\oplus^2}\frac{dT_\oplus}{dt},$$

то остаточно дістанемо

$$\Delta a_☾=\frac{2C}{M_☾a_☾}\frac{T_☾}{T_\oplus^2}\Delta T_\oplus=3{,}25\ \text{см};$$

б) потенціальна енергія Місяця змінюється так:

$$\Delta W_g=\frac{d}{dt}\left(-\frac{GM_\oplus M_☾}{a_☾}\right)\Delta t=\frac{2GM_\oplus C}{a_☾^3}\frac{T_☾}{T_\oplus^2}\Delta T_\oplus=6{,}4\cdot 10^{18}\ \text{Дж},$$

а кінетична

$$\Delta W_k=\frac{d}{dt}\left(-\frac{M_☾v_☾^2}{2}\right)\Delta t=-\frac{GM_\oplus C}{a_☾^3}\frac{T_☾}{T_\oplus^2}\Delta T_\oplus=-3{,}2\cdot 10^{18}\ \text{Дж},$$

де $v_☾$ — орбітальна швидкість Місяця.

Отже, потенціальна енергія збільшується, а кінетична — зменшується, і у кількісному відношенні згідно з теоремою віріала;

в) орбітальний період Місяця збільшується за рік на величину

$$\Delta T_☾=\frac{3}{2}T_☾\frac{\Delta a_☾}{a_☾}=3\cdot 10^{-4}\ \text{с}$$

($\Delta a_☾$ було визначено в пункті а)).

7.12. а) Момент імпульсу системи Земля—Місяць становить

$$J=I_\oplus\omega_\oplus+I_☾\omega_☾,$$

де $I_\oplus$ — момент інерції Землі, який у цьому разі дорівнює $I_\oplus=C$ (див. «Дані про Землю»); $I_☾=M_☾a_☾^2$ — момент інерції Місяця відносно осі обертання Землі (осьовий момент інерції Місяця порівняно дуже малий, тому ним можна знехтувати); $a_☾$ — велика піввісь місячної орбіти.

Оскільки момент імпульсу зберігається, то за повної синхронізації отримуємо

$$J=(C+I_☾')\omega,$$

де $I_☾'=M_☾a_☾'^2$, $a_☾'^2$ — велика піввісь місячної орбіти, яка встановиться за повної синхронізації.

Згідно з третім законом Кеплера (зазвичай нехтуючи масою Місяця):

$$\omega^2a_☾'^3=GM_\oplus.$$

Із останніх двох рівнянь можна знайти ω. Нехтуючи C порівняно з $I_☾'$, оскільки навіть нині осьовий момент інерції Землі набагато менший за орбітальний момент інерції Місяця, а в майбутньому ця нерівність тільки посилиться, остаточно знаходимо

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{(GM_\oplus)^2}\left(\frac{C\omega_\oplus}{M_☾}+a_☾^2\omega_☾\right)^3\approx 48\ \text{діб};$$

б) припускаючи сталість величини $\dot\omega_☾$, повна синхронізація системи Земля—Місяць настане через

$$t=\frac{\omega-\omega_☾}{\dot\omega_☾}\approx 3\cdot 10^9\ \text{років}.$$

7.13. а) Використовуючи розв'язання та відповідь до пункту а) попередньої задачі, для великої півосі нової орбіти Місяця отримуємо

$$a_☾'=\left(\frac{GM_\oplus}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{GM_\oplus}\left(\frac{C\omega_\oplus}{M_☾}+a_☾^2\omega_☾\right)^2=559\,300\ \text{км};$$

б) тривалість Сонячної доби на Землі знаходимо з рівняння (див. задачу 1.5)

$$\frac{1}{T_S}=\frac{1}{T}-\frac{1}{T_{\oplus\text{орб}}},$$

де T — загальний період обертання системи Земля—Місяць, знайдений у попередній задачі, $T_{\oplus\text{орб}}$ — орбітальний період Землі. Отже,

$$T_S=\frac{TT_{\oplus\text{орб}}}{T_{\oplus\text{орб}}-T}=55{,}3\ \text{доби}.$$

7.14. а) Кутова швидкість в афелію орбіти Меркурія дорівнює

$$\omega_A=\frac{1}{a_M(1+e)}\sqrt{\frac{GM_\odot}{a_M}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}=5{,}57\cdot 10^{-7}\ \text{рад/с},$$

у перигелію:

$$\omega_{\Pi} = \frac{1}{a_{\text{М}}(1-e)}\sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\text{М}}}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} = 1{,}28\cdot 10^{-6} \text{ рад/с.}$$

Якщо підрахувати кутову частоту осьового обертання Меркурія $\omega_{\text{ос}}$, то виявляється, що

$$\omega_{\text{ос}} = \frac{2\pi}{T_{\text{ос}}} = 1{,}24\cdot 10^{-6} \text{ рад/с} \approx \omega_{\Pi}.$$

Звідси випливає, що осьове обертання синхронізовано з кутовою швидкістю орбітального руху саме у перигелію. Це не дивно, оскільки у перигелію своєї орбіти Меркурій зазнає найвагомішої припливної дії Сонця.

Середня кутова швидкість орбітального руху дорівнює

$$\bar{\omega}_{\text{орб}} = \frac{2\pi}{T_{\text{орб}}} = \frac{2}{3}\omega_{\Pi}.$$

Звідси випливає співвідношення

$$3\bar{\omega}_{\text{орб}} = 2\omega_{\text{ос}}, \text{ або } 3T_{\text{ос}} = 2T_{\text{орб}};$$

б) у цьому разі період осьового обертання дорівнював би періоду обертання навколо Сонця $T_{\text{ос}} = T_{\text{орб}} = 88^{\text{d}}$. Отже, Меркурій рухався б як Місяць навколо Землі. Багато років так і вважалося, доказом чого є фантастичні оповідання А. Нурса «Через сонячний бік» та А. Азимова «Ніч, яка вмирає».

7.15. Припливне прискорення, якого зазнає Плутон від Харона, більше за відповідне прискорення, якого зазнає Земля від Місяця, у

$$\frac{a_{\text{прПл.Х}}}{a_{\text{пр}\oplus☾}} = \frac{M_{\text{Х}}}{M_{☾}}\frac{R_{\text{Пл}}}{R_{\oplus}}\left(\frac{r_{\oplus☾}}{r_{\text{Пл.Х}}}\right)^3 \approx 20 \text{ разів.}$$

Тому Плутон уже давно синхронізував своє осьове обертання з орбітальним обертанням Харона.

7.16. а) $\omega_{\text{пр}\odot} = \frac{3}{2}\frac{GM_{\odot}}{\omega_{\oplus}a_{\oplus}^3}\frac{C-A}{C}\cos\varepsilon,$

де $\varepsilon = 23{,}4°$.

Тоді період сонячної прецесії земної осі дорівнює

$$T_{\text{пр}\odot} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{пр}\odot}} \approx 81\,300 \text{ років;}$$

б) $\omega_{\text{пр}☾} = \frac{3}{2}\frac{GM_{☾}}{\omega_{\oplus}a_{☾}^3}\frac{C-A}{C}\cos\varepsilon,$

де також $\varepsilon = 23{,}4°$.

Тоді період місячної прецесії земної осі становить $T_{\text{пр}☾} \approx 37\,400$ років;

в) оскільки $\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{пр}\odot} + \omega_{\text{пр}☾}$, то період місячно-сонячної прецесії становить $T_{\text{пр}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{пр}}} \approx 25\,800$ років.

7.17. а) Використовуючи третій закон Кеплера, отримуємо

$$\frac{T_{\text{пр}\odot}}{T_{\text{пр}}} = \frac{2}{3}\left(\frac{T_{\text{орб}}}{T_{\text{ос}}}\right)^2 \sec\varepsilon.$$

Оскільки для Землі $T_{\text{пр}} = 305^{\text{d}}$ (див. «Довідкові дані», табл. 2), то з урахуванням результату попередньої задачі (див. пункт а)) дістанемо для лівої частини цієї рівності

$$\frac{T_{\text{пр}\odot}}{T_{\text{пр}}} = 97\,354,$$

а для правої — значення 97 440, що дуже близькі одне до одного.

Проте слід зауважити, що для Землі реальний період вільної прецесії (305^{d}) помітно відрізняється від ейлерівського, який визначаємо за формулою, наведеною в умові задачі, а траєкторія динамічного полюса (відносно геометричного) — від кола внаслідок вияву пружних властивостей речовини планети [2];

б) аналогічно для системи планета—супутник отримуємо

$$\frac{T_{\text{пр.сп}}}{T_{\text{пр}}} = \frac{2}{3}\frac{M_{\text{пл}}}{M_{\text{сп}}}\left(\frac{T_{\text{орб.сп}}}{T_{\text{ос}}}\right)^2 \sec\varepsilon_{\text{сп}},$$

де $M_{\text{пл}}$ і $M_{\text{сп}}$ — маси відповідно планети і супутника; $T_{\text{орб.сп}}$ — орбітальний період супутника; $T_{\text{ос}}$ — осьовий період обертання планети; $\varepsilon_{\text{сп}}$ — нахилення орбіти супутника до площини екватора планети.

Для системи Земля—Місяць ліва частина цієї рівності дорівнює

$$\frac{T_{\text{пр}☾}}{T_{\text{пр}}} = 44\,785,$$

а права (при $\varepsilon_{\text{сп}} = 23{,}4°$) — 44 273.

7.18. Нехтуючи осьовим обертанням супутника та вважаючи його сферичним, припливний радіус Роша знаходимо, прирівнюючи припливне прискорення, якого зазнає супутник від планети, до прискорення вільного падіння на поверхні супутника:

$$\frac{2GM_{\text{пл}}}{R_{\text{Р}}^3}R_{\text{сп}} = \frac{GM_{\text{сп}}}{R_{\text{сп}}^2}.$$

Звідси отримуємо

$$R_{\text{Р}} = \left(2\frac{\rho_{\text{пл}}}{\rho_{\text{сп}}}\right)^{\frac{1}{3}}R_{\text{пл}} \approx 1{,}26\left(\frac{\rho_{\text{пл}}}{\rho_{\text{сп}}}\right)^{\frac{1}{3}}R_{\text{пл}}.$$

Якщо враховувати осьове обертання супутника, то умовою його суцільності буде нерівність

$$\frac{GM_{\text{сп}}}{R_{\text{сп}}^2} - \frac{2GM_{\text{пл}}}{r^3}R_{\text{сп}} - \omega_{\text{ос}}^2 R_{\text{сп}} > 0,$$

де $\omega_{\text{ос}}^2 R_{\text{сп}}$ — відцентрове прискорення; $\omega_{\text{ос}}$ — кутова швидкість осьового обертання супутника; r — відстань між планетою і супутником.

У разі рівноважної конфігурації, коли осьове обертання синхронізовано з орбітальним (по коловій орбіті), отримуємо

$$\omega_{\text{ос}} = \omega_{\text{орб}} = \frac{v_{\text{орб}}}{r} = \sqrt{\frac{GM_{\text{пл}}}{r^3}}, \quad (M_{\text{пл}} \gg M_{\text{сп}}).$$

Тоді припливний радіус Роша дорівнює

$$R_{\text{Р}} = \left(3\frac{\rho_{\text{пл}}}{\rho_{\text{сп}}}\right)^{\frac{1}{3}} R_{\text{пл}} \approx 1{,}44\left(\frac{\rho_{\text{пл}}}{\rho_{\text{сп}}}\right)^{\frac{1}{3}} R_{\text{пл}}.$$

Зауважимо, що за точним розв'язуванням (Е. Рош, 1855 р.) числовий коефіцієнт дорівнює 2,45.

7.19. Вважаючи для спрощення астероїд сферичним, його максимальний розмір знаходимо з умови (див. вказівку до задачі 7.1)

$$\frac{2GM_{\oplus}M_a}{R_{\text{Р}}^3} R_a = \sigma\pi R_a^2,$$

де M_a і R_a — відповідно маса і радіус астероїда; $R_{\text{Р}}$ — радіус Роша.

Оскільки у цьому разі $R_{\text{Р}} \approx R_{\oplus}$, то остаточно отримуємо

$$R_a = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\sigma}{2\pi G\rho_{\oplus}\rho_a}} = 85 \text{ км}.$$

7.20. Взявши для речовини кілець щільність $\rho \approx 1000$ кг/м^3 та використовуючи для припливного радіуса точну формулу (див. розв'язання задачі 7.18), дістанемо ($\rho_{\text{С}}$ і $R_{\text{С}}$ — відповідно щільність і радіус Сатурна)

$$R_{\text{Р}} = 2{,}45\left(\frac{\rho_{\text{С}}}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} R_{\text{С}} \approx 2{,}2R_{\text{С}} \approx 132\,000 \text{ км}.$$

Основна частина кілець знаходиться всередині межі Роша, ззовні перебувають тільки кільця F, G та E. Проте широке, але дуже розріджене кільце E, мабуть, утворене супутником Енцеладом. (Річ у тому, що орбіта Енцелада не є точно коловою, тому, незважаючи на синхронне обертання, він, як і Іо, зазнає змінних припливних деформацій збоку Сатурна. Внаслідок цього супутник розігрівається і може виявляти тектонічну активність, наслідком чого можуть бути викиди пари і краплин води в навколишній простір.)

Отже, жодний із відомих супутників Сатурна не знаходиться всередині межі Роша (найближчий Атлас має велику піввісь 137 700 км). Слід зауважити, що чисельний множник у формулі для цієї межі було отримано у разі рідкого супутника (див. попередню задачу).

7.21. Припливна дія планети утворює на Сонці два діаметрально протилежні горби. Тому припливи максимальної висоти будуть на Сонці у ті моменти, коли Сонце, Венера і Юпітер розміщуються на одній прямій (незалежно від того, знаходяться планети по один бік від Сонця чи по різні).

Отже, проміжок часу між цими моментами становить $\tau = \frac{T}{2}$, де період T знаходимо за допомогою рівняння синодичного руху

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_{\text{В}}} - \frac{1}{T_{\text{Ю}}},$$

де, в свою чергу, $T_{\text{В}}$ і $T_{\text{Ю}}$ — орбітальні періоди відповідно Венери і Юпітера.

За розрахунками $\tau = 0{,}327$ року.

Отже, відомий одинадцятирічний цикл сонячної активності неможливо пояснити припливною дією планет.

7.22. З урахуванням вказівки до задачі та, згідно з принципом суперпозиції,

$$a_{\text{пр}} = 2G\left(\frac{M_{\text{Мер}}}{r_{\odot\text{Мер}}^3} + \frac{M_{\text{В}}}{r_{\odot\text{В}}^3} + \frac{M_{\oplus}}{r_{\odot\oplus}^3} + \frac{M_{\text{М}}}{r_{\odot\text{М}}^3} + \frac{M_{\text{Ю}}}{r_{\odot\text{Ю}}^3} + \frac{M_{\text{С}}}{r_{\odot\text{С}}^3}\right)R_{\odot} = 1{,}1\cdot 10^{-9} \text{ м/с}^2,$$

а висота припливу не перевищує 3 мм.

На припливне прискорення від Сонця на Землю таке розміщення планет майже не впливає.

Отже, жодних наслідків для Землі й Сонця так звані паради планет не мають.

8. Малі тіла Сонячної системи

8.1. а) Довжину вільного пробігу обчислюємо за формулою

$$\ell = \frac{1}{n\sigma},$$

де ефективний переріз зіткнень дорівнює

$$\sigma = \pi d^2.$$

Для хвоста комети отримуємо $\ell \approx 1$ а. о., для голови (при $n = 10^{17}$ м$^{-3}$) — $\ell \approx 25$ м;

б) оскільки у хвості комети середня довжина вільного пробігу частинок порівнюється з характерним розміром самого хвоста, то його неможливо вважати суцільним середовищем;

в) для пилового хвоста (вважаючи пилинки сферичними)

$$\ell = \frac{\rho_{\text{п}}}{3\rho}R_{\text{п}} = 18{,}7 \text{ а. о.}$$

Отже, пиловий хвіст не можна вважати суцільним середовищем.

8.2. а) Траєкторія *1* — відштовхування більше, ніж притягання, траєкторія *2* — навпаки;

б) прямолінійною.

8.3. Об'єм, що припадає на одну пилинку, є величиною, обернено пропорційною концентрації пилинок, тобто

$$V_1 = \frac{1}{n}.$$

Середня відстань між пилинками є відстанню між центрами цих об'ємів. Вважаючи ці об'єми сферичними (рис. 40), отримуємо

$$d = \left(\frac{6V_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

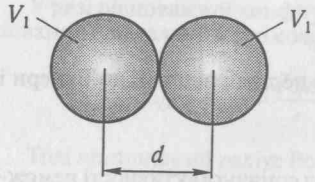


Рис. 40

З іншого боку, вважаючи пилинки сферичними, знаходимо

$$n = \frac{\rho}{\frac{4}{3}\pi R_п^3 \rho_п},$$

де ρ — щільність хвоста, що дорівнює

$$\rho = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 h},$$

де m — маса хвоста; $R = r\text{tg}4°$ — радіус основи конуса, яким апроксимуємо хвіст комети; r — відстань до комети; $h = r\text{tg}12°$ — висота конуса.

Остаточно отримуємо

$$d = 2rR_п\left(\frac{\pi\rho_п(\text{tg}4°)^2\,\text{tg}12°}{3m}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 25 \text{ м}.$$

8.4. а) Вважаючи швидкість сублімації сталою на цій ділянці орбіти і ядро таким, що досить швидко обертається навколо своєї осі, знаходимо

$$\Delta m = 8\pi R^2 \lambda \mu m_H t,$$

де μ — відносна молекулярна маса; m_H — маса атома Гідрогену. Отримуємо $\Delta m = 1{,}8 \cdot 10^{12}$ кг;

б) $\Delta R = \dfrac{\Delta m}{4\pi R^2 \rho} \approx 6$ м.

8.5. а) Радіаційна температура поверхні ядра у перигелію дорівнює (температуру в підсонячній точці обчислено у задачі 4.25)

$$T_e = \frac{1}{2\sqrt{a(1-e)}}\left(\frac{(1-A)L_\odot}{\pi\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = 360 \text{ K};$$

б) за цих умов речовини комети Галлея вистачить на 1500 появ, тобто трохи більше, ніж на 100 тис. років.

8.6. а) Застосуємо відому кінематичну формулу

$$r_0 = \frac{v_0^2}{2a},$$

де v_0 — початкова швидкість частинки; a — прискорення, якого вона зазнає, і враховуємо співвідношення

$$a = (\zeta - 1)g_\odot,$$

де $g_\odot = \dfrac{GM_\odot}{r^2}$ — суто гравітаційне прискорення, якого зазнає частинка від Сонця. У такий спосіб отримуємо потрібну формулу;

б) $v_0 \approx 2$ км/с.

8.7. Оновлення всього атмосферного кисню у такий спосіб могло б відбутися приблизно за 1,2 млн років.

8.8. Щоб астероїд утримував біля себе супутник, прискорення, якого зазнає супутник від астероїда, має перевищувати різницю прискорень, яких зазнають астероїд і супутник від Сонця.

Різницю прискорень у лінійному наближенні можна подати у вигляді (порівняйте з тим, що подано у вказівці до задачі 7.1)

$$\Delta a \approx \frac{2GM_\odot}{r^3}d,$$

де r — геліоцентрична відстань системи; d — відстань між астероїдом і його супутником.

Шукану відстань d знаходимо з умови

$$\frac{GM}{d^2} = \frac{2GM_\odot}{r^3}d,$$

де M — маса астероїда, яку, припускаючи його сферичність, обчислюємо за формулою

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho,$$

де R і ρ — відповідно радіус і густина астероїда. Знаходимо

$$d = \left(\frac{M}{2M_\odot}\right)^{\frac{1}{3}} r = \left(\frac{2\pi\rho}{3M_\odot}\right)^{\frac{1}{3}} Rr.$$

Вважаючи, що $r = 2{,}8$ а. о., отримуємо $d \approx 15\,000$ км.

Слід зауважити, що ця оцінка дещо завищена. Насправді $d \approx 0{,}5R_H$, де R_H — так званий радіус Хілла, який дорівнює

$$R_H = \left(\frac{M}{3M_\odot}\right)^{\frac{1}{3}} r.$$

8.9. а) Згідно із законом збереження моменту імпульсу, отримуємо

$$J = mv_\infty \ell_{\max} = mv_0 R,$$

де v_∞ — швидкість космічного тіла, що налітає, на великій відстані від планети; v_0 — швидкість тіла у момент зіткнення.

З іншого боку, згідно із законом збереження енергії:

$$W = \frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{R}.$$

Із цих двох рівнянь отримуємо

$$\sigma = \pi R^2\left(1 + \left(\frac{v_{II}}{v_\infty}\right)^2\right),$$

де v_{II} — друга космічна швидкість для планети;

б) $\dfrac{\sigma}{\pi R_\oplus^2} = 1 + \left(\dfrac{v_{II}}{v_\infty}\right)^2 = 17;$

в) загалом

$$v_\infty = \frac{v_{II}}{\sqrt{\left(\frac{\ell_{max}}{R}\right)^2 - 1}}.$$

Для $\ell_{max} = 2R$ знаходимо

$$v_\infty = \frac{v_{II}}{\sqrt{3}}.$$

Для Землі у цьому разі $v_\infty = 6{,}5$ км/с.

8.10. За такої швидкості рою відносно Землі радіус ефективного перерізу зіткнення більший за геометричний розмір Землі (див. пункт б) попередньої задачі) у

$$\frac{R}{R_\oplus} = \sqrt{17} \text{ разів.}$$

Отже, на Землю впаде увесь рій.

8.11. Очевидно,

$$\Delta M = \sigma \ell \rho,$$

де σ — ефективний переріз гравітаційного захоплення Юпітера. Для цієї швидкості відносно хмари

$$\sigma = \pi R_{Ю}^2 \left(1 + \left(\frac{v_{II}}{v}\right)^2\right) \approx 37\pi R_{Ю}^2,$$

де v_{II} — друга космічна швидкість на рівні видимої поверхні Юпітера; $R_{Ю}$ — його радіус.

Остаточно отримуємо $\Delta M \approx 6 \cdot 10^{14}$ кг, що відповідає масі ядра комети Галлея.

8.12. а) Сила притягання, що діє на сферичну пилинку від Сонця, дорівнює

$$F_g = \frac{4}{3}\frac{\pi G M_\odot \rho R^3}{r^2},$$

де R — радіус пилинки; r — відстань її від Сонця.

Сила тиску випромінювання, що діє на пилинку, визначається сумарним імпульсом p фотонів, які поглинає пилинка за одиницю часу, тобто

$$F_{ph} = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dW}{dt},$$

де W — енергія, яку фотони передають пилинці, і також враховано, що для фотонів $p = \frac{W}{c}$. Отримуємо

$$F_{ph} = \beta \pi R^2 \frac{L_\odot}{4\pi r^2 c},$$

де β — коефіцієнт, що характеризує поглинальну і випромінювальну здатності пилинки.

Отже, відношення цих сил дорівнює

$$\frac{F_g}{F_{ph}} = \frac{16}{3}\frac{\pi G \rho c}{\beta}\left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\right)R.$$

Як випливає, шукане відношення прямо пропорційне щільності та радіусу пилинок і не залежить (як і слід було сподіватися) від відстані до Сонця;

б) згідно з I законом Ньютона, пилинка рухатиметься рівномірно та прямолінійно, якщо

$$\vec{F}_g + \vec{F}_{ph} = 0.$$

Тоді з урахуванням розв'язку пункту а), а також умови, що пилинка поглинає все світло, яке на неї падає (тобто $\beta = 1$), отримуємо

$$R = \frac{3}{16\pi G \rho c}\left(\frac{L_\odot}{M_\odot}\right) = 0{,}2 \text{ мкм.}$$

8.13. Очевидно (див. рис. 16), що частинка у своєму орбітальному русі зазнає гальмівної дії $F \sin\gamma$, де F — сила, зумовлена тиском світла. Для частинки радіусом R ця сила дорівнює (див. розв'язання пункту а) попередньої задачі)

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dW}{dt} = \pi R^2 \frac{L_\odot}{4\pi r^2 c},$$

де p — сумарний імпульс фотонів, які поглинає частинка; W — енергія, яку фотони передають частинці; r — відстань до Сонця.

Тоді, за другим законом Ньютона, у тангенціальному напрямку для частинки масою m отримуємо

$$m\frac{dv}{dt} = F \sin\gamma \approx \frac{L_\odot}{4c}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \gamma,$$

оскільки кут γ дуже малий.

У радіальному напрямку доцентрова сила дорівнює різниці сил

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_\odot m}{r^2} - F\cos\gamma \approx \frac{GM_\odot m}{r^2} - \frac{L_\odot}{4c}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad (\cos\gamma \approx 1).$$

Останньому рівнянню надамо такого вигляду:

$$v^2 = \frac{GM'_\odot}{r},$$

де величину $M'_\odot$

$$M'_\odot = M_\odot - \frac{L_\odot R^2}{4Gmc}$$

можна розглядати як редуковану масу Сонця.

Ефективне зменшення маси Сонця, незначне для частинок великого розміру ($R > 100$ мкм), стає помітним для малих R настільки, що

11 — 7-1370

для $R < 0{,}1$ мкм і щільності $\rho < 5000$ кг/м^3 редукована маса Сонця є від'ємною. Такі частинки покидають Сонячну систему по гіперболічній траєкторії, повернутій опуклістю до Сонця.

Диференціюючи за часом вираз для v^2 і підставляючи у рівняння для гальмівного прискорення, отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L_\odot R^2 v^2}{2GM'_\odot mc^2} = -\frac{L_\odot R^2}{4mc^2 r}.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$\tau = \frac{mc^2 r_0^2}{L_\odot R^2} = \frac{4}{3}\pi\frac{\rho c^2 R r_0^2}{L_\odot},$$

де r_0 — первісний радіус орбіти. Для $r_0 = 1$ а. о. залізна частинка ($\rho = 7800$ кг/м^3) впаде на Сонце приблизно через 50 000 років, а пухка ($\rho = 1000$ кг/м^3) — через 6500 років.

8.14. $N(m)dm = N(m_0)\left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{\beta-2}{3}} dm,$

де $N(m_0) = \dfrac{N\left(\left(\frac{3m_0}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(36\pi\rho m_0^2\right)^{\frac{1}{3}}}.$

8.15. За добу на всій Землі у середньому можна спостерігати близько 25 млн метеорів.

8.16. а) Ні. Поясніть, чому;

б) згадаємо, що якщо будь-яке тіло на значній відстані від планети починає свій рух зі стану спокою, то воно наближатиметься до планети з параболічною швидкістю (див., наприклад, задачу 2.20). Загалом, згідно із законом збереження енергії, швидкість зіткнення (входження в атмосферу) дорівнює

$$v^2 = v_{\text{II}}^2 + v_\infty^2,$$

де v_{II} — параболічна швидкість біля поверхні планети (друга космічна швидкість); v_∞ — швидкість тіла на нескінченності.

Для космічних тіл, що належать Сонячній системі, діапазон значень v_∞: від 0 до 72 км/с (останнє значення буде біля тіла, що рухається по параболічній траєкторії назустріч Землі).

Отже, мінімальна швидкість входження метеорного тіла в атмосферу Землі становить $v_{\min} = 11{,}2$ км/с, максимальна (для тіл, що належать Сонячній системі) — $v_{\max} = 73$ км/с;

в) після опівночі спостерігаються переважно метеори, що летять назустріч Землі (якщо вагаєтесь, намалюйте рисунок). Оскільки при цьому вони влітають в атмосферу з більшими швидкостями, тому й спалахують яскравіше й, отже, можна помітити спалахи від набагато менших частинок.

8.17. Протяжність метеорного потоку щонайменше дорівнює довжині шляху, який Земля проходить за певний час, а саме 0,64 а. о.

8.18. Кінетична енергія такої метеорної часточки дорівнює ≈ 1 МДж. Ця енергія витрачається на випаровування самої часточки, а також на нагрівання, дисоціацію, йонізацію повітря й утворення повітряних хвиль.

8.19. За одиницю часу на метеороїд набігає маса повітря, що дорівнює ρSv, імпульс цієї маси становить ρSv^2. Тілу передається частка Г цієї величини, отже, воно набуває за одиницю часу імпульсу

$$\frac{d(mv)}{dt} = -\Gamma\rho Sv^2.$$

Звідси для $m = \text{const}$ отримуємо шуканий результат.

8.20. а) $A = 1$;

б) $\left(\frac{9\pi}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}21.$

8.21. Подібно до того як гальмування метеороїда зумовлюється передаванням йому імпульсу від молекул повітря, що налітають (див. задачу 8.19), так і абляція визначається передаванням метеороїду енергії від тих самих молекул. Ця енергія дорівнює потоку маси ρSv, помноженому на кінетичну енергію одиниці маси $\frac{v^2}{2}$. Застосовуючи закон збереження енергії та враховуючи коефіцієнт теплопередачі Λ, отримаємо потрібний результат.

8.22. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -\rho Sv^2, \\ q\dfrac{dm}{dt} = -\dfrac{1}{2}\rho Sv^3, \end{cases}$$

отримуємо рівняння

$$q\frac{dm}{m} = \frac{1}{2}vdv.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{1 - \frac{4q}{v_0^2}\ln\frac{m_0}{m}},$$

де m_0 — початкова маса метеороїда.

Якщо $\frac{m_0}{m} = 100$, то $\frac{v}{v_0} = 0{,}79$.

8.23. Для того щоб космічне тіло пролетіло крізь атмосферу й знову повернулося в космічний простір, потрібно, щоб кінетична енергія тіла перевищувала роботу з подолання опору повітря, тобто

$$\frac{mv^2}{2} > F\ell,$$

де v — швидкість тіла до входження в атмосферу; F — сила динамічного тертя; ℓ — довжина шляху в атмосфері.

Згідно із задачею 8.19, отримуємо

$$F = m\frac{dv}{dt} = -\Gamma\rho S v^2,$$

де ρ — густина повітря.

Найдовший шлях в атмосфері буде у разі, якщо тіло пролетить над самою поверхнею Землі. Тоді

$$\ell \approx 2\sqrt{2R_\oplus H}.$$

Припускаючи, що метеороїд має сферичну форму, і взявши $\Gamma = 1$, остаточно знаходимо

$$R > 3\frac{\rho}{\rho_м}\sqrt{2R_\oplus H}.$$

Для $\rho_м = 2000$ кг/м^3 отримуємо $R > 620$ м.

8.24. а) За рівномірного розподілу один уламок припадає на площу 0,01 км^2, а одна людина у середньонаселеній місцевості — на площу 0,02 км^2. Вважаючи для спрощення ці площі коловими, отримуємо, що метеорит може впасти у середньому на відстані ≈ 60 м від очевидця;

б) застосовуючи поняття геометричної ймовірності, знаходимо, що шукана ймовірність дорівнює $5\cdot10^{-5}$.

8.25. а) Припускаючи, що густина космічного «сміття» дорівнює у середньому $\rho = 3000$ кг/м^3, знаходимо величину зміни радіуса

$$\Delta R = \frac{\Delta m}{4\pi R^2\rho} \approx 11 \text{ см},$$

де Δm — маса речовини, що випала на Землю за час її існування; R — сучасний радіус Землі;

б) вважаючи, що космічне «сміття» падає рівномірно з усіх напрямків і не змінює моменту імпульсу Землі, отримуємо

$$I\omega = (I + \Delta I)(\omega + \Delta\omega),$$

де I і ΔI — відповідно момент інерції Землі та його зміна; ω і $\Delta\omega$ — кутова швидкість осьового обертання Землі та її зміна. Звідси

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx -\frac{\Delta I}{I}.$$

Вважатимемо, що зміна моменту інерції Землі дорівнює величині моменту інерції тонкостінної сфери (див. задачу 5.22)

$$\Delta I = \frac{2}{3}\Delta m R^2.$$

Таким чином, остаточно знаходимо збільшення періоду осьового обертання (а отже, і сонячної доби)

$$\Delta T = \frac{\Delta I}{I}T = \frac{2}{3}\frac{\Delta m}{0{,}332M}T = 4{,}8 \text{ мс},$$

де M — маса Землі;

в) переконуємося, що власна гравітаційна енергія Землі зменшується на величину

$$\Delta W_g = -\frac{\Delta m}{M}W_g = 2{,}8\cdot10^{-8}W_g.$$

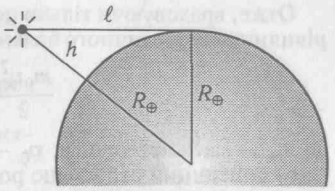


Рис. 41

8.26. а) Із рис. 41, де ℓ — відстань між спостерігачем і місцем вибуху, який спостерігався на горизонті, й за умовою $\ell = 350$ км випливає, що, нехтуючи рефракцією, можна записати

$$(R_\oplus + h)^2 = R_\oplus^2 + \ell^2.$$

Звідси

$$h \approx \frac{\ell^2}{2R_\oplus} \approx 10 \text{ км};$$

б) вважаючи, що вся кінетична енергія космічного тіла перетворилася на енергію вибуху, визначаємо його масу

$$m = \frac{2\cdot10^{16}}{(3{,}5\cdot10^4)^2} = 1{,}6\cdot10^7 \text{ кг}.$$

Припускаючи тіло сферичним, оцінюємо його радіус $R \approx 20$ м.

8.27. а) За формою кратер з добрим наближенням можна вважати кульовим сегментом. Відомо, що об'єм кульового сегмента дорівнює

$$V = \frac{\pi h(3R^2 + h^2)}{6},$$

де R — радіус сегмента; h — його висота (для кратера — глибина).

Із наближенням — близьким до істини — можна вважати, що

$$h \approx \frac{R}{2}.$$

Тоді об'єм кратера $V \approx R^3$. Отже, енергія, що витрачається на руйнування порід, становитиме

$$W_1 \approx \sigma R^3.$$

Енергію, що витрачається на викидання порід із кратера, можна обчислити як кінетичну енергію викиду

$$W_2 = \frac{mv^2}{2},$$

де $m \approx \rho R^3$ — маса речовини, викинутої з кратера. Початкову швидкість викиду v можна оцінити, використовуючи умову, що переміщення більшої частини маси порід здійснюється у полі тяжіння на відстань $\approx R$, а саме

$$v = \sqrt{2gR}.$$

Тоді

$$W_2 \approx \rho g R^4.$$

Отже, враховуючи тільки основні енергетичні витрати, отримуємо рівняння енергетичного балансу [4]

$$\frac{m_0 v_0^2}{2} = \sigma R^3 + \rho g R^4,$$

де m_0 — маса метеороїда; v_0 — швидкість його зіткнення із Землею;

б) критичний радіус, що розділяє міцнісні й гравітаційні кратери, можна оцінити, прирівнюючи W_1 до W_2. Тоді

$$R_{\text{кр}} = \frac{\sigma}{\rho g} \approx 300 \text{ м};$$

в) $m_0 \approx \dfrac{4\sigma^4}{(\rho g)^3 v_0^2} \approx 1{,}5 \cdot 10^7$ кг.

8.28. Згідно із вказівкою до задачі, а також вважаючи (як і в попередній задачі), що об'єм кратера приблизно дорівнює чверті об'єму кулі радіусом, який є радіусом кратера R, для енергії, що витрачається на розігрівання гірських порід, можна записати

$$W_{\text{T}} \approx c\rho R^3 \Delta T,$$

а) оскільки під час утворення невеликого кратера енергія метеороїда витрачається переважно на руйнування порід (див. розв'язок пункту а) попередньої задачі), то

$$\Delta T \approx \frac{\sigma}{c\rho} \approx 3 \text{ K}.$$

Отже, виявляється, що під час утворення будь-яких малих кратерів, кількість речовини, яка розплавляється, а тим більше випаровується, незначна;

б) для порівняно великих (гравітаційних) кратерів отримуємо

$$\Delta T \approx \frac{gR}{c}.$$

Звідси випливає, що температура розігрівання порід у цьому разі зростає пропорційно радіусу кратера;

в) $\Delta T \approx 300$ K під час утворення кратерів радіусом $R > 30$ км.

8.29. а) Якщо m_0 і v_0 — відповідно маса і швидкість астероїда, ρ — густина води, c — її питома теплоємність, r — питома теплота пароутворення, то за умовою задачі рівняння енергетичного балансу має вигляд

$$\frac{m_0 v_0^2}{2} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 (c\Delta T + r + gR);$$

б) вважаючи $R = h$, отримуємо

$$m_{0\text{гр}} = \frac{8}{3}\frac{\pi\rho h^3}{v_0^2}(c\Delta T + r + gh) \approx 1{,}5 \cdot 10^{13} \text{ кг}.$$

Зауважимо, що основна частка енергії астероїда витрачається на випаровування води, значно менше — на її нагрівання і зовсім мало — на підняття її в атмосферу;

в) використовуючи рівняння енергетичного балансу (див. пункт а)), знаходимо

$$N = \frac{3}{2}\frac{M_{\text{ок}}(c\Delta T + r + gh)}{\pi\rho_0 R_0^3 v_0^2} \approx 6000 \text{ астероїдів}.$$

8.30. За оцінкою радіус метеороїда становить $R_0 \approx 30$ м.

Для швидкості зіткнення, згідно з пунктом а) задачі 8.27, визначаємо

$$v_0 = R\sqrt{\frac{2(\sigma + \rho g R)R}{m_0}} \approx 4 \text{ км/с},$$

де R — радіус кратера; m_0 — маса метеороїда.

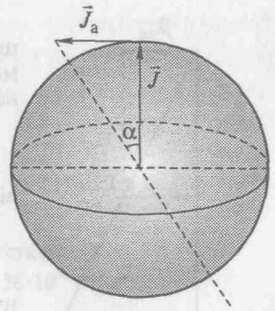


Рис. 42

8.31. а) Згідно з розв'язком пункту а) задачі 8.27, отримуємо $v \approx 20$ км/с;

б) енергія вибуху в тротиловому еквіваленті оцінюється у $4{,}8 \cdot 10^8$ Мт.

8.32. Максимальний кут зрушення буде у разі дотичного влучання астероїда в один із полюсів планети (рис. 42). Тоді

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{J_a}{J} = \operatorname{arctg}\frac{m_a v_a RT}{2\pi I},$$

де J_a і J — моменти імпульсу відповідно астероїда і планети.

Для того щоб зрушити вісь обертання Землі на 23°26′, маса астероїда має бути

$$m_a = \frac{2\pi I_\oplus \operatorname{tg}\alpha}{v_a R_\oplus T_\oplus} \approx 0{,}002 M_\oplus,$$

що відповідає масі Плутона.

8.33. а) Це відбувається тому, що під час надзвукового зіткнення виникає надзвукова ударна хвиля, яка поширюється від точки удару майже однаково незалежно від його напрямку;

б) залежність числа місячних кратерів від їх діаметра $N \infty D^{-2}$ відображує розподіл метеорних тіл за розмірами (див. задачу 8.14);

в) основні докази такі:

1) залежність числа місячних кратерів від їх діаметра $N \infty D^{-2}$, що має тільки одне пояснення (див. пункт б));

2) залежність глибини кратерів від їх діаметра виявилась однаковою як для місячних кратерів, так і для воронок від вибухів бомб, снарядів, а також для земних метеоритних кратерів (Р. Болдуїн, 1949 р. [3]);

3) на відміну від вулканічних кратерів, які не бувають більшими ніж ≈ 20 км (кальдери), ударні кратери можуть мати розміри теоретично нічим не обмежені. На Місяці, наприклад, є п'ять кратерів діаметром понад 200 км.

8.34. Ні, це неможливо. Слід урахувати, що яку б швидкість не мало космічне тіло на межі сфери дії Місяця (див. задачу 2.39), у разі зіткнення з місячною поверхнею воно, згідно із законом збереження енергії, не може мати швидкість меншу, ніж друга космічна (2,4 км/с). Тому кінетична енергія цього тіла буде настільки великою, що у разі удару об тверду поверхню воно обов'язково випарується.

8.35. а) Річ у тому, що високий тиск у момент удару виникає тільки на досить великій глибині. Зруйнований і викинутий матеріал підхоплює уламки з поверхні, які таким чином набувають потрібної швидкості, але самі не руйнуються;

б) зі швидкістю, не меншою ніж друга космічна.

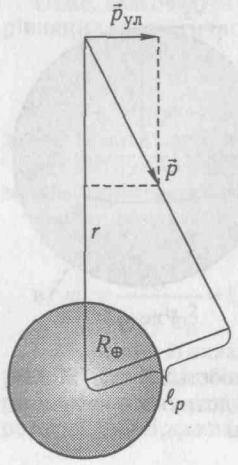


Рис. 43

8.36. Вважаючи ударну міцність для Місяця такою, що дорівнює $w_☾ = w_б = 400$ Дж/кг, можна розрахувати енергію, потрібну для його катастрофічного руйнування

$$W = M_☾ w_☾ \approx 3\cdot 10^{25} \text{ Дж}.$$

Масу астероїда можна обчислити зі співвідношення

$$\frac{mv^2}{2} = W.$$

Тоді, припускаючи, що астероїд має сферичну форму, остаточно отримуємо

$$R = \left(\frac{3W}{2\pi\rho v^2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 50 \text{ км}.$$

8.37. Із рис. 43 випливає, що внаслідок подібності трикутників можна записати

$$\frac{r}{\ell_p} = \frac{p}{p_{ул}},$$

де r — шукана відстань, на якій має відбутися зустріч ракети з астероїдом; ℓ_p — прицільний параметр (відстань, яку має пролетіти астероїд): $p_{ул}$ — реактивний імпульс, отриманий від уламка, відкинутого перпендикулярно до первісної траєкторії; p — імпульс, якого набуває астероїд після вибуху.

За умовою задачі

$$\ell_p = 2R_\oplus.$$

Кінетична енергія уламка пов'язана з його імпульсом співвідношенням

$$W_k = \frac{p_{ул}^2}{2m_{ул}}.$$

Оскільки вся енергія вибуху W переходить у кінетичну енергію уламка, а $m_{ул} = \alpha m$, то для імпульсу $p_{ул}$ визначаємо

$$p_{ул} = \sqrt{2\alpha m W}.$$

Імпульс p дорівнює

$$p = (1-\alpha)mv \approx mv,$$

де швидкість можна обчислити, використовуючи розв'язання пункту в) задачі 8.9, а саме

$$v = \frac{v_{II}}{\sqrt{\left(\frac{\ell_p}{R_\oplus}\right)^2 - 1}} = \frac{v_{II}}{\sqrt{3}},$$

де v_{II} — друга космічна швидкість.

Остаточно знаходимо

$$r = R_\oplus v_{II}\sqrt{\frac{2m}{3\alpha W}} = 9\cdot 10^7 \text{ км}.$$

ДОВІДКОВІ ДАНІ

Фундаментальні фізичні сталі

Швидкість світла
$c = 2\,99792458$ м/с

Гравітаційна стала
$G = 6{,}67259\cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)

Стала Планка
$h = 6{,}6260755\cdot 10^{-34}$ Дж·с

Елементарний заряд
$e = 1{,}60217733\cdot 10^{-19}$ Кл

Маса електрона
$m_e = 9{,}1093897\cdot 10^{-31}$ кг

Маса протона
$m_p = 1{,}6726231\cdot 10^{-27}$ кг

Маса нейтрона
$m_n = 1{,}6749286\cdot 10^{-27}$ кг

Фізичні сталі

Маса атома Гідрогену
$m_H = 1{,}6726231\cdot 10^{-27}$ кг

Стала Больцмана
$k = 1{,}38066\cdot 10^{-23}$ Дж/К

Стала Стефана — Больцмана
$\sigma = 5{,}67032\cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4)

Електрична стала
$\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2)

Магнітна стала
$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Н/А^2

Астрофізичні сталі

Астрономічна одиниця
$a_\oplus = 1{,}496\cdot 10^{11}$ м

Маса Сонця $M_\odot = 1{,}989\cdot 10^{30}$ кг

Радіус Сонця $R_\odot = 6{,}96\cdot 10^8$ м

Світність Сонця $L_\odot = 3{,}86\cdot 10^{26}$ Вт

Сонячна стала
$E_{\oplus\odot} = 1{,}36\cdot 10^3$ Вт/м^2

Дані про Землю

Екваторіальний радіус
$R_{\oplus\,екв} = 6378{,}140$ км

Полярний радіус
$R_{\oplus\,пол} = 6356{,}755$ км

Середній радіус
$R_\oplus = 6371{,}032$ км

Маса $M_\oplus = 5{,}977\cdot 10^{24}$ кг

Середня щільність
$\rho = 5574$ кг/м^3

Осьовий період обертання
$23^h 56^m 04^s$

Кутова частота осьового обертання
$\omega_\oplus = 7{,}29\cdot 10^{-5}$ рад/с

Орбітальний період обертання (зоряний рік)
$365{,}25636042^d$

Тропічний рік (на 1900 рік)
$365{,}24219879^{d*}$

Момент інерції відносно полярної осі
$C = 0{,}332 M_\oplus R_{\oplus\,екв}^2 = 8{,}08\cdot 10^{37}$ кг·м^2

Момент інерції відносно екваторіальної осі
$A = 0{,}331 M_\oplus R_{\oplus\,екв}^2 = 8{,}05\cdot 10^{37}$ кг·м^2

Гравітаційний момент
$$J_2 = \frac{C-A}{MR_{екв}^2} = 1{,}08265\cdot 10^{-3}$$

Маса гідросфери $M_г = 1{,}4\cdot 10^{21}$ кг

*Зменшується на $0{,}53^s$ за 100 років.

Фізичні параметри води

Густина морської води (за 15 °C)
$\rho = 1026$ кг/м^3
Щільність льоду (за 0 °C)
$\rho_л = 917$ кг/м^3
Питома теплоємність (за 0 °C)
$c = 4,22$ кДж/(кг·К)
Питома теплоємність (за 20 °C)
$c = 4,19$ кДж/(кг·К)
Питома теплоємність льоду (за 0 °C)
$c = 2,09$ кДж/(кг·К)
Питома теплота плавлення льоду
$\lambda = 333,7$ кДж/кг
Питома теплота пароутворення (за тиску 101,3 кПа)
$r = 2256$ кДж/кг
Критична температура
$t_{кр} = 374,2$ °C

Таблиця 1. **Елементи орбіт планет**

Планета	a, а. о.	e	i	T, тропічний рік	S, доба	n	v, км/с
Меркурій	0,3871	0,206	7,00°	0,2408	115,9	4,092°	47,86
Венера	0,7233	0,007	3,39	0,6152	583,9	1,602	35,01
Земля	1,0000	0,017	—	1,0000	—	0,986	29,78
Марс	1,5237	0,093	1,85	1,8809	779,9	0,524	24,12
Юпітер	5,2028	0,048	1,31	11,8622	398,9	0,083	13,06
Сатурн	9,5388	0,056	2,49	29,4577	378,11	0,034	9,64
Уран	19,1910	0,047	0,77	84,0153	369,8	0,012	6,80
Нептун	30,0707	0,009	1,77	164,7883	367,5	0,006	5,43
Плутон	39,53	0,250	17,14	247,6968	366,7	0,004	4,74

Примітка: a — велика піввісь орбіти; e — ексцентриситет орбіти; i — нахил орбіти до екліптики; T — сидеричний період обертання; S — середній синодичний період обертання; n — середній добовий рух; v — середня орбітальна швидкість.

Таблиця 2. **Елементи осьового обертання планет**

Планета	$T_{ос}$	T_s	ε	$q \cdot 10^{-3}$	$\alpha \cdot 10^3$	$T_{пр}$, діб	$T_{пр.а} \cdot 10^6$, років
Меркурій	$58,65^d$	176^d	0°	0,001	—	—	—
Венера	243,16	117	177,3	0,00006	—	—	—
Земля	23^h56^m	1	23,4	3,4	3,3	305	0,026
Марс	24^h37^m	24^h39^m	25,2	4,6	8,8	116	0,106
Юпітер	9^h50^m	9^h50^m	3,1	8,9	58	7,1	1,45
Сатурн	10^h14^m	10^h14^m	26,8	157	88	4,9	6,31
Уран	10^h49^m	10^h49^m	97,8	55	18	40	134
Нептун	15^h48^m	15^h48^m	29,6	40	19	39	461
Плутон	$6,39^d$	$6,39^d$	122,5	—	—	—	—

Примітка: $T_{ос}$ — період осьового обертання; T_s — тривалість сонячної доби; ε — кут нахилу площини екватора до площини орбіти; q — параметр обертання; α — динамічне стиснення; $T_{пр}$ — період вільної прецесії; $T_{пр.а}$ — період астрономічної прецесії.

Таблиця 3. **Фізичні характеристики планет**

Планета	M	$R_{екв}$, км	ε	R	ρ, кг/м^3	$\frac{I}{MR^2_{екв}}$
Меркурій	0,055	2439	0	0,383	5440	0,324
Венера	0,8151	6051	0,0002	0,950	5240	0,34
Земля	1,0000	6378	0,0034	1	5574	0,3309
Марс	0,108	3394	0,0059	0,531	3940	0,377
Юпітер	317,8	71392	0,065	11,08	1270	0,20
Сатурн	95,2	60268	0,108	9,31	640	0,22
Уран	14,5	25559	0,033	3,99	1285	0,23
Нептун	17,2	24765	0,026	3,85	1640	0,29
Плутон	0,002	1142	—	0,18	2000	0,39

Примітка: M — маса відносно мас Землі; $R_{екв}$ — екваторіальний радіус; ε — геометричне стиснення; R — середній радіус відносно радіуса Землі; ρ — середня щільність; $\frac{I}{MR^2_{екв}}$ — безрозмірний момент інерції.

Таблиця 4. **Умови на поверхні планет або біля поверхні хмарового шару (для планет-гігантів)**

Планета	g, м/с^2	v_{II}, км/с	A	T_e	T_0
Меркурій	3,68	4,2	0,08	438	390
Венера	8,86	10,4	0,77	227	750
Земля	9,81	11,2	0,30	255	288
Марс	3,71	5,0	0,16	216	210
Юпітер	25,8	60,4	0,70	90	130
Сатурн	11,3	36,2	0,75	64	95
Уран	9,0	21,4	0,90	36	56
Нептун	11,6	23,8	0,82	33	59
Плутон	0,6	1,2	0,2?	42	42(?)

Примітка: g — прискорення вільного падіння на поверхні або біля поверхні хмарового шару на екваторі; v_{II} — друга космічна швидкість; A — сферичне альбедо; T_e — ефективна (радіаційна) температура; T_0 — середня температура біля поверхні для планет земної групи та на рівні видимої поверхні для планет-гігантів.

Таблиця 5. **Основні параметри і хімічний склад атмосфер планет земної групи**

Параметр	Меркурій	Венера	Земля	Марс
Маса атмосфери, кг	—	$5,2 \cdot 10^{20}$	$5,25 \cdot 10^{18}$	$2,35 \cdot 10^{16}$
Хімічний склад (об'ємна частка), %	He ≤ 20 H_2 ≤ 18 Ne ≤ 40—60 Ar ≤ 2	CO_2 96,5 N_2 3,5 Ar 0,015 H_2O 0,2	N_2 78 O_2 21 Ar 0,93 H_2O 0,1—1	CO_2 95 N_2 2—3 H_2O 10^{-3}—10^{-1} Ar 1—2

Параметр	Меркурій	Венера	Земля	Марс
	$CO_2 \le 2$	CO $3 \cdot 10^{-3}$ HCl $4 \cdot 10^{-5}$ HF $5 \cdot 10^{-7}$ $O_2 < 10^{-3}$ SO_2 10^{-5} H_2S $8 \cdot 10^{-3}$ Ne 10^{-3} Kr $4 \cdot 10^{-5}$ Xe 10^{-6}	CO_2 0,03 CO 10^{-5} CH_4 10^{-4} H_2 $5 \cdot 10^{-5}$ He 10^{-4} Kr 10^{-4} Xe 10^{-6}	CO $4 \cdot 10^{-3}$ O_2 0,1—0,4 Ne $< 10^{-3}$ Kr $< 2 \cdot 10^{-3}$ Xe $< 5 \cdot 10^{-3}$
Середня молекулярна маса	—	43,2	28,97	43,5
Температура біля поверхні T_{max}, K T_{min}, K	 690 90	 750	 310 240	 270 150
Середній тиск біля поверхні, атм	$< 2 \cdot 10^{-14}$	95	1	$6{,}1 \cdot 10^{-3}$
Середня густина біля поверхні, кг/м^3	$< 10^{-14}$	66	1,27	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$
Шкала висот H, км	—	16	8,3	11

Таблиця 6. **Орбітальні характеристики і фізичні параметри супутників планет Сонячної системи**

Супутник	a, 10^3 км	e	T, діб	D, км	M	ρ, кг/м^3
			Земля			
Місяць	384,4	0,0554	27,32166	3475	$1{,}23 \cdot 10^{-2}$	3330
			Марс			
Фобос	9,38	0,0151	0,3125	$27 \times 22 \times 18$	$1{,}82 \cdot 10^{-8}$	2100
Деймос	23,46	0,0002	1,2625	$15 \times 12 \times 10$	$2{,}14 \cdot 10^{-9}$	2100
			Юпітер			
Метіда	128,0	0,0000	0,295	40	$\sim 3 \cdot 10^{-11}$	—
Адрастея	129,0	0,0000	0,298	$24 \times 20 \times 16$	$\sim 3 \cdot 10^{-11}$	—
Амальтея	181,4	0,0022	0,498	$262 \times 146 \times 134$	$\sim 10^{-8}$	—
Теба	221,9	0,0176	0,675	110×90	$\sim 3 \cdot 10^{-10}$	—
Іо	421,8	0,0041	1,769	3642	$4{,}7 \cdot 10^{-5}$	3530
Європа	671,1	0,0093	3,551	3130	$2{,}57 \cdot 10^{-5}$	3010
Ганімед	1070,4	0,0016	7,155	5268	$7{,}84 \cdot 10^{-5}$	1930
Калісто	1882,8	0,0074	16,69	4806	$5{,}6 \cdot 10^{-5}$	1830

Супутник	a, 10^3 км	e	T, діб	D, км	M	ρ, кг/м^3
S/2000 J1	7330	0,204	129,8	8,0	—	—
Леда	11070	0,147	238,5	10	$\sim 5 \cdot 10^{-13}$	—
Гімалія	11369	0,166	247,9	170	$\sim 5 \cdot 10^{-9}$	—
Елара	11668	0,221	259,8	80	$\sim 3 \cdot 10^{-10}$	—
Лісітея	11818	0,104	260,2	24	$\sim 4 \cdot 10^{-12}$	—
S/2000 J11	12416	0,208	284,3	4,0	—	—
S/2000 J3	19896	0,233	573,43	5,2	—	—
S/2000 J5	20345	0,239	595,34	4,4	—	—
S/2000 J7	20494	0,127	595,34	6,8	—	—
Ананке	20943	0,252	620,91	20	$\sim 4 \cdot 10^{-12}$	—
Карме	22140	0,263	672,05	40	$\sim 10^{-11}$	—
S/2000 J10	22290	0,198	679,35	3,8	—	—
S/2000 J9	22430	0,189	686,66	5,0	—	—
S/2000 J4	22738	0,323	701,27	3,2	—	—
S/2000 J6	23187	0,315	719,53	3,8	—	—
Пасіфає	23337	0,380	730,48	36	$\sim 3 \cdot 10^{-11}$	—
Сінопе	23636	0,370	745,09	28	$\sim 10^{-11}$	—
S/2000 J2	24085	0,267	763,36	5,2	—	—
S/2000 J8	24384	0,575	774,31	5,4	—	—
S/1999 J1	24683	0,107	792,58	8,6	—	—
			Сатурн			
Пан	133,6	0,0000	0,575	20	—	—
Атлас	137,7	0,0000	0,602	38×26	—	—
Прометей	139,4	0,0023	0,613	$140 \times 100 \times 74$	—	—
Пандора	141,7	0,0044	0,629	$110 \times 84 \times 66$	—	—
Епіметей	151,4	0,0205	0,694	$220 \times 190 \times 160$	—	—
Янус	151,5	0,0073	0,695	177,6	—	—
Мімас	174,3	0,0206	0,942	397,2	$6{,}7 \cdot 10^{-8}$	1200
Енцелад	238,0	0,0001	1,370	498,8	$1{,}27 \cdot 10^{-7}$	1100
Тефія	294,6	0,0001	1,888	1059,6	$1{,}09 \cdot 10^{-6}$	1000
Телесто	294,7	0,0010	1,888	24	—	—
Каліпсо	294,7	0,0005	1,888	$30 \times 24 \times 16$	—	—
Діона	377,4	0,0002	2,737	1118	$1{,}76 \cdot 10^{-6}$	1400
Гелена	377,4	0,0001	2,737	36×30		
Рея	527,1	0,0009	4,518	1528	$4{,}23 \cdot 10^{-6}$	1300
Титан	1221,9	0,0288	15,95	5150	$2{,}46 \cdot 10^{-4}$	1890
Гіперіон	1464,1	0,0175	21,28	$350 \times 280 \times 220$	—	—
Япет	3560,8	0,0284	79,33	1436	$3{,}51 \cdot 10^{-6}$	1200
S/2000 S5	11 368	0,3330	449,20	14	—	—
S/2000 S6	11 465	0,3191	453,05	10	—	—
Феба	12 944	0,1644	548,21	220	—	—
S/2000 S2	15 197	0,3651	687,03	19	—	—
S/2000 S8	15 676	0,2702	730,84	6,4	—	—
S/2000 S11	16 404	0,4779	783,86	26	—	—

Супутник	a, 10^3 км	e	T, діб	D, км	M	ρ, кг/м^3
S/2000 S10	17 452	0,4692	860,03	8,6	—	—
S/2000 S3	17 826	0,2747	868,98	32	—	—
S/2000 S4	18 241	0,5359	925,55	13	—	—
S/2000 S9	18 486	0,2214	939,90	5,6	—	—
S/2000 S12	19 747	0,1199	1038,11	7	—	—
S/2000 S7	20 144	0,4458	1068,06	7	—	—
S/2000 S1	23 117	0,3335	1314,08	17	—	—
			Уран			
Корделія	49,8	0,003	0,335	26	—	—
Офелія	53,8	0,099	0,376	30	—	—
Біанка	59,2	0,009	0,435	42	—	—
Крессида	61,8	0,004	0,464	62	—	—
Дездемона	62,7	0,001	0,474	54	—	—
Джульєтта	64,4	0,007	0,493	84	—	—
Порція	66,1	0,001	0,513	108	—	—
Розалінда	69,9	0,001	0,558	54	—	—
Белінда	75,3	0,001	0,624	66	—	—
S/1986 U10	76,4	0	—	40	—	—
Пак	86,0	0,001	0,762	170	—	—
Міранда	129,9	0,0018	1,413	486	$8,4 \cdot 10^{-7}$	1260
Аріель	190,9	0,0012	2,520	1158	$1,6 \cdot 10^{-5}$	1650
Умбріель	266,0	0,0040	4,144	1169	$1,5 \cdot 10^{-5}$	1440
Титанія	436,3	0,0012	8,706	1580	$3,8 \cdot 10^{-5}$	1590
Оберон	583,5	0,0013	13,46	1522	$3,3 \cdot 10^{-5}$	1500
Калібан	7168,88	0,08235	579,45	80	—	—
Стефано	7942,45	0,14586	646,51	20	—	—
Сікоракса	12 213,62	0,50989	1283,39	160	—	—
Просперо	16 113,49	0,32745	1992,81	30	—	—
Сетебос	18 205,16	0,49433	2202,26	30	—	—
			Нептун			
Наяда	48,2	0,0003	0,294	54	—	—
Таласса	50,1	0,0002	0,311	80	—	—
Деспіна	52,5	0,0001	0,335	150	—	—
Галатея	62,0	0,0001	0,429	180	—	—
Ларісса	73,5	0,0014	0,555	190	—	—
Протеус	117,6	0,0004	1,122	400	—	—
Тритон	354,8	0,0000	5,877	2705	$2,1 \cdot 10^{-4}$	2070
Нереїда	5513,4	0,7512	360,14	340	$5,0 \cdot 10^{-8}$	
			Плутон			
Харон	19,13	0,0002	6,387	1192	$7,5 \cdot 10^{-2}$	1250

Примітка: a — велика піввісь орбіти; e — ексцентриситет орбіти; T — сидеричний період обертання; D — діаметр супутника; M — маса відносно мас планети; ρ — середня щільність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Александров Ю. В.* Введение в физику планет. — К.: Вища шк., 1982. — 304 с.
2. *Александров Ю. В.* Фізика планет. Ч. І. Фізика планетних тіл: Навч. посіб. — К.: ІЗМН, 1996. — 424 с.
3. *Бронштэн В. А.* Метеоры, метеориты, метеороиды. — М.: Наука, 1987. — 176 с.
4. *Бялко А. В.* Наша планета — Земля. — М.: Наука, 1989. — 240 с. — (Б-чка «Квант»; Вып. 29).
5. *Воронцов-Вельяминов Б. А.* Сборник задач и практических упражнений по астрономии. — М.: Наука, 1974. — 272 с.
6. *Гаврилов М. Г.* Звездный мир: Сборник задач по астрономии и космической физике. Ч. IV. Олимпиады ННЦ. — Черноголовка, 1998. — 100 с.
7. *Голдсмит Д., Оуэн Т.* Поиски жизни во Вселенной. — М.: Мир, 1983. — 488 с.
8. *Дибай Э. А., Каплан С. А.* Размерности и подобие астрофизических величин. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
9. *Доул С.* Планеты для людей. — М.: Наука, 1974. — 200 с.
10. *Дущенко В. П., Кучерук І. М.* Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. — К.: Вища шк., 1987. — 431 с.
11. *Жарков В. Н.* Внутреннее строение Земли и планет. — М.: Наука, 1978. — 191 с.
12. *Иванов В. В., Кривов А. В., Денисенков П. А.* Парадоксальная Вселенная. — СПб.: Изд-во Петербург. ун-та, 1997. — 144 с.
13. *Каула У.* Введение в физику планет земной группы. — М.: Мир, 1971. — 536 с.
14. *Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.* Берклеевский курс физики: В 6 т. Т. 1. Механика. — М.: Наука, 1983. — 448 с.
15. *Козел С. М., Рашба Э. И., Славатинский С. А.* Сборник задач по физике: Задачи МФТИ. — М.: Наука, 1978. — 192 с.
16. *Ксанфомалити Л. В.* Парад планет. — М.: Наука, 1997. — 256 с.
17. *Любимова Е. А.* Термика Земли и Луны. — М.: Наука, 1968. — 279 с.
18. *Марленский А. Д.* Основы космонавтики. — М.: Просвещение, 1975. — 144 с.
19. *Маров М. Я.* Планеты Солнечной системы. — М.: Наука, 1986. — 320 с.
20. *Мартынов Д. Я., Липунов В. М.* Сборник задач по астрофизике. — М.: Наука, 1986. — 128 с.
21. *Мартынов Д. Я.* Курс общей астрофизики: Учеб. для вузов. — М.: Наука, 1988. — 640 с.
22. *Происхождение* Солнечной системы / Под ред. Г. Ривса. — М.: Мир, 1976. — 571 с.
23. *Сборник* задач по общему курсу физики: В 3 ч. Ч. 1: Механика. Термодинамика и молекулярная физика: Учеб. пособие / Под ред. В. А. Овчинкина. — М.: Изд-во МФТИ, 1998. — 416 с.
24. *Сурдин В. Г.* Астрономические олимпиады: Задачи с решениями. — М., 1995. — 320 с.
25. *Сурдин В. Г.* Астрономические задачи с решениями. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 240 с.
26. *Уипл Ф. Л.* Семья Солнца. — М.: Мир, 1984. — 317 с.
27. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике: Задачи и упражнения с ответами и решениями. — М.: Мир, 1969. — 624 с.
28. *Фесенко Б. И.* Астрономический калейдоскоп: вопросы и ответы. — М.: Просвещение, 1992. — 96 с.

Навчальне видання

Кузьменков Сергій Георгійович
Сокол Ігор Васильович

СОНЯЧНА СИСТЕМА

Збірник задач

Оправа і титул художника *І. Г. Хорошого*
Художній редактор *Г. С. Муратова*
Технічний редактор *А. І. Омоховська*
Коректори: *Л. М. Байбородіна, Н. Г. Потаніна*
Комп'ютерна верстка *А. А. Коркішко*

Підп. до друку 14.09.2007. Формат 84 × 108 $^{1}/_{32}$.
Папір офс. № 1. Офс. друк. Гарнітура Newton.
Ум. друк. арк. 8,82. Обл.-вид. арк. 9,75.
Тираж 500 пр. Вид. № 10704. Зам. № 7–1370

Видавництво «Вища школа», вул. Гоголівська, 7г, м. Київ, 01054
Від. збуту: тел.: (044) 486-37-42; тел./факс: (044) 486-32-44
e-mail: v_skola@i.com.ua
http://www.vyshcha-shkola.com.ua

Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру
від 04.12.2000 серія ДК № 268

Надруковано з плівок, виготовлених у видавництві «Вища школа»,
у ЗАТ «ВІПОЛ», вул. Волинська, 60, м. Київ, 03151

Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру
від 27.12.2001 серія ДК № 752