

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

О. Ю. Баннікова, В. М. Конторович

**Теоретична астрофізика**

(додаткові глави для студентів  
спеціальності «астрономія» і спеціалізації «радіоастрономія»)

Харків

2010

УДК 52  
ББК 22.6

*Рекомендоване до друку вченою радою фізичного факультету (протокол № \* від \*.\*.09) і вченою радою радіофізичного факультету (протокол № 11 від 15.12.09) Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна*

**Рецензенти:** професор, доктор фізико-математичних наук, завідувач відділу  
ННЦ ХФТІ НАН України Інституту теоретичної фізики ім. А. І. Ахієзера

**Болотін Ю. Л.;**

професор, доктор фізико-математичних наук, директор НДІ  
астрономії Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна

**Шкуратов Ю. Г.**

**Теоретична астрофізика:** навчальний методичний посібник для студентів спеціальності “Астрономія” (фізичний факультет) і спеціалізації “Радіоастрономія” (радіофізичний факультет) / Укладачі кандидат фізико-математичних наук Баннікова О. Ю., доктор фізико-математичних наук, професор Конторович В. М. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2010. – с.

У даному методичному посібнику конспективно викладені сучасні теоретичні методи дослідження астрофізичних об'єктів. Окремо розглянуті розділи теоретичної фізики, які безпосередньо пов'язані з дослідженням космічних об'єктів, а також приділена увага сучасним спостережним даним астрофізики та космології.

УДК 52  
ББК 22.6

© Харківський національний університет  
імені В.Н. Каразіна  
© Баннікова О.Ю., Конторович В.М., 2010  
© Дончик І.М., макет обкладинки

## ВСТУП

Метою цього методичного посібника є ознайомлення студентів з сучасними уявленнями про фізичну природу космічних об'єктів та засоби їх теоретичного дослідження, стосовно до тих явищ, що являють собою інтерес для астрофізиків та радіоастрономів.

Даний посібник організований у вигляді конспекту лекцій, кожна з яких займає розворот на двох сторінках. До лекцій додані питання, які можна використовувати як теми для рефератів та задачі, багато з яких можна розглядати як додатковий матеріал до лекцій або використовувати для самостійної роботи студентів. Наприкінці кожної лекції приведена література, що безпосередньо відноситься до матеріалу даної лекції.

Для студентів спеціальності “Астрономія” (фізичний факультет) цей матеріал є додатковим до курсів “Теоретична астрофізика” (4-й курс) і “Космологія” (5-й курс). Для студентів спеціалізації “Радіоастрономія” (радіофізичний факультет, спеціальність “Радіофізика”) цей конспект відповідає курсу “Теоретична астрофізика” (4-й курс).

Посилання на лекцію даються у вигляді: (л1) – лекція 1. Посилання на номери формул даються в дужках, а посилання на номери завдань без дужок (наприклад, у тексті (1.1) - формула, 1.1 – перше завдання першого розділу). Література розподілена на обов'язкову (у списку літератури перед номером стоїть знак “\*”) та рекомендовану. Додаткова література – це головним чином публікації, результати та рисунки з яких використовуються в лекціях.

## Лекція 1. Гідродинаміка. Звукові хвилі.

У багатьох астрономічних об'єктах основні фізичні процеси пов'язані з течіями газу, плазми (напр., джети, аккреційні диски, викиди сонячної плазми). Тут необхідно використовувати гідродинамічний підхід.

### Основні рівняння гідродинаміки ідеальної рідини

Рівняння Ейлера руху рідини в полі зовнішніх сил:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{F}, \quad (1.1)$$

де  $\mathbf{v}$  – швидкість рідини,  $P$  – тиск,  $\rho$  – густина маси,  $\mathbf{F}$  – об'ємна густина зовнішніх сил. Усі ці величини є функціями координат точки  $\mathbf{r}$  та часу  $t$ , тобто описують фізичні поля. Ліва частина (1.1) являє собою субстанціональну ньютоніву похідну, яка записана для поля швидкостей.

Рівняння безперервності має вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.2)$$

Система 4-х рівнянь (1.1) та (1.2) для п'ятьох величин  $\mathbf{v}$ ,  $P$  і  $\rho$  повинна бути доповнена ще одним рівнянням. В цій лекції ми обмежимося ізентропічними рухами  $s = \text{const}$  і в якості останнього рівняння оберемо *рівняння стану*:

$$P = P(\rho). \quad (1.3)$$

*Лінеаризація рівнянь. Звукові хвилі.* Стан спокою  $\mathbf{v}=0$ ,  $P=P_0$  і  $\rho=\rho_0$  є одним з розв'язків рівнянь гідродинаміки. Лінеаризовані рівняння за малими відхиленнями від стану спокою при  $\mathbf{F}=0$ :  $\mathbf{v} \neq 0$ ,  $P = P_0 + \delta P$ ,  $\rho = \rho_0 + \delta \rho$ , де  $\delta P \ll P_0$ ,  $\delta \rho \ll \rho_0$  з

урахуванням  $\delta P = c_s^2 \delta \rho$ , де  $c_s^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s$ , мають вигляд:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \delta \rho, \quad \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\rho_0 \text{div} \mathbf{v}. \quad (1.4)$$

Звідси випливає хвильове рівняння для збурення густини:

$$\left( \Delta - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \delta \rho = 0, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.5)$$

Видно, що  $c_s$  – швидкість поширення хвиль густини – *швидкість звуку*.

Питання та завдання

1.1. Ввести потенціал швидкості  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  та показати, що  $\left( \Delta - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0$ .

1.2. Перейти до плоских монохроматичних хвиль  $\varphi \propto e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  і знайти закон дисперсії – зв'язок частоти  $\omega$  та хвильового вектора  $\mathbf{k}$  хвилі:  $\omega^2 = c_s^2 k^2$ .

1.3. Переконайтеся, що звук – поздовжня хвиля, у якій  $v \ll c_s$ .

1.4. Переконайтеся, що в середовищі, що рухається зі швидкістю  $\mathbf{U}$ , частота хвилі змінюється згідно з законом  $\omega \rightarrow \omega - \mathbf{k}\mathbf{U}$  (ефект Допплера).

1.5. Показати, що при збереженні ентропії  $\frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla w$ , де теплова функція

$w = \varepsilon + P/\rho$ ,  $\varepsilon$  – внутрішня енергія.

1.6. Показати, що в останньому випадку  $\frac{d}{dt} \oint \mathbf{v} d\mathbf{r} = 0$  (збереження циркуляції швидкості – *теорема Томсона*). У двовимірному випадку з неї випливає рівняння збереження завихреності  $\frac{d}{dt} \text{rot } \mathbf{v} = 0$ .

1.7. Показати, що у нестисливій рідині (1.2) переходить у  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  і  $\Delta \varphi = 0$ .

1.8. Показати, що у двовимірному випадку 1.7 тотожно для функції току

$$v_x = -\frac{\partial \phi}{\partial y}; v_y = \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

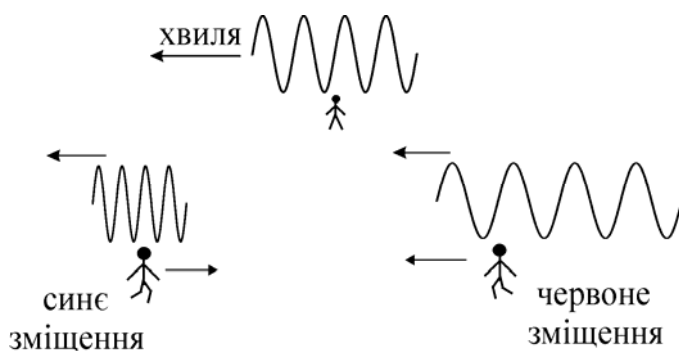


Рис. 1. Ефект Допплера: для  $U \ll c$  довжина хвилі в системі координат спостерігача, що рухається,

$$\lambda_{obs} = \lambda_{em} (1 - U \cos \theta / c),$$

де  $\theta$  – кут між вектором швидкості  $\mathbf{U}$  та хвильовим вектором  $\mathbf{k}$ ,  $\lambda_{em}$  – довжина хвилі в лабораторній системі.

При  $\theta > \pi/2$  (рух від спостерігача)

$\lambda_{obs} > \lambda_{em}$  – червоне зміщення,

$\theta < \pi/2$  (рух на спостерігача)

$\lambda_{obs} < \lambda_{em}$  – синє зміщення

Література: [1] т.6.

## Лекція 2. Гравітаційна нестійкість

Гравітаційна нестійкість (Джинса) є джерелом формування структур у Всесвіті. Вона виникає в збуреному самогравітуючому середовищі. У рівнянні Ейлера (1.1) зовнішньою силою є  $\mathbf{F}_G = -\nabla\Phi$ , де гравітаційний потенціал  $\Phi$  задовольняє рівнянню Пуассона

$$\Delta\Phi = 4\pi G\delta\rho. \quad (2.1)$$

Підставляючи розв'язок рівняння (2.1) для плоских хвиль  $\Phi = -4\pi G\delta\rho/k^2$  у лінеаризоване рівняння Ейлера (1.5) з силою  $\mathbf{F}_G$ , одержимо

$$\omega\rho\mathbf{v} = \mathbf{k}(c_s^2 - 4\pi G\rho/k^2)\delta\rho. \quad (2.2)$$

Врахування самогравітації зводиться до заміни  $c_s^2 \rightarrow c_s^2 - 4\pi G\rho/k^2$ . Дисперсійне рівняння 1.2 для розв'язків типу  $\delta A \propto e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  набуває виду:

$$\omega = \pm\sqrt{k^2 \cdot c_s^2 - \omega_J^2}. \quad (2.3)$$

При  $k < k_J = \omega_J/c_s$ , де частота Джинса  $\omega_J = \sqrt{4\pi G\rho}$ , виникає нестійкість: уявним значенням частоти  $\omega$  в (2.3) відповідає експоненційний ріст густини  $\delta A \propto \exp(\pm \text{Im}\omega \cdot t)$ . Умова  $\omega = 0$  визначає довжину хвилі Джинса  $\lambda_J = 2\pi/k_J = c_s\sqrt{\pi/(G\rho)}$  і масу Джинса  $M_J = 4\pi\rho\lambda_J^3/3$ .

Для ідеального газу з рівнянням стану  $P \propto \rho T$  маємо  $\lambda_J \propto \sqrt{T/\rho}$ , а маса Джинса  $M_J \propto T^{3/2}\rho^{-1/2}$ . При адіабатичному процесі  $P \propto \rho^\gamma$  джинсівська маса  $M_J \propto \rho^{(3\gamma-4)/2}$ . Для фіксованої маси  $M > M_J$  відбувається стиснення внаслідок гравітаційної нестійкості, що супроводжується ростом густини. Якщо  $\gamma < 4/3$ , то  $M_J$  зменшується з ростом густини, умова  $M > M_J$  зберігається і стиснення даної маси  $M$  триває необмежено (колапс). При  $\gamma > 4/3$   $M_J$  росте з ростом густини і стиснення маси зупиняється при досягненні рівності  $M_J(\bar{\rho}) = M$ , де  $\bar{\rho}$  значення густини, що досягається при механічній рівновазі. Слід зазначити, що на цей процес впливають обертання, наявність магнітного поля, початкові неоднорідності маси. Можлива фрагментація середовища на утворення порядку

джинсівської маси та масштабу, суттєво менших вихідного. З подібними процесами зв'язане переважне народження зірок групами і утворення кульових скупчень.

### Питання та завдання

2.1. Показати, використовуючи аналогію між законами Ньютона та Кулона, що рівняння Пуассона (2.1) є аналогом рівняння для електричного потенціалу  $\Delta\Phi_e = -4\pi\rho_e$ , де  $\rho_e$  – густина електричного заряду.

2.2. Показати, що частота Джинса  $\omega_J$  може бути отримана з електронної плазмової частоти  $\omega_p = \sqrt{4\pi Ne^2 / m}$ , де  $N$  – концентрація,  $e$  і  $m$  – заряд і маса електрона.

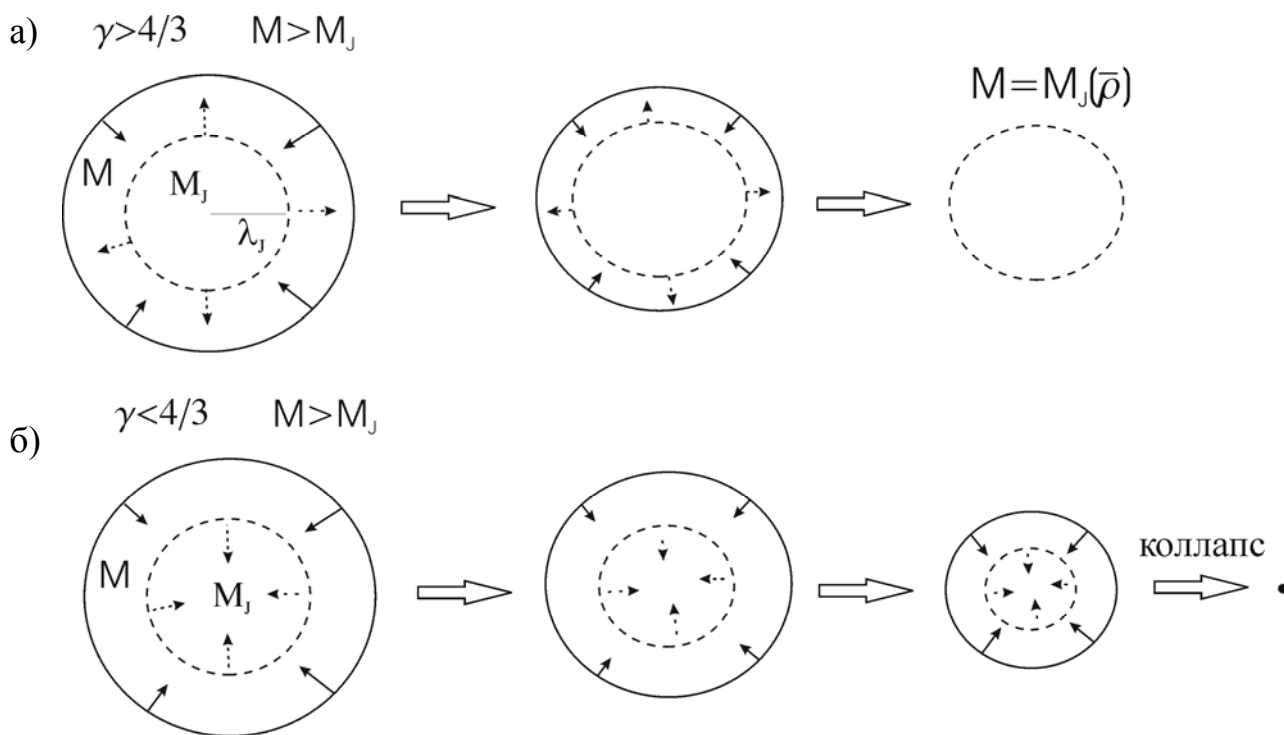


Рис. 2. Гравітаційна нестійкість. За рахунок стиснення густина збільшується: а) при  $\gamma > 4/3$  це призводить до росту джинсової маси  $M_J$ , завдяки чому встановлюється рівновага  $M_J(\bar{\rho}) = M$ , де  $\bar{\rho}$  – густина, що встановилась; б) при  $\gamma < 4/3$  маса Джинса  $M_J$  постійно зменшується з ростом густини, що призводить до колапсу

Література: [2].

### Лекція 3. Закони збереження. Ударні хвилі

Рівнянням гідродинаміки можна надати форму законів збереження. Рівняння безперервності (1.2) описує закон збереження маси. Інтегруючи його за фіксованим об'ємом  $V$  і застосовуючи теорему Остроградського-Гаусса за правилом

лом  $\int_V dV \nabla \dots \rightarrow \oint_{\Sigma} d\mathbf{f} \dots$ , одержуємо закон збереження у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \rho = - \oint_{\Sigma} d\mathbf{f} \rho \mathbf{v}. \text{ Зміна маси, що міститься в об'ємі } V, \text{ визначається потоком маси через поверхню } \Sigma, \text{ що обмежує даний об'єм. Густина потоку маси } \mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \text{ є густиною імпульсу рідини. Закон збереження імпульсу, який випливає з рівняння Ейлера (1.1) і рівняння безперервності (1.2) під час відсутності зовнішніх сил, зручно записати в тензорних позначеннях:}$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad \Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P \delta_{ik}. \quad (3.1)$$

Індекси пробігають значення 1,2,3, відповідно координатам  $x, y, z$ , за повторюваними індексами підсумовування,  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера, рівний 1 при співпадаючих індексах і 0 при незбіжних. Тензор  $\Pi_{ik}$  являє собою *тензор густини потоку імпульсу*. Його фізичний зміст прояснюється після інтегрування (3.1) за об'ємом

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \rho v_i = - \oint_{\Sigma} d\mathbf{f}_k \Pi_{ik}. \text{ Зміна імпульсу в об'ємі визначається його потоком через поверхню, } \Pi_{ik} \text{ описує густину потоку } i\text{-ої компоненти імпульсу крізь площадку, орієнтовану ортогонально } x_k. \text{ Закон збереження енергії також має вигляд, близький до рівняння безперервності:}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{v^2}{2} + \rho \varepsilon \right) + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{q} = \rho \mathbf{v} \left( \frac{v^2}{2} + w \right). \quad (3.2)$$

Поява під знаком дивергенції у густині потоку енергії  $\mathbf{q}$  теплової функції  $w = \varepsilon + P/\rho$  обумовлена роботою сил тиску при зсуві рідини. Відповідна потужність є  $\mathbf{v} \nabla P$ . Вона повинна враховуватися при записі першого закону термо-



динаміки. Суттєво, таким чином, що в законі збереження енергії враховується зроблена робота.

В ідеальній рідині можливі розриви. При перетинанні розривів безперервні потоки величин, що зберігаються ( $n$  – нормаль,  $\tau$  – дотична):

$$[\rho v_n] = 0, [\Pi_{in}] = 0, [q_n] = 0; \quad i = n, \tau,$$

де дужка  $[A] \equiv A_2 - A_1$  означає різницю величин по обидві сторони від розриву, індекс  $n$  означає проекцію на нормаль до розриву,  $\tau$  – на дотичну до нього. Розриви діляться на два класи залежно від того  $j \equiv \rho v_n \neq 0$  або  $j=0$ . Розриви з відмінним від нуля потоком маси  $j \equiv \rho v_n$  через його поверхню є *ударними хвилями*. В області ударних хвиль великі (нескінченні) похідні, тому ентропія не зберігається і її потік потерпає стрибок при перетинанні фронту. Умови  $j=0$  і  $[v_\tau] \neq 0$  відповідають нестійкому *тангенціальному* розриву, а  $j=0$  і  $[v_\tau] = 0$  – *контактному розриву*.

#### *Питання та завдання*

3.1. Показати, що для системи, у якій здійснюються фінітні рухи, виконується *теорема віріала*:  $2\bar{T} = k\bar{U}$ , де  $\bar{T}$  і  $\bar{U}$  – середні значення кінетичної і потенційної енергії,  $k$  – показник однорідності потенційної енергії (при ньютонівській взаємодії  $k = -1$ , що відповідає негативній ефективній теплоємкості  $d\bar{E}/dT < 0$ ).

3.2. Показати, що при  $j \neq 0$  тиск потерпає стрибок  $[P] = -j^2 \cdot [1/\rho]$ .

3.3. Показати, що на ударній хвилі  $[v_\tau] = 0$  і тому можна обрати систему, де  $v_\tau = 0$  – *пряма* ударна хвиля. При  $v_\tau \neq 0$  – *коса* ударна хвиля.

3.4. Перевірити, що ударна хвиля рухається по середовищу 1 з надзвуковою швидкістю, а відносно середовища 2 за її фронтом – із дозвуковою швидкістю.

3.5. Виключити швидкості й одержати співвідношення між термодинамічними величинами з обох сторін фронту ударної хвилі (*адіабата Гюгоніо*).

3.6. Перевірити, що для *сильної ударної хвилі* в ідеальному газі відношення густин прагне до скінченої межі  $\rho_2/\rho_1 \rightarrow (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ , де  $\gamma = c_p/c_v$ .

*Література*: [1] т.6.

#### Лекція 4. Теорія сильного вибуху. Наднові та їх залишки

Теорія була побудована у зв'язку з ядерними вибухами в атмосфері незалежно Л. І. Седовим у СРСР, Дж. Тейлором в Англії, Дж. фон-Нейманом у США. В астрофізиці знайшла численні застосування, насамперед до вибухів наднових (НН) та їх залишків (ЗНН). Енергія  $E_0$ , що миттєво виділяється при точковому вибуху, настільки велика, що густина енергії  $E_0/R^3$  за фронтом виникаючої сферичної ударної хвилі радіуса  $R$  значно перевищує тиск навколишнього середовища  $E_0/R^3 \gg p_1$ . Густина речовини  $\rho_2$  за ударним фронтом (УФ) визначається через густину середовища співвідношенням задачі 3.6. Число параметрів зменшується настільки, що залежність  $R(t)$ , де час  $t$  відлічується від моменту вибуху, може бути побудована тільки з міркувань розмірності. Розмірність маси випадає з відношення  $E_0/\rho_0$ , з якого після множення на  $t^2$  випадає і час ( $\rho_0$  – густина у точці вибуху). Добування кореня 5-го ступеня дає нам необхідну розмірність довжини – *формула Седова-Тейлора*:

$$R(t) \approx \left( \frac{E_0 \cdot t^2}{\rho_0} \right)^{1/5}, \quad (4.1)$$

де опущений безрозмірний коефіцієнт порядку одиниці. Із (4.1), знаходимо швидкість ударного фронту:

$$\frac{dR(t)}{dt} \approx \frac{2}{5} \left( \frac{E_0}{\rho_0} \right)^{1/5} t^{-3/5}. \quad (4.2)$$

Використовуючи (4.1) як нову автомодельну змінну, можна звести систему гідродинамічних рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь, розв'язок яких дає розподіл величин по радіусу за ударним фронтом. Густина зростає до межі сфери, що пов'язано з необхідністю задовольнити співвідношенню задачі 3.6. Тому більшість ЗНН на розглянутій *адіабатичній* стадії розширення є *оболонковими*. ЗНН розширюється з уповільненням, згідно (4.2). У той же час існують ЗНН, у яких діє безперервне джерело енергії – пульсар (л12). Ці ЗНН не мають оболонкового виду. Прикладом може служити Крабовидна туманність. Такі залишки називають *плеріонами*.

*Питання та завдання*

- 4.1. Перелічити типи наднових і причини, що призводять до вибуху зірки.
- 4.2. Наднові типу Ia та їх роль як стандартної свічі при визначенні відстаней.
- 4.3. Історичні наднові та їхні залишки.
- 4.4. Радіовипромінювання ЗНН. Електронний компонент космічних променів.
- 4.5. Взаємодія ЗНН і молекулярних хмар. Мазерні ЗНН.
- 4.6. Гама випромінювання ЗНН. Протонний компонент космічних променів.
- 4.7. Сильний вибух у неоднорідному середовищі. Рівняння Компанейця для УФ

$$\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{\varphi(z)} \left[ \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + 1 \right] = 0, \quad \varphi(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_0},$$

де  $r = r(z, y)$  – описує ударний фронт у циліндричних координатах при

$\rho = \rho(z)$ , нормований час  $y = \int_0^t dt \sqrt{E_0 \lambda (\gamma^2 - 1) / (2 \rho_0 V(t))}$ ,  $V(t)$  – об'єм, обме-

жений ударним фронтом,  $\lambda \approx 3$  – безрозмірний параметр.

- 4.8. Розглянути з допомогою 4.7 для  $\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/z_0)$  прорив УФ у бік середовища з меншою густиною на нескінченність за скінченний час.

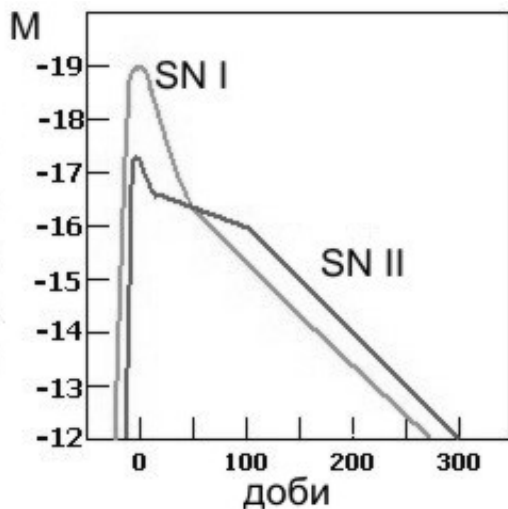


Рис. 4.1 Крива блиску для двох типів наднових ( $M$  – абсолютна зоряна величина)

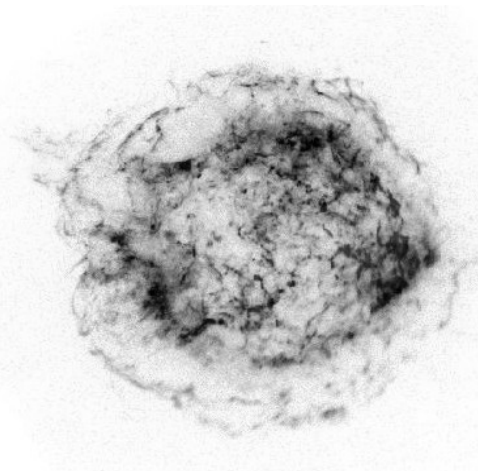


Рис. 4.2. Зображення залишку надної *Cassiopeia A* в рентгенівському діапазоні [i]

*Література:* [1] т.6, стор.558, [3]

## Лекція 5. Магнітна гідродинаміка

Магнітна гідродинаміка (МГД) описує рухи рідини або газу, що проводять струм, в магнітному полі. Вона була розроблена Х. Альфвенем для опису атмосфери Сонця та сонячної корони і набула першорядного значення при дослідженнях фізики плазми. У рівнянні Ейлера враховується сила Лоренца в електрично нейтральному середовищі:  $\mathbf{F} = \frac{1}{\rho \cdot c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]$ , де густина струму  $\mathbf{j}$  згідно з рівняннями

Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$  виражається через магнітне поле

$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\rho} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}]$ . Струм зміщення опущений, оскільки в МГД розглядаються

низькочастотні рухи. У рівнянні для магнітного поля  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \cdot \text{rot } \mathbf{E}$  електричне

поле  $\mathbf{E}$  виключається з використанням закону Ома в середовищі, що рухається,

$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}])$ , що дає після перетворень

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v} + \nu_m \Delta \mathbf{H}. \quad (5.1)$$

Тут  $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$  – магнітна в'язкість, що визначає дисипацію за рахунок провідності середовища  $\sigma$ . При «нескінченній» провідності вона зникає. Для величини

$\frac{\mathbf{H}}{\rho}$  при цьому виникає *рівняння вмороженості*

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{H}}{\rho} = \left( \frac{\mathbf{H}}{\rho} \nabla \right) \mathbf{v}. \quad (5.2)$$

Його фізичний зміст у тому, що величини, які йому задовольняють, переносяться як “вморожені” або “приклеєні” разом із рідиною. Уперше рівняння такого виду були отримані Гельмгольцем для вихорів у рідині.

В 3-мірній МГД існує механізм посилення магнітного поля рухами середовища – МГД динамо, що можна показати, опираючись на умову вмороженості (рис. 5).

## Питання та завдання

5.1. Дисипативний член виду  $\nu \Delta \mathbf{v}$  виникає у звичайній гідродинаміці в правій частині (1.1) – рівняння Нав'є-Стокса. Для стисливої рідини в ньому з'являються два дисипативних доданки. Знайти їх.

5.2. Розглянути хвилі малої амплітуди в МГД. Знайти закони дисперсії і поляризації хвиль. Показати, що є дві гілки звукових хвиль: швидкий і повільний звук,

швидкості яких знаходяться з виразу  $2V_{\pm}^2 = V_a^2 + c_s^2 \pm \sqrt{(V_a^2 + c_s^2)^2 - 4V_a^2 c_s^2 \cos^2 \vartheta}$ ,

де  $V_a = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}$  – альфвенівська швидкість,  $\vartheta$  – кут між хвильовим вектором  $\mathbf{k}$  і

магнітним полем  $\mathbf{H}$ .

5.3. Показати, що є чисто поперечна хвиля (хвиля Альфвена), у якій густина не змінюється, а швидкості частинок і магнітне поле хвилі коливаються вздовж осі, яка ортогональна як до зовнішнього магнітного поля, так і до хвильового вектора.

5.4. Знайти фазову та групову швидкості хвилі Альфвена.

5.5. Розглянути ударні хвилі в МГД. Показати, що існує обертальний розрив, швидкі та повільні ударні хвилі.

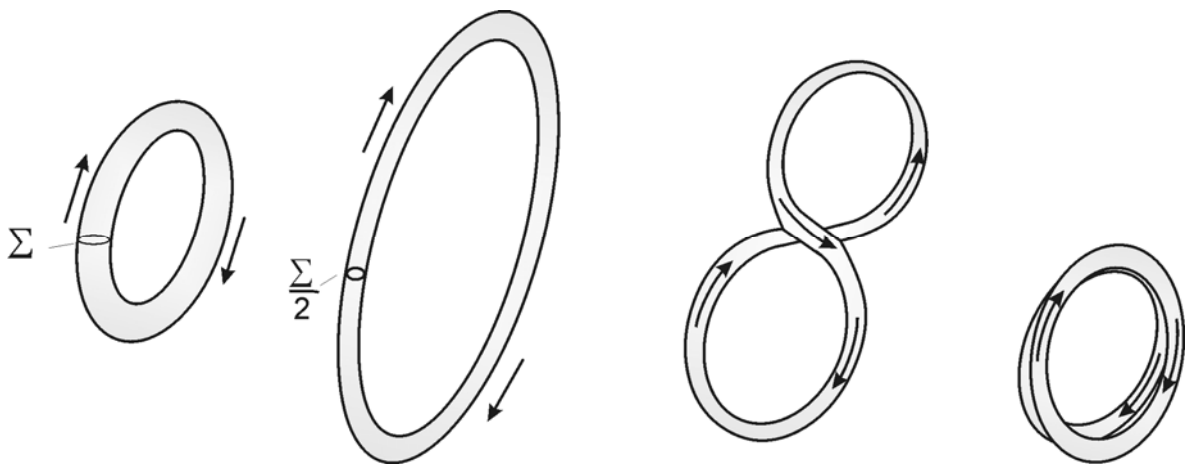


Рис. 5. Схема МГД динамо. Течія розтягує тороїдальний рідкий контур із вмероженим магнітним полем, складає його в "вісімку" та сполучає її петлі, що призводить до подвоєння магнітного потоку та, відповідно, у процесі багатьох повторень, до експоненційного росту поля. Злиття петель відбувається завдяки відхиленню від ідеальної вмероженості

Література: [1] т.8, [4].

## Лекція 6. Синхротронне випромінювання

Один з найголовніших механізмів космічного випромінювання був відкритий як механізм втрат енергії релятивістських електронів на кільцевих прискорювачах (синхротронах), що використовують магнітне поле для повороту частинок. В астрофізику був введений Н. Герлофсоном і К. Кіпенхойєром. Теорія розвивалася В.Л. Гінзбургом і С.І. Сироватським, застосування – І.С. Шкловським та ін. Розглянемо спочатку електрон в однорідному магнітному полі. Рівняння руху

$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c}[\mathbf{V}, \mathbf{H}]$  під час відсутності електричного поля допускає два інтеграли руху:

$\frac{dp_H}{dt} = 0$  та  $\frac{dE}{dt} = 0$ , де  $p_H$  – проекція імпульсу на напрямок магнітного поля, а  $E$  – енергія електрона. Першу умову одержимо множенням рівняння руху скалярно на  $\mathbf{H}$ , а другу – на  $\mathbf{V}$ . При цьому використовуємо  $\mathbf{V} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \frac{dE}{d\mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0$ .

У площині  $(x, y)$ , ортогональній до магнітного поля, зручно ввести комплексні координати  $\xi = x + iy$  та швидкості  $w = \frac{d\xi}{dt} = V_x + iV_y$ . Перейдемо від імпульсу до швидкості за допомогою співвідношення  $\mathbf{p} = E\mathbf{V}/c^2$ . Рівняння руху перепишеться у вигляді  $\frac{dw}{dt} - i\omega_c^{rel} w = 0$ , де  $\omega_c^{rel} = \frac{eHc}{E}$ . При  $V/c \ll 1$  величина  $\omega_c^{rel}$  переходить у циклотронну частоту  $\omega_c = eH/mc$ . Електрон рухається по спіралі, причому його рух у площині  $(x, y)$  відбувається по колу радіуса  $r_H = V_{\perp} / \omega_c^{rel}$  із частотою  $\omega_c^{rel} = \omega_c / \Gamma$ , де  $\Gamma = E/mc^2$  – Лоренц-фактор електрона. Втрати енергії електрона на випромінювання описуються формулою

$$\left( -\frac{dE}{dt} \right) = \frac{4}{3} c \sigma_T W \Gamma^2, \quad (6.1)$$

де  $W = H^2/8\pi$  – густина енергії магнітного поля,  $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2$  – томсонівський перетин. У (6.1) поле вважається хаотизованим і по його напрямкам проведено усереднення. Випромінювана системою електронів потужність дорівнює

$I = \int dE(-dE/dt) \cdot N(E)$ , де  $N(E)$  – функція розподілу електронів за енергією.

В астрофізичних застосуваннях вона часто сильно нерівноважна і носить степеневий характер  $N(E) \propto E^{-\gamma}$ . Електрон із заданою енергією за рахунок синхротронного механізму випромінює практично безперервний спектр частот, кратних  $\omega_c^{rel}$ , з максимумом на частоті (рис. 6):

$$\omega_{max} \simeq 0.27 \cdot \omega_c \cdot \Gamma^2. \quad (6.2)$$

На більших частотах енергія, що випромінюється, падає експоненційно, на менших – як частота в степені 1/3. Тому, якщо спектр електронів  $N(E)$  досить широкий, можна з великою точністю вважати, що кожний електрон випромінює тільки на частоті максимуму та між частотою, що випромінюється, й енергією електрона є однозначний зв'язок  $\omega \propto E^2$ . Це призводить до степеневої залежності енергії, що випромінюється, від частоти  $I(\omega) \propto \omega^{-\alpha}$ ,

$$\alpha = (\gamma - 1)/2. \quad (6.3)$$

Для космічних променів, де  $\gamma_{cr} = 2.6$ , одержуємо з (6.3) спектральний індекс  $\alpha = 0.8$ , типовий для більшості протяжних позагалактичних джерел радіовипромінювання – радіохмар квазарів і радіогалактик. Для індексу  $\gamma = 2$ , що відповідає прискоренню частинок на сильній ударній хвилі, одержуємо з (6.3) спектральний індекс  $\alpha = 0.5$ , типовий для гарячих плям, центральних частин вузлів джетів, які є безпосереднім місцем прискорення електронів.

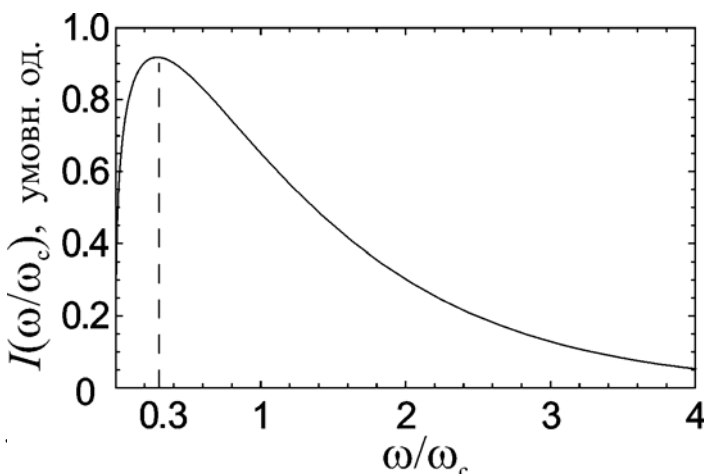


Рис. 6. Частотна залежність синхротронного випромінювання електрона з енергією  $E$

## Лекція 7. Синхротронне випромінювання. Релятивістська аберація

Синхротронне випромінювання настільки важливе, що ми присвяtimo йому ще одну лекцію, у якій одержимо основні співвідношення. Попередньо розглянемо найважливіший ефект *релятивістської аберації*, при якій усе випромінювання релятивістської частинки концентрується у вузькому конусі розчином  $\mathcal{G} \approx \Gamma^{-1}$  у напрямку її руху. Виходимо з потенціалу у власній системі відліку, який носить кулонівський характер  $\varphi = e/R$ . При цьому в силу симетрії вектор-потенціал  $\mathbf{A} = 0$ . Ми повинні врахувати запізнення поля, тому відстань  $R$  від точки знаходження заряду до точки спостереження повинна братися в момент часу  $t' = t - R(t')/c$ . Введемо 4-вектор  $R^i = [c(t - t'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']$  і використаємо вираз для 4-швидкості  $u^i = \Gamma[1, \mathbf{V}/c]$ , після чого 4-потенціал  $A^i = [\frac{e}{c(t - t')}, 0]$  у власній системі відліку можна переписати в релятивістські-інваріантній формі:  $A^i = \frac{eu^i}{R_k u^k}$ .

У лабораторній системі, де заряд рухається з релятивістською швидкістю, це дає потенціали Ліенара-Віхерта:  $\varphi = \frac{e}{R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}/c} \Big|_{t - \frac{R}{c}}$ ;  $\mathbf{A} = \varphi \frac{\mathbf{V}}{c}$ . При  $V \rightarrow c$  й

$\mathcal{G} = 0$ , де  $\mathcal{G}$  – кут між  $\mathbf{R}$  і  $\mathbf{V}$ , знаменник у виразі для потенціалу перетворюється на нуль. Розкладаючи знаменник по  $\mathcal{G}$  й по  $1 - V/c$ , одержуємо  $\varphi = \frac{e}{R} \cdot \frac{2\Gamma^2}{1 + \Gamma^2 \mathcal{G}^2}$ .

Звідси видно, що все випромінювання зібране у вузький конус (рис.7.1.) з кутом розчину  $\mathcal{G} \leq 1/\Gamma$  (*релятивістська аберація*). Релятивістський електрон, що рухається в магнітному полі по колу, випромінює в куті  $\mathcal{G} \leq 1/\Gamma$  в напрямку руху. Тому спостерігач “бачить” імпульси тривалістю  $\Delta t' \approx 1/(\omega_c^{rel} \Gamma) \approx 1/\omega_c$ . За цей час електрон проходить шлях  $V \cdot \Delta t'$ , а світло – шлях  $c \cdot \Delta t'$  у напрямку спостерігача. Тому імпульс додатково стискається по довжині до розміру  $(c - V) \cdot \Delta t'$  й, відповідно, у часі до  $\Delta t = (1 - V/c) \Delta t' \approx 1/(\omega_c \Gamma^2)$ , що, по суті, є проявом ефекту Доплера. Знайдений тривалості імпульсів відповідає максимум у випромінюваному спектрі на частоті  $\omega_{max} \approx \omega_c \Gamma^2 = \omega_c (E/mc^2)^2$ . Враховуючи тільки випромі-



нювання на частотах поблизу максимальної, одержуємо зв'язок частоти випромінювання й енергії частинки  $\omega = \omega_c \left( E / mc^2 \right)^2$ . З урахуванням (6.1) одержуємо інші співвідношення попередньої лекції.

*Питання та завдання.*

7.1. З виразу для інтенсивності дипольного випромінювання частинки у власній системі відліку електрона  $\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} a^2$ , де  $a$  – прискорення частинки, одержати

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} a^2 \gamma^3$$

вираз для втрат енергії (6.1); попередньо довести, що  $a^2 \gamma^3$  є релятивістським інваріантом.

7.2. Показати, що при русі електрона вздовж повільно-неоднорідного магнітного поля з радіусом кривизни  $R$ , максимум енергії випромінювання припадає на частоту  $\omega \approx \frac{V}{R} \Gamma^3$  (випромінювання кривизни). Це випромінювання відіграє най-

важливішу роль при прискоренні частинок у пульсарах.

7.3. Показати, що при синхротронному випромінюванні виникає лінійна поляризація з електричним вектором, спрямованим ортогонально проекції магнітного поля на картинну площину. Ступінь поляризації для ансамблю електронів зі

степеневим спектром дорівнює  $(\gamma + 1) / (\gamma + 7/3)$ . Поляризація синхротронного випромінювання зіграла велику роль в ототожненні механізму космічного ви-

промінювання.

промінювання.

промінювання.

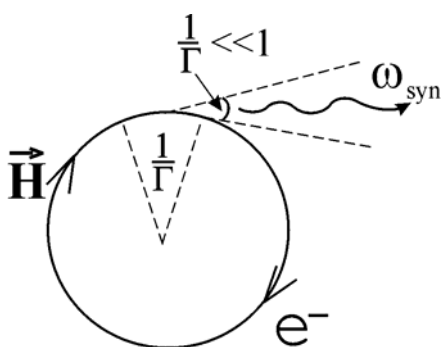


Рис. 7.1. Схема синхротронного випромінювання і ефекту релятивістської аберації

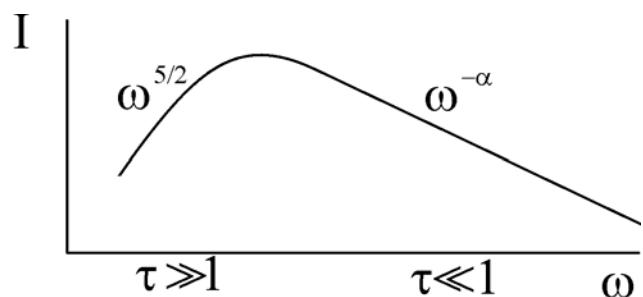


Рис. 7.2. Спектр синхротронного випромінювання однорідного радіоджерела. “Завал” на низьких частотах пов’язаний із самопоглинанням,  $\tau$  – оптична товща.

*Література:* [1] т.2, [7].

## Лекція 8. Зворотний комптон-ефект

Ефект Комптона, як відомо, полягає у передачі від фотона до електрона енергії та імпульсу при розсіянні енергійних фотонів на електронах. У численних астрофізичних застосуваннях надзвичайно важливий процес так званого “зворотного” комптонівського розсіювання, коли джерелом енергії є енергійні релятивістські електрони. Розсіювання відбувається на низькочастотних квантах теплового або синхротронного випромінювання космічних джерел, на квантах реліктового випромінювання й т.ін. Для втрат енергії діє формула (6.1), де тепер  $W$  – густина енергії низькочастотного випромінювання. У компактних джерелах випромінювання цей процес “компонізації” призводить до характерної зміни спектра випромінювання: спектр випромінювання стає жорсткішим, бо воно одержує енергію від електронів. При розсіюванні на релятивістських електронах може виникати рентгенівське або гама- випромінювання на тих самих електронах, які синхротронним механізмом випромінюють у радіо- або оптичному діапазонах. Жорстке комптонівське випромінювання, яке приймається на супутниках рентгенівськими та гама- телескопами, такими як “Чандра”, “Ньютон”, “Фермі-ЛАТ” та інші, дає додатковий важливий канал дослідження космічних джерел випромінювання. Спільні дослідження розподілу інтенсивності випромінювання джетів радіогалактик і квазарів у радіодіапазоні (за рахунок синхротронного механізму) та рентгенівському діапазоні (за рахунок зворотного комптон-ефекту) дозволяють одержати додаткову інформацію про релятивістські електрони та магнітні поля, швидкості руху та структуру областей прискорення.

Комптонівські втрати можуть бути істотні поряд з випромінюванням криvizни у вакуумному зазорі біля поверхні пульсарів і бути відповідальними за виникнення жорсткого гама-випромінювання, що породжує електрон-позитронну плазму магнітосфери пульсара.

Для потужних синхротронних джерел виникає так звана “компонівська межа”, за рахунок швидкого росту комптонівських втрат при рості потужності випромінювання. У середньому ця межа становить за яскравісною температурою  $T_b=10^{12} K$  для таких компактних джерел як, наприклад, квазари. Але точна

оцінка комптонівської межі вимагає урахування детального розподілу інтенсивності випромінювання та концентрації електронів за джерелом, що завдає значних труднощів і не може бути зроблена в досить загальному вигляді.

Рівняння, що описує розсіювання ансамблю фотонів на теплових електронах при малій передачі енергії і імпульсу (*кінетичне рівняння Компанейця*) для потоку фотонів в просторі частот  $q$  має вигляд

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial q}{\partial \nu}, \quad \text{де} \quad q = \frac{h\nu^4}{mc^2} \left( \frac{k_B T}{h} \frac{\partial n}{\partial \nu} + n + n^2 \right), \quad (8.1)$$

$n$  – функція розподілу фотонів,  $\nu$  – частота,  $\tau = \rho \sigma_T \cdot c \cdot t$  – оптична товщина по томсонівському розсіюванню, де  $\rho$  і  $T$  – густина і температура електронів,  $\sigma_T$  – томсонівський переріз,  $t$  – час. Перший член у дужках описує дифузію за частотами (л15), другий і третій – спонтанне й індуковане розсіювання (л10).

### Питання та завдання

8.1. Розглянути зворотний ефект Комптона, використовуючи закони збереження енергії та імпульсу електронів і фотонів (рис. 8).

8.2. Одержати розв'язок кінетичного рівняння Компанейця, що описує розподіл випромінювання за рахунок комптонізації, за наявності постійного потоку фотонів за спектром випромінювання  $q = const$ .

8.3. Записати кінетичне рівняння, що описує комптонівське розсіювання при довільному розподілі електронів за енергією та імпульсом.

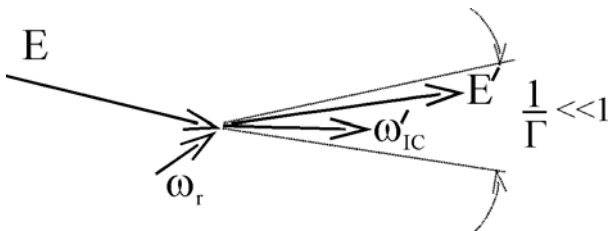


Рис. 8. Схема зворотного Комpton-ефекту.  $E$  – енергія релятивістського електрона,  $\Gamma = E/mc^2$ ,  $\hbar\omega_r$  – енергія низькочастотного фотона,  $\hbar\omega'_{IC}$  – енергія розсіяного кванта

Література: [8].

## Лекція 9. Елементи фізичної кінетики. Рівняння Больцмана

На відміну від класичної астрофізики, де дослідники зустрічалися в основному з рівноважними або слабко нерівноважними процесами, у сучасній астрофізиці і, тим більше, у радіоастрономії, доводиться зустрічатися з сильно нерівноважними процесами, зі степеневими розподілами і т.ін. Тому абсолютно необхідним є знайомство з методами опису таких процесів – методами фізичної кінетики, що походять із досліджень Л. Больцмана. Розглянемо функцію розподілу (ФР) частинок газу, які слабко взаємодіють  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , що описує імовірність знаходження частинки з імпульсом  $\mathbf{p}$  у точці  $\mathbf{r}$  в одиниці об'єму фазового простору  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Цю “густину імовірності” нижче називаємо для стислості просто ймовірністю. Приклади таких функцій для стану рівноваги добре відомі. Це максвеллівська ФР частинок за швидкостями  $f(V) = Ae^{-\frac{mV^2}{2k_B T}}$ , больцманівська ФР частинок у однорідному полі тяжіння  $f(z) = Be^{-\frac{mgz}{k_B T}}$ . Надалі температуру  $T$  будемо вимірювати в енергетичних одиницях, що відповідає постійній Больцмана  $k_B = 1$ . У стані теплової рівноваги ФР не залежить від часу, а залежність від координат і імпульсів входить через енергію частинок  $\varepsilon$  у зовнішньому потенційному полі  $f^0(\varepsilon) = Ae^{-\frac{\varepsilon}{T}}$ . У випадку ФР Максвелла це кінетична енергія, а для ФР Больцмана – потенційна енергія в однорідному гравітаційному полі. У нерівноважному випадку ФР може залежати як від координати й імпульсу частки, так і від часу. Щоб знайти ФР потрібно скласти та розв'язати кінетичне рівняння (КР). Воно являє собою співвідношення балансу частинок у фазовому просторі з урахуванням власного руху (у полі зовнішніх сил) і рідких “зіткнень” частинок одна з одною. Кінетичне рівняння Больцмана має вигляд:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I_{st}, \quad \text{де} \quad I_{st} = \int d\tau_p w \cdot (f' f'_1 - f f_1). \quad (9.1)$$

Ліва частина КР являє собою запис *стоксової* похідної – повної похідної за часом від складної функції часу  $f(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t), t)$ , де  $\mathbf{r}(t)$  і  $\mathbf{p}(t)$  задаються законами руху частки. Права частина КР – т. зв. *інтеграл зіткнень* (ІЗ) – визначається з

імовірнісних міркувань;  $w \equiv w_{pp_1|p'p'_1} = u \cdot \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}' - \mathbf{p}'_1) \cdot \delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon' - \varepsilon'_1)$  – умовна ймовірність частинок з початковими імпульсами  $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1$  та відповідними енергіями перейти у результаті (пружного) зіткнення в стан з кінцевими імпульсами  $\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1$  (і рівна їй, у силу оборотності рівнянь руху в часі, зворотна ймовірність);  $f \cdot f'$  – ймовірність зіткнення частинки  $f \equiv f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  із частинкою  $f' \equiv f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t)$ . За визначенням зіткнення обидві частинки повинні перебувати в одній і тій самій точці в той самий момент часу, тому аргументи  $\mathbf{r}$  і  $t$  у них збігаються. Складний вираз для ІЗ у ряді випадків можна замінити виразом  $I_{st} = -(f - f^0)/\tau$ , який задовольняє умові 9.1, коли ІЗ дорівнює нулю для рівноважної ФР. Час релаксації  $\tau$  описує характерний час повернення системи частинок у стан рівноваги за рахунок зіткнень. Він має також зміст часу вільного пробігу, а зворотна величина  $\nu_{st} = 1/\tau$  – частоти зіткнень.

### Питання та завдання

9.1. Показати, що рівноважна ФР є точним розв'язком КР Больцмана та перетворює на нуль ІЗ:  $I_{st}(f^0(\varepsilon)) = 0$ .

9.2. Показати, що  $I_{st}$  задовільняє точним співвідношенням  $\int I_{st} d\mathbf{p} = 0$ ,  $\int \mathbf{p} I_{st} d\mathbf{p} = 0$ ,  $\int \varepsilon I_{st} d\mathbf{p} = 0$ , що виражають закони збереження повного числа частинок, імпульсу та енергії.



Рис. 9. Прямий і зворотний процеси зіткнень, відповідні «зникненню» або «народженню» частинки з імпульсом  $\mathbf{p}$  завдяки зіткненням з іншими частинками

Література: [1] т.10.

## Лекція 10. Розподіли Фермі-Дірака та Бозе-Ейнштейна

При стиску на пізніх стадіях еволюції зірки густина частинок стає настільки великою, що починають проявлятися квантові ефекти. Для електронів, як частинок із напівцілим спіном, вступає у гру принцип виключення Паулі, що забороняє їм перебувати в тому самому квантовому стані. У КР це означає, що в ІЗ ми повинні враховувати, чи є кінцевий стан вільним або зайнятим. Імовірність стану бути вільним дорівнює  $(1 - f)$ , якщо  $f$  – імовірність стану з імпульсом  $\mathbf{p}$  бути зайнятим (тут ми використовуємо квантове нормування і ФР являє собою ймовірність, а не густину ймовірності). КР набуває виду (рис. 9):

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I_{st}; \quad (10.1)$$

$$I_{st} = \int d\tau_p w \cdot \{f' f'_1 \cdot (1 - f)(1 - f_1) - f f_1 \cdot (1 - f')(1 - f'_1)\}.$$

Інтеграл  $\int d\tau_p$  виникає у результаті переходу від суми за станами за правилом

$\sum \dots \rightarrow \int d\tau_p \dots$ , де у  $d\tau_p$  включена густина станів на інтервал імпульсів

$d\mathbf{p} \equiv d^3 p$ :  $d\tau_p = \left( \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} \right)^3 d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_1$ , де  $L$  – розмір системи. Незавжно перевіри-

ти, що розподіл Фермі-Дірака  $f_{FD}^0 = \left( 1 + e^{\frac{\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu}{T}} \right)^{-1}$  перетворює на нуль ІЗ (10.1) і

є розв'язком КР. При  $T \rightarrow 0$  ця функція розподілу набуває виду *фермієвської сходинок* (рис. 10.а):  $f_{FD}^0 \rightarrow 1$  при  $\varepsilon < \varepsilon_F = \mu(0)$  і  $f_{FD}^0 \rightarrow 0$  при  $\varepsilon > \varepsilon_F$ , де *фермієвська енергія*  $\varepsilon_F$  являє собою значення хімічного потенціалу при температурі,

що дорівнює нулю. Фізичний зміст цього результату очевидний: у силу принципу Паулі електрони послідовно займають усі вільні стани з найнижчою енергією. При кінцевих, але малих температурах, сходинок “розмивається”

(рис. 10.б). Високоенергетичний експоненційний “хвіст”  $f^0 \approx A e^{-\frac{\varepsilon}{T}}$ , де  $A = e^{\frac{\mu}{T}}$ ,

являє собою відомий нам класичний розподіл, в якому принцип Паулі вже не

відіграє ролі через малу кількість частинок. Умова нормування  $\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} f = n$  зв'язує  $\varepsilon_F$  із концентрацією частинок.

Для бозе-частинок із цілим спіном поряд зі “спонтанними” необхідно враховувати “змушені” переходи, ймовірність яких пропорційна числу частинок у кінцевому стані. У силу цього КР набуває виду:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I_{st}; \quad (10.2)$$

$$I_{st} = \int d\tau_p w \{ f' f_1' \cdot (1+f)(1+f_1) - f f_1 \cdot (1+f')(1+f_1') \}.$$

Його рівноважним розв'язком є функція розподілу Бозе-Ейнштейна:  $f_{BE}^0 = \left( e^{\frac{\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu}{T}} - 1 \right)^{-1}$ . Найважливішим для астрофізики окремим випадком ( $\varepsilon = \hbar\omega$ ,  $\mu = 0$ ) є розподіл Планка рівноважного випромінювання:

$$f_{Pl}^0 = \left( e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1 \right)^{-1}. \quad (10.3)$$

При  $\hbar\omega \ll 1$  воно переходить у розподіл Релея-Джинса  $f_{RJ}^0 = \frac{T}{\hbar\omega}$ . Постійна

Планка в дійсності випадає у цьому граничному випадку з усіх співвідношень.

### Питання та завдання

10.1. Знайти тиск вироджених фермі- та бозе-газу.

10.2. Вивести закон Стефана-Больцмана пропорційності інтенсивності теплового випромінювання четвертому степеню температури.

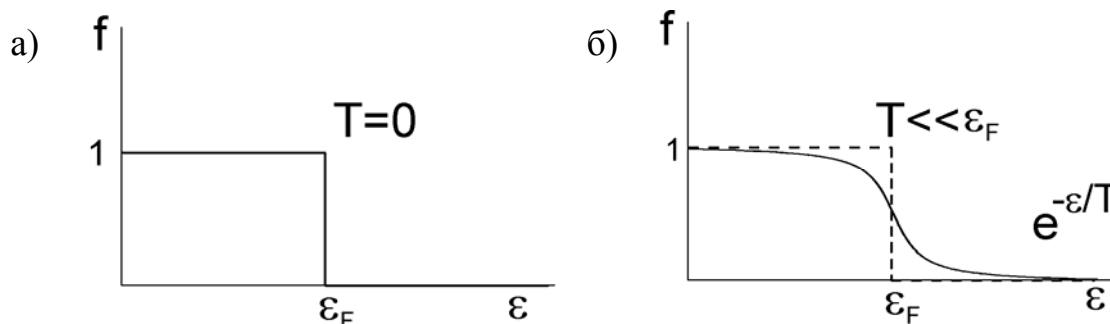


Рис. 10. Функція розподілу виродженого електронного газу: а) фермієвська сходишка при  $T=0$ , б) розмита фермієвська сходишка при  $T \ll \varepsilon_F$

Література: [1] т 5

## Лекція 11. Еволюція зірок. Білі карлики

Умови гідростатичної рівноваги кулі, що самогравітує, приводять до виразу для тиску та температури в центрі зірки. Остання знаходиться з використанням рівняння стану ідеального газу. Необхідна температура підтримується за рахунок термоядерних реакцій, в основі яких лежить реакція  $p + e^- \rightarrow n + \nu$  (протон + електрон перетворюються на нейтрон і нейтрино з виділенням енергії). На основі подібних реакцій утворюються цикли ядерного горіння, в результаті якого водень перетворюється на гелій. Ця найбільш довга стадія горіння втримує зірки на головній послідовності (ГП) діаграми Герцшпрунга-Рессела. Подальші процеси горіння елементів аж до групи заліза уводять зірку з ГП і, коли пальне вичерпане, починається стискання (тут ми не розглядаємо вибухових сценаріїв). У наслідку стискання при досить більших густинах вступають у гру квантові ефекти. Стискання може бути зупинене тиском виродженого електронного газу з утворенням *білих карликів*.

Оцінюючи тиск як наслідок переносу імпульсу  $P \approx p \cdot V \cdot n$ , де  $p$ ,  $V$ ,  $n$  відповідно імпульс, швидкість і концентрація частинок, одержуємо класичне рівняння стану  $P = nT$ , якщо підставити у вираз для тиску теплові імпульси  $p = mV_T$  і швидкості  $V_T \approx \sqrt{T/m}$  частинок. У квантовому випадку характерний (фермієвський) імпульс дорівнює  $p \approx \hbar/a$ , де  $a \approx n^{-1/3}$  – середня відстань між частками. Ця оцінка впливає також із співвідношення невизначеності Гейзенберга. Для тиску звідси одержуємо  $P \approx \hbar n^{1/3} \cdot \frac{\hbar n^{1/3}}{m} \cdot n \propto n^{5/3}$ . У той самий час потенційна енергія, що входить в умову рівноваги, росте при стисканні як  $U \propto n^{4/3}$ . Звідси впливає, що при досягненні густини  $n_{cr}^{1/3} \approx G^3 \hbar^{-6} m_H^5 m_e^3 M^2$  встановиться рівновага за рахунок тиску виродженого електронного газу, що робить у тиск основний внесок. Йому відповідають залежності маса-радіус  $M \cdot R^3 = \hbar^6 (G^3 m_H^5 m_e^3)^{-1} = Const$ , що замінює співвідношення Еддінгтона для зірок на ГП, і оцінка для середньої швидкості частинок  $V \approx \hbar n^{1/3} / m_e \rightarrow G \hbar^{-1} m_H^{4/3} M^{2/3}$ . Помітимо, що у швидкості не входить маса лег-



ких частинок, що створюють тиск. Л. Ландау та Ш. Чандрасекар звернули увагу на те, що оскільки швидкість не може перевищувати швидкість світла, виникає обмеження на масу  $M \leq M_{Ch}$ , вище якої неможлива рівновага. Вираз для критичної маси Ландау-Чандрасекара  $M_{Ch} = m_{Pl}^3 / m_H^2$  випливає з умови  $V \leq c$ . Ми виразили  $M_{Ch}$  через масу Планка  $m_{Pl} = \sqrt{\hbar c / G}$  і масу протона  $m_H$ . Маса Планка будується з міркувань розмірності з констант, пов'язаних із трьома фундаментальними фізичними теоріями: теорією відносності –  $c$ , гравітацією –  $G$  і квантовою механікою –  $\hbar$ . Аналогічно будуються планківська довжина  $l_{Pl} = \sqrt{\hbar G / c^3}$  та планківський час  $t_{Pl} = \sqrt{\hbar G / c^5}$ , що відіграють принципову евристичну роль у квантових теоріях простору-часу та космології. Відзначимо, що планківській масі не відповідають які-небудь маси реальних фізичних тіл.

### Питання та завдання

11.1. Порівняти густину та розміри білих карликів із густиною та розмірами нейтронних зірок, у яких тиск створюється виродженим нейтронним газом (л12).

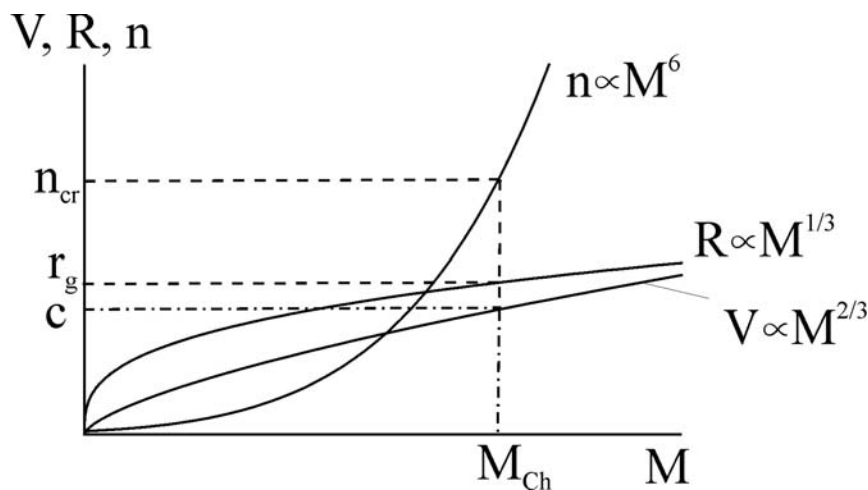


Рис. 11. Залежність радіусу зірки, швидкості та густини частинок від маси для вироджених зірок. Умова  $V = c$  (штрих-пунктир) призводить до граничної маси Ландау-Чандрасекара  $M_{Ch}$ . Граничній масі відповідають граничні значення радіусу  $r_g$  (гравітаційний радіус) та концентрації  $n_{cr}^*$  (пунктирні лінії)

Література: [8], [9].

## Лекція 12. Нейтронні зірки. Пульсари

При вибухах наднових зірка «проскакує» стан рівноваги, відповідно до білих карликів, але стискання може бути зупинене тиском виродженого нейтронного газу. Нейтронні зірки були передбачені Л.Ландау в 1932 р., їхній зв'язок з надновими був виявлений В.Бааде і Ф.Цвіккі в 1934р., а відкриті вони були у вигляді пульсарів Джоселін Белл і Антоні Х'юішем в 1967 р. При стисканні в області досить великих густин за рахунок реакції нейтронізації  $p \rightarrow n + e^+ + \nu$  основна частина речовини зірки перетворюється на нейтрони. Співвідношення попередньої лекції зберігають силу при заміні в них  $m_e$  на  $m_n$ . Якщо характерні розміри білих карликів – це розміри Землі при масі порядку маси Сонця, то розміри нейтронної зірки порядку десятка кілометрів при тих самих масах.

При стисканні прискорюється обертання зірки та збільшується її магнітне поле відповідно до законів збереження моменту і магнітного потоку. Це призводить до обертання пульсарів з періодами порядку 1 секунди для звичайних і порядку десятка мілісекунд для швидкообертючих пульсарів. До останніх відноситься пульсар у Крабовидній туманності. Магнітні поля в пульсарах досягають значень  $H = 10^{12} \text{ Гс}$ . У настільки сильних полях гама-кванти, що породжуються випромінюванням кривизни в дипольному магнітному полі пульсара, породжують електрон-позитронну плазму, що заповнює магнітосферу пульсара. Магнітосферна плазма заряджена з густиною заряду Голдрайха-Джуліана  $\rho_{GJ} = -\Omega H / 2\pi c$ , що породжує поперечне магнітному електричне поле, що дозволяє їй обертатися коротаційно разом із зіркою з кутовою швидкістю  $\Omega$ . Таке обертання можливо, якщо силові лінії не виходять за межі *світлового циліндра*, де лінійні швидкості залишаються меншими швидкості світла. Цій умові не задовольняють силові лінії в околиці магнітного полюса зірки. В області цих «відкритих» силових ліній, що виходять із зірки через *полярну шапку*, відбуваються основні процеси, що призводять до прискорення частинок, генерації плазми та випромінювання. Магнітна вісь у пульсарах не збігається з віссю обертання, що приводить до ефекту маяка. Над поверхнею полярної шапки існує *вакуумний зазор*, де прискорення електронів відбувається в поздовжньому, по відношенню

до магнітного, електричного полі. Як і поле коротації, це поле викликане обертанням зірки за наявності магнітного поля та пов'язане з густиною заряду  $\rho_{GI}$  на межі зазору. Існує популяція пульсарів, які розкручуються потоком речовини від сусідньої зірки в тісних подвійних системах. У цих мілісекундних пульсарах магнітне поле не настільки сильне, як у звичайних (порядку  $10^8 \div 10^{10}$  Гс). Існують *рентгенівські пульсари*, які також входять до складу подвійних систем. У них потік речовини від зірки-компаньйона, що падає на поверхню нейтронної зірки, розігріває місце падіння та перетворює його на *гарячу пляму*, яка є джерелом теплового рентгенівського випромінювання. При обертанні зірки це випромінювання приводить до ефекту пульсара в рентгенівському діапазоні.

### Питання та завдання

- 12.1. Одержати густину заряду Голдрайха-Джуліана, виходячи з умов коротації магнітосферної плазми.
- 12.2. Оцінити магніто-дипольні та струмові втрати при обертанні пульсарів.

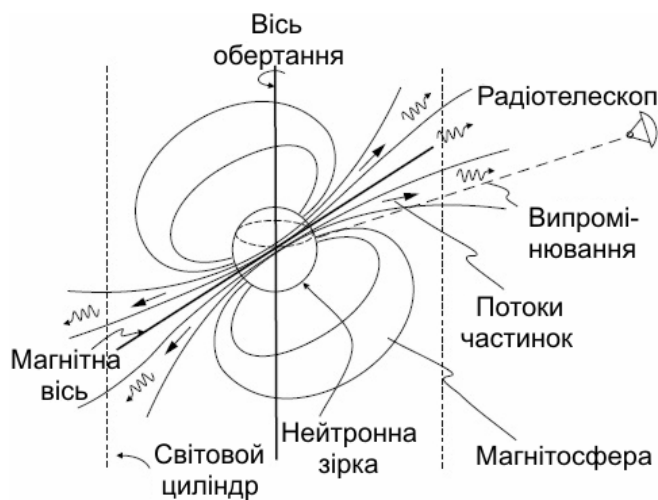


Рис. 12.1 Схеми магнітосфери пульсара та модель «маяка»

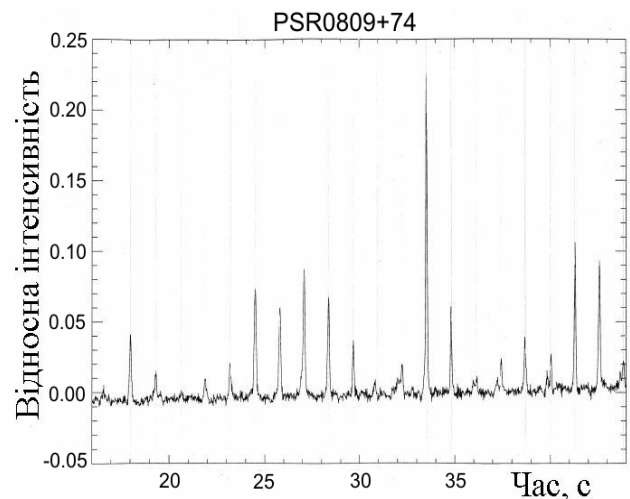


Рис. 12.2. Сигнал пульсара PSR B0809+74 в декаметровому діапазоні (спостереження на радіотелескопі УТР-2). Наведені профілі імпульсів, усереднені в смузі частот ( $20 \div 28$ ) МГц [h]

Література:[10]-[12].

### Лекція 13. Провідність і діелектрична проникність плазми

Розглянемо важливе для радіоастрономії завдання про провідність плазми, яке дозволить визначити коефіцієнт поглинання електромагнітних хвиль. Електронний газ у постійному електричному полі описується КР

$$e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\nu(f - f^0),$$

де  $\nu$  – частота зіткнень (л9). Лінеаризуючи його за малим відхиленням  $f'$  від рівноважної ФР  $f^0$ , запишемо його розв'язок у вигляді  $\frac{e\mathbf{E}\mathbf{V}}{\nu} \left( -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) = f'$ . Обчислюємо

$$\text{густину струму } \mathbf{j} \text{ згідно } \mathbf{j} = e \int d\tau_p \mathbf{V} \cdot f', \text{ введемо провідність згідно}$$

$$j_i = \sigma_{ik} E_k \text{ і знаходимо } \sigma_{ik} = e^2 \int d\tau_p \frac{V_i V_k}{\nu} \left( -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right). \text{ Ми використали залежність } f^0$$

тільки від енергії і рівність нулю струму в рівноважному стані. Для оцінки про-

$$\text{відності приймаємо } -\frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} \approx \frac{f^0}{\varepsilon} \text{ та } \int d\tau_p f^0 = n \text{ і одержуємо формулу Друде-}$$

Лоренца при нульовій частоті:

$$\sigma(0) = \frac{e^2 n}{m \cdot \nu}. \quad (13.1)$$

Розглянемо тепер змінне поле з частотою  $\omega$ . У лінеаризованому КР

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + e\mathbf{E}\mathbf{V} \frac{\partial f^0}{\partial \varepsilon} = -\nu f' \text{ перейдемо до Фур'є-компонентів за часом}$$

$$\mathbf{E} \propto e^{-i\omega t}, f' \propto e^{-i\omega t}. \text{ Тоді у силу } \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \text{ розв'язок КР і вираз для провідності}$$

може бути отриманий з попереднього заміною  $\nu \rightarrow \nu^* = \nu - i\omega$ :

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2 n}{m(\nu - i\omega)}. \quad (13.2)$$

$$\text{В рівняння Максвелла } \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma(\omega) \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) \mathbf{E} \text{ ми можемо ввести ефектив-$$

ну діелектричну проникність  $\varepsilon_{\text{eff}}(\omega)$ , що враховує внесок провідності електрон-

ного газу:  $\varepsilon_{eff}(\omega) = \varepsilon_0(\omega) + i \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}$ . Нехтуючи внеском іонів  $\varepsilon_0(\omega)$ , перепишемо  $\varepsilon_{eff}(\omega)$  у вигляді

$$\varepsilon_{eff}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu)}, \quad (13.3)$$

де  $\omega_p^2 = 4\pi n e^2 / m$  - квадрат плазмової частоти. В актуальній для космічної плазми області частот  $\nu \ll \omega$ ,  $\omega_p \ll \omega$  це дає  $\varepsilon_{eff}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i \frac{\nu \omega_p^2}{\omega^3} \approx 1 + i \frac{\nu \omega_p^2}{\omega^3}$ . Коefіцієнт поглинання хвиль на одиницю довжини шляху  $\alpha = \text{Im} k$ , де  $k$  - число, знайдемо з закону дисперсії електромагнітних хвиль  $\omega = ck / \sqrt{\varepsilon}$  у хвильове середовищі з діелектричною проникністю  $\varepsilon(\omega)$ :

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \text{Im} \sqrt{\varepsilon} \approx \frac{\nu \omega_p^2}{2c\omega^2}. \quad (13.4)$$

Поздовжнє магнітне поле приводить до діелектричної проникності для циркулярно поляризованих хвиль  $\varepsilon_{\pm}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c - i\nu)}$ . При  $\omega_c = \frac{eH}{mc} \ll \omega$  добавка в діелектричну проникність пропорційна магнітному полю  $\delta\varepsilon_{\pm} = \pm \omega_p^2 \omega_c / \omega^3$  призводить до кута повороту поляризації (ефект Фарадея)  $\delta\varphi \propto H / \omega^2$ .

#### Питання та завдання

13.1. Одержати вираз для кута повороту площини поляризації хвилі, що проходить через шар плазми, яка перебуває у поздовжньому магнітному полі.

13.2. Перевірити, що для електромагнітних хвиль виконується співвідношення  $V_{\phi} V_{gp} = c^2$ , де фазова швидкість  $V_{\phi} = c / \sqrt{\varepsilon}$ , групова швидкість  $V_{gp} \equiv \partial\omega / \partial k$ .

13.3. Одержати вираз для групового запізнення  $\delta T(\omega) = \frac{2\pi e^2}{c\omega^2} \int^L n dl$  сигналу на трасі довжиною  $L$  в плазмі, де час поширення імпульсу  $T(\omega) = \frac{1}{c} \int^L dl + \delta T(\omega)$ .

Література: [1] т.10, [6]-[7].

**Лекція 14. Випромінювання рівноважного шару. Спектр і утворення ліній**  
 Розглянемо задачу про випромінювання шару скінченної товщини. КР для фотонів перепишемо у вигляді рівняння переносу (РП) випромінювання для інтенсивності  $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ , для чого множимо КР на густину станів, енергію кванта та швидкість світла:

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = c \cdot \hbar \omega \cdot g(\mathbf{k}) \cdot f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t). \quad (14.1)$$

Випишемо РП у випадку стаціонарного ізотропного розподілу  $I(\mathbf{r}, \omega) = c \cdot \hbar \omega \cdot g(\omega) \cdot f(\mathbf{r}, \omega)$ , що найбільш часто використовується, де  $g(\omega)$  – густина станів на інтервал частот. Вона визначається в такий спосіб. Помістимо нашу систему в скриню розміром  $L$  для того, щоб спектр припустимих значень хвильових чисел був дискретний. Наприклад, уздовж осі  $x$  ці значення визначаються умовою  $kL = 2\pi \cdot m$ , де  $m$  - ціле число. При цьому хвиля задовільняє періодичним граничним умовам  $e^{ik(x+L)} = e^{ikx}$ : на довжині скрині, у якій розміщена система, укладається ціле число хвиль. Хвильові числа набувають значення  $k_m = 2\pi m / L$ . При великих  $L$  вони розташовані практично безупинно і при сумуванні по ним можна перейти до інтегрування. При цьому, інтервалу значень  $\Delta k$  відповідає  $\Delta m = L / 2\pi$  однакових доданків. Тому переходу від суми по  $\mathbf{k}$  до інтеграла відповідає правило  $\sum_{\mathbf{k}} \dots \rightarrow \int d\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \dots$ , де густина станів  $g(\mathbf{k}) = (L / 2\pi)^3$ .

При підрахунку числа станів, що припадають на інтервал частот  $\Delta \omega$ , у випадку ізотропних розподілів, які залежать тільки від модуля хвильового числа, ми повинні перейти до сферичних координат у  $\mathbf{k}$ -просторі, проінтегрувати по кутам і змінити масштаб, що дасть нам

$$\sum_{\mathbf{k}} F(\omega_{\mathbf{k}}) \rightarrow \int d\omega g(\omega) F(\omega), \quad g(\omega) = \frac{8\pi L^3 \omega^2}{(2\pi c)^3}. \quad (14.2)$$

Сюди включений також множник 2 від суми за поляризаціями хвиль. Стаціонарне рівняння переносу записується у вигляді

$$\frac{\partial I}{\partial s} + \alpha I = \alpha I^0, \quad (14.3)$$

де диференціювання ведеться вздовж променя:  $\frac{\partial I}{\partial s} \equiv \frac{\mathbf{k}}{k} \nabla I$ ,  $I^0$  – інтенсивність, що відповідає чорнотільному випромінюванню  $I^0 \equiv c \cdot \hbar \omega \cdot g(\omega) \cdot f_{Pl}^0$  (л9). Для ІЗ у цьому випадку обраний запис вихідного члену в ІЗ через коефіцієнт поглинання хвиль:  $-\alpha I$ , а прихідний член ІЗ, який описує випромінювальну здатність середовища  $j$ , записаний із використанням теореми Кірхгофа як  $-\alpha I^0$ . Це означає перетворення до нуля ІЗ рівноважним розподілом  $I^0$ :  $I_{st} \equiv j - \alpha I = \alpha(I^0 - I)$ . Для плоского однорідного шару рівноважної плазми товщиною  $l$  розв'язок РП має вигляд ( $s > l$ ):  $I(s) = I^0(1 - e^{-\tau})$ , де  $\tau = \alpha \cdot l$  – оптична товщина шару. Використовуючи частотну залежність коефіцієнта поглинання (18.5), одержуємо характерний спектр випромінювання шару (рис. 14). На низьких частотах, де  $\tau \gg 1$ , маємо квадратичний ріст відповідно до закону Релея-Джинса  $I^0 = I_{RJ}^0 \propto T\omega^2$ , який при  $\tau \ll 1$  в області прозорості на високих частотах, де  $I \approx \tau \cdot I^0$ , переходить у константу відповідно до  $\tau \propto \omega^{-2}$ .

#### Питання та завдання

14.1. Показати, що поблизу від частот резонансів (квантових переходів), на яких коефіцієнт поглинання суттєво зростає, збільшується випромінювання, формуючи *лінії випромінювання* (рис. 14).

14.2. Розглянути *проходження* випромінювання через шар і обговорити появу *ліній поглинання* на частотах, близьких до резонансів і частот переходів.

14.3. Записати розв'язок РП для неоднорідного плоского шару. Оптична товщина при цьому дорівнює  $\tau = \int ds \alpha(s)$  у необхідних межах.

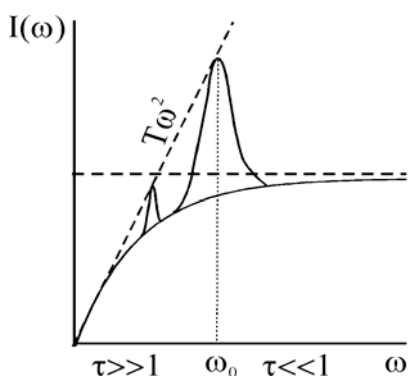


Рис. 14. Схема формування ліній випромінювання. Показані лінії, коли поблизу від резонансу оптична товщина досить велика. Контраст ліній на фоні безперервного спектра збільшується зі зменшенням оптичної товщини останнього

Литература:[13].

## Лекція 15. Дифузія

У випадку повільних процесів, коли істотні зміни параметрів відбуваються в результаті багатьох послідовних взаємодій (зіткнень), від інтегрального КР можна перейти до диференційного. У просторовому випадку це відповідає дифузійному рівнянню, отриманому Ейнштейном. Ми зупинимося на прикладі повільних рухів у просторі енергій (рівняння Фоккера-Планка). Запишемо ІЗ у вигляді:

$$I_{st} = \int f(\varepsilon - \delta\varepsilon) w(\varepsilon - \delta\varepsilon, \delta\varepsilon) d\delta\varepsilon - \int f(\varepsilon) w(\varepsilon, \delta\varepsilon) d\delta\varepsilon, \quad (15.1)$$

де  $w(\varepsilon, \delta\varepsilon)$  – умовна імовірність переходу зі стану з енергією  $\varepsilon$  у стан з енергією  $\varepsilon + \delta\varepsilon$ . Повільному процесу відповідає різке зменшення цієї імовірності з ростом передачі енергії  $\delta\varepsilon$  і повільна залежність від самої енергії. Розкладемо величину  $F \equiv f(\varepsilon - \delta\varepsilon) \cdot w(\varepsilon - \delta\varepsilon, \delta\varepsilon)$  за малою передачею енергії в аргументі, що відповідає цій повільній залежності  $F(\varepsilon - \delta\varepsilon, \delta\varepsilon) \approx F(\varepsilon, \delta\varepsilon) - \delta\varepsilon \cdot \partial F(\varepsilon, \delta\varepsilon) / \partial \varepsilon + 1/2 \cdot (\delta\varepsilon)^2 \cdot \partial^2 F(\varepsilon, \delta\varepsilon) / \partial \varepsilon^2$ . Одержуємо:

$$I_{st} \approx -\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}, \quad q = B \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} - Af; \quad A = \tilde{A} - \frac{\partial B}{\partial \varepsilon}, \quad (15.2)$$

$$\tilde{A} = \int d\delta\varepsilon \cdot \delta\varepsilon \cdot w(\varepsilon, \delta\varepsilon), \quad B = \frac{1}{2} \int d\delta\varepsilon \cdot (\delta\varepsilon)^2 w(\varepsilon, \delta\varepsilon).$$

Імовірність  $w(\varepsilon, \delta\varepsilon)$  повинна досить швидко зменшуватися з ростом передачі енергії  $\delta\varepsilon$ , щоб інтеграли сходилися, тобто перший  $\tilde{A}$  і другий  $B$  моменти були кінцеві. Доданок із другою похідною відповідає дифузії у просторі енергій. Доданок з першою похідною описує ефективну силу, яка залежно від знака може відповідати як втраті, так і набуванню енергії (прискоренню) частинок. КР набуває виду:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( B(\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} - A(\varepsilon) f \right). \quad (15.3)$$

Коефіцієнт  $B(\varepsilon)$  відіграє роль, аналогічну коефіцієнту дифузії, але в енергетичному просторі.

У просторовому випадку дифузійне рівняння, яке записується звичайно для концентрації частинок, має вигляд:



$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{div}(D\nabla n - b\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \rightarrow D\Delta n \quad \text{при} \quad D = \text{const}, \mathbf{F}=0, \quad (15.4)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\mathbf{F}$  – зовнішнє поле. Зв'язок між коефіцієнтом дифузії  $D$  і рухливістю  $b$ , аналогічно 15.3, зветься *співвідношенням Ейнштейна*.

### Питання та завдання

15.1. Показати, що рівняння теплопровідності (у найпростішому випадку

$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T$ ) збігається з рівнянням дифузії у разі відсутності зовнішнього поля.

15.2. Показати, що КР, що описує поширення космічних променів з урахуванням синхро-комптонівських втрат, зводиться до дифузійного рівняння з коефіцієнтом дифузії  $D = D(\varepsilon, \mathbf{r})$  при використанні лінійного перетворення часу й енергії до нових змінних.

15.3. Показати, що перетворення на нуль ІЗ рівняння Фоккера-Планка рівноважним розподілом  $f^0 \sim e^{-\varepsilon/T}$  призводить до співвідношення Ейнштейна  $B = -A \cdot T$ .

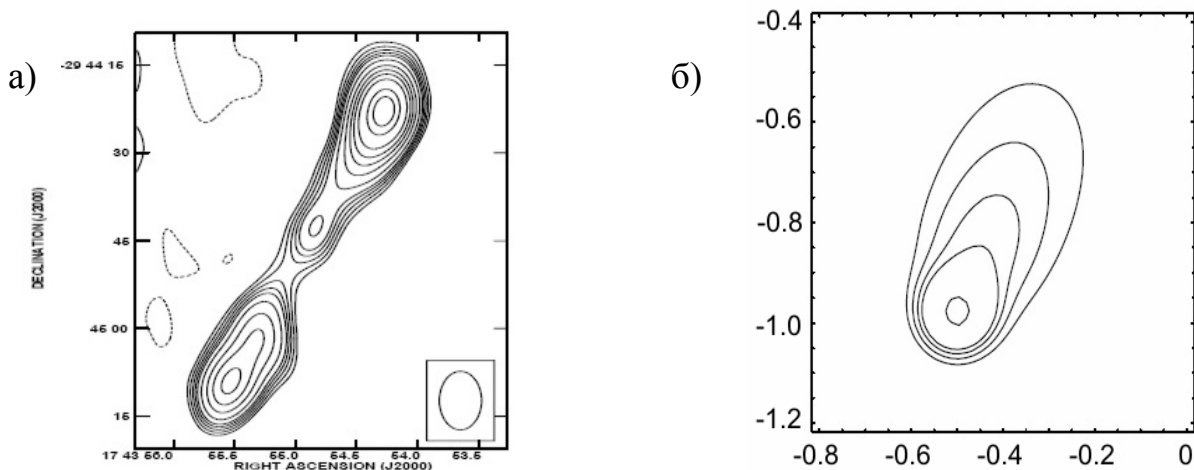


Рис. 15. а) Спостережуваний розподіл радіовипромінювання мікроквазара 1E1740-2942 [а]; б) розподіл інтенсивності синхротронного випромінювання, отриманого в рамках дифузійної моделі для північно-західного компонента джета 1E1740-2942 (масштаб за осями у парсеках). У цій моделі, прискорені на УХ електрони втрачають енергію за рахунок синхро-комптонівських втрат та дифундують у навколишнє середовище [b]

Література:[1] т.6.

## Лекція 16. Прискорення частинок на ударних хвилях. Прискорення Фермі

Походження степеневих спектрів космічних променів, зокрема, релятивістських електронів, відповідальних за синхротронне випромінювання космічних джерел, пов'язане з процесами прискорення. Одним з найважливіших є механізм *прискорення Фермі*. Для релятивістських частинок з енергією  $\varepsilon = \sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2} \approx cp$  його зручно пояснити на прикладі фотонів – електромагнітних хвиль, для яких закон дисперсії  $\varepsilon = cp$ , де  $\varepsilon = \hbar\omega$ ,  $p = \hbar k$ . При відбитті хвилі від дзеркала, що рухається назустріч, хвиля здобуває енергію – збільшує частоту відповідно до ефекту Доплера. Зміна частоти  $\Delta\omega$  при нерелятивістському русі дзеркала пропорційна самій частоті  $\Delta\omega = 2k \cdot u$  (обмежуємося випадком нормального падіння хвилі). Відповідно,  $\Delta\varepsilon = 2(u/c) \cdot \varepsilon$ . Малим параметром є відношення швидкості дзеркала до швидкості світла  $u/c \ll 1$ . Цей ефект *першого порядку* малості зникає при хаотичному русі дзеркал, роль яких відіграють замагнічені хмари або хвилі. Енергія при цьому не тільки здобувається, але і втрачається частинкою (при відбитті від хмари, що рухається в той самий бік, що і частинка). За рахунок малої переваги числа зустрічних зіткнень залишається ефект другого порядку, коли набір енергії пропорційний  $(u/c)^2$ . Цей ефект, однак, дуже малий і не може пояснити походження космічних променів. Крім того, енергетичні спектри прискорених частинок, що виникають при прискоренні Фермі, не мають необхідну для космічних променів універсальність, тому що залежать від параметрів системи хмар і частинок. Універсальним механізмом прискорення вважають прискорення на ударних хвилях (УХ). При цьому, так само, як і в механізмі Фермі, відбувається набір енергії при відбитті від “дзеркал”, якими є неоднорідності та хвильові флуктуації у космічній плазмі (плазмова турбулентність). Але завдяки стрибку швидкості на ударній хвилі, дзеркала по різні боки від розриву зближуються, і зберігається ефект прискорення Фермі першого порядку. Крім того, енергетичний спектр, що виникає при такому прискоренні, виявляється близьким до спектра космічних променів, який спостерігається. Нехай  $W$  – імовірність повернення частинки до УХ за ра-

хунок відбиття від дзеркал, а  $\beta$  – набір енергії частинкою при однократному відбитті. Тоді після  $k$  повернень енергія частинки збільшиться в  $\beta^k$  разів, а число частинок з такою енергією – в  $W^k$  разів. Звідси знаходимо залежність числа частинок від енергії  $N(\geq E) \propto E^{\ln W / \ln \beta}$ . Величина  $\beta$  з урахуванням усереднення по кутам між імпульсом частинки і нормаллю до УХ дорівнює  $\beta = 1 + 3\Delta u / 4c$ . Щоб знайти ймовірність  $W$  розглянемо баланс частинок у поверхні УХ. Число частинок, що падають на одиницю поверхні УХ в одиницю часу дорівнює  $n_1 c / 4$ , а число частинок, що виходять з іншого боку фронту  $n_1(c/4 - u_2)$ , звідки  $W = (n_1 c / 4 - u_2) / (n_1 c / 4)$   $\ln W \approx -4u_2 / c$ . Тут  $n_1$  і  $n_2$  – концентрації частинок з обох боків ударного фронту. Для індексу розподілу одержуємо  $\frac{\ln W}{\ln \beta} = -\frac{3u_2}{u_1 - u_2}$ . Враховуємо, що  $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$  та  $\rho_2 / \rho_1 = 4$  (для сильної УХ). Звідси маємо  $\ln W / \ln \beta = -1$ ,  $dN(E) \propto E^{-2} dE$ , що для індексу функції розподілу  $N \propto E^{-\gamma}$  дає  $\gamma = 2$ .

### Питання та завдання

16.1. Показати, що для УХ з відношенням тисків  $p_2 / p_1 \gg 1$  індекс  $\gamma = 2 + 5p_1 / p_2$ .

16.2. Показати, що в дифузійному наближенні спектр частинок, прискорених механізмом Фермі  $f(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-(1+1/\alpha\tau)}$ , де  $\tau$  – час життя частинок в області прискорення,  $\alpha$  характеризує темп набору енергії  $A \equiv d\varepsilon / dt = \alpha \cdot \varepsilon$  (л15).

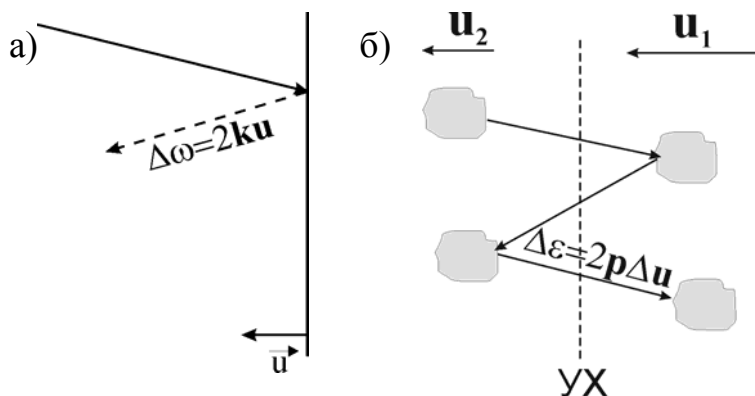


Рис. 16.  
а) Набір енергії ультра релятивістських частинок при відбитті від стінки, що рухається, на прикладі відбиття електромагнітного випромінювання.  
б) Механізм прискорення Фермі 1-го порядку на ударній хвилі,  $\Delta u = u_1 - u_2$

Література: [14].

## Лекція 17. Молекули в космосі

Оцінимо характерні частоти молекулярних переходів. Електронні енергії у молекулах приблизно ті ж, що і в атомах. Переходи, що їм відповідають, лежать в ультрафіолетовому або оптичному діапазонах. Саме тому таке ультрафіолетове випромінювання здатне призвести до руйнування молекули. Але в молекулі можливі також *рухи ядер*, у першу чергу, їх *коливання* біля положення рівноваги та *обертання* навколо різних осей. Частоти цих рухів суттєво залежать від мас ядер  $m_{\text{яд}}$ , у той час, як електронні енергії включають тільки масу електрона  $m$ . Тому відношення енергій буде містити малий безрозмірний параметр  $m/m_{\text{яд}} \approx 10^{-3}/A$ , де  $A$  – молекулярна маса. Тепер легко оцінити частоти, що нас цікавлять. Відомо, що частоти коливань тягаря на пружинці обернено пропорційні кореню з маси тягаря, тобто  $\omega_{\text{кол}} \propto 1/\sqrt{m_{\text{яд}}}$ . Для відношення частот коливальних і електронних переходів у молекулі маємо

$$\omega_{\text{кол}}/\omega_{\text{эл}} \sim \sqrt{m/m_{\text{яд}}} \quad (17.1)$$

Оскільки електронні переходи відповідають оптичним частотам  $\omega_{\text{эл}} \sim 10^{15} \text{сек}^{-1}$ , коливальні частоти попадають, взагалі-то кажучи, в інфрачервоний діапазон:  $\omega_{\text{кол}} \sim 10^{13}/\sqrt{A} \text{сек}^{-1}$ . Характерні оберतालні енергії можуть бути виражені через моменти кількості руху та моменти інерції тіл  $\sim m_{\text{яд}} a^2$  так само, як кінетична енергія через імпульси та маси. Тому оберतालні енергії обернено пропорційні масі молекули. На атомно-молекулярному рівні обертання квантується і відповідна частота переходу  $\omega_{\text{вр}} \propto 1/m_{\text{яд}}$ . Аналогічно попередньому

$$\omega_{\text{вр}}/\omega_{\text{эл}} \sim m/m_{\text{яд}} \quad (17.2)$$

і оберतालні частоти потрапляють в область високих радіочастот  $\omega_{\text{вр}} \sim 10^{11}/A \text{сек}^{-1}$  (міліметровий діапазон для легких молекул). Але багато частот з ряду причин відповідають ще більш довгим хвилям, наприклад, через те, що в симетричних молекулах деякі енергії збігаються, а мале порушення симетрії приводить до додаткових малостей у різницях енергій, які проявляють себе у виникненні більш низьких борівських частот. Подібним прикладом може бути  $\Lambda$ - або  $I$ -

подвоєння, що виникає у двоатомних ( $\Lambda$ ) і лінійних ( $l$ ) молекулах. У лінійній молекулі електронні рівні збігаються для станів, що відрізняються напрямком електронного моменту щодо вісі молекули. Але при обертанні молекула “згинається”, внаслідок чого порушується симетрія, а енергії станів, що збігалися, починають відрізнятися. Рівні подвоюються ( $\Lambda$ - або  $l$ -подвоєння), а борівський перехід між компонентами, що розщепилися, попадає в ще більш довгохвильову область. Цей ефект дуже чутливий до величини електронного моменту. При нульовому моменті (в  $\Sigma$ -стані) він, зрозуміло, відсутній. Для  $\Pi$ -стану, у якому орбітальний момент дорівнює одиниці,  $\omega_{\text{удв}} \sim \omega_{\text{эл}} (m/m_{\text{яд}})^2$ . Це призводить до частот переходу, що потрапляють у дециметровий діапазон  $\omega_{\text{удв}} \sim 10^9 / A^2 \text{ сек}^{-1}$ , де перебувають і частоти переходів між компонентами надтонкої структури. Для станів з більшими моментами розщеплення вже настільки мале (воно пропорційно  $(m/m_{\text{яд}})^{2\Lambda}$ , де  $\Lambda$  – величина моменту в одиницях  $\hbar$ ), що не потрапляє навіть у радіодіапазон.

### Питання та завдання

- 17.1. Оцінити надтонке розщеплення основного стану атома водню.
- 17.2. Оцінити частоти переходів в основному стані молекули ОН.
- 17.2. Оцінити частоти переходів в обертовому спектрі молекули  $\text{H}_2\text{O}$ .

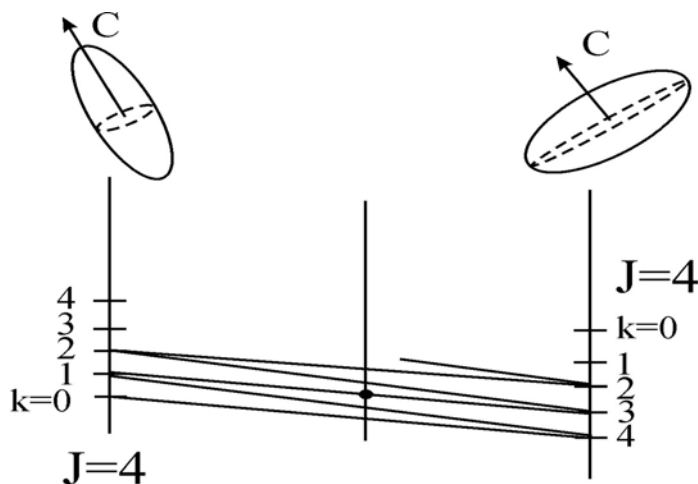


Рис. 17. Схема обертових рівнів асиметричної дзиги. Відзначений крапкою стан відповідає  $4_{13}$ , де  $J=4$  задає значення квадрата обертового моменту, індекс 1 відповідає проекції моменту для витягнутої, а індекс 3 – для сплющеної симетричної дзиги

Література: [1] т.3, 15.

### Лекція 18. Квантове кінетичне рівняння

Квантове КР може бути записано в термінах *матриці густини*. Це найбільш загальний опис квантових систем, який набув особливої популярності у зв'язку з проблемою створення квантових комп'ютерів та іншими проблемами інформаційної революції, що відбувається на наших очах, і зачіпає також астрофізику. Використання матриці густини не тільки принципово важливо, оскільки її можна застосовувати у тих випадках, коли неможливо ввести хвильову функцію, а також надзвичайно зручно, оскільки дозволяє врахувати як динамічні, так і статистичні властивості систем. КР для матриці густини  $\hat{\rho}$  запишемо в  $\tau$ -наближенні:  $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{\hat{\rho}_0 - \hat{\rho}}{\tau}$ , де  $\hat{H}$  – гамільтоніан системи,  $\tau$  – час релаксації. Фізичні середні виражаються через матрицю  $\hat{\rho}$  за допомогою взяття шпуру від добутку операторів:

$$\bar{f} = \text{Sp } \hat{f} \hat{\rho} \equiv \sum_{n,m} f_{nm} \rho_{mn}. \quad (18.1)$$

У теорії збурень зручно використовувати так зване *представлення взаємодії*, коли частина часової залежності, що пов'язана з незбуреним гамільтоніаном  $\hat{H}_0$ , перенесена на оператори фізичних величин  $\hat{f}(t)$ , а частина, пов'язана зі збуренням  $\hat{V}(t)$ , збережена в матриці густини, КР для якої набуває виду:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_{\text{int}}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{V}_{\text{int}}, \hat{\rho}_{\text{int}}] + \frac{\hat{\rho}_0 - \hat{\rho}_{\text{int}}}{\tau}. \quad (18.2)$$

Матричні елементи  $f_{nm}(t) = f_{nm} \cdot \exp i(E_n - E_m)t/\hbar$ , де  $E_n$  – власні значення гамільтоніана – рівні енергії незбуреної системи. Під час відсутності релаксації при адіабатичному включенні збурення на  $-\infty$  за часом розв'язок (18.2) знаходиться методом послідовних наближень за збуренням  $\hat{V}(t)$ :

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_0 + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t [V(t_1), \hat{\rho}(t_1)] dt_1 + \dots \quad (18.3)$$

Стационарному стану задовольняє рівноважний розподіл  $\hat{\rho}_0 = e^{-\hat{H}_0/T} / \text{Sp } e^{-\hat{H}_0/T}$ . У зовнішньому монохроматичному електричному полі  $\mathbf{E}$  збурення  $\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}$  до-

рівнює  $\hat{V} = \hat{F}e^{-i\omega t} + \hat{F}^+e^{i\omega t}$ , де  $\hat{\mathbf{d}}$  – оператор дипольного моменту, а  $\hat{F} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0$ . Обчислюємо поляризацію, як середнє значення дипольного моменту, звідки знаходимо вираз для тензора діелектричної проникності:

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} - 4\pi \frac{2d_{ba}^i d_{ab}^k}{\omega_{ab} - \omega - i\nu} (\rho_a^0 - \rho_b^0), \quad (18.4)$$

де  $\rho_a^0 - \rho_b^0 \equiv \rho_{aa}^0 - \rho_{bb}^0$  – різниця населеностей на рівнях з енергіями  $E_a$  і  $E_b$ ,  $\omega_{ab} = (E_a - E_b)/\hbar$  – борівська частота переходу,  $\nu \equiv 1/\tau$ . Вираження (18.4) записане для дворівневої системи, узагальнення очевидні.

### Питання та завдання

18.1. Виразу (18.4) відповідає *лоренцова* форма лінії. Показати, що врахування максвеллівського розподілу за швидкостями призводить до *гауссової* форми, а одночасне урахування обох – до складної *фойгтовської* форми лінії.

18.2. Формула (18.4) застосовна до будь-якого стаціонарного стану. Показати, що системі з *інверсною* населеністю рівнів відповідає не поглинання, а посилення електромагнітного поля.

18.3. При великих інтенсивностях резонансного електромагнітного поля виникає додаткове розширення  $|\mathbf{dE}|/\hbar$ , завдяки якому з ростом поля коефіцієнт поглинання зменшується, а потужність, що поглинається, виходить на *насичення*. Показати, що населеності рівнів при цьому вирівнюються.

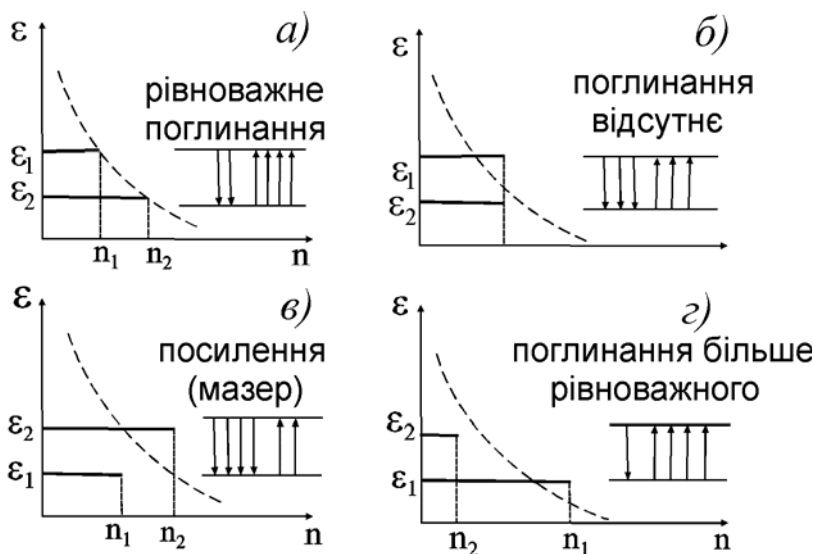


Рис. 18. Вимушені переходи та поглинання випромінювання в рівноважних і нерівноважних системах. Пунктирна лінія відповідає рівноважному розподілу частинок за рівнями енергії: *a* – рівновага; *б* –  $n_2 = n_1$  – насичення (див.18.2); *в* –  $n_2 > n_1$  – інверсія (л19); *з* – переохолодження

Література: [1] т.10.

### Лекція 19. Мазерне випромінювання в космосі

Поряд з лініями поглинання та випромінювання ОН на 18 см, що взагалі мають ту саму структуру, що й лінії атомарного водню на  $\lambda=21$  см, у ряді об'єктів у 1965 р. були виявлені емісійні лінії ОН із зовсім незвичайними властивостями. Спочатку їх намагалися навіть приписати невідомій міжзоряній молекулі («містеріуму»). Лінії були надзвичайно вузькими, яскравими та змінними, відрізнялися від джерела до джерела, що свідчило про режим мазерного посилення (рис. 19.2). Мазерне посилення згодом було відкрито ще в ряді молекул у космосі. Мазерний ефект на лініях води виявився ще більш сильним, ніж у гідроксилу. Для виникнення посилення замість поглинання повинна існувати *інверсія* (див. 18.2) у населеності рівнів мазерного переходу (рис. 19.1), яка забезпечується радіаційним або зіштовхувальним *накачуванням*. Найбільш вивчений  $\text{H}_2\text{O}$  мазерний перехід виникає на частоті 22.235 ГГц (при спостереженні — з додатковим зміщенням за рахунок ефекту Доплера). Перехід цей, який позначається  $6_{16} - 5_{23}$ , відповідає зміні стану обертання молекули, що може відповідати тільки цілим значенням обертового моменту і його проєкціям в одиницях постійної Планка  $\hbar$ . При переходах момент і його проєкції можуть або не змінюватися, або змінюватися тільки на 1. Стосовно обертання молекули води поводяться як асиметрична дзига. У таких дзиг немає однієї виділеної вісі. Через це їхній обертовий стан при заданому повному моменті  $J$  доводиться задавати двома числами ( $1$  і  $6$  для стану з моментом  $6$ ;  $2$  і  $3$  для стану з моментом  $5$  у випадку розглянутого переходу), що характеризують проєкції повного моменту. Молекули води, що скочуються по драбинці підрівнів при постійному значенні моменту (найшвидші переходи) на нижній підрівень (що відповідає індексам  $1,6$  при  $J=6$ ), накопичуються на ньому. Навпаки, найближчий по енергії підрівень  $5_{23}$ , що лежить під ним, відноситься вже до моменту  $J=5$  і не є найнижчим на драбинці підрівнів з таким моментом. Цей рівень увесь час спустошується, оскільки молекули води швидко «звалюються» на свій найнижчий підрівень. У результаті навіть при невиборчому, наприклад, інфрачервоному або ударному «накачуванні» каскад переходів, що повертають молекулу  $\text{H}_2\text{O}$  в стан з най-



меншою енергією, створює на переході  $6_{16} \rightarrow 5_{23}$  інверсію населеностей, що приводить до *мазерного* ефекту.

Мазерне випромінювання OH і H<sub>2</sub>O звичайно йде зі щільних внутрішніх оболонки розміром у кілька астрономічних одиниць, що оточують центральне ядро протозірки. В той самий час, OH-мазери на 1720 МГц, відкриті Д. Фрайлом, В. Госсом і В. Слишем в 1994р. методами РНДБ, на відміну від мазерів, на головних переходах OH, не з'являються у супроводі водяних мазерів і відповідають іншій фізичній картині. Ці мазери лежать в області взаємодії залишку наднової з молекулярною хмарою і збуджуються ударною хвилею. Більшість із 30 таких мазерів, виявлених у Галактиці, відкриті в напрямку на її центр. Потужне мазерне випромінювання спостерігається також у деяких ядрах активних галактик – т. зв. *мегамазери*.

### Питання та завдання

19.1. Перелічити молекули, на яких реалізуються космічні мазери.

19.2. Пояснити різницю між ненасиченим (негативний коефіцієнт поглинання в рівнянні переносу) та насиченим (коефіцієнт поглинання дорівнює нулю за рахунок ефекту насичення) мазерами.

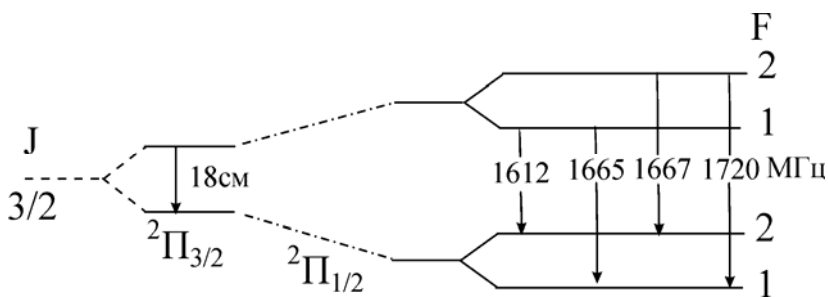
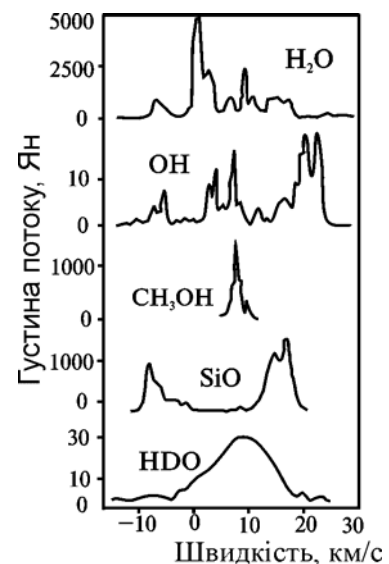


Рис. 19.1. (ліворуч) Мазерні переходи в молекулі гідроксиду OH. Найбільш високочастотний перехід відповідає зіштовхувальному накачуванню, а інші – випромінювальному накачуванню

Рис. 19.2. (праворуч) Випромінювання космічних мазерів з туманності Оріона та немазерна лінія ізотопу води [13], [31]



Література: [1] т.3, 15, 5.

## Лекція 20. Типи галактик. Класифікація Хаббла

Видима речовина Всесвіту головним чином зосереджена в зірках, які розподілені нерівномірно, створюючи зоряні «острова» – галактики. Маса і, відповідно, розміри галактик суттєво різні – від карликових галактик із масами порядку мас кульових зоряних скупчень ( $10^6 M_{\odot}$ ) до гігантських галактик у центрах скупчень із масою порядку  $10^{13} M_{\odot}$ . Маса нашої Галактики – Чумацького Шляху – близько  $10^{11} M_{\odot}$ , а просторовий масштаб близько 40 *кпк*. Галактики різняться за своєю формою. На підставі багаторічних спостережень піонер і творець позагалактичної астрономії Е. Хаббл ввів класифікацію, яка зберегла своє значення до наших днів. Типи галактик зображені у вигляді камертона або вилки, ручку якої становлять еліптичні галактики, що розділяються за ступенем витягнення на 7 підкласів. Замикають цей ряд лінзоподібні галактики. Далі йдуть спіральні галактики, що мають диски, пов'язані з обертанням. На одній ніжці камертона звичайні, а на іншій – *пересічені* спіралі, у яких спіральні гілки відходять від витягнутого *бару*. В основі цієї морфологічної класифікації безсумнівно лежить комбінація величин, що зберігаються: маси та моменту кількості руху. Галактики утворюються з флуктуацій густини внаслідок розвитку джинсової нестійкості (л2). Вони являють собою гравітаційно-зв'язані об'єкти, що відділяються в процесі еволюції від загального розширення Всесвіту. Істотну роль у їх еволюції відіграють злиття. У процесі злиттів масивні галактики утворюються з менш масивних, а внаслідок погашення моменту зі спіралей утворюються еліптичні галактики. Значну частину маси галактик складає *темна матерія*, що не світить (л34). Зокрема, про це свідчать *криві обертання* (рис.20. 2), що вказують на наявність маси поза межами речовини, що світить. Дослідження галактик у глибоких і надглибоких полях Хаббла показали відміну від хабблівської класифікації при червоних зміщеннях порядку та більше одиниці. Завдяки зміні показника кольору галактик за рахунок червоного зміщення ефективним виявився пошук далеких галактик за допомогою багатоколірної фотометрії. Виявилося, що при  $z = 6$  різко зменшується кількість галактик, так що можна вважати цей момент

епохою народження галактик. Найбільш далекі галактики виявлено при  $z \approx 7$ . Населення галактик містить старі зірки в кульових скупченнях, що утворюють сфероїдальну підсистему та молоді масивні зірки в дисках. Ці зірки утворюються з газу в області спіральної ударної хвилі. При злиттях утворюються нові молоді кульові скупчення, за якими можна намагатися вивчати історію злиттів. Взаємодія галактик призводить до їх активності. Виникають яскраві та понад яскраві інфрачервоні галактики з морфологією, що відбиває наявність взаємодій і злиттів. Падіння речовини на центр галактики викликає активність ядра (л22, 23), виникають радіогалактики та квазари.

### Питання та завдання

20.1. Перелічити галактики і їх типи у Місцевому Скупченні.

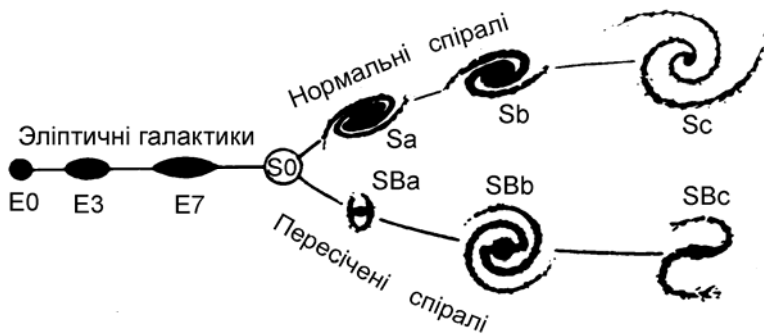


Рис. 20.1 Типи галактик («камертон» Є. Хаббла). Класифікація справедлива аж до  $z \leq 0.5$ , при  $z \geq 1$  з'являються інші морфологічні типи, зростає кількість взаємодіючих галактик, видні сліди еволюції, що відбувається

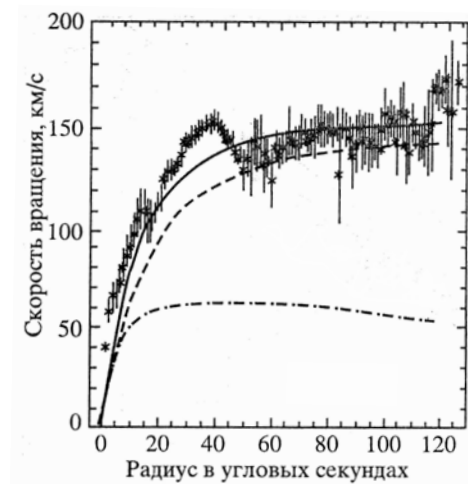


Рис. 20.2. Крива обертання галактики NGC 4254 [30]. Точки з вертикальними відрізками – спостережні дані, суцільна крива – найкраща апроксимація даних, пунктир – внесок гало, штрих-пунктир – внесок зоряного диска

Література: [2].

## Лекція 21. Структура центру Галактики

Центр Галактики (ЦГ) розташований у сузір'ї Стрільця приблизно в  $8.5 \text{ кпк}$  від Сонця. Спостереження ЦГ в оптичному й ультрафіолетовому діапазонах, де зосереджене основне випромінювання зірок, неможливе через сильне поглинання міжзоряним пилом. Тому центр Галактики досліджується в основному в радіо- та інфрачервоному діапазонах, а останнім часом активно використовують також рентгенівський і гама-діапазони. Ще в 1971 році в роботі Д. Лінден-Белла та М.Риса було висловлено припущення про те, що в ЦГ, так само, як і в АЯГ і квазарах, знаходиться надмасивна чорна діра. І дійсно, спостереження в радіодіапазоні виявили нетеплове джерело випромінювання  $Sgr A^*$ , яке розташоване у динамічному ЦГ. Основним механізмом, відповідальним за випромінювання  $Sgr A^*$ , є акреція речовини на надмасивну чорну діру масою  $3.7 \cdot 10^6 M_{\odot}$ . Оцінити масу ЧД вдалося завдяки дослідженню руху зірок у центрі Галактики в ІЧ-діапазоні (рис. 21). Наприклад, спостереження однієї з близьких до центру зірок (S0-2) дозволило обчислити її період обертання по еліптичній орбіті навколо центрального об'єкта ( $T_{S2}=15.2 \text{ років}$ ) і орбітальну швидкість, величина якої виявилася досить високою  $\approx 5000 \text{ км/с}$ . Стійка еліптична орбіта свідчить на користь того, що центральний об'єкт є ЧД.

Центр Галактики має досить складну структуру. Спостереження в радіодіапазоні в лінії нейтрального водню показали, що до відстаней, порядку  $4.5 \text{ кпк}$  пролягають два спіральні рукава, що розширюються, і де зосереджений газ масою близько  $10^6 M_{\odot}$ . Рукава з'єднуються з центральним зоряним скупченням масою  $10^{10} M_{\odot}$ , що має форму еліпсоїда обертання (більша піввісь порядку  $1.4 \text{ кпк}$  у площині Галактики) із концентрацією зірок, що круто зростає до центру. Це єдине еліптичне ядро, видиме в ІЧ-діапазоні, нагадує аналогічні області в спіральних галактиках типу  $Sd$  або  $Sbc$ . Наступним в ієрархії структур ЦГ є обертовий газовий диск з радіусом  $\approx 700 \text{ пк}$  і масою  $\sim 10^8 M_{\odot}$ , що складається в основному з молекулярного водню, а на радіусі  $350 \text{ пк}$  перебуває зовнішня межа області утворення молодих зірок. Ближче до центру знаходиться кі-

льце молекулярного водню радіусом  $\approx 190 \text{ пк}$  і масою  $\sim 10^7 M_{\odot}$ , що розширюється. Газ у кільці зосереджений у гігантських газопилових хмарах. Найбільшою хмарою, де йдуть процеси зореутворення, є комплекс *Sgr B2*. Тут спостерігаються радіолінії майже всіх видів молекул, що зустрічаються в космосі. Він знаходиться на відстані  $120 \text{ пк}$  від центру, його діаметр  $\approx 30 \text{ пк}$  і маса  $\sim 10^6 M_{\odot}$ . За спостереженнями в ІЧ-діапазоні вдалося виявити мале еліптичне зоряне ядро розміром  $15\text{-}30 \text{ пк}$ . З аналізу спектра випливало, що в ньому переважають червоні гіганти та зірки пізніх спектральних класів. У масштабах  $3 \text{ пк}$  спостерігається оболонка наднової *Sgr A (East)* - район високого темпу зореутворення *Sgr A (West)*, який є також джерелом синхротронного випромінювання, та ядерна спіральна структура, що складається з трьох рукавів іонізованого газу. Є численні структури, що свідчать про наявність регулярних магнітних полів. Спостерігаються нестационарні явища: поява анігіляційної лінії  $511 \text{ кеВ}$ , радіо- та рентгенівських субпарсекових викидів і т. ін.

### Питання та завдання

21.1. Перелічити структури в околиці ЦГ, що свідчать про наявність магнітного поля.

21.2. Знайти величину гравітаційного радіуса для надмасивної ЧД у ЦГ. Перевести її в кутові секунди.

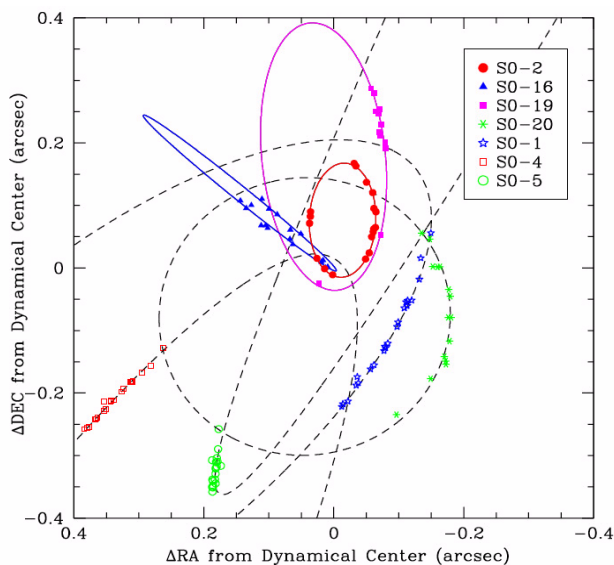


Рис. 21. Орбіти зірок у ЦГ, отримані за допомогою 10-метрового телескопа Keck1 [с]

Література: [16].

## Лекція 22. Активні ядра галактик. Радіогалактики та квазари

Активні ядра галактик (АЯГ) характеризуються великою яскравістю та нетепловим спектром випромінювання. Основними структурними елементами АЯГ є акреційний диск навколо надмасивної чорної діри, джети, розміри яких можуть досягати мегапарсеків, затінюючі тори. Галактики з АЯГ підрозділяють у порядку зростання потужності випромінювання на *сейфертівські галактики*, *радіогалактики*, *лацертиди* та *квазари*. Сейфертівські ядра знаходяться у спіральних галактиках і випромінюють майже у всьому діапазоні довжин хвиль із величинами світності від  $10^{38} \text{erg/s}$ . Їх підрозділяють на *Sy1*, у спектрах яких спостерігаються як *вузькі* ( $10^3 \text{ km/s}$ ), так і *широкі* ( $10^4 \text{ km/s}$ ) емісійні лінії, та *Sy2*, де широкі емісійні лінії відсутні. Область формування вузьких ліній знаходиться на суттєво більших відстанях від ядра, ніж широкі. В широких лініях спостерігаються флуктуації інтенсивності, що корелюють із безперервним спектром центрального джерела. *Радіогалактики* характеризуються високою світністю в радіодіапазоні, наявністю джетів і протяжних компонентів (*lobes*) (л23). *Квазари* характеризуються найбільш потужним випромінюванням (до  $10^{47} \text{erg/s}$ ) і великими значеннями червоного зміщення (до  $z = 6$  з максимумом на  $z = 2.5$ ). М. Шмідт перший ототожнив незвичайні емісійні лінії в оптичному об'єкті, що відповідав дискретному радіоджерелу 3C273, з лініями водню, зміщеними в червону область спектра, що виявилось доказом його позагалактичної природи та відкриттям квазарів. *Лацертиди* або *блазари* (типовий представник – змінне джерело *BL Lac*), характеризуються плоским спектром у всьому діапазоні та значними змінами світності в інтервалі кількох діб або годин. Основним джерелом енергії в АЯГ є акреція речовини на надмасивні чорні діри, маса яких може досягати  $10^9 M_{\odot}$ . Верхня межа світності АЯГ визначається *еддінгтонівською межею*, яка визначається із умови рівності тиску випромінювання та гравітаційної сили, що діє з боку чорної діри:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} \approx 10^{38} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{erg/s}, \quad (22.1)$$

де  $M$  – маса центрального об'єкта,  $m_p$  – маса протона,  $\sigma_T$  – томсонівський перетин розсіювання. По еддінгтонівській межі можна оцінити масу ЧД. У рамках *Уніфікованої Схеми* різні властивості АЯГ пояснюються наявністю непрозорого газопилового тора, що оточує ядро (рис. 22.1). Залежно від орієнтації тора відносно спостерігача центральна машина або затіняється тором (Sy2, радіогалактики), або видна спостерігачеві (Sy1, квазари). Якщо промінь зору збігається з джетом – спостерігаються блазари. Для АЯГ характерний безперервний спектр у радіодіапазоні, пов'язаний з синхротронним випромінюванням (л6) релятивістських електронів у магнітних полях і безперервний рентгенівський спектр, пов'язаний зі зворотнім комптонівським розсіюванням (л8). Спостерігається горб в ультрафіолеті та м'якому рентгенівському діапазоні, зв'язаний із випромінюванням акреційного диска.

### Питання та завдання

22.1. Показати, що при розсіюванні електромагнітних хвиль повинна виникати лінійна поляризація. Зі спостереженнями Р.Антонуччі та Дж.Міллера у поляризованому світлі широких ліній у Sy2 зв'язана ідея тора, що затіняє.

22.2. Навести приклади зв'язку активності ядер із взаємодією галактик.

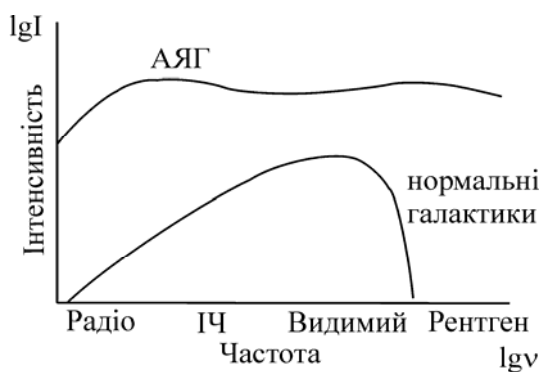


Рис. 22.1 Спектри АЯГ і звичайної галактики. Видно відмінність спектра АЯГ від теплового спектра нормальної галактики

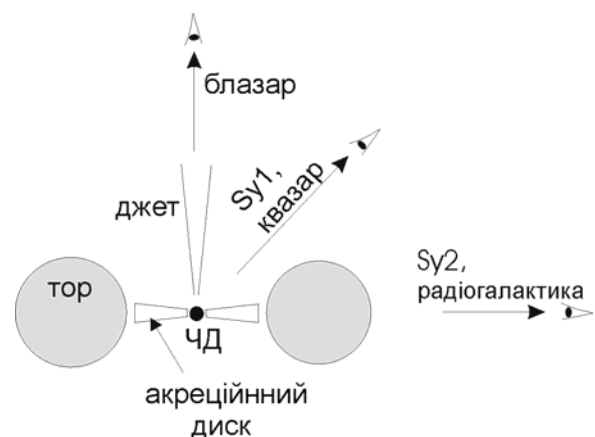


Рис.22.2 Уніфікована схема АЯГ

*Література:*[17], [18].

### Лекція 23. Джети АЯГ. Акреція

Джети – це протяжні колимовані (кут розкриття кілька градусів) викиди, які переносять масу, момент, енергію та магнітний потік із центральної області АЯГ на периферію. Джети спостерігаються в астрофізичних об'єктах різної природи - від активних ядер галактик до молодих зоряних об'єктів (МЗО) і мікроквазарів. В основному джети АЯГ випромінюють у радіодіапазоні. Радіовипромінювання джетів пов'язане зі синхротронним механізмом. Спостереження з високим кутовим розділенням дозволило виявити рентгенівське випромінювання джетів (див. список Д. Харріса [к]), зв'язане або з синхротронним механізмом за наявності сильних магнітних полів, або зі зворотним комптонівським розсіюванням релятивістських електронів на низькочастотних фотонах. У ряду джерел джети виявляються також в оптичному діапазоні (наприклад, 3C273, M87). У радіогалактиках спостерігається істотна відмінність форми кілопарсекових джетів, що поділяє ці джерела за класифікацією Фанарофф-Райлі на два типи: більш потужні, яскраві до краю *FR II* (*Cyg A*) та менш потужні *FR I*, у яких радіояскравість підсилюється при наближенні до оптичної галактики (M87). Джерела типу *FR II* характеризується наявністю подвійної структури джет-контрджет і “гарячими плямами” на периферії. Потік речовини в джеті регулюється магнітним полем і тиском зовнішнього середовища. На парсекових масштабах в АЯГ спостерігаються нестационарні “надсвітлові” викиди, за що відповідальні ультрарелятивістські швидкості та малий кут між джетом і променем зору. Аналогічні викиди зоряних масштабів спостерігаються в мікроквазарах (л27). У багатьох джетах існують області уярчення (вузли) радіо-, оптичного та рентгенівського випромінювання. Ці області пов'язані з наявністю ударних хвиль, на яких відбувається прискорення електронів (л16). На відміну від джетів АЯГ, джети молодих зоряних об'єктів є нерелятивістськими – швидкості  $\sim 10^{-3} \cdot c$ , їх масштаби порядку парсека та випромінюють вони в лініях, що дозволяє із спостережень визначити їхні основні фізичні параметри. У МЗО, подібно АЯГ, спостерігається вузельна структура (об'єкти Хербіга-Аро), де основне випромінювання відбувається в молекулах, збуджених на ударних хвилях. Існування джетів нерозривно пов'я-



зане з акрецією – процесом падіння навколишньої речовини на центральний об'єкт. Наявність джетів сприяє акреції, відводячи кутовий момент, і в той самий час джети самі є породженням процесу акреції, виникаючи за рахунок нестійкості в акреційному диску (Лавлейс, Біснотатий-Коган і Рузмайкін, Лінден-Белл). При малому питомому моменті імпульсу речовини, що падає, можлива сферично-симетрична акреція. Ефективність визначається темпом акреції  $dM/dt$ . Так, для дозвукової сферичної акреції Бонді  $\dot{M} = 4\pi\lambda\rho_\infty a_\infty (GM/a_\infty^2)^2$ , де  $\rho_\infty$  – густина і  $a_\infty$  – швидкість звуку на нескінченності,  $\lambda$  залежить від відношення питомих теплоємностей  $\gamma=c_p/c_v$ . Однак суттєво більш ефективною є дискова акреція Н. Шакури і Р.Сюняєва. Ефективність перетворення кінетичної енергії у випромінювання при дисковій акреції на чорну діру майже на порядок вище, ніж у ядерного синтезу. Цим і пояснюється високе енерговиділення в АЯГ. У механізмі Блендфорда-Знаєка джети виникають безпосередньо в околиці горизонту обертової ЧД за наявності сильного магнітного поля. При цьому за рахунок обертання виникає електричне поле, спрямоване уздовж магнітного, у якому прискорюються заряджені частинки.

#### Питання та завдання

23.1. Пояснити фізичний зміст надсвітлових швидкостей компонентів джетів.

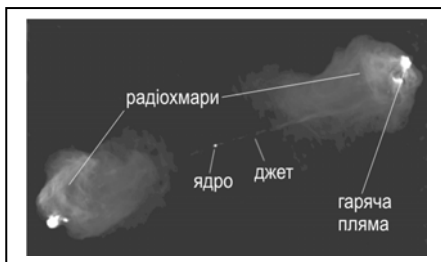


Рис.23.1. VLBA зображення радіогалактики *Лебідь А*, яка належить до типу *FR II*

Рис. 23.2. Зображення радіогалактики *Діва А (M87)* на 90см (тип *FR I*)

*Література:* [17].

## Лекція 24. Загальна теорія відносності: основні формули

При формулюванні загальної теорії відносності (ЗТВ) використаний принцип еквівалентності, згідно з яким у гравітаційному полі всі тіла рухаються однаково незалежно від їхніх мас. Це призводить до глибокої аналогії між гравітаційним полем і силами інерції, що дозволило А. Ейнштейну сформулювати загальноковаріантну теорію гравітації. У ЗТВ наявність мас та їх рух описуються геометрією викривленого простору-часу, відстань між подіями в якому задається інтервалом  $ds$  (аналог теореми Піфагора в скривленому просторі):

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k . \quad (24.1)$$

Тут  $g_{ik}$  – метричний тензор, компоненти якого є функціями часової і просторових координат. У локальній інерціальній (галілеєвій) системі відліку  $g_{00} = 1$ ,  $g_{\alpha\beta} = -1$  при  $\alpha = \beta$  й  $g_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$  (грецькі індекси  $\alpha = 1, 2, 3$ , а латинські  $i = 0, \dots, 3$ ; за німими індексами – підсумовування). У викривленому просторі-часу змінюється правило диференціювання. Коваріантне диференціювання вектора враховує зміни при паралельному перенесенні у близьку точку та має вигляд для ко- і контраваріантних векторів  $A_i$  і  $A^i$ :

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l A_l , \quad A^i_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l A^l , \quad (24.2)$$

де символи Кристоффеля виражаються через похідні від  $g_{ik}$ :

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left[ \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right]. \quad (24.3)$$

Мірою викривленості простору-часу є тензор кривизни:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n . \quad (24.4)$$

З нього випливає тензор Річчі  $R_{km} = R^l_{klm}$  і скалярна кривизна  $R = g^{km} R_{km}$ .

Рівняння Ейнштейна зв'язує метричні властивості простору-часу з властивостями матерії, яка є джерелом гравітаційного поля:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (24.5)$$

де  $T_{ik}$  – тензор енергії-імпульсу, що описує розподіл і рух матерії. Константа  $\kappa$  у рівняннях Ейнштейна знаходиться граничним переходом до нерелятивістського випадку, коли швидкість світла прямує до нескінченності  $c \rightarrow \infty$  (що відповідає закону Ньютона).

*Питання ті завдання.*

24.1. Показати, що коваріантне диференціювання некомутативне:

$$A^i_{;k;l} - A^i_{;l;k} = -A^m R^i_{lkm} .$$

24.2. Показати, що зміна вектора при паралельному переносі по замкнутому контурі  $\Delta A_i = R^l_{ikm} A_l \Delta f^{km} / 2$  виражається через тензор кривизни й площу  $\Delta f^{km}$ , обмежену контуром (див. рис. 24).

24.3. Перейти від рівняння Ейнштейна у формі (24.5) до рівняння

$$R_k^i = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_k^i - \frac{1}{2} \delta_k^i T \right), \text{ де } T - \text{слід тензора } T_k^i, \text{ а } \delta_k^i - \text{символ Кронекера.}$$

24.4. Одержати вираз  $T_{ik} = (\varepsilon + p)u_i u_k - p g_{ik}$  для тензора енергії імпульсу в ідеальній рідині.

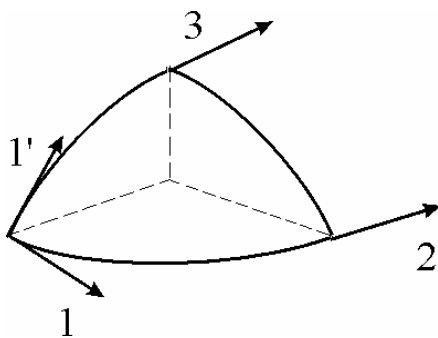


Рис. 24. Паралельне перенесення вектора за замкненим контуром  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1'$  у викривленому просторі виражається через тензор кривизни Римана

*Література:* [1] т.2, 19, 20.

## Лекція 25. Спостережні ефекти загальної теорії відносності

Вільний рух частинки в гравітаційному полі у ЗТВ описується *рівнянням геодезичної*

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad (25.1)$$

Для руху маси  $m$  навколо точкової маси  $M$  рівняння орбіти у полярних координатах  $\varphi(r)$  виражається у вигляді еліптичного інтеграла, що описує незамкнену траєкторію ( $E$  – енергія,  $I$  – момент):

$$\varphi(r) = \int^r \frac{I dr}{r^2 \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{I^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}, \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (25.2)$$

З урахуванням ефектів порядку  $(v/c)^2$  траєкторія може бути апроксимована еліпсом, що повертається за один оберт на кут  $3\pi r_g/p$ , де  $p$  – фокальний параметр. Це пояснило спостережувану величину вікового зміщення *перигелію Меркурія*, що дорівнює  $43''$  за сто років. Другий ефект ЗТВ, що спостерігається, – *відхилення променя світла* поблизу маси, що притягує. Інтервал для світла  $ds^2 = 0$ , і у центрально-симетричному полі кут відхилення світла  $\alpha = 2r_g/r$ . Поблизу Сонця ця величина дорівнює  $1.75''$ . Відхилення променя світла від зірки поблизу Сонця можна спостерігати при повному сонячному затемненні. Для цього порівнюють положення зірки поблизу диска Сонця під час затемнення з її положенням в інший момент часу. Цей ефект був передбачений А. Ейнштейном у 1916 році та підтверджений у спостереженнях, проведених британською експедицією А. Еддінгтона під час повного сонячного затемнення 29 травня 1919 р. Спостереження в радіодіапазоні при проходженні квазарів поблизу Сонця також підтверджують передбачення ЗТВ з великою точністю. Ефект відхилення променя світла поблизу маси, що притягує, є основою методу гравітаційного лінзування. Цей метод широко використовується в астрофізиці при дослідженні центральних областей квазарів. У цей час ефекти слабого лінзування та мікро-

лінзування дозволяють робити висновки про розподіл темної матерії у галактиках і скупченнях галактик.

Третій ефект ЗТВ, що спостерігається, – *гравітаційне червоне зміщення*. Цей ефект є наслідком уповільнення часу у ЗТВ і пов'язаний із різницею ходу годинників у точках передачі та прийому сигналу. У розглянутому наближенні функція Лагранжа  $L = -mc^2 + mV^2/2 - m\Phi$  призводить до дії  $S = \int Ldt = -mc \int ds$  і, відповідно, до власного часу  $d\tau = \sqrt{g_{00}} dx^0/c$ , де  $g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2$ . Величина зміщення частоти з точністю  $(v/c)^2$  визначається різницею гравітаційних потенціалів  $\Delta\Phi = \Phi_0 - \Phi_1 < 0$  у точках випромінювання та прийому:

$$\nu_1 = \nu_0 \left(1 + \Delta\Phi/c^2\right). \quad (25.3)$$

Гравітаційне червоне зміщення суттєво поблизу білих карликів, нейтронних зірок і чорних дір.

### Питання та завдання

- 25.1. Перелічити ефекти ЗТВ, що підтверджені в наземних експериментах.
- 25.2. Які ефекти ЗТВ підтверджені в космічних експериментах?
- 25.3. Які ефекти ЗТВ виявлені за спостереженнями пульсарів?

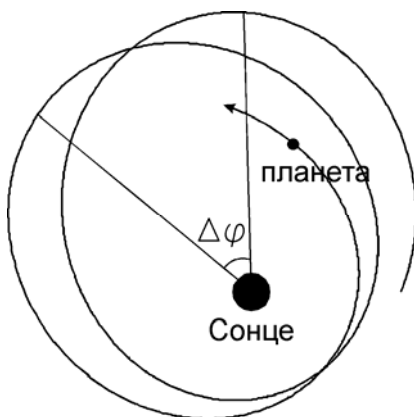


Рис. 25.1. Схема зсуву перигелію планети за рахунок ефектів ЗТВ

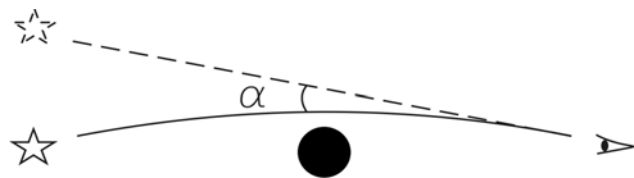


Рис. 25.2. Відхилення променя світла в гравітаційному полі

Література: [1] т.2, 19.

## Лекція 26. Чорні діри у загальній теорії відносності

Для сферично симетричного гравітаційного поля, створеного точковою масою  $M$ , розв'язок рівнянь Ейнштейна був знайдений у 1916 р. К. Шварцшильдом. Метрика ця має вигляд (при  $r > r_g$ )

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (26.1)$$

Сфера радіуса  $r_g = 2GM/c^2$  називається горизонтом подій. Ніяка інформація про процеси, що відбуваються всередині горизонту, не може бути отримана зовнішнім спостерігачем. Множник при  $cdt$  описує вповільнення ходу годинника для зовнішнього спостерігача з наближенням до горизонту. Цьому відповідає гравітаційне червоне зміщення  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - r_g/r}$  ( $r > r_g$ ). Множник при другому доданку в (26.1) описує викривлення простору. Поблизу від поверхні горизонту чорної діри велике викривлення променів світла, що рухається за геодезичними. Промені багаторазово обходять поверхню діри, зрештою в ній зникаючи. У безпосередній близькості від чорної діри вже немає стійких орбіт: остання стійка орбіта перебуває на  $r = 3r_g$ . На самій поверхні горизонту сила тяжіння, що діє на будь-яке тіло, що покоїться, нескінченно велика. Тому всі тіла падають, роблячи ту або іншу кількість витків, на центр тяжіння, де є сингулярність – особливість простору-часу. На поверхні горизонту немає фізичних особливостей, але стає неможливою стаціонарна система відліку. Всередині поверхні горизонту існує тільки нестационарна метрика, яку можна зв'язати з падаючим ліфтом.

При колапсі зірка йде під свою поверхню обрїю (рис. 26.1). При цьому для зовнішнього спостерігача втрачається майже вся інформація про неї. При колапсі (В.Л. Гінзбург і Л.М. Озерной) від зірки «відривається» її магнітне поле. Крім маси  $M$ , гравітаційне поле чорної діри може залежати лише від її моменту  $I$  (та електричного заряду). «Чорні діри не мають волосся» – Дж. Уїлер. Обертання зменшує горизонт (оскільки відцентрова сила перешкоджає силі тяжіння). Радіус горизонту, згідно з рішенням рівнянь Ейнштейна для обертової ЧД,

отриманим Керром, дорівнює  $R_g = \frac{1}{2} \left( r_g + \sqrt{r_g^2 - 4a^2} \right)$ , де  $a = I/Mc$  – момент обертання в одиницях довжини ( $r_g > 2a$ ). У керрівській чорній дірі є ще одна (більша) поверхня – ергосфера (рис. 26.2) з «радіусом»  $R_e = \frac{1}{2} \left( r_g + \sqrt{r_g^2 - 4a^2 \cos^2 \Theta} \right)$ . У середині цієї поверхні неможлива статична система відліку, але деякі тіла можуть вийти з-під неї у зовнішнє середовище. При цьому можливий процес Пенроуза, при якому від ЧД відбирається та частина її енергії, яка пов'язана з обертанням. Тому керрівська ЧД здатна підсилювати падаюче на неї випромінювання та прискорювати частинки.

### Питання та завдання

26.1. Одержати метрику Шварцшильда (26.1) з рівняння Ейнштейна  $R_{km} = 0$  у порожньому просторі (поза масою, що притягає). Метрику зручно шукати у вигляді  $ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2)$ , де  $\nu = \nu(t, r)$ ,  $\lambda = \lambda(t, r)$ .

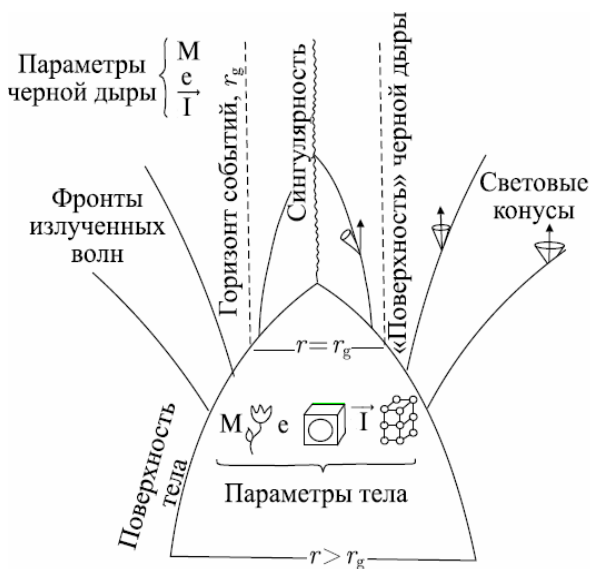


Рис. 26.1 Гравітаційний колапс [22]

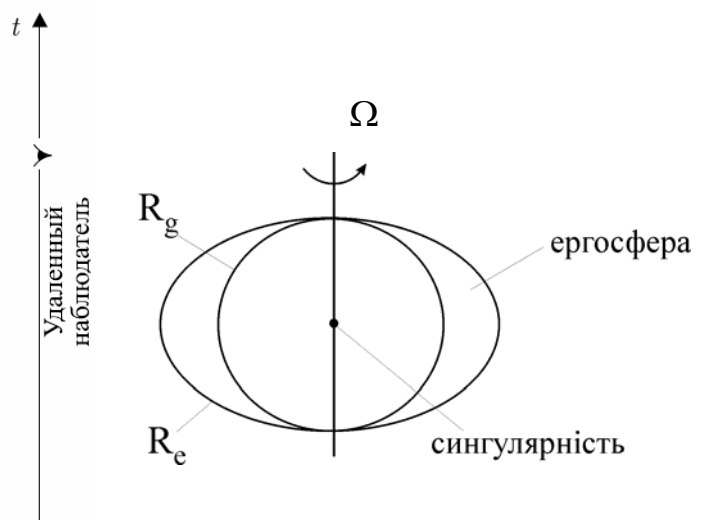


Рис. 26.2 Схема чорної діри Керра, що обертається с кутовою швидкістю  $\Omega$

Література: [9] ч.2, [21], [22].

## Лекція 27. Чорні діри в астрофізиці

Після відкриття нейтронних зірок – пульсарів – почалися активні пошуки ЧД і дослідження їх фізичних властивостей. Чудовим є результат, що пов'язаний з термодинамікою ЧД. Як показали Д. Бекенштейн і С. Хокінг, у всіх процесах за участю ЧД її площа (площа поверхні горизонту) може тільки зростати, подібно до ентропії. Виявилось, що можна ввести і температуру ЧД, яка при відсутності обертання обумовлена тільки її масою. Ця температура визначає планківське рівноважне випромінювання, максимум теплового розподілу якого припадає на довжину хвилі, що дорівнює гравітаційному радіусу, тобто, у зворотних сантиметрах  $T_g = r_g^{-1}$ . Температура ЧД обернено пропорційна її масі:  $T_g = 10^{-6} \cdot M_\odot / M \text{ } ^\circ K$ . За рахунок випромінювання ЧД втрачає масу, і відповідно до цього температура її підвищується. Внаслідок цього зростає випромінювання, за законом Стефана–Больцмана пропорційне четвертій степені температури, і, відповідно, зростає втрата маси. Для легких ЧД цей процес нестримно самоприскорюється і закінчується вибухом: повним випаровуванням ЧД. Процес випаровування не суттєвий для дір з масою  $M > 10^{16}$  г, оскільки при цьому час випаровування більший за час існування Всесвіту. Однак і стабільні ЧД дуже активні, завдяки своєму потужному гравітаційному полю. Міжзоряний газ, що падає на діру, розігрівається і створює навколо неї світловий ореол. Але особливо цікаві явища відбуваються в тісних подвійних системах, що зустрічаються досить часто. Якщо один з компонентів подвійної системи є компактним об'єктом (нейтронна зірка або чорна діра), то потужний газовий потік на нього з боку зоряного компаньйона приводить до утворення диска, що швидко обертається, у якому речовина, перш ніж упасти на зірку, що притягує (*акреція*), розігрівається до високих температур. Цей розігрів призводить до характерного й інтенсивного рентгенівського випромінювання. Кандидати в зоряні ЧД перебувають серед рентгенівських джерел у подвійних системах. У той самий час *надмасивні ЧД* відповідають за активність галактик і квазарів. Їхніми зоряними аналогами можуть бути *мікроквазари*. Вони являють собою подвійні системи, у яких один



з компаньйонів є компактним релятивістським об'єктом (нейтронною зіркою або чорною дірою). Активність пов'язана з перетіканням речовини зі звичайної зірки на компактний об'єкт. У випадку мікроквazarів цілий ряд явищ, пов'язаних з механізмами активності, спостерігаються на малих часових масштабах, на відміну від ядер галактик і квазарів. У той самий час поява релятивістських компонентів джетів доступна спостереженням як у випадку мікроквazarів, так і у випадку АЯГ. Суттєво, що акреція на чорну діру відрізняється від акреції на нейтронну зірку. В останньому випадку акреційний потік, що потрапляє на поверхню зірки, розігриває її та утворює гарячу пляму, яка є джерелом періодичного рентгенівського випромінювання. Обертання зірки приводить у цьому випадку до виникнення *рентгенівських пульсарів*.

#### Питання та завдання

27.1. Із співвідношення  $E = \hbar\omega = hc/\lambda$  виразити енергію та температуру у зворотних сантиметрах.

27.2. Порівняти ефективність дискової акреції для білого карлика, нейтронної зірки, чорної діри та ядерних реакцій.

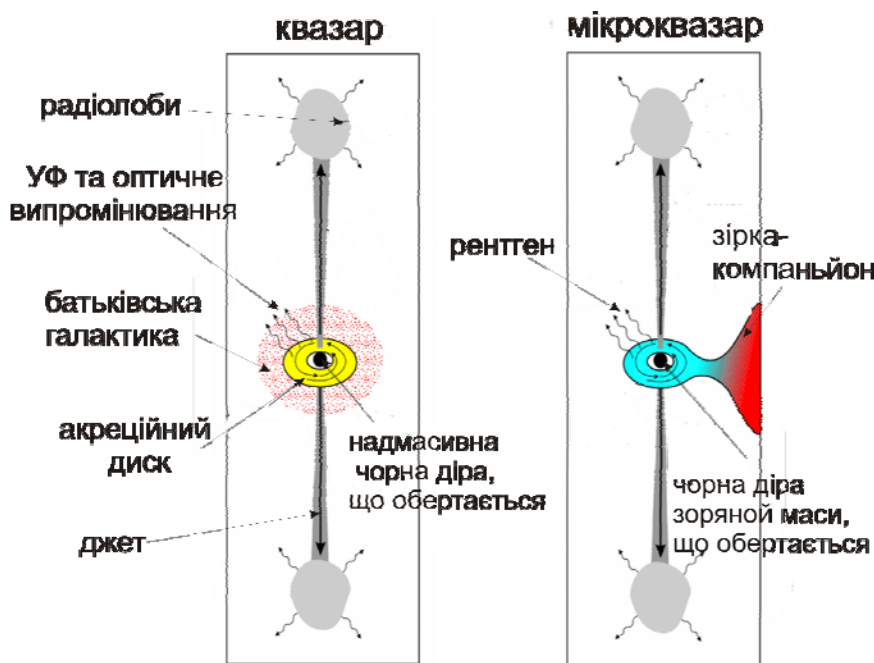


Рис. 27. Схожі схема перетікання речовини і активності квазарів та мікроквазарів. Просторові масштаби квазарів у мільйони разів перевершують масштаби мікроквазарів [а]

Литература: [23], [24].

## Лекція 28. Розв'язок Фрідмана-Леметра. Стадії еволюції Всесвіту

Однорідний ізотропний світ описується нестационарною метрикою Фрідмана-Робертсона-Уокера

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - k \cdot r^2 / a^2} - r^2 \cdot (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2), \quad (28.1)$$

де  $a(t)$  – масштабний фактор, який описує еволюцію світу,  $k=0, \pm 1$  в залежності від кривизни простору. Рівняння Ейнштейна (24.5) з урахуванням (28.1) призводить до системи:

$$(\dot{a}/a)^2 = 8\pi G\varepsilon/3c^2 - kc^2/a^2, \quad \text{a)} \quad (28.2)$$

$$\ddot{a}/a^2 = -4\pi G(\varepsilon + 3p)/3c^2. \quad \text{b)}$$

Зв'язок між густиною енергії  $\varepsilon$  і масштабним фактором одержуємо з першого закону термодинаміки при постійній ентропії  $d\varepsilon/(\varepsilon + p) = -3 \cdot da/a$ . Замикає систему рівняння стану  $p = w \cdot \varepsilon$ :  $w=0$  для пилу,  $w=1/3$  для випромінювання. Розв'язки Фрідмана-Леметра системи (28.2) для випадку плоского простору ( $k=0$ ) при  $w=1/3$  і  $0$  описують *стадію випромінювання* ( $a \propto t^{1/2}$ ,  $\varepsilon_{rad} \propto a^{-4}$ ) і *стадію речовини* ( $a \propto t^{2/3}$ ,  $\varepsilon_m \propto a^{-3}$ ). Фізична еволюція Всесвіту описується моделлю гарячого Всесвіту, запропонованою Г. Гамовим і Р. Альфером (1948 р.). На малих часах ( $t < 10^{-4}$  сек) від Великого Вибуху температура Всесвіту була настільки висока ( $T > 10^{12}$  K), що основна частина речовини була зосереджена в нуклонах, антинуклонах та інших важких частинках – *адронна ера*, яка закінчилася анігіляцією нуклонів і антинуклонів. Незначна перевага частинок над античастинками (*баріонна асиметрія*) забезпечила існування речовини у Всесвіті. З розпадом піонів на мюони та мюонне нейтрино почалася *лептонна ера* ( $t < 10$  сек,  $10^{10}$  K  $< T < 10^{12}$  K), яка закінчилася анігіляцією електронів і позитронів. Через частки секунди Всесвіт став прозорим для електронних нейтрино, температура яких у теперішній час приблизно дорівнює  $2$  K (*реліктові нейтрино*). На стадії *випромінювання* в ході розширення Всесвіту та зниження його температури набувають чинності процеси рекомбінації вільних електронів із протонами з утворенням перших атомів (червоне зміщення  $z \sim 3000$  – початок епохи рекомбіна-

ції). Подальше зниження температури призвело до відокремлення випромінювання від речовини на  $z \sim 1000$  (кінець епохи рекомбінації). Цей час називають *епохою просвітління*, а відповідний йому радіус характеризує *сферу останнього розсіювання*. Температура *реліктового випромінювання*, що відділилося, поступово знижувалася і у цей час дорівнює  $2.7K$ . За даними космічної обсерваторії *WMAP* перші зірки, які склалися з водню та гелію, утворювалися на  $z \approx 10$ . Різке зменшення числа галактик на  $z \approx 6$ , виявлене методом багатоколірної фотометрії на найбільших телескопах в останні роки [d], відповідає епосі виникнення галактик. Метод заснований на тому, що далекі галактики за рахунок червоного зміщення зникають у всіх короткохвильових  $B, V, R$  фільтрах і виявляються тільки в ІЧ-діапазоні. На цих же червоних зміщеннях у спектрах далеких квазарів спостерігається різке зменшення концентрації нейтрального водню зі зменшенням  $z$ , що свідчить про кінець вторинної іонізації, пов'язаної з епохою виникнення галактик [e].

#### Питання та завдання

28.1. Знайти залежність параметра Хаббла  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$  від космологічного часу для стадії випромінювання та речовини.

28.2. Одержати розв'язок рівняння (28.2а) для  $k = \pm 1, w=0, 1/3$ .

28.3. Знайти величину червоного зміщення, відповідну початку епохи рекомбінації, користуючись рівністю  $\varepsilon_{rad} = \varepsilon_m$ .

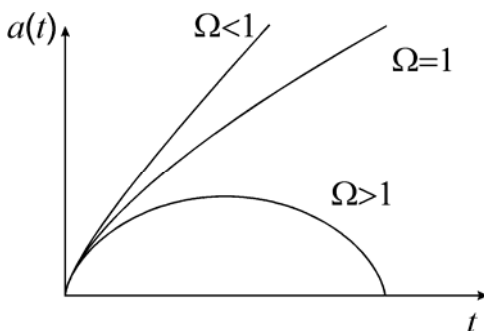


Рис. 28.1. Залежність  $a(t)$  у фрідманівських моделях з перевагою речовини ( $w=0$ ) для різних значень відносної густини  $\Omega = \rho/\rho_{cr}$ . Критична густина  $\rho_{cr} = 3H_0^2/(8\pi G) \approx 10^{-29} \text{ г/см}^3$

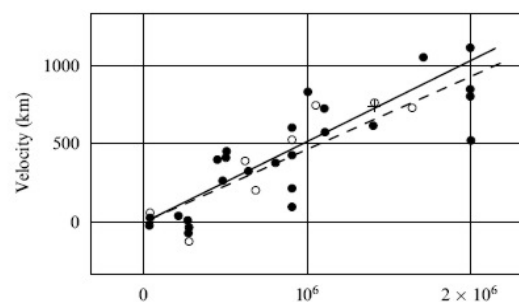


Рис. 28.2. Діаграма Хаббла 1929 р. Значення параметра Хаббла  $H_0 \approx 70 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} / \text{Мпк}$  (за даними *WMAP*) дозволяє оцінити вік Всесвіту  $t_0 \approx 1/H_0 = 13.7$  млрд. років

Література:[25]-[27].

## Лекція 29. Космологічна стала у ЗТВ. Темна енергія

Джерелом гравітаційного поля в рівняннях Ейнштейна (без  $\Lambda$ -члена) є речовина. Рівняння мають дуже простий символічний вигляд:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \kappa T_{ik} .$$

Нагадаємо, що тензор Річчі  $R_{ik}$  і скалярна кривизна  $R$ , що входять до них, є відомими, але досить складними функціями метрики  $g_{ik}$  і її перших і других похідних за координатами та часом. Сам тензор Річчі – це спрощений у цілком певному математичному змісті тензор кривизни простору–часу. Тензор  $T_{ik}$  – тензор енергії–імпульсу матерії, що включає і електромагнітне поле, має у супутній системі відліку дуже простий вид: його ненульові компоненти – це лише часовий компонент  $T_{00} = \varepsilon$  (де  $\varepsilon$  – густина енергії) і просторові компоненти  $T_{11} = T_{22} = T_{33} = p$  (де  $p$  – тиск). З певних математичних міркувань у правій частині рівняння Ейнштейна може фігурувати ще один доданок виду  $\Lambda g_{ik}$ , де  $\Lambda$  – довільна константа. З погляду фізики, цей доданок, однак, принципово відрізняється від  $\kappa T_{ik}$ , оскільки ніяк не пов'язаний з речовиною. У той самий час, так само, як і доданок з речовиною,  $\Lambda$ -член є джерелом метрики  $g_{ik}$  (гравітаційного поля), але вже від наявності речовини незалежним. Однак це фізично дуже важливий член. Він описує внесок і вплив фізичного вакууму, що можна пояснити в такий спосіб. Представимо доданок  $\Lambda g_{ik}$  у тому ж виді, що й член з речовиною, тобто у вигляді  $T_{ik}^{\Lambda}$ . Цьому відповідає густина енергії  $\varepsilon_{\Lambda} = \kappa^{-1} \Lambda$  і тиск  $p_{\Lambda} = -\kappa^{-1} \Lambda$ . Останнє, у свою чергу, означає, що “середовище”, що породжує такі густину енергії й тиск, повинне мати властивість  $\varepsilon + p = 0$ . Але такий зв'язок може здійснюватися тільки для вакууму. Це видно з перетворень Лоренца в інерціальні системи відліку, що рухаються: умова  $\varepsilon + p = 0$  забезпечує незмінність будь-яких величин при таких перетвореннях. Тільки вакуум зовсім нечутливий до подібних змін і не реагує на рух. Втім, той факт, що при такому рівнянні стану ми маємо справу з вакуумом, можна обґрунтувати, виходячи і з інших фізичних міркувань. У той самий час ця властивість означає, що  $p = -\varepsilon$ . На відміну від звичайної речовини, при позитивній густині енергії вакуум має негативний тиск, тобто, в певному розумінні, антигравітацію. Дійсно, негативний тиск при-

зводить до того, що будь-які дві частинки будуть віддалятися, «відштовхуватися» одна від одної (а не притягуватися, як при звичайній гравітації). До антигравітації може призводити не тільки вакуум, але й гіпотетичні типи матерії: «квінтесенція» ( $-1 < w < -1/3$ ), «фантомна» матерія ( $w < -1$ ). З деяких моделей випливає, що саме така ще не відкрита (а, можливо, і неіснуюча) речовина переважніша за вакуум при поясненні прискореного розширення Всесвіту та передбаченні зовсім незвичайних властивостей простору-часу, які можуть його супроводжувати. Зокрема, навіть мала домішка фантомної речовини може призводити до існування «кратових нір», що зв'язують віддалені області Всесвіту та навіть різні всесвіти в моделях безлічі всесвітів – «мультиверсума». Виникнення Всесвіту обговорюється в т. з. повних космологічних моделях [1].

#### Питання та завдання

29.1. Одержати космологічне рівняння Фрідмана з урахуванням  $\Lambda$ -члена.

29.2. Одержати умову, що приводить до стаціонарної моделі Всесвіту Ейнштейна.

29.3. Привести рівняння Фрідмана (28.2а) з урахуванням  $\Lambda$ -члену до вигляду:

$\Omega_M + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1$ , де відносні густини речовини, «кривизни» та темної енергії:

$$\Omega_M = 8\pi G\varepsilon/(3c^2H^2), \quad \Omega_k = -kc^2/(H^2a^2), \quad \Omega_\Lambda = \Lambda c^2/(3H^2).$$

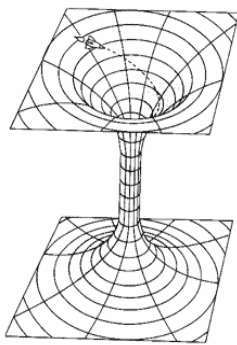


Рис. 29.1 Кратова нора, що з'єднує віддалені області Всесвіту або різні всесвіти [f]

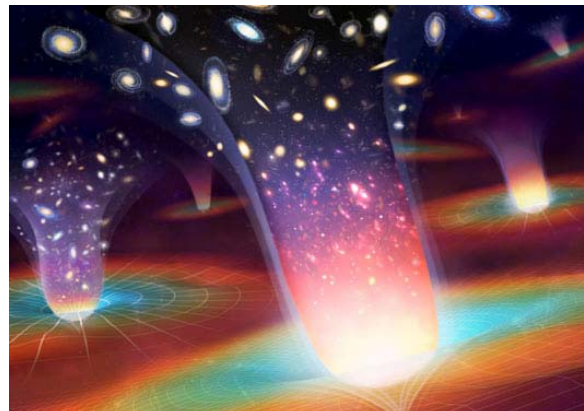


Рис. 29.2 Символічне зображення всесвітів мультиверсума з різними фізичними законами

Література:[27]-[29].

### Лекція 30. Інфляція. Прискорене розширення

Згідно з теорією інфляції, у надзвичайно малі до-фрідманівські часи після Великого Вибуху негативний тиск вакууму на планківських масштабах привів до роздування Всесвіту, тобто до дуже швидкого (експоненційного в часі) розширення. Воно описується розв'язком рівнянь Ейнштейна, отриманих де Сіттером, коли  $\Lambda$ -член безроздільно панує над речовиною. При  $\Lambda > 0$  і  $k = 0$ , тобто в плоскому всесвіті, для масштабного фактора є простий розв'язок, що описує чисто експоненційне роздування світу:  $a(t) = a_0 \exp(Ht)$ , де параметр Хаббла  $H \equiv \dot{a}/a = \sqrt{\Lambda/3}$  (тут і далі  $c=1$ ) не залежить від часу. У замкненому світі ( $k=1$ )  $a(t) = a_0 \operatorname{ch}(\sqrt{\Lambda/3} \cdot t)$  і параметр Хаббла  $H = \sqrt{\Lambda/3} \operatorname{th}(\sqrt{\Lambda/3} \cdot t)$  є функцією часу. При  $k = -1$  в цих виразах слід замінити  $\operatorname{ch} \rightarrow \operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{th} \rightarrow \operatorname{cth}$ . При достатньо великих часах ці розв'язки виходять на ту ж саму експоненційну асимптотику.

Метрика де Сіттера для Всесвіту, наприклад, з додатною кривизною, в сферичних просторових координатах  $r, \theta, \varphi$  має вигляд:

$$ds^2 = d\tau^2 - H^{-2} \operatorname{ch}^2 H\tau [dr^2 + \sin^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (30.1)$$

Сама інфляція, як фаза еволюції Всесвіту, ґрунтується на уявленнях про світ елементарних частинок при недосяжних у лабораторіях енергіях. В основі найбільш розробленої моделі перебуває фундаментальне скалярне поле  $\phi$  з потенціалом  $V(\phi) = \pm \phi^2 + \lambda \phi^4$ , що дозволяє фазові переходи з народженням частинок. Її основним результатом (для космології) є те, що наприкінці своєї стадії інфляція поставляє для подальшої еволюції заповнений речовиною практично зовсім плоский всесвіт, у якому усі елементи простору причинно зв'язані один з одним, оскільки виникли з того самого мікроскопічного об'єму планківських масштабів  $- l_{pl} \sim 10^{-33}$  см за рахунок його майже миттєвого «роздування» (від планківського часу  $10^{-43}$  сек до  $10^{-35}$  сек).

У сучасну епоху для пояснення прискореного розширення Всесвіту, що спостерігається, також був залучений вакуум, якому відповідає рівняння стану  $\varepsilon = -p$ . Втім, при рівнянні стану  $\varepsilon = wp$  спостереження не суперечать також і

малим відхиленням від  $w = -1$  в обидва боки. Тому віддають перевагу *темній енергії*, що допускає крім вакууму й інші можливості (л 29). На користь прискореного розширення Всесвіту, починаючи з червоних зміщень  $z \leq 0.7$ , свідчать підрахунки галактик, а також результати дослідження флуктуацій реліктового випромінювання (л 33). Визначення відстані до галактик з великою точністю вдалося провести з використанням наднових типу Ia в якості стандартної свічі. Ці підрахунки проводилися незалежно двома групами дослідників (А. Рисс та ін., С. Перлмуттер та ін.) і привели до співпадаючих результатів (див. рис. 30.1). Згідно з цими даними на частку темної енергії припадає 73% усієї маси Всесвіту, 23% припадає на частку невидимої *темної речовини* (л 34) і тільки близько 4% – на частку звичайної баріонної речовини, що складається з атомів, та випромінювання.

#### Питання та завдання

30.1. Скориставшись рівнянням в завд. 29.3 та враховуючи зв'язок між масштабним фактором і космологічним червоним зміщенням  $a_0/a = 1 + z$ , показати, що прискорене розширення Всесвіту почалося при  $z \approx 0.7$ .

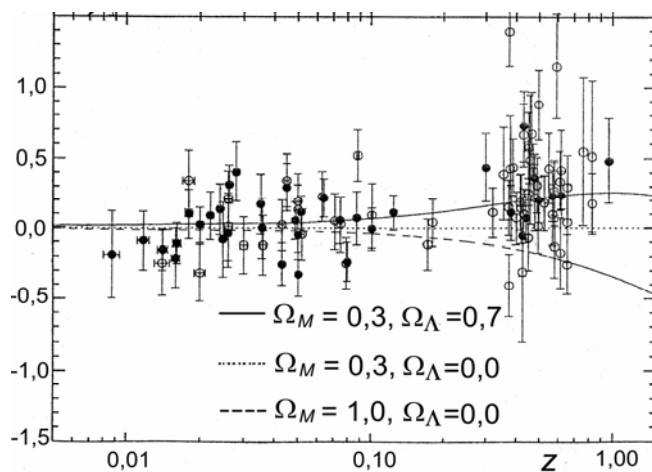


Рис. 30.1. Залежність різниці видимих та абсолютних зоряних величин  $m-M$  від  $z$  по надновим Ia. Видне суттєве відхилення від закону Хаббла в області  $z$  порядку 0.5, що відповідає моделі з перевагою темної енергії (відносні густини:  $\Omega_\Lambda=0.7$  та  $\Omega_M=0.3$ ) [30]

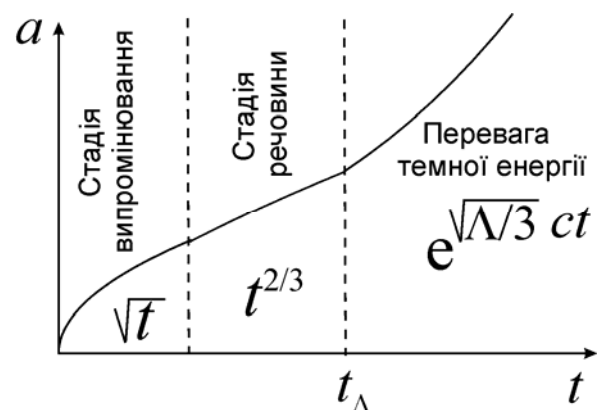


Рис. 30.2. Залежність масштабного фактору від космологічного часу у плоскому Всесвіті ( $k=0$ ). Перехід до прискореного розширення ( $t_\Lambda$ ) відповідає  $z \approx 0.7$

Література: [23], [27]-[28].

### Лекція 31. Реліктове випромінювання

Ідея Гарячого Всесвіту, висловлена Г. Гамовим, пов'язана з розширенням Всесвіту. Більшим густинам на початку розширення відповідали високі температури. Речовина була повністю іонізована (плазма) та сильно взаємодіяла з випромінюванням. В епоху рекомбінації речовина зі стану іонізованої плазми перейшла в нейтральний стан: почали утворюватися атоми (водню та гелію), взаємодія випромінювання з речовиною майже повністю припинилася (л 28). З цього моменту випромінювання охолоджувалося окремо та сильніше, ніж речовина. За оцінками Гамова до теперішнього часу його температура повинна була впасти до п'яти градусів абсолютного нуля. Тоді це остигле *реліктове випромінювання* (РВ) повинно було стати радіовипромінюванням. Це випромінювання і було виявлено радіоінженерами фірми *Bell* А. Пензіасом і Р. Вілсоном у 1965 р., які були нагороджені за це відкриття Нобелівською премією. Надалі, у рамках багатьох балонних експериментів, був виявлений максимум спектра РВ та спад його в області низьких частот (у відповідність із законом Планка), а космічний проект *COBE* одержав високочастотну частину спектра (рис. 31.1) і найбільш точне значення температури  $T_{PB} = 2.725 \pm 0.001$  К. Реліктове випромінювання не тільки несе найважливішу інформацію про минуле Всесвіту. У галактиках його енергетичний внесок є рівним за величиною з енергією космічних променів, випромінюванням зірок, магнітних полів, кінетичною енергією руху хмар міжзоряного середовища. Це є важливим аргументом на користь взаємодії і обміну енергією між цими компонентами. У міжгалактичному середовищі це переважна (зі звичайних) форма енергії. Тому роль РВ в процесах, що відбуваються у Всесвіті, надзвичайно велика. Рівноважний характер спектра реліктового випромінювання зв'язаний не з тим, що існують швидкі процеси релаксації, що встановлюють цей спектр, а, навпаки, з тим, що випромінюванню, після епохи рекомбінації  $z \sim 1000$ , стало ні з чим взаємодіяти. Вторинний розігрів та іонізація газу (через виникнення зірок і галактик при  $z \sim 10 \div 6$ ) повинні віддрукуватися на реліктовому спектрі у вигляді тонких деталей на субміліметровій спадаючій гілці. Внаслідок майже двадцятирічного спрямованого експерименталь-



ного та теоретичного пошуку були виявлені дипольна анізотропія, пов'язана з рухом Галактики відносно РВ (л. 32), і кутова анізотропія температури РВ на рівні  $\Delta T/T \sim 10^{-5}$  – флуктуації РВ (л. 33), що несуть безцінну інформацію про ранній Всесвіт. Відзначимо, що втрати енергії позагалактичних КП надвисоких енергій за рахунок взаємодії з РВ призводять до обриву в спектрі на енергіях порядку  $7 \cdot 10^{19} \text{ eV}$  (ефект Грайзена-Зацепіна-Кузьміна). Звідси випливає, що КП таких енергій не можуть приходити з відстаней, більших ніж  $20 \text{ Mpc}$ .

### Питання та завдання

31.1. Перевірити, що густина енергії РВ має той самий порядок  $10^{-13} \text{ ерг/см}^3$ , що й густина енергії магнітного поля в Галактиці  $H^2/8\pi$  та густина кінетичної енергії руху хмар  $\rho V^2/2$ .

31.2. Показати, що втрати за рахунок зворотного комптонівського розсіювання на РВ призводять до обриву в спектрі позагалактичних космічних променів на енергіях порядку  $7 \cdot 10^{19} \text{ eV}$  (ефект Грайзена-Зацепіна-Кузьміна).

31.3. За густиною енергії ( $0.25 \text{ eV/см}^3$ ) й частотою максимуму РВ  $10^{11} \text{ Гц}$  оцінити концентрацію фотонів РВ.

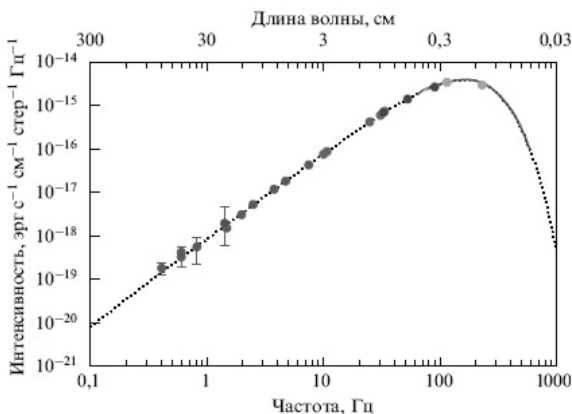


Рис. 31.1 Розподіл енергії в спектрі рівноважного випромінювання (розподіл Планка) [g]. Експериментальні точки, що відповідають реліктовому випромінюванню (ранні виміри). Суцільною лінією відзначені спостереження космічного супутника *COBE*

Література: [30].

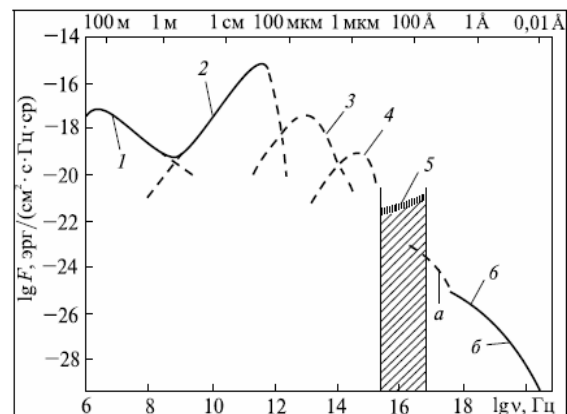


Рис. 31.2 Спектр випромінювання, створений об'єктами різної природи: 1 – дискретні радіоджерела; 2 – чорнотільне випромінювання  $2.7 \text{ K}$ ; 3 – інфрачервоні джерела; 4 – оптичне випромінювання нормальних галактик; 5 – неспостережуваний ультрафіолет; 6 – рентгенівське випромінювання (*a* – м'яке, *b* – жорстке)

### Лекція 32. Флуктуації реліктового випромінювання. Дипольна анізотропія

Реліктове випромінювання відіграє роль деякої «абсолютної» системи відліку, зв'язаної із Всесвітом в цілому. Тому дослідження його ізотропії дозволяє, з одного боку, перевірити *космологічний принцип*, згідно з яким Всесвіт однорідний і ізотропний (у масштабах  $R > 100 \text{ Mпк}$ ), з іншого боку – виділити анізотропію, зв'язану, зокрема, з «абсолютним» рухом Землі. Через ефект Допплера, пов'язаного з таким рухом, повинна виникати анізотропія «дипольного» виду з періодом 24 години (через обертання Землі). Температура фону, виміряна на Землі, що рухається щодо ізотропного фону, повинна дорівнювати

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right),$$

де  $T_0$  – середня за небом температура РВ,  $\theta$  – кут між швидкістю та променем зору. Пошуки 24-годинної анізотропії були початі в Принстоні Р. Партріджем і Д. Уілкінсоном. У 1975 р. балонний експеримент Корі й Уілкінсона на частоті 19 ГГц, а в 1977 р. експеримент Смута, Горенштейна та Мюллера на частоті 33 ГГц при висотних польотах спеціально обладнаного літака У-2 продемонстрували існування косинусоїдальної анізотропії з амплітудою три тисячні градуса (рис. 32.1). Швидкість Сонця відносно фону становить  $390 \pm 60 \text{ км/с}$  і спрямована до сузір'я Лева. Для Галактики значення «абсолютної» швидкості вже становить близько  $600 \text{ км/с}$ . Приблизно такою самою виявляється і швидкість усього скупчення галактик Діви, до якого належить наша Галактика. Головний внесок в дипольну анізотропію виявився пов'язаним з рухом скупчення до *Великого Атрактору*.

Починаючи з масштабів скупчень (і навіть надскупчень) галактик починає виявлятися неоднорідність розподілу речовини. Згідно з нашими уявленнями про еволюцію Всесвіту, ці неоднорідності повинні були розвинути з первісних флуктуацій. З реліктовим випромінюванням зв'язана унікальна можливість «спостерігати» ці флуктуації. В епоху рекомбінації водню, відриваючись від нейтральної речовини, що виникла, випромінювання вільно поширюється в просторі, що розширюється, і зберігає інформацію про момент рекомбінації у

своєму спектрі, у тому числі про флуктуації температури випромінювання, що пов'язані з флуктуаціями густини речовини (*ефект Сілка*). Факт існування (великомасштабних) флуктуацій був встановлений на рівні  $\Delta T/T \approx 10^{-5}$  або  $\Delta T \approx 30 \text{ мкК}$  на кутових масштабах порядку  $7^\circ$  на спеціалізованому супутнику *COBE* (*Cosmic Background Explorer*) в 1992 р. Апаратурою, установленій на *COBE*, проводилися виміри одночасно на трьох частотах (31.5, 53 і 90 ГГц), що дозволило вимірювати температуру, за винятком не пов'язаного з реліктом постійного фону. Антени, рознесені на  $60^\circ$ , дозволяли знаходити різницю температур реліктового випромінювання в цих напрямках. Повідомлення про виявлення анізотропії реліктового випромінювання облетіло увесь світ і було опубліковано на першій смузі *New York Times* (квітень 1992 р.), а в 2006 році керівники проекту Дж. Мазер і Дж. Смут одержали Нобелівську премію.

### Питання та завдання

32.1. Оцінити величину річних варіацій температури РВ, пов'язаних з обертанням Землі навколо Сонця.

32.2. Одержати залежність температури РВ від величини червоного зміщення.

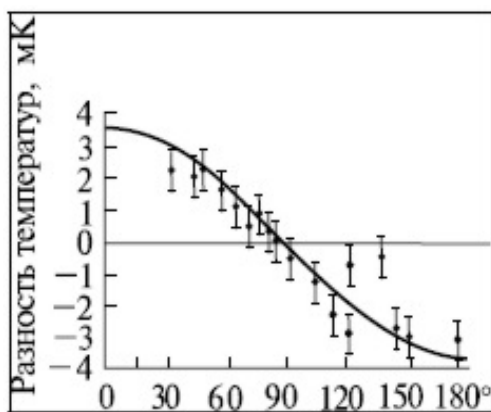


Рис. 32.1. Перші виміри дипольної анізотропії РВ [31]. За віссю абсцис – кут між напрямком антен і положенням максимуму температури  
Література:[30].

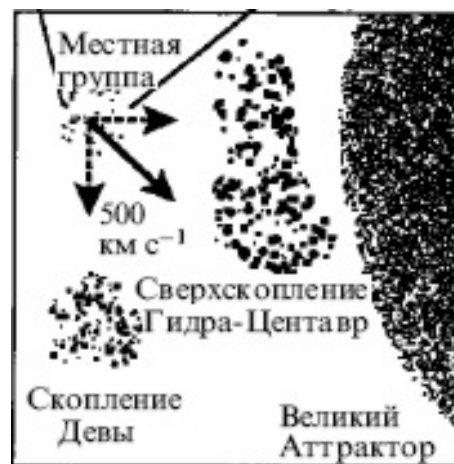


Рис. 32.2. Схема руху Місцевої Групи в напрямку до Великого Атрактору [g]

### *Лекція 33. Дрібномасштабні флуктуації реліктового випромінювання*

Надзвичайно цікаве вивчення дрібномасштабної анізотропії флуктуацій РВ. З теоретичних робіт випливало, що на кутових масштабах порядку десятка хвилин повинні спостерігатися осциляції в спектрі флуктуацій РВ, що несуть важливу інформацію. Ще в роботі 1965 року А.Д. Сахаров показав, що при такому фазовому переході, яким є рекомбінація, у спектрі флуктуацій повинна зберігатися багата інформація (у вигляді характерних піків у кутовому розподілі) про попередні дорекомбінаційні флуктуації речовини. У випромінюванні, що відірвалося від нейтральної речовини, що виникла, збереглися ті властивості дорекомбінаційних флуктуацій, які відбилися на температурі (і поляризації) реліктового випромінювання. Гравітаційні хвилі вплинули на температуру (*ефект Сакса-Вольфа*) завдяки своєму впливу на частоту квантів (гравітаційне червоне зміщення). Акустичні хвилі впливали на температуру через зміну частоти при ефекті Доплера, а також через створений ними тиск (*ефект Сілкі*). Параметри залежали також від спектра початкових флуктуацій, що залишилися ще від стадії інфляції, і від їхнього наростання через розвиток гравітаційної нестійкості у Всесвіті, що розширюється. В підсумку, розташування та висота сахаровських піків залежать від багатьох важливих параметрів: параметра Хаббла, середньої густини речовини у Всесвіті та частки вакууму в ній, кількості баріонів і невидимої “прихованої”, або “темної” матерії. Ці розрахунки, що вимагали великої ерудиції і майстерності, були виконані кількома групами вчених в Америці та Радянському Союзі (Д. Піблзом, А.А. Старобінським та ін.).

Для спостережень анізотропії флуктуацій температури РВ було організовано кілька проектів. Один з них був здійснений у районі Південного Полюса, де дуже низький рівень шумів. Спостереження на полюсі вигідні ще тому, що спрямована за віссю світу антена нерухома, а друга антена, утворюючи з першою необхідний кут, за рахунок добового обертання Землі сканує крок за кроком досліджувану ділянку небосхилу. І дійсно, осциляції в спектрі флуктуацій були впевнено виявлені різними групами дослідників. У червні 2001 р. спеціально для картографування анізотропії флуктуацій РВ був запущений космічний апа-

рат *WMAP* – *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*, за допомогою якого отримана найдетальніша карта як флуктуацій реліктового випромінювання (рис. 33.2), так і його поляризації. Ці дані не тільки підтверджують наявність сахаровських осциляцій, але й дають великий спостережний матеріал, що має найвищу до теперішнього часу точність. У цей час виміряні положення та форма трьох сахаровських піків (рис. 33.1). Естафету дослідження РВ перейняв апарат *Planck*, що був запущений у травні 2009 року, у завдання якого входить детектування з високою роздільністю інтенсивності та поляризації первинної анізотропії реліктового випромінювання, створення каталогу скупчень галактик, які виявляються за ефектом Сюняєва-Зельдовича (див. л35) та ін.

### Питання та завдання

33.1. Визначити внесок у зміну температури РВ за рахунок флуктуацій метрики.

33.2. Визначити зміну температури РВ за рахунок флуктуацій густини.

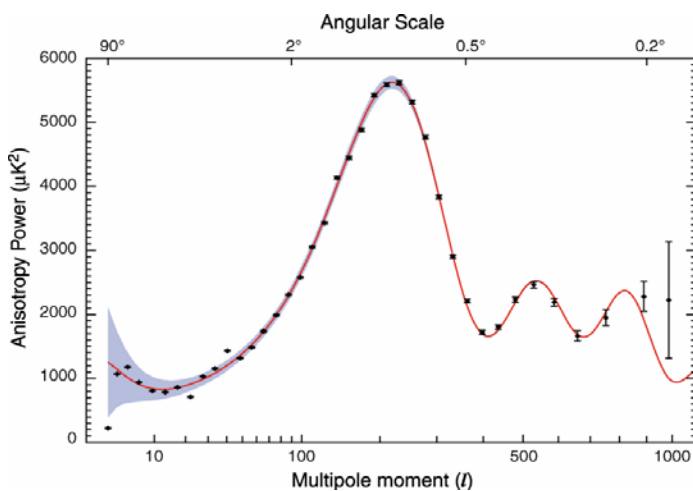


Рис. 33.1 Спектр анізотропії реліктового випромінювання в області малих кутів  $\theta < 1^\circ$  як функція номера мультиполя  $l$ . Видні сахаровські осциляції, вихід на плато Зельдовича-Харрісона з боку малих  $l$ . Суцільна лінія відповідає теоретичній моделі, сіра смуга – припустимі помилки теоретичних передбачень, точки – дані, що спостерігаються

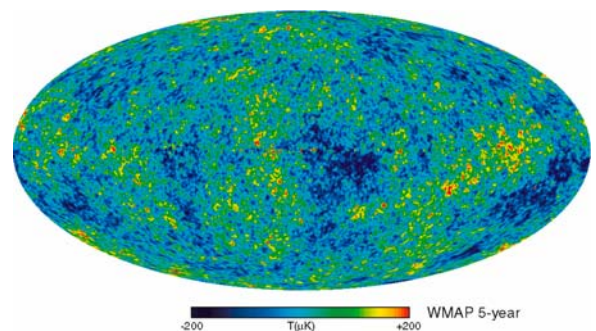


Рис. 33.2. Карта дрібномасштабних флуктуацій температури реліктового випромінювання, отримана супутником *WMAP* [j]

Література:[30].

### Лекція 34. Темна речовина. Гравітаційне лінзування

Вперше ідею про існування темної матерії (ТМ) висловив Ф.Цвіккі (1937 р.) за спостереженнями галактик у скупченні Coma (Волосся Вероніки). Якщо  $\Delta v$  – спостережувана дисперсія швидкостей галактик, а  $R_{cl}$  – радіус скупчення, то за *теоремою віріала* (див. завдання 3.1) можна оцінити масу скупчення  $M_{cl} \approx (\Delta v)^2 R_{cl} / G$ . Виявилось, що ця маса в кілька разів більша, ніж видима маса скупчення, що одержується за спостережними світностями окремих галактик. Видимої маси, таким чином недостатньо для втримання як галактик, так і рентгенівського гарячого газу в скупченнях (л. 35).

З іншого боку, швидкості зірок і газу в зовнішніх областях галактик значно вище кеплерівських, обумовлених масою галактики, що світиться. Це видно з *кривих обертання* (рис. 20.2), що відображають залежність орбітальної швидкості зірок і газу від відстані до центру галактики. Звідси виникла гіпотеза існування масивного гало, яке може містити компактні об'єкти слабкої світності. В наш час вважають, що основна маса невидимої ТМ є небаріонною та складається з нейтріно або гіпотетичних частинок, що проявляють себе тільки через гравітаційне поле. Найважливішим аргументом на користь існування небаріонної ТМ є дані за флуктуаціями температури РВ (л. 31).

Ефективним засобом дослідження розподілу темної речовини є гравітаційне лінзування, основане на ефекті ЗТВ відхилення променя світла в гравітаційному полі (див. л 25). У випадку, коли джерело знаходиться на лінії “спостерігач - центр лінзи”, а маса в лінзі розподілена аксіально симетрично, формується кільцеве зображення джерела – *кільце Ейнштейна*. Якщо джерело зміщується з цієї лінії, кільце «розривається» і утворюється триплет зображень – дві дужки та центральне зображення (див. рис. 34). Якщо розподіл маси в лінзі є асиметричним, то формуються чотири або більше зображень. Цей ефект зветься *сильним гравітаційним лінзуванням*. Типовим прикладом є квазар QSO 2237+0305 – *хрест Ейнштейна*, в якому зображення віддаленого квазара розщеплюється на чотири компоненти за рахунок ефекту сильного лінзування галактикою. Аналіз варіацій блиску кожного компонента, обумовлених їх мік-

ролінзуванням зорями лінзуючої галактики, дозволяє оцінити характерний розмір випромінюючої області квазару (порядку  $5r_g$ ) та одержати інформацію про зоряне населення галактики. Слабке лінзування призводить до зміни форми (втягнутості) зображення. Аналіз спільних ефектів сильного та слабого лінзування великої кількості віддалених галактик або квазарів, де лінзою є скупчення галактик, дозволяє відновити розподіл маси в скупченні та зробити висновок про розподіл в ньому темної речовини.

#### Питання та завдання

34.1. Показати, що рівняння лінзи є  $\beta = \theta - \alpha(\theta)$ , де  $\beta$  – кут між джерелом і спостерігачем,  $\theta$  – між зображенням і спостерігачем (див. рис. 34.2).

34.2. Показати, що потенціал лінзи  $\psi(\theta) = \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{2}{c^2} \int \Phi(D_d \theta, z) dz$ , де  $\Phi$  – ньютонівський потенціал, а інтегрування ведеться вздовж променя зору (рис. 34.2).

34.3. Показати, що рівняння Пуассона в цьому випадку зводиться до виду  $\Delta\psi = 2\kappa(\theta)$ , де  $\kappa(\theta) = \Sigma/\Sigma_{cr}$ , а  $\Sigma_{cr} = c^2 D_s / (4\pi G D_d D_{ds})$  – критичне значення поверхневої густини  $\Sigma$ .

34.4. Показати, що в гравітаційній лінзі, що створюється точковою масою, замість точкового фокусу виникає фокальна піввісь.

34.5. Знайти форму поверхні оптичної лінзи, що моделює точкову грав. лінзу.

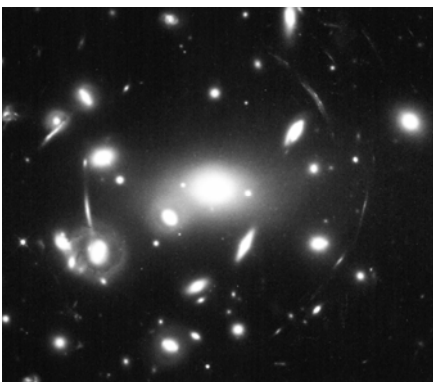


Рис. 34.1. Грав. лінза – скупчення галактик 2218. Зображення віддалених галактик спостерігаються у вигляді дужок

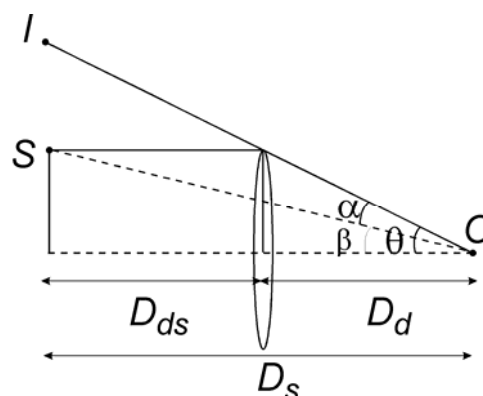


Рис. 34.2. Схема променів у грав. лінзі:  $D_{ds}$  – відстань від джерела до лінзи,  $D_d$  – відстань від лінзи до спостерігача,  $D_s$  – відстань від джерела до спостерігача

Література:[2].

### Лекція 35. Скупчення галактик. Великомасштабна структура Всесвіту

Галактики розподілені в просторі нерівномірно. Вони утворюють *групи* від двох до десятка членів і скупчення різного ступеня *багатства* до десятків тисяч членів і більше, якщо враховувати численні маломасивні супутники. Наша Місцева Група складається з двох масивних спіральних галактик – Чумацького Шляху та Туманності Андромеди – і півтора десятка їх супутників. У групах і скупченнях істотні взаємодії, і часто відбуваються злиття галактик. У центральних частинах багатих скупчень зустрічаються в основному масивні еліптичні галактики, а на периферії – маломасивні спіралі. Еліптичні галактики є наслідком злиття спіралей. Центральні масивні галактики сфероїдальних *регулярних* скупчень, як правило, є активними. Наша Місцева Група перебуває поблизу від багатого нерегулярного скупчення Діва, у центрі якого перебуває масивна галактика *M 87* з оптичним викидом. Ця галактика є потужним радіоджерелом (радіогалактикою) *Діва А*. У багатих скупченнях присутній гарячий газ, що перебуває у віріальній рівновазі з галактиками скупчення. Його температура порядку сотень мільйонів градусів і він дає спостережуване на супутниках теплове рентгенівське випромінювання. Реліктові фотони, проходячи через іонізоване середовище скупчень, розсіюються на вільних електронах. Спектр РВ у напрямку на скупчення галактик зміщується в область більш високих частот (*ефект Сюняєва-Зельдовича*) – див. рис. 35.1.

Радіоастрономія дала свідчення існування газу по морфології радіоджерел у скупченнях задовго до його виявлення за рентгенівським випромінюванням (рис. 35.2). Злиття скупчень приводить до виникнення в гарячому газі ударних хвиль, які спостерігаються рентгенівськими космічними обсерваторіями. Нерегулярна клячаста форма скупчень є наслідком «недавніх злиттів». В області червоних зміщень порядку одиниці скупчення утворюють більш-менш упорядковану *великомасштабну структуру*. Менш населені масивними галактиками порожнини – *войди* – оточені більш щільними утвореннями, що становлять стінки та ребра войдів. У межах менш сотні мегапарсек виділяються флуктуації густини. Розташована на відстані 40 *Mpc* така флуктуація (Великий Атрактор, рис.



35.3) є причиною регулярного руху Місцевої Групи та відхилення від однорідного хабблівського розширення, яке призводить за рахунок ефекту Доплера до дипольної анізотропії РВ. На масштабах, що перевищують сотні мегапарсек, розподіл речовини стає однорідним.

*Питання та завдання*

35.1. За рентгенівським випромінюванням і ефектом Сюняєва-Зельдовича визначити густину гарячого газу в скупченні.

35.2. Оцінити тиск при русі тіла зі швидкістю  $V$  у середовищі з густиною  $\rho$ .

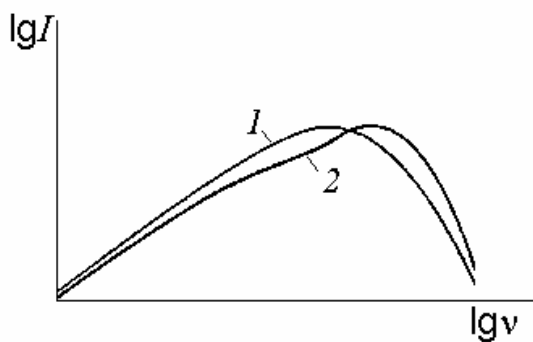


Рис. 35.1. Ефект Сюняєва-Зельдовича: 1 – чорнотільний спектр РВ, 2 – спектр РВ, змінений скупченням галактик.

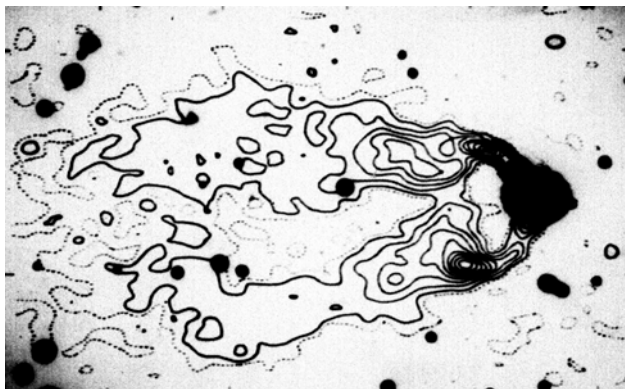


Рис. 35.2. Розподіл радіояскравості в «хвостатій» галактиці NGC 1265 у скупченні Персея, накладений на негатив паломарського атласу. Спостережувана структура джетів пов'язана з рухом галактики через гарячий газ скупчення

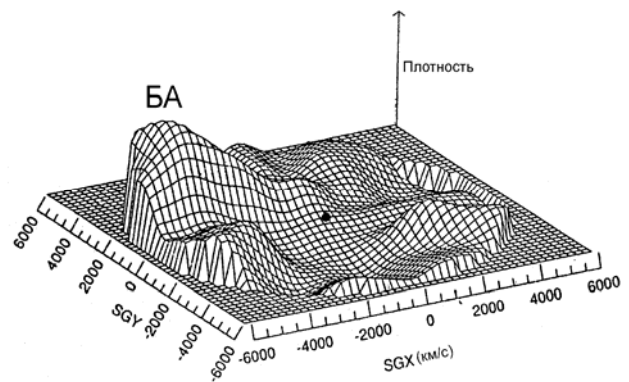


Рис. 35.3. Розподіл речовини в супергалактичній площині в «далекій» околиці Галактики. Видний Великий Атрактор і інші області підвищеної густини [31]

*Література:*[31].

## Література<sup>1</sup>

- \*1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика в 10-ти томах. – М.: Наука, 1986.
- \*2. Засов А.В., Постнов К.А. Общая астрофизика. Фрязино: Изд-во Век-2, 2006. – 496 с.
3. Лозинская Т.А. Сверхновые звезды и звездный ветер. – М.: Наука, 1986. – 440 с.
4. Бескин В.С. Осесимметричные стационарные течения в астрофизике. – М.: Физматлит, 2006. – 384 с.
- \*5. Рудницкий Г.М. Конспект лекций по курсу «Радиоастрономия». Нижний Архыз: Изд-во CYGNUS, 2001. – 56 с. <http://heritage.sai.msu.ru/ucheb/Rudnickij/>
6. Железняков В.В. Излучение в астрофизической плазме. – М.: Янус-К, 1997. – 528 с.
7. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. – М.: Наука, 1987. – 488 с.
8. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. – М.: Наука, 1971. 484 с.
- \*9. Шапиро С., Тьюкольски С. Чёрные дыры, белые карлики и нейтронные звёзды в 2-х частях. – М.: Мир, 1985.
10. Липунов В.М. Астрофизика нейтронных звезд. – М.: Наука, 1987. – 296 с.
11. Бескин В.С. Радиопульсары // Успехи физических наук. – 1999. – Т. 169. – № 11. – С. 1169.
12. Кадомцев Б.Б. На пульсаре. – М.: Изд-во УФН, 2001. – 128 с.
13. Эверетт Ю. На переднем крае астрофизики. – М.: Мир. – 1979. – 576 с.
- \*14. Лонгейр М. Астрофизика высоких энергий. – М.: Мир. – 1984. – 398 с.
- \*15. Бочкарёв Н.Г. Основы физики межзвёздной среды. – М.: Изд-во МГУ. – 1991. – 352с.
16. Центр Галактики. Сб. работ под ред. Н.С.Кардашова. М.: Мир. – 1987. 256 с.
17. Физика внегалактических источников радиоизлучения / Под ред. Р.Д. Дагкесаманского. – М.: Мир. – 1987. – 364 с.
18. Астрофизика космических лучей // В.С. Березинский, С.В. Буланов, В.Л. Гинзбург и др. – М.: Наука. – 1984. – 360 с.
19. Жданов В.І. Вступ до теорії відносності. – К.: “Київський університет”. 2008. – 287с.
- \*20. Александров Ю.В. Основы релятивістської космології. – Х.:ХНУ. – 2004. – 134 с.
21. Новиков И.Д., Фролов В.П. Физика черных дыр. М.: Наука. – 1986. – 328 с.
22. Новиков И.Д., Фролов В.П. Черные дыры во Вселенной // Успехи физических наук. – 2001. – Т. 171. – № 3. – С. 307.
23. Черепашук А.М, Чернин А.Д. Вселенная, жизнь, черные дыры. — Фрязино, Изд-во Век 2. – 2003. – 320 с.

---

<sup>1</sup> Звёздочкой (\*) отмечена обязательная литература

- \*24. *Черпащук А.М.* Поиски черных дыр // Успехи физических наук. – 2003. – Т. 173. – №4. – С. 345.
25. *Зельдович Я.Б., Долгов А.Д., Сажин М.В.* Космология ранней Вселенной. – М.: Изд-во МГУ. – 1988. – 200 с.
26. *Сажин М.В.* Современная космология в популярном изложении. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 240с.
27. *Горбунов Д.С., Рубаков В.А.* Введение в теорию ранней Вселенной. – М.: URSS. – 2008. – 552 с.
28. *Линде А.Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. – М.: Наука. – 1990. – 440 с.
29. *Виленкин А.* Много миров в одном. М.: Сogrus, 2009. – 235 с.
30. *Насельский П.Д., Новиков Д.И., Новиков И.Д.* Реликтовое излучение Вселенной. – М.: Наука. – 2003. – 392 с.
31. *Брауде С.Я., Конторович В.М.* Радиоволны рассказывают о Вселенной. – Киев: Наук. Думка. – 1982. – 236 с.; Киев: Академперіодика. – 2005. – 284с.; М.:Физматлит, 2010.
32. *Гинзбург В.Л.* Какие проблемы физики и астрофизики представляются особенно интересными в начале XXI века // О науке, о себе и о других. Сб. науч. ст. – М.: Физматлит, 2003. – С. 11.
- \*33. *Физика космоса.* Маленькая энциклопедия / Под ред.Р.А. Сюняева. – М.: Советская энциклопедия. – 1986. – 784 с.
34. *Болотин Ю.Л., Ерохин Д.А., Ивашкевич Г.И., Лемец О.А., Черкасский В.А.* Современная космология (динамика Вселенной в задачах). – Київ: Наукова думка.– 2010. (astro/ph 0904.0382v2).
35. *Конторович В.М.* Линейные и нелинейные волны (элементарное введение в теорию с применениями к физике плазмы и астрофизике) // Радиофизика и радиоастрономия. – 2001. – Т. 6, №3. – с. 165-211; 2006. – Т. 11, №1. – с.5-30.

### Додаткова література

- [a] *Mirabel I.F., Rodriguez L.F., Cordier B., Paul J., Lebrun F.* A double-sided radio jet from the compact Galactic Centre annihilator 1E140.7 – 2942 // *Nature*. – 1992. – Vol. 358. – P. 215.
- [b] *Bannikova E.Yu., Kontorovich V.M.* Jet knots fine structure of cosmic radio sources in synchrotron and Compton mechanisms of radiation // *Baltic Astronomy*. – 2005. – Vol.14, №3. – P.354.
- [c] *Ghez A. M. et.al.* Stellar Orbits around the Galactic Center Black Hole // *ApJ*. – 2005. – Vol. 620. – P. 744.
- [d] *Bouwence R.J. & Illingworth G.D.*, Rapid evolution of the most luminous galaxies during the first 900 million years // *Nature*. – 2006. – Т. 443. – С. 189; *J.S.Dunlop et al.* A systematic search for very massive galaxies at  $z>4$  // *MNRAS*. – 2007. – Vol. 376. – P. 1054.
- [e] *X.Fan et al.* Constraining the evolution of the ionizing background and the epoch of reionization with  $z\sim 6$  quasars // *Astron.J.* – 2006. – Vol.132. – P. 117.
- [f] *Шацкый А.А., Новиков И.Д., Кардашев Н.С.* Динамическая модель кротовой норы и модель Мультивселенной // *Астрон. журнал*. – 2008. – Т.178, №5, с. 481.
- [g] *Смут Дж.Ф.* Анизотропия реликтового излучения: открытие и научное знание // *Успехи физических наук*. – 2007. – Т.177, №12, с. 1294.
- [h] *Ульянов О.М., Захаренко В.В., Коноваленко А.А. та інш.* Обнаружение индивидуальных импульсов пульсаров В0809+74; В0834+06; В0943+10; В0950+08; В1133+16 в декаметровом диапазоне волн // *Радиофизика и Радиоастрономия*. – 2006. – Т.11, № 2. – с. 113.
- [i] *Hwang Uno et al.* A Million Second Chandra View of Cassiopeia A // *ApJ*. – 2010. – Vol. 615. – P. 117.
- [j] <http://map.gsfc.nasa.gov/>
- [k] *Harris D.E.* XJET: X-ray emission from extragalactic radio jets, 2009, <http://www.harvard.edu/XJET/>
- [l] *Фомин П.И.* // *Доповіді АН УРСР*. – 1975. – сер.А, №9. – с.831
- [m] *Зельдович Я.Б., Гришук Л.П.* Полные космологические теории. В книге: *Зельдович Я.Б. Избранные труды. Частицы, ядра, Вселенная*. М.: Наука, 1985, с.179.

## Зміст (план лекцій)

1. Гідродинаміка. Звукові хвилі.
2. Гравітаційна нестійкість.
3. Закони збереження. Ударні хвилі.
4. Теорія сильного вибуху. Наднові та їх залишки.
5. Магнітна гідродинаміка.
6. Синхротронне випромінювання.
7. Синхротронне випромінювання. Релятивістська аберація.
8. Зворотний Комптон-ефект.
9. Елементи фізичної кінетики. Рівняння Больцмана.
10. Розподіл Фермі-Дірака та Бозе-Ейнштейна.
11. Еволюція зірок. Білі карлики.
12. Нейтронні зірки. Пульсари.
13. Провідність і діелектрична проникність плазми.
14. Випромінювання рівноважного шару. Спектр та утворення ліній.
15. Дифузія.
16. Прискорення частинок на ударних хвилях. Прискорення Фермі.
17. Молекули в космосі.
18. Квантове кінетичне рівняння.
19. Мазерне випромінювання в космосі.
20. Типи галактик. Класифікація Хаббла.
21. Структура центру Галактики.
22. Активні ядра галактик. Радіогалактики та квазари.
23. Джети активних ядер галактик. Акреція.
24. Загальна теорія відносності: основні формули.
25. Спостережні ефекти загальної теорії відносності.
26. Чорні дірки у загальній теорії відносності.
27. Чорні дірки в астрофізиці.
28. Рішення Фрідмана-Леметра. Стадії еволюції Всесвіту.
29. Космологічна стала в загальній теорії відносності. Інфляційна модель.
30. Прискорене розширення. Темна енергія.
31. Реліктове випромінювання.
32. Реліктове випромінювання. Диполь.
33. Реліктове випромінювання. Флуктуації.
34. Темне речовина. Гравітаційне лінзування.
35. Скупчення галактик. Великомасштабна структура Всесвіту.