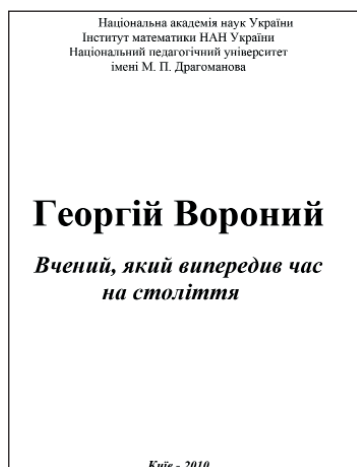


ДІАГРАМИ ВОРОНОГО



Галина Сита
канд. фіз.-мат. наук,
Інститут математики
НАН України,
м. Київ

Матеріал до статті
взято з книги:



В середині 70-х років ХХ століття у теоретичних комп'ютерних розробках було вперше використано ідеї Георгія Вороного, які були надруковані в його дослідженнях про примітивні паралеледри у 1908-09 роках. За твердженням професорів **О. Ейхольдера** і **Ф. Ауренхаммера**, відомих австрійських учених в галузі комп'ютерної науки, «з того часу діаграми Вороного стали вживати повсюдно у конструкціях, пов'язаних із геометричними алгоритмами, так що деякі фахівці вважають народження комп'ютерної геометрії саме з цього моменту. Дійсно, значний процент статей з комп'ютерної геометричної літератури прямо чи побічно пов'язано із діаграмами Вороного або зв'язаними з ними структурами [...]. Не менш значною є роль діаграм Вороного також у більш практично орієнтованих галузях, таких, як комп'ютерна графіка, геометричне моделювання, конструювання роботів, розпізнання образів, побудова географічних інформаційних систем та ін.»

Отже, діаграми Вороного ... Ці математичні об'єкти, що носять ім'я видатного українського математика Георгія Вороного, будуються на основі його праці «Дослідження про примітивні паралеледри» (1908 – 09), основним об'єктом якої є багатовимірні структури – паралеледри. Це опуклі многогранники у n -вимірному евклідовому просторі, розташовані паралельним чином, котрі не входять один в один, мають спільні грані та всі разом заповнюють n -вимірний простір. Серед них Г. Вороний виділив певний клас паралеледрів, названих ним «примітивними», в яких в кожній вершині сходиться найменше число цих просторових тіл, тобто $n+1$. Георгій Вороний знайшов алгоритм, який дозволяє для кожного n побудувати всі примітивні паралеледри. І головне – він знайшов зв'язок між цими просторовими фігурами і додатними квадратичними формами, отже представив математичний апарат для вивчення цих просторових фігур. От що писав сам Г. Вороний у 1907 році в листі до редактора журналу, в якому вперше у 1908 році було надруковано згадану вище його статтю:

«Протягом дванадцяти років я вивчав властивості паралеледрів. Я можу сказати, що це – тернисте поле для досліджень і що отримані результати, які викладені в цьому дослідженні, коштували мені дорого...

Трьохвимірні паралеледри відіграють тепер важливу роль в теорії кристалічних тіл, і кристалографи вже звернули увагу на властивості цих дивних многогранників, але до цього часу кристалографи задовольнялись описом паралеледрів з чисто геометричної точки зору. Я вже давно помітив, що задача розбиття n -мірного аналітичного простору на опуклі конгруентні многогранники тісно пов'язана з арифметичною теорією додатних квадратичних форм».

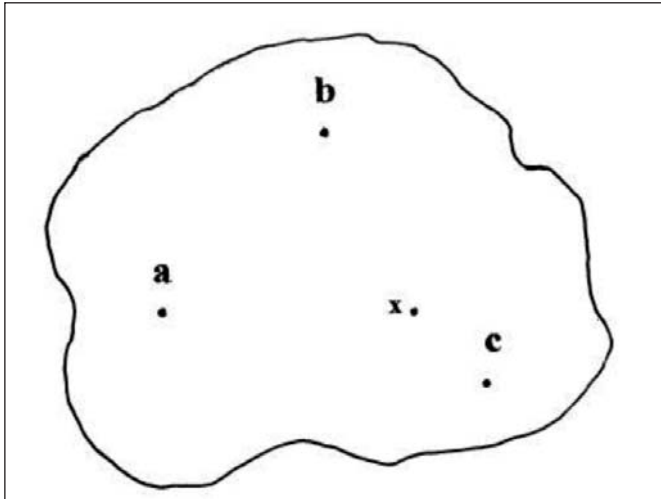


Рис. 1

Тепер покажемо на прикладі, що називається діаграмою Вороного в елементарному двовимірному (плоскому) випадку. Уявімо собі, що в деякому населеному пункті є три поштових відділення: *a*, *b* і *c* (рис. 1). До якого з цих відділень понесе свого листа мешканець, будинок якого знаходиться в точці *x*. Розумно допустити, що до найближчого. Наша задача полягає в тому, щоб поділити територію, яку займає цей населений пункт, на «зони впливу», тобто на три ділянки *A*, *B* і *C*, в кожній з яких зручніше (ближче) користуватися відповідним поштовим відділенням: в зоні *A* — відділенням *a*, в зоні *B* — відділенням *b*, в зоні *C* — відділенням *c*. Як це зробити?

Візьмемо дві точки *a* і *b*, з'єднаємо їх відрізком прямої і проведемо перпендикуляр через середину відрізка $[a, b]$ (рис. 2). Тоді усі точки, які знаходяться ліворуч від h_1 , ближчі до *a*, ніж до *b*, і навпаки: усі точки, які знаходяться праворуч від h_1 , — ближчі до *b*, ніж до *a*.

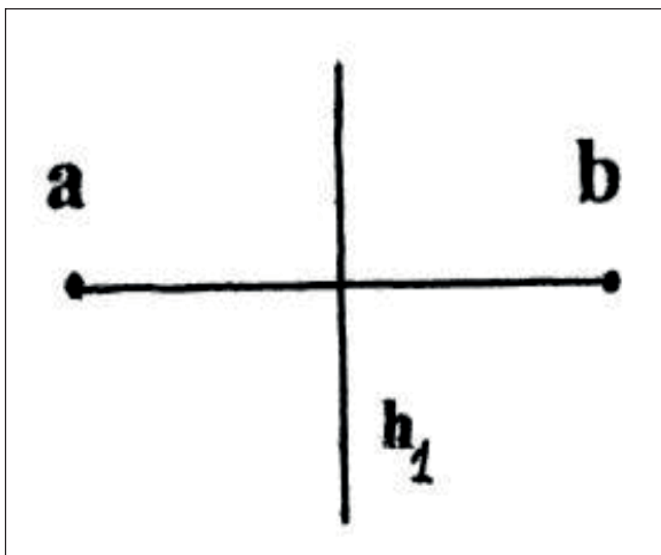


Рис. 2

Так само з'єднаємо відрізками точки *a* і *c*, *b* і *c* і проведемо перпендикуляри h_2 , h_3 (рис. 3) через середини відрізків $[a, c]$ і $[b, c]$ відповідно. У результаті, за допомогою прямої h_2 ми визначимо, які точки ближчі до *a*, ніж до *c*, а за допомогою прямої h_3 ми так само визначимо, які точки ближчі до *b*, ніж до *c*.

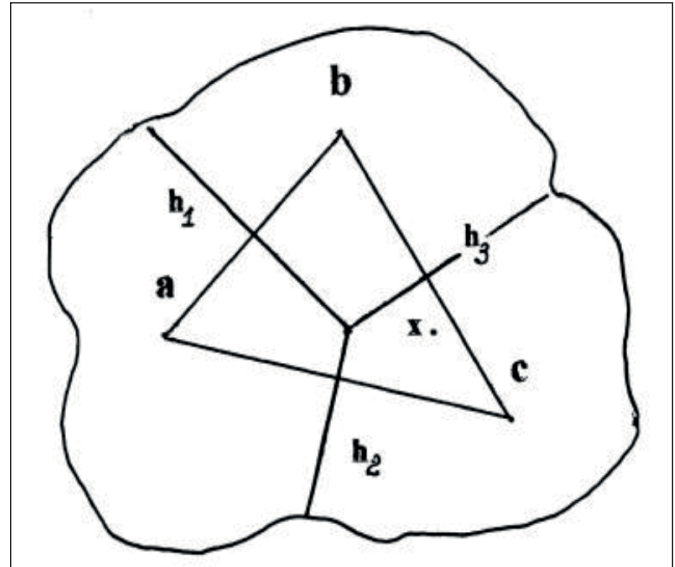


Рис. 3

Відомо, що перпендикуляри через середини сторін трикутника перетинаються в одній точці. Отже, прямі h_1 , h_2 , h_3 мають спільну точку перетину. Тобто ми поділили територію нашого населеного пункту на три ділянки *A*, *B* і *C* (рис. 4), в кожній з яких мешканцям зручніше користуватися тим поштовим відділенням, яке знаходиться на території даної ділянки: мешканцям території *A* зручніше користуватися відділенням *a*, мешканцям території *B* зручніше користуватися відділенням *b*, а мешканцям території *C* зручніше користуватися відділенням *c*. У нашому випадку будинок мешканця (точка *x*) потрапив у зону *C*. Тобто йому зручніше користуватися поштовим відділенням *c*.

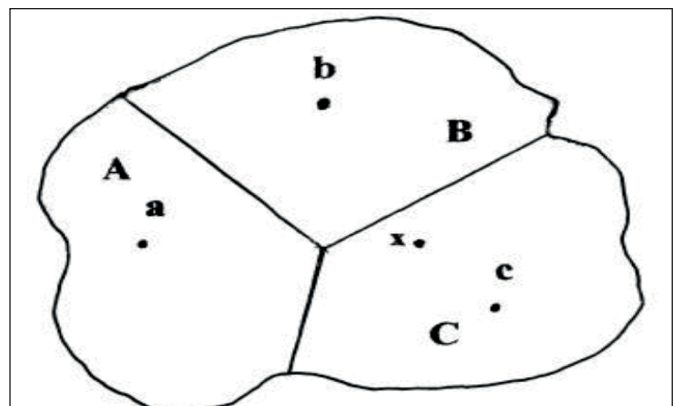


Рис. 4

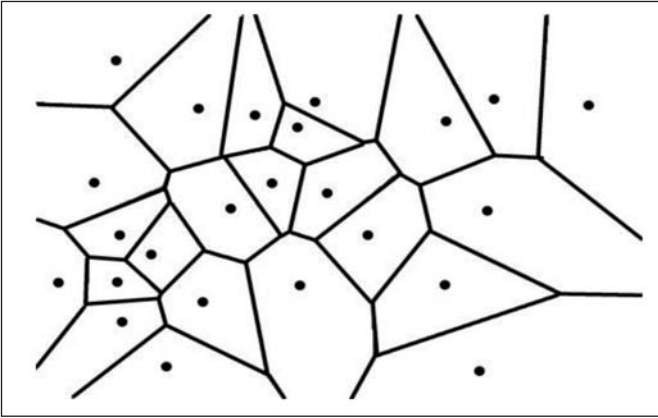


Рис. 5

Отже, ми вже маємо певний досвід, як поділити територію (або область), на якій існують окремо виділені точки (в нашому прикладі точки *a*, *b* і *c*) на «зони впливу» цих точок, тобто розбити цю область на окремі ділянки навколо виділених точок, такі, щоб відстань до виділеної точки була найменшою для усіх точок даної ділянки порівняно з відстанню до усіх інших виділених точок даної області. При цьому побудовані ділянки між собою не перетинаються і покривають собою усю територію.

Виділених точок може бути і більше. На рис. 5 зображено поділ на «зони впливу» у випадку більшого числа таких точок. Зверніть увагу, що кожна пара точок знаходиться на рівній відстані від відрізка, що їх роз'єднує. Якщо точок більше, ділянки, що знаходяться всередині області, мають форму многокутника. Утворені таким чином ділянки є опуклими фігурами. Побудоване таким чином розбиття і є прикладом діаграми Вороного.

У загальному випадку нехай маємо певну область *D* на площині, на якій виділено *n* точок. Будемо називати їх «породжуючими точками».

Діаграмою Вороного області *D* з *n* породжуючими точками називається розбиття цієї області на *n* опуклих фігур (многокутників), які називаються «клітинами» (їх ще називають «комірками»), таких, що кожна клітина має лише одну породжуючу точку і для кожної точки даної клітини відстань до породжуючої дану клітину точки менша за відстань до кожної іншої породжуючої точки даної області. Задачі, в яких виникала потреба поділити певну область на «зони впливу» окремих об'єктів всередині цієї області, виникали давно. Відомо, що до цієї задачі звертався ще в середині XVII ст. французький математик **Рене Декарт** (1596–1650), розглядаючи рух небесних тіл (рис. 6), у 1850 році її розглядав німецький математик **Діріхле** (1805–1859).

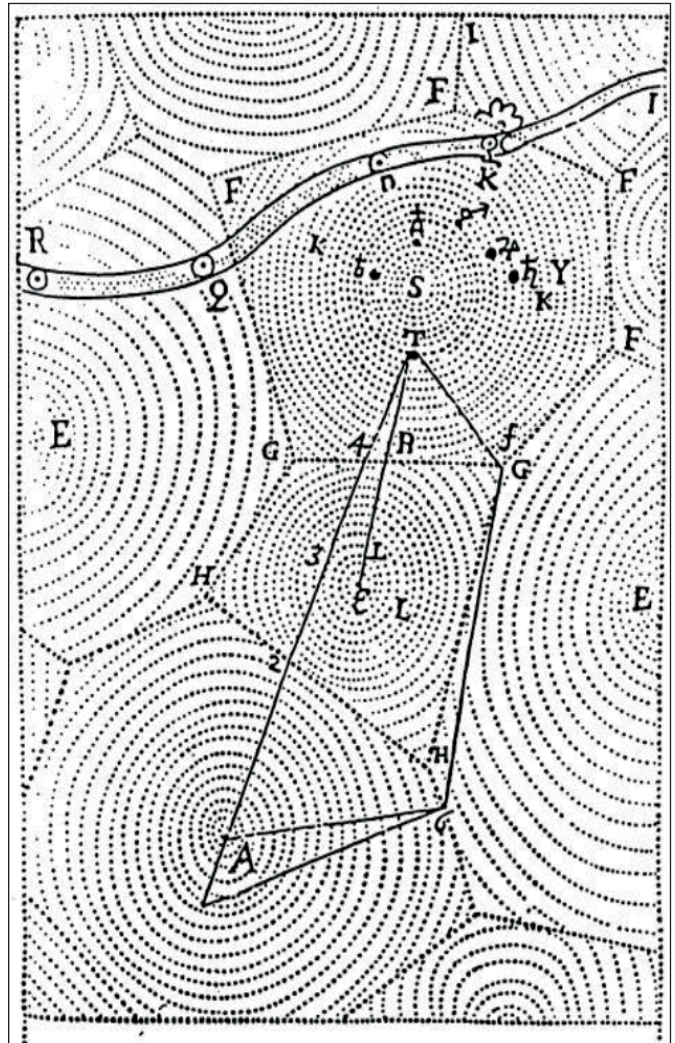


Рис. 6

Таке поняття, як «клітина» (або «комірка», «мозайка») розглядалося незалежно у дослідженнях багатьох вчених різних галузей знань. Тому комірка Вороного називалася по-різному у різних галузях науки. Вона носила назву «область Діріхле» в математиці, «многочлена Тіссена» в географії, «клітини Мейєрінга» у металургії, «S-мозаїки» в екології та «клітини Вігнера–Зейтса» у кристалографії. Проте термінологія вищезазваних понять в останній час уніфікована і в більшості галузей вживається термін «клітина Вороного», «комірка Вороного», тому що саме Георгій Вороний дав математичний апарат для вивчення цього об'єкту.

Діаграми Вороного широко застосовуються у ряді нещодавно створених напрямів науки, про які йшла мова вище (див. цитату О. Ейчхолдера і Ф. Ауренхаммера), а також і в багатьох дослідженнях з мікробіології, радіаційної фізики, фізичної хімії, астрономії, астрофізики, кристалографії, медицини, археології, антропології тощо.

Зазначимо, що феномен Г. Вороного полягає не тільки у виключній популярності серед сучас-



Георгій Феодосієвич Вороной

них дослідників його останньої наукової роботи. Наукові праці Г. Вороного головним чином стосувалися теорії чисел. Друкованих статей у нього було небагато (дванадцять), але майже всі вони послужили поштовхом для виникнення і розвитку нових напрямів теорії чисел – аналітичної теорії чисел, алгебраїчної теорії чисел, а також в теорії підсумовування розбіжних рядів, які зараз продовжують активно розвиватися. Георгій Вороной разом із німецьким математиком **Т. Мінковським** (1864–1909) став засновником нової науки – геометрії чисел. Майже всі наукові праці Г. Вороного використовуються сучасними дослідниками!

У наші дні діаграми Вороного використовуються фахівцями різних галузей знань практично в усіх країнах Європи, США, Канаді, Японії, Австралії, Кореї, Гон-Конгу, Новій Зеландії і т. д. За останні 30 років вийшло кілька ґрунтовних монографій, присвячених діаграмам Вороного, їм присвячено сотні статей. 1992 року у відомому міжнародному видавництві John Wiley and Sons було видано монографію **А. Окабе** (Японія), **Б. Бутс** (Канада) і **К. Сугіхара** (Японія) «Просторові мозаїки. Поняття та застосування діаграм Г. Вороного» (534 стор.), у якій підсумовано основні досягнення в застосуваннях діаграм Г. Вороного і їх численних узагальнень в багатьох наукових і технічних розробках. Книга мала кілька перевидань, і в 2000 році вийшло нове, розширене і доповнене її видання у складі вже чотирьох

авторів (до перших трьох приєднався **С.Н. Чіу**, вчений з Гон Конгу).

У Києві, починаючи від 1993 року, відбулися чотири (раз на п'ять років) міжнародні конференції, присвячені розвитку наукових напрямів, що їх розробляв Г. Вороной. Організовані вони були Інститутом математики НАН України, Національним педагогічним інститутом ім. М.П. Драгоманова та рядом інших наукових освітніх установ України.

Від початку 2004 року в різних країнах світу відбуваються щорічні міжнародні симпозиуми, присвячені діаграмам Вороного (ISVD): в Японії (Токіо, 2004), Кореї (Сеул, 2005, симпозиум був організований Дослідницьким центром з діаграм Вороного, створеним в Сеулі), Канаді (Калгарі, 2006), Великій Британії (Гламорган, 2007).

У 2008 році, ювілейному для Г. Вороного, за пропозицією організаторів ISVD, обидві конференції об'єдналися і відбулися в Києві. У 2013 році планується (редакційна правка – відбулась) знову спільна конференція у Києві. Усі міжнародні Київські конференції закінчувалися невеличкими подорожами учасників до малої батьківщини Георгія Вороного – села Журавки Варвинського району на Чернігівщині і місця його поховання з влаштуванням панахиди на могилі вченого. Зараз в селі розпочато створення музею-кімнати Георгія Вороного і його родини, а також загального музейного комплексу з історії Журавки. ■