ГЕОМЕТРІЯ ЧИСЕЛ ГЕОРГІЯ ВОРОНОГО

Сучасні дослідження з теорії чисел у доступному вигляду для тих, хто цікавиться математикою

У творчості ***Георгія Феодосієвича Вороного*** завжди відчувався вплив геометрії, і в його роботі з квадратичних форм це проявлялося найбільш явно, ніж у інших його дослідженнях.

Після публікації листування Ферма і арифметичних досліджень Гаусса квадратичні форми опинилися серед тих об'єктів теорії чисел, які викликали найбільший інтерес. По-перше, їх досліджували у зв'язку з діофантовими рівняннями. Далі, класичний результат Ферма стверджує, що кожне просте число p = 1mod4 має зображення у вигляді суми двох цілих квадратів, як от

$$\mathbf{5 = 2^2 + 1^2,\ 97 = 9^2 + 4^2,\ 30\,449 = 100^2 + 143^2, \ldots;}$$

Однак прості числа виду $p = 3 \bmod 4$ не можна подати в такий спосіб. Більше того, ціле число n можна подати у вигляді суми двох квадратів тоді й лише тоді, коли усі прості дільники $p = 3 \bmod 4$ мають парну кратність. У подальшому розвитку алгебраїчної теорії чисел квадратичні форми виявилися важливими в задачі опису структури алгебраїчних цілих чисел. Наприклад, ми можемо розглянути гауссове числове поле

$$\mathbf{Q(i) = \{a + bi : a, b \in Q\},\ \text{де}\ i = \sqrt{-1}.}$$

Його кільцем цілих чисел є Z[i], а норма його елементів задається квадратичною формою $(a, b) \to a^2 + b^2$. Отже, згідно з результатом Ферма, цілі прості числа $p = 3 \bmod 4$ відповідають простим ідеалам у $Q(i)$, тоді як прості числа $p = 1 \bmod 4$ розкладаються в добуток двох простих. Це також пов'язує число зображень n у вигляді суми двох цілих квадратів із задачею про круг. Справді, ряд у (25) є аналогом $\zeta(s)$ для $Q(i)$, так званої дзета-функції ***Дедекінда***. Із задачею про круг пов'язана й рівність

$$\mathbf{1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \pm \ldots = \pi / 4,}$$

яка приписується ***Грегорі*** й ***Ляйбніцу***.

Третя, не менш важлива властивість квадратичних форм полягає в локально-глобальних принципах, встановлених ***Мінковським*** [66] і ***Гассе*** [43] (див. [90]). Числові поля й функціональні поля кривих над скінченними полями називаються «*глобальними*», а розширення глобальних полів із дискретною нормою й скінченним полем залишків називаються «*локальними*». Локальні поля містять значну інформацію про вихідне глобальне поле: ідея локально-глобального принципу полягає в зборі інформації про всі локальні поля для отримання інформації про глобальне поле. Цей принцип надзвичайно плідний, і відома теорема Гассе–Мінковського дає таку характеристику квадратичних форм: квадратична форма над Q ізотропна (тобто має нетривіальні нулі) тоді й лише тоді, коли вона ізотропна над усіма p-адичними полями і R. У Санкт-Петербурзькій школі з теорії чисел квадратичні форми, зокрема, інтенсивно вивчали ***Коркін, Золотарьов*** і ***Марков*** (див. [20]).

У революційні 1905–1907 роки варшавський університет було закрито, тож від 1905 року до осені 1908-го, коли викладання у Варшаві поновилося, Г. Вороний і деякі його колеги жили і працювали в Новочеркаську в Росії. Георгій Вороний був деканом факультету механіки в політехнічному інституті. У 1907 році його обрали членом-кореспондентом Санкт-Петербурзької академії наук. Незважаючи на ці обов'язки і відзнаки, Г. Вороний багато працював і опублікував дві великі статті (107, 108) з квадратичних форм. Це його останні прижиттєві публікації – і, можливо, найбільш вражаючі в його доробку. Їх можна вважати основоположними в теорії квадратичних форм. Ними Г. Вороний фактично (поряд із Мінковським) заснував геометрію чисел. Ця теорія ґрунтується на зв'язку між опуклими множинами та ґратками і має численні застосування в діофантовому аналізі. Інтуїція й метод доведення цієї теорії за своєю природою геометричні, однак застосування арифметичні. Вороний запропонував такі важливі нові поняття, як досконала квадратична форма і знаменита тепер «*комірка Вороного*».

Коротко розповімо про останнє поняття, позаяк воно стало фундаментальним в різноманітних математичних дисциплінах та інших науках. У багатьох випадках важливо розглядати загальні ґратки, ніж Z^2. Ґратка Λ складається з векторних сум вигляду

$$\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n, \ \alpha_i \in \mathbf{Z},$$

де $z_1, \ldots, z_n$ – n лінійно незалежних векторів із R^n. Така ґратка є групою, ізоморфною Z^n. Нехай A – $n\times n$ матриця, стовпчиками якої є вектори z_j. Тоді $A^T A$ – додатна симетрична матриця, а

$$\mathbf{R^n} \ni \mathbf{x} \to \mathbf{x^T A^T A x}$$

– додатно визначена квадратична форма. Можна й навпаки – спочатку взяти додатну квадратичну форму й очевидним чином визначити асоційовану з нею ґратку. Однією з важливих рис ґраток є їхня симетрія. Тому ми маємо вивчати дію загальної лінійної групи $GL_n(Z)$ $n\times n$ матриць з цілими коефіцієнтами і визначником 1, зокрема в теорії еліптичних кривих і автоморфних форм. Існує тісний зв'язок між ґратками і замощеннями. Тут комірки Вороного входять у гру. Нехай дано ґратку $\Lambda\subset R^n$, для кожної точки $z \in \Lambda$ ґратки визначимо комірку Вороного $V(z)$ як множину векторів $x \in R^n$, для яких x ближчий до z ніж для кожної іншої точки ґратки Λ. Легко бачити, що довільна комірка $V(z)$ є опуклим многогранником і що їхнє об'єднання дає діз'юнктне замощення усього простору R^n. Детальніше про це можна прочитати в монографії ***Ковея*** і ***Слоена*** [18]. У майже тривіальному прикладі цілочислової ґратки Z^2 на евклідовій площині комірками Вороного є квадрати, які Гаус розглядав у своїй оцінці для числа точок ґратки всередині даного круга (див. рис. 3). Чому ця ідея також використовується для ґраток, і, відповідно, в теорії квадратичних форм?

Важливим аспектом теорії чисел є класифікація квадратичних форм. Слідуючи Лагранжу, бінарну квадратичну форму

$$(x, y) \to ax^2 + 2bxy + cy^2 \ \text{з} \ a, b, c \in \mathbf{Z}$$

називають «*зведеною*», якщо $0 < 2b \le a$ і $2b \le c$. Така форма є представником свого класу еквівалентності відносно унімодулярних перетворень $M \in GL_2(Z)$. Наприклад, квадратичні форми $x^2 + y^2$ *і* $5x^2 + 6xy + 2y^2$ еквівалентні; перша зведена, а друга – ні. Діріхле [24] знову (!) зауважив, що ці умови завжди задовольняються, коли базисні вектори z_1, z_2 для відповідної ґратки вибрані найменшої довжини з невід'ємним скалярним добутком. Більше того, він зауважив, що перпендикулярні бісектриси $\pm z_1$, $\pm z_2$ і $\pm (z_1 - z_2)$ визначають опуклий многокутник (область Діріхле), який є не що інше, як область площини, ближча до початку координат, ніж до довільної іншої точки ґратки. Легко бачити, що цей многокутник є прямокутником або шестикутником залежно від того, дорівнює скалярний добуток (z_1, z_2) нулю чи ні. Вороний розширив це поняття на ґратки довільної розмірності – комірки Вороного є узагальненням області Діріхле.

Щільність регулярного сферичного пакування, коли центри сфер є точками еквідистантної ґратки Λ, пропорційно ермітовому інваріанту $\gamma(\Lambda)$ останньої. Ґратки, на яких досягається локальний максимум щільності, так звані «*екстремальні ґратки*», характеризуються знаменитою теоремою Вороного в термінах досконалості і евтаксії. Детальніше з цим можна ознайомитися за роботою ***Касселса*** [12] і роботою ***Сенешаль*** [82] з теорії ґраток Вороного. Наукове дослідження праць Вороного (107, 108), разом із опублікованими його нотатками і щоденником (написаними незадовго до смерті), провів ***Вєнков*** [95]. У цих нотатках Г. Вороний розглядає проблему розкладу невизначеної квадратичної форми в суму додатно і від'ємно визначених форм.

Тепер математики розглядають комірки Вороного для довільних дискретних точкових множин. Ця вільність привела до цікавих і досить несподіваних застосувань цього поняття в обчислювальній дискретній геометрії (див. ***Матоушек*** [64]), а також у багатьох інших областях науки (наприклад, у біології, фізиці, хімії і кристалографії, а також у географії, метеорології і навіть астрономії). Мабуть, найперше наочне застосування цього поняття комірок Вороного є малюнок сонячної системи в *Principia Philosophiae* ***Декарта*** 1644 року (пор. Матоушек [64], стор. 120). Однак строго математичне означення вперше дали Діріхле [24] і Вороний [108].

Певно, найбільш вражаючим результатом недавнього минулого з геометрії чисел стало доведення гіпотези Кеплера, що серед усіх сферичних пакувань у тривимірному просторі шестикутне сферичне і кубічно-центроване пакування є найщільнішими. Те саме засвідчує золоте гіпотетичне пакування, оскільки кожен продавець фруктів саме так і пакує апельсини. Доведення для всіх ґраткових пакувань уперше одержав Ґаус, який показав, що оптимальна щільність пакування в R^3 є $\pi / \sqrt{18} \approx 0.74$, і що це значення досягається на шестикутній і на кубічно-центрованій ґратках. Однак було незрозуміло, чому не існує неправильного пакування куль з більшою щільністю. Усі спроби довести твердження Кеплера в загальному випадку зазнавали невдач протягом багатьох століть. Число дотиків визначається як кількість еквівалентних n-вимірних гіперкуль, які можуть дотикатися до еквівалентної гіперкулі без жодних перетинів. У випадку розмірності ***3*** числом дотиків є ***12***. Це навело ***Ф. Тота*** [29] на думку, що в кожному пакуванні одиничними кулями об'єм довільної комірки Вороного навколо довільної сфери щонайменше такий же, як і об'єм правильного додекаедра з одиничним радіусом вписаної сфери. Це твердження відоме як додекаедральна гіпотеза. З неї випливає верхня оцінка ***0.75469*** щільності сферичного пакування, а відтак і оцінка найщільнішого можливого сферичного пакування. Проте цього недостатньо для доведення гіпотези Кеплера.

У 1998 році ***Хейлс*** [36] анонсував доведення гіпотези Кеплера. Окрім винятковості, доведення Хейлса містить величезну кількість обчислень. У ньому ідея комірок Вороного також відіграла вирішальну роль (див. опис доведення в [35]). Після тривалого рецензування доведення Хейлса було зрештою опубліковане зі скороченнями у вигляді статті [36] обсягом ***121*** стор. (повне доведення надруковано в серії статей, частково у співаторстві з ***С.П. Фергюсоном***, у 36 томі *Discrete and Computational Geometry*). Додекаедральну гіпотезу довели в 2002 році Хейлс і ***МакЛафлін*** [37].

Епілог

Георгій Феодосійович Вороний помер 20 листопада (7 листопада за старим стилем) 1908 року у Варшаві; похований у його рідній Журавці. Вважається, що частина його робіт з невизначених квадратичних форм, закінченої в останні дні, втрачена (пор. [78]). Це непоправна втрата для математики. Інші статті [110, 111] було знайдено і опубліковано після його смерті.

Роботи Г.Ф Вороного дали сильний поштовх розвитку теорії чисел у XX столітті, і ми вважаємо, що у найближчому майбутньому це не зміниться. Ми вже розповіли, як його дослідження були продовжені багатьма математиками з усього світу і як його ідеї стали фундаментальними в нових областях науки, що надалі розвиваються. Однак Г. Вороний значно вплинув на математику іншим способом, і, певно, розповідь про це гарно завершить нашу мандрівку його математичною біографією.

Серед студентів Вороного у Ягелонському університеті був видатний ***Вацлав Серпінський***. У 1903 році факультет математики і фізики Варшавського університету запропонував нагороду за кращу студентську роботу про внесок Г. Вороного в теорію чисел. Наступного року золоту медаль у цьому конкурсі отримав Серпінський за дисертацію, присвячену задачі про круг; проте з політичних причин його результати (24) побачили світ лише в 1906 році (спогади самого Серпінського про ці події описані у статті ***Роткевича*** [77]). Після закінчення університету Серпінський тимчасово працював шкільним вчителем математики і фізики у Варшаві, але пізніше переїхав до Кракова для навчання в докторантурі Ягеллонського університету. Тут він відвідував лекції ***Заремби*** з математики, вивчаючи додатково астрономію і філософію. У 1906 році він написав дисертацію з проблем точок ґратки, науковими консультантами його були Вороний і Заремба. Серпінський отримав ступінь доктора і в 1908 році був направлений до Львівського університету. Серпінський заснував сильну школу з теорії чисел; серед його студентів були Шінцель (який також написав

ISSN 1819-7329. Світогляд, 2024, № 6 (110)

дуже інформативну статтю [81] про варшавський період життя Вороного) і Роткєвич.

У Росії деякі напрямки досліджень Г. Вороного продовжив ***Іван Матвійович Виноградов***, який (як і до нього Вороний) був студентом Маркова. Тут слід згадати узагальнення Виноградовим результатів Вороного в проблемі дільників, яке дозволило йому отримати дуже хороші оцінки для числа точок ґратки між даною кривою $y = f(x)$ (а не лише гіперболою чи дугою кола) і віссю x; зокрема, його оцінка залишкового члена в проблемі дільників залишалася тривалий час найкращою. Виноградов прославився своїм розв'язанням тернарної проблеми Гольдбаха: кожне достатньо велике непарне ціле число можна подати у вигляді суми трьох простих чисел (див. [20]). Бінарна проблема Гольдбаха – чи кожне парне ціле число $N \geq 4$ можна подати у вигляді суми двох простих чисел – досі відкрита (і схоже, далека від розв'язання сучасними методами).

За межами Польщі та Росії внесок Г. Вороного в теорію чисел був забутий на майже тридцять років (можливо, з огляду на політичну ситуацію в Європі). Проте все змінилося в 1932 році після публікації статті Г. Вороного [102] в «Annals of Mathematics». У 1947 році ***Делоне*** [20] написав книгу про Санкт-Петербурзьку школу з теорії чисел і присвятив главу роботі Г. Вороного; нещодавно ця книга була перекладена англійською і опублікована Американським математичним товариством. У 1952–53 роках було опубліковано зібрання праць Г. Вороного [109]. Три томи включали кілька неопублікованих робіт, зокрема статті [110;111] про невизначені квадратичні форми (також опубліковані в українському математичному журналі) і деякі нотатки щодо останньої теореми Ферма.

Відтоді пам'ять про Г. Ф. Вороного живе, а інтерес до його математичного доробку добре відображений у частих конференціях, присвячених тим галузям математики, в які Вороний вкладав свої яскраві ідеї.

Йорн Штойдінг
Jörn Steuding, Institut für Mathematik,
Universität Würzburg
Am Hubland, 97 074 Wurzburg Germany
Переклад з англійської ***В'ячеслава Бабича***

Література:

[12] J.W.S. Cassels, An introduction to the geometry of numbers, Springer 1971 (рос. перекл.: Дж. Касселс. Введение в геометрию чисел, М., 1965).

[18] J. H. Conway, N.J.A. Sloane, Sphere packings, lattices, and groups, Springer 1988 (рос. перекл.: Дж. Конвэй, Н. Слоэн, Упаковки шаров, решетки и группы, Т. 1, 2. М., 1991).

[20] Б.Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. М.,Л., 1947 (англ. перекл.: B.N. Delone, The St. Petersburg School of Number Theory, AMS, 2005)

[24] P.G.L. Dirichlet, Uber die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen, J. reine angew. Math. 40 (1850), 209-227.

[29] L. Fejes Toth, Uber die dichteste Kugellagerung, Math. Z. 48 (1943), 676-684.

[35] T.C. Hales, Cannonballs and honeycombs, Notices Am. Math. Soc. 47 (2000), 440-449.

[36] T.C. Hales,A proof of the Kepler conjecture, Ann. Math. 162 (2005), 1065-1185.

[43] H. Hasse, Uber die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Korper der rationalen Zahlen, J. reine angew. Math. 152 (1923), 129-148.

[64] J. Matousek, Lectures on discrete geometry, Springer, 2002.

[66] H. Minkowski, Uber die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten ineinander transformiert werden können, J. reine angew. Math. 106 (1890), 5-26.

[77] A. Rotkiewics, W. Sierpinski's works on the theory of numbers, Rend. Circ. Mat. Palermo 21 (1972), 5-24

[78] Г. М. Сфкович, М.П. Слободенюк, Георгій Федосійович Вороний (до сторіччя від дня народження шістдесятиріччя смерті), Укр. матем. журн. 20 (1968), 826-829 (англ. перекл.: Ukr. Math. J. 20 (1968), 713-715 (1968)).

[81] F/ Schinzel, The Warsaw period of Voronoi's creative work, in: Voronoi's Impact on Modern Science. Book I. Eds.: P.Engel and H. Syta. - Kyiv: Institute of Mathematics; - Proc. Inst. math. Nat. Acad. Sci. Ukr., Math. & Appl/ 21 (1998), 29-33.

[82] M. Senechal, Introduction to lattice geometry, in: 'From Number theory to Physics', M. Waldschmidt et. al. (eds.), Springer 1992, 476-495.

[90] J. Steuding, Diophantine Analysic, Chapman-Hall/CRC Press, 2005.

[95] Б.А. Венков, О научном дневнике Г.Ф. Вороного, Укр. матем. журн. 3 (1951), 279-289.

[102] J. Tamarkin, Extension of the notion of the limit of the sum of terms of an infinite eries - remarks of the translator. (English), Ann. Math. 33 (1932), 423-428.

[107] G.F. Voronoi, Nouvelles applications des parametres continus a la thorie des formes quadratiques. Premiere memorie: sur quelques proprietdes formes quadratiques positive paraites, J. reine angew. Math. 133 (1907/08), 97-178.

[108] G.F. Voronoi, Nouvelles applications des parametres continus a la thorie des formes quadratiques. Deuxieme memoire: recherches sur les parallelloedres primitifs, J. reine angew. Math. 134 (1908), 198-287; 136 (1909), 67-178. Новые приложения непрерывных параметров к теории квадратичных форм. Второй мемуар. Исследования о примитивных параллелоэдрах, Собр. соч., Т.II (1952)б 239-368.

[109] Г.Ф. Вороной, Собрание сочинений, Т. I-III, К., 1952-53

[110] Г.Ф. Вороной, Заметки о неопределенных квадратичных формах, Укр. матем. журн. 3 (1951), 240-271.

[111] Г.Ф. Вороной, О неопределенных квадратичных формах, Укр. матем. журн. 3 (1951), 272-278.