

ЗАДАЧА КОЛЛАТЦА

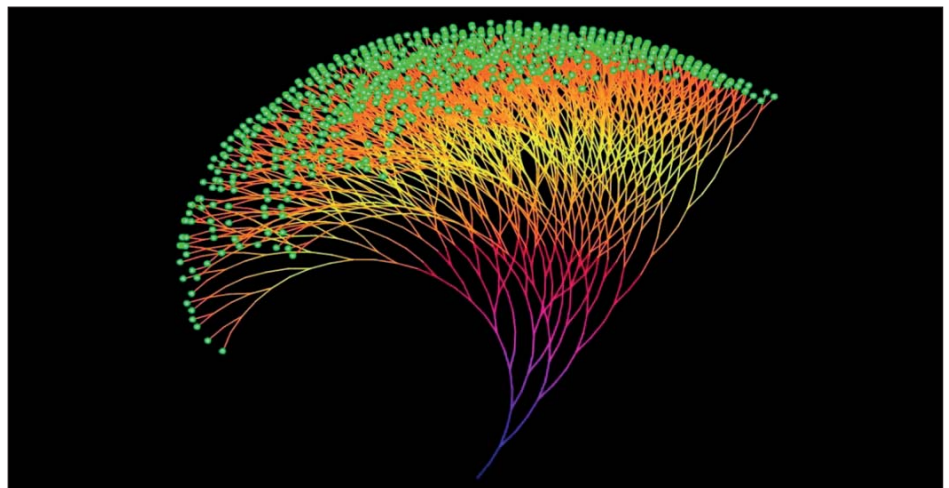


Петро Кособуцький
доктор фіз.-мат. наук,
професор
Національного університету
«Львівська політехніка»,
м. Львів

Рік 2022 – трагічний, адже війна, і оптимістичний, адже вперше на Міжнародному конгресі математиків українська математикня **Марина Вязовська** нагороджена медаллю Філдса (англ. Fields Medal) – найпрестижнішою відзнакою в математиці. Номінантка – фахівчиня в галузі теорії чисел, де відомий ряд цікавих задач, одна з яких – **задача Коллатца** [1]. За кордоном ця задача і сьогодні привертає увагу, в той час як одна з останніх україномовних праць була опублікована науковцем Інституту кібернетики НАН України **Анатолієм Грубим** ще в 2012 році [2].

Трохи про історичний аспект самої задачі. Німецький математик **Лотар Коллатц Коллатц**, викладаючи математику в Гамбургському університеті, сформулював її студентам ще в 1937 році. Зміст задачі такий: Беремо довільне додатне натуральне число N . Якщо воно парне (*even*), то ділимо його на 2, а якщо непарне (*odd*), то множимо на 3 та додаємо до результату 1 (одержимо $3n + 1$). Над одержаним числом виконуємо ті ж самі дії доти, доки перетворення не завершиться одиницею. Так і звучить сьогодні сама гіпотеза Коллатца: яке б початкове число ми не взяли, завжди рано чи пізно ітераційний процес перетворення числа завершиться одиницею. З іншими цікавими математичними задачами можна ознайомитись в [3].

Довгий час сама по собі задача Коллатца не привертала до себе особливої уваги, доки в 50-х роках минулого століття **Хельмуд Хассе** (Сіракузький університет) не сформулював її у вигляді математичної гри, віднісши тим самим задачу до числових послідовностей. Коли в 1972 році американський математик-аматор **Мартін Гарднер** сформулював її як математичну головоломку, інтерес до гіпотези Коллатца значно зріс і в подальшому задачу Коллатца намагались розв'язати **Станіслав Улам** (співавтор відомого в математиці методу Монте-Карло, випускник Львівської політехніки, працював в групі **Р. Фейнмана** над Мангетенським проектом [4]), угорський математик **Пал Ердеш** та інші. Сьогодні гіпотеза Коллатца відома ще як «сіракузька проблема»; «гіпотеза Улама»; «дилема $3n+1$ »; «гіпотеза градини», оскільки графіки послідовностей чимось нагадують траєкторії руху градинок в атмосфері; «проблема Какутані» (за іменем японського математика **С. Какутані**); «гіпотеза Тузйтса» (за іменем англійського математика **Б. Тузйтса**); «алгоритм Хассе» (за іменем німецького математика **Х. Хассе**) [5].



Для натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$ виконання гіпотези Коллатца підтверджено аж до числа $n = 1152821504606846976$ [6]. А коли були створені сучасні відеокарти для одночасної обробки і обчислення послідовностей на платформі BOINC (англ. Berkeley Open Infrastructure for Network Computing), то для перевірки гіпотези Коллатца на великих числах був запущений проект добровільних розподілених обчислень «Collatz Conjecture» (серпень 2009 р.). BOINC – це відкрите програмне забезпечення для організації відомої GRID- технології. GRID-технологія насправді не є технологією паралельних обчислень, в її задачу входить лише координація використаних обчислювальних ресурсів. В Україні для розробки GRID проекту також була створена команда математиків «Українська команда розподілених обчислень». В 2004 році на її основі був створений Український національний GRID [7], який у травні 2011 році став повноправним учасником міжнародного проекту NorduGRID.

Незважаючи на те, що були залучені потужні обчислювальні ресурси, все ж гіпотеза Коллатца залишається не доведеною. Проблема полягає в тому, що ні Коллатц, ні інші вчені так і не знайшли рішення і не довели, чи завершуються одиницею перетворення усіх натуральних чисел, хоча сама одиниця підтверджена для величин порядку 10-ти в 28-му степені. Але алгоритм, що доводить її доказ, поки що не знайдений, незважаючи на те, що про це повідомлялось не один раз.

Вперше про таке рішення сповістив латиноамериканський математик *Джон Кадоган* в 2006 році [8]. Але в 2009 році *Ігор Рисцов* (Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського". Київ, Україна) [9] вказав на допущені Кадоганом помилки. Сьогодні докази гіпотези Коллатца аналізуються професійно, а з відповідними результатами можна ознайомитись на сайтах *Л. Гріна* [10] та *Ф. Галето* [11], де найбільший інтерес викликає підхід [12]. А 8 вересня 2019 року відомий математик Каліфорнійського університету *Теренс Тао*, також нагороджений медаллю Філдса, опублікував працю [13], в якій довів, що гіпотеза Коллатца, щонайменше, "майже" правильна на "майже" для всіх натуральних чисел.

Тепер перейдемо до самої задачі і дамо означення послідовності Коллатца. Такою будемо вважати послідовність, числа якої обчислюються за алгоритмом

$$C_n^+ = \begin{cases} n/2 & \text{if } n \text{ is even,} \\ 3n+1 & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \quad (1)$$

В інтернеті доступний обчислювальний ресурс Collatz Calculator $3x+1$ [14], за допомогою якого кожен в змозі переконатись в тому, що яке число не брати, послідовність Коллатца завершується числом, яке менше початкового, тобто все одно її наповнення прямує до одиничного елементу. Наші викладки ми також завершимо «сильним» аргументом на користь гіпотези Коллатца.

А зараз продемонструємо обґрунтування задачі Коллатца з точки зору добре відомих закономірностей степеневого розкриття біному Ньютона

$$: \quad (\theta + \theta)^s = \theta^s 2^s : \quad (2)$$

Тут $\theta \in \Theta$ множина додатних цілих непарних чисел $\theta \geq 1$, а саме число θ відіграватиме роль так званого індексу послідовності Коллатца.

Таблиця

Трикутник Паскаля	2^n	$\begin{cases} m_{\theta,n} = \frac{\theta \cdot 2^n - 1}{3} \Rightarrow 3m_{\theta,n} + 1 = \theta \cdot 2^n \\ p_{\theta,n} = \frac{\theta \cdot 2^n + 1}{3} \Rightarrow 3p_{\theta,n} - 1 = \theta \cdot 2^n \end{cases}$
1	2 0	$m_{1,0} = (1-1)/3 = 0$ $\Rightarrow 3m_{1,0} + 1 = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \cdot 2^0$
1 1	2 1	$p_{1,1} = (2+1)/3 = 1$ $\Rightarrow 3p_{1,1} - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 1 \cdot 2^1$
1 2 1	2 2	$m_{1,2} = (4-1)/3 = 1$ $\Rightarrow 3m_{1,2} + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 1 \cdot 2^2$
1 3 3 1	2 3	$p_{1,3} = (8+1)/3 = 3$ $\Rightarrow 3p_{1,3} - 1 = 3 \cdot 3 - 1 = 1 \cdot 2^3$
1 4 6 4 1	2 4	$m_{1,4} = (16-1)/3 = 5$ $\Rightarrow 3m_{1,4} + 1 = 3 \cdot 5 + 1 = 1 \cdot 2^4$
1 5 10 10 5 1	2 5	$p_{1,5} = (32+1)/3 = 11$ $\Rightarrow 3p_{1,5} - 1 = 3 \cdot 11 - 1 = 1 \cdot 2^5$
1 6 15 20 15 6 1	2 6	$m_{1,6} = (64-1)/3 = 21$ $\Rightarrow 3m_{1,6} + 1 = 3 \cdot 21 + 1 = 1 \cdot 2^6$
1 7 21 35 35 21 7 1	2 7	$p_{1,7} = (128+1)/3 = 43$ $\Rightarrow 3p_{1,7} - 1 = 3 \cdot 43 - 1 = 1 \cdot 2^7$
...

Отже, якщо індекс $\theta=1$, то суми біноміальних коефіцієнтів

$$(1+1)^s = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} = 2^s, \quad s = 0,1,2,3,4,\dots \quad (3)$$

утворюють добре відомий в математиці [5] так званий «трикутник Паскаля» (ліва колонка в Таблиці). Суми чисел в рядках трикутника Паскаля, в свою чергу, формують послідовність із степеней двійки типу:

$$2^s \rightarrow 2^{s-1} \rightarrow \dots \rightarrow 2^4 \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2^1 \rightarrow 2^0, \quad s = 0,1,2,3,4,\dots \quad (4)$$

Саме послідовність на двійковій основі (4) в алгоритмі (1) дозволяє до парних чисел застосувати процедуру ділення на два доти, доки результатом не буде непарне число у випадках $\theta \neq 1$, та одиниці у випадку $\theta=1$. Отже, лише послідовність з індексом $\theta=1$ має одиничний елемент. За відомою класифікацією послідовностей OEIS [16] послідовність $\{2^s\}$ рекурентна, другого порядку типу

$$J_{s+2} = J_{s+1} + 2J_s, \quad (5)$$

із фіксованими першими двома значеннями

$$J_0 = 1, J_1 = 2, \quad (6)$$

які відіграють роль так званих «початкових умов задачі». З точки зору задачі Коллатца (1) рекурентна послідовність $\{2^s\}$ представляє інтерес ще й тому, що, як показано в Таблиці, кожен її член можна перетворити як $3j \pm 1$:

$$\begin{array}{cccccc}
 3 \cdot 1 - 1 & 3 \cdot 3 - 1 & 3 \cdot 11 - 1 & 3 \cdot 43 - 1 & 3 \cdot 171 - 1, \dots \Rightarrow C_n^- = 3n - 1, \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 2^0, & 2^1, & 2^2, & 2^4, & 2^5, & 2^6, & 2^7, & 2^8, & 2^9, & 2^{10}, \dots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 3 \cdot 0 + 1 & 3 \cdot 1 + 1 & 3 \cdot 5 + 1 & 3 \cdot 21 + 1 & 3 \cdot 85 + 1 & 3 \cdot 341 + 1, \dots \Rightarrow C_n^+ = 3n + 1.
 \end{array} \quad (7)$$

і одержати послідовність непарних чисел j_s :

$$\begin{array}{l}
 s \quad 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \\
 \{j_s\} \quad 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, \dots
 \end{array} \quad (8)$$

Послідовність (8) також рекурентна, другого порядку, а її члени задовольняють рівність

$$2^s = 3 \cdot j_s \mp 1 \quad (9)$$

та відома як послідовність Якобсталя [16].

Отже, числа послідовності (8) відіграють роль своєрідних чисел-комунікаторів між членами послідовності з індексом $\theta=1$ та аналогічними послідовностями з індексами $\theta \neq 1$, що утворюються в процесі перетворення натуральних чисел за алгоритмом (1). Обґрунтуємо цю тезу.

Для цього звернемось до відомої в теорії чисел математичної моделі у вигляді спіралі Улама [17]. Як показано на рис. 1, на спіралі, що розгортається за годинниковою стрілкою, непарні числа j_s (8) розташовуються вздовж різних діагоналей і обчислюються як

$$4i+3 \text{ та } 4i+5, \quad i=0,1,2,3,\dots \quad (10)$$

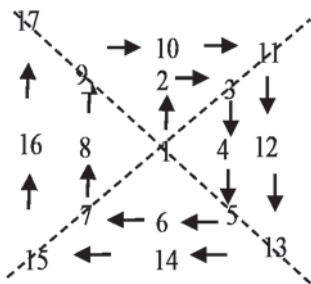


Рис. 1. Спіраль Улама

Це свідчить про те, що до послідовності $\{j_s\}$ можна застосувати відомий в математиці метод бісекції і розділити її на дві підпослідовності, за парними та непарними степенями s .

Підпослідовність $\{m_s\}$ із парними степенями

$$\begin{array}{l}
 s \quad 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots \\
 \{m_s\} \quad 0, 1, 5, 21, 85, 341, \dots
 \end{array} \quad (11)$$

періодична по індексу s із періодом $T_a=2$, а її члени обчислюються за формулою

$$m_{s+T_a} = 2^{T_a} m_s - \frac{(1-2^{T_a})}{3} \quad (12)$$

де початковий елемент дорівнює $m_0=0$. За кваліфікацією OEIS, підпослідовність $\{m_s\}$ (9) відома як OEIS A007583. Друга підпослідовність $\{p_s\}$ із членами непарних степеней $s=1,3,5,7,\dots$

$$\begin{array}{l}
 s \quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \\
 \{p_s\} \quad 1, 3, 11, 43, 171, 683, \dots
 \end{array} \quad (13)$$

також періодична із періодом $T_a=2$. Тому її члени обчислюються за аналогічною формулою

$$p_{s+T_a} = 2^{T_a} p_s + \frac{(1-2^{T_a})}{3} \quad (14)$$

де перший елемент дорівнює $p_{T_a/2}$. За кваліфікацією OEIS, підпослідовність $\{p_s\}$ (13) відома як OEIS A002450.

Отже, шляхом степеневого розкриття бінома Ньютона $(1+1)^n$ через властивості сум чисел в рядках «трикутника Паскаля», нам вдалось сформулювати як послідовність $\{2^s\}$ із індексом $\theta=1$ та одиничним елементом, щоб в (1) реалізувати процедуру ділення на два парного числа, так і сформулювати підпослідовності непарних чисел $\{m_s\}$ та $\{p_s\}$. Вузли на послідовності $\{2^s\}$ із числами $\{m_s\}$ та $\{p_s\}$ через перетворення (9) забезпечують ефект «злиття» з основною послідовністю $\theta=1$, інших послідовностей $\theta>1$. Відповідна трансформація за участю чисел-комунікаторів (11) та (13) наведена в правій колонці таблиці.

Таким чином, алгоритм Коллатца можна узагальнити як один:

$$C_{\theta,m}^{\pm} = \begin{cases} m/2 & \text{if } m \text{ is even,} \\ 3m+1 & \text{and } 3m-1 \text{ (if } m \neq 5,7,15 \text{ if } m \text{ is odd,} \end{cases} \quad (15)$$

а за допомогою графів модель (15) зобразити, як це показано на рис.2.

Ця модель нагадує драбинку із різними ширинами сходинок, якщо ширину сходинки пов'язати із кількістю ітерацій, які треба виконати, щоб парне число перетворилось в непарне.

Наприклад, парне число 1816 треба тричі поділити на два, щоб отримати непарне число 227. Тоді послідовність чисел 227,454,980,1816,... можна розглядати як послідовність із індексом $\theta=227$ у вигляді $227 \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots\}$, яка зображена праворуч на тому ж рівні (рис. 2,с). Переходи між сусідніми послідовностями $\theta \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots\}$ зображені стрілками, що символічно ілюструють перетворення $3n-1$ (рис. 2,а) та $3n+1$ (рис.2,б) і вказують в наступній послідовності $\theta \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots\}$ положення парного числа, яке діленням $n/2$ знову перетворюється в непарне число. Найнижчі послідовності відповідають індексу $\theta=1$:

Мультиплікація послідовностей перетвореннями (15) зображена на рис. 3. Тут схематично зображено так зване «дерево Коллатца», стовбуру якого відповідає послідовність $\theta=1$.

Праворуч стовбура, побудовні послідовності (гілки) перетворень функцією $C_{\theta,n}^+$, що генеруються із так званих «вузлів стовбура» з числами типу

$$m_{1,n} = \frac{2^n - 1}{3}, \quad n = 0,2,4,6,\dots$$

Ліворуч стовбура побудовні гілки перетворень функцією $C_{\theta,n}^-$, що генеруються із так званих вузлів стовбура з числами типу

$$p_{1,n} = \frac{2^n + 1}{3}, \quad n = 1,3,5,7,\dots$$

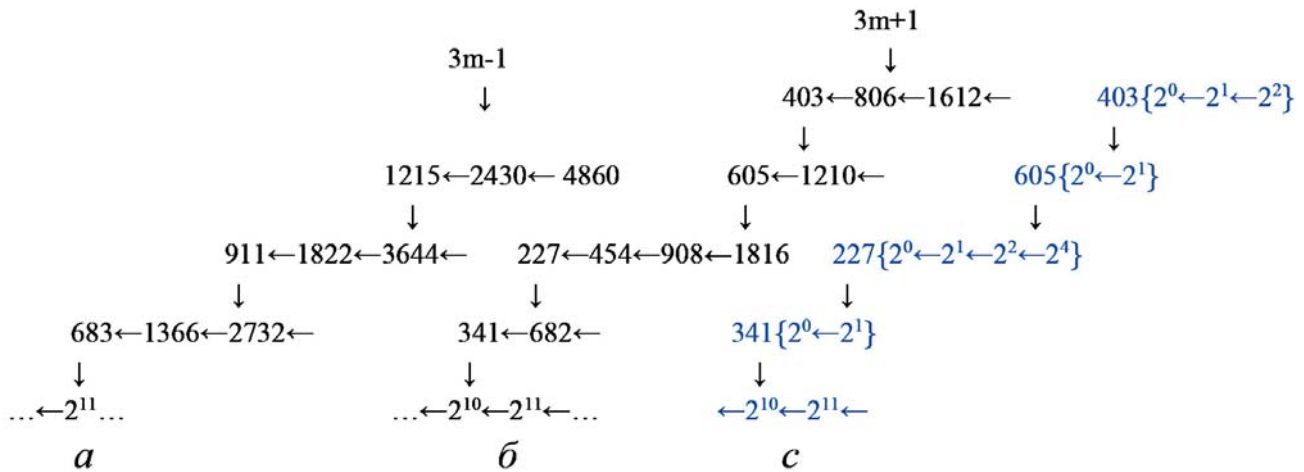


Рис. 2. Модель «сходинок» графів перетворень $3m_{\theta,n}$

Щоб розрізнити обидва процеси, тут індекси $\theta \geq 1$ позначені як θ_m та θ_p . Бачимо, що на завершальному етапі $\theta=1$, послідовності θ_m та θ_p зливаються з $\{2^s\}$. Однак, як відомо [18], послідовності перетворень $3n-1$ чисел $n=5,7,17$ ізольовані від послідовності $\{2^s\}$:

$$\begin{aligned} \text{cycle}_{5 \leftrightarrow 5}^{3n-1} &= \{5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5\}, & \text{cycle}_{7 \leftrightarrow 7}^{3n-1} &= \{7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7\}, & (a) \\ \text{cycle}_{17 \leftrightarrow 17}^{3n-1} &= \{17 \leftrightarrow 25 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow 91 \leftrightarrow 17\} & & & (b) \end{aligned} \quad (16)$$

Це означає, що для перетворення $3n-1$, з точки зору (16) та врахування неізолюваного від послідовності $\{2^s\}$ періодичного циклу

$$\text{cycle}_{1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1}^{3n-1} = \{1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1\}, \quad (17)$$

множина чисел $n \in \mathbb{N}$ розбивається на три підмножини, якщо між собою об'єднати цикли, які перекриваються:

$$\text{cycle}_{5 \leftrightarrow 5}^{3n-1} = \{5 \leftrightarrow 7 \leftrightarrow 5\} \text{ та } \text{cycle}_{7 \leftrightarrow 7}^{3n-1} = \{7 \leftrightarrow 5 \leftrightarrow 7\}$$

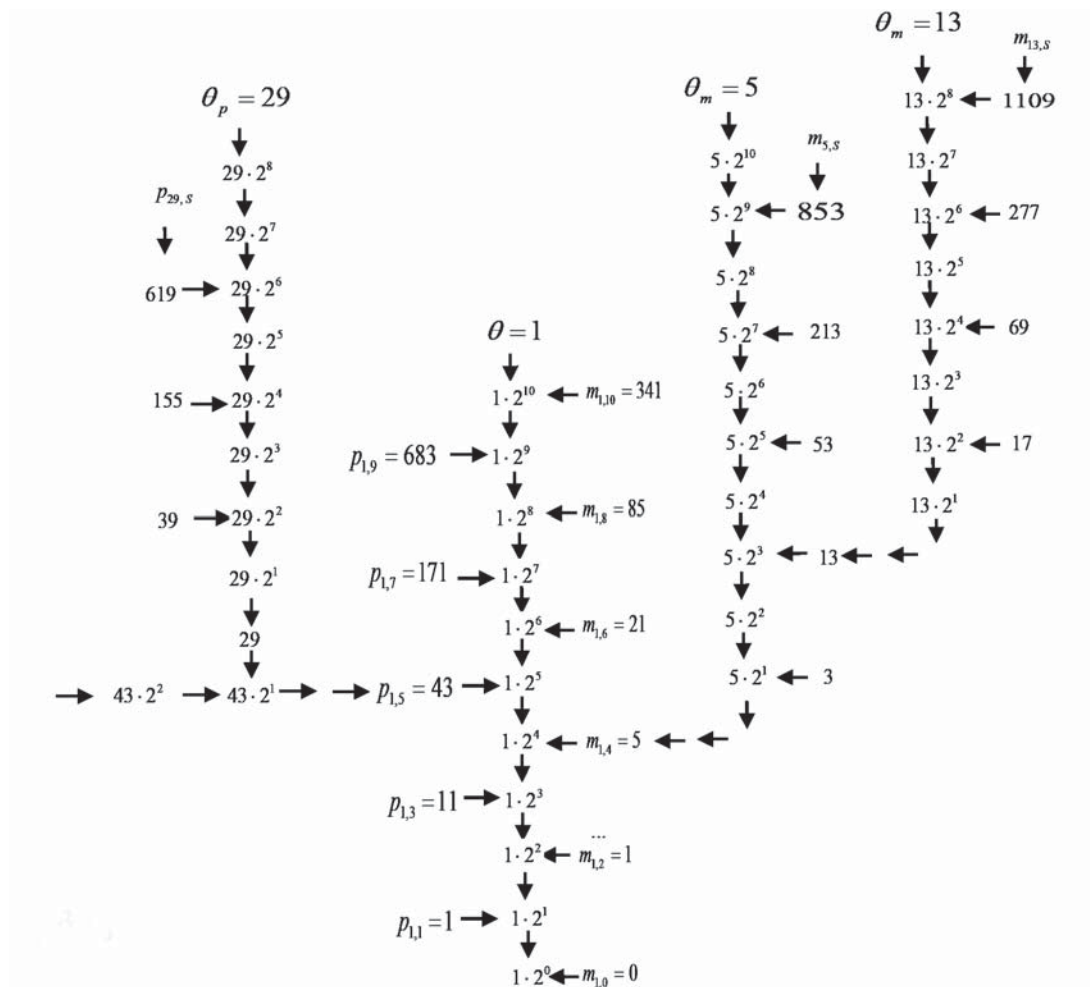
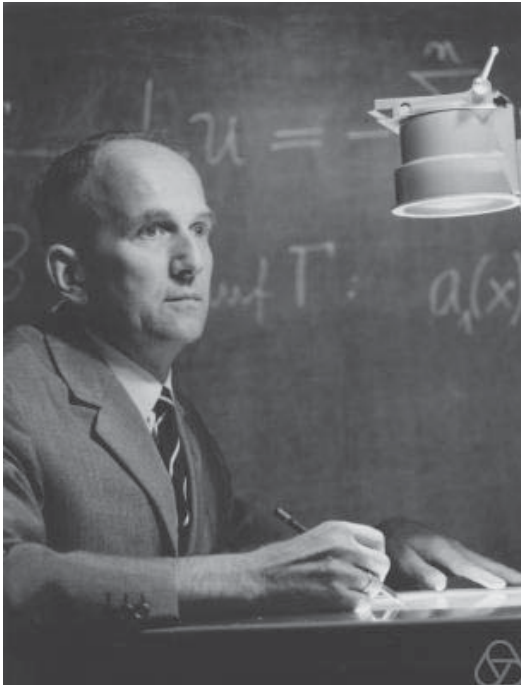


Рис. 3. Мультиплікація послідовностей перетвореннями (15)



Лотар Коллатц
(1910, Арнсберг, Німеччина – 1990, Варна, Болгарія)
німецький математик, професор

Це «сильний» аргумент на користь гіпотези Коллатца і перш ніж його обґрунтувати, доведемо, що цикли (16) ізольовані від стовбура «дерева Коллатца».

Припустимо супротивне. Нехай для чисел $n=5, 7, 17$ справджуються алгоритм:

$$3 \cdot n - 1 = 2^s ;$$

$$3 \cdot 5 = 15 = 2^q + 1 \Rightarrow 7 = 2^{q-1}, \quad (a)$$

$$3 \cdot 7 = 21 = 2^f + 1 \Rightarrow 5 = 2^{f-2}, \quad (b)$$

$$3 \cdot 17 = 51 = 2^g + 1 \Rightarrow 5^2 = 2^{g-1}, \quad (c)$$

(18)

Тоді підставивши (18b) в (18c), одержимо рівність

$$2f - g = 3, \quad (19)$$

яка виконується для значень $f=5$ та $g=7$. Але за умовою задачі $2^5 \neq 3 \cdot 7 - 1$, $2^7 \neq 3 \cdot 17 - 1$, тому допущення (18) не вірне і цикли (16) ізольовані від послідовності $\{2^s\}$.

Зроблений висновок справджується також для числа 5, адже обидва періодичні цикли (16a) включають в свої послідовності числа 5 і 7. Нагадаємо, що числа 3, 5, 17 відносяться до класу простих чисел Ферма $2^s + 1, s \in \mathbb{Z}_+$.

Тепер обґрунтуємо «сильний» аргумент на користь гіпотези Коллатца C_n^+ , тобто покажемо, що цикли (16) разом із циклом (17) рівноправні між собою, відносно перетворення $3n-1$. Для цього оцінимо частоту

$$v = \frac{\text{Number}_{\text{cycle}}}{\text{Number}_{\text{full}}}$$

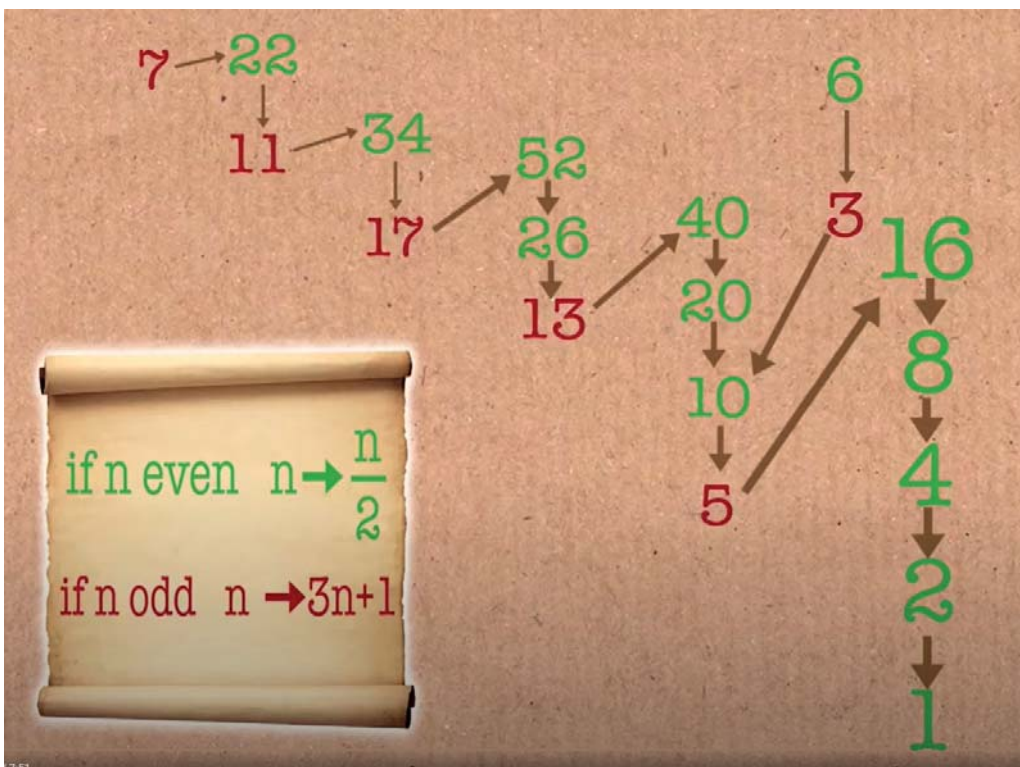
завершення послідовності в одному із даних циклів:

$$\begin{cases} \text{cycle}_{1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1}^{3q-1} : v_{\text{cycle}_{1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1}^{3q-1}} = \frac{241}{645} \cong 0.373, \\ \text{cycle}_{5(7) \leftrightarrow 5(7)}^{3q-1}, v_{\text{cycle}_{5,7 \leftrightarrow 5,7}^{3q-1}} = \frac{196}{645} \cong 0.3, \\ \text{cycle}_{17 \leftrightarrow 17}^{3q-1}, v_{\text{cycle}_{17 \leftrightarrow 17}^{3q-1}} = \frac{208}{645} \cong 0.322, \end{cases} \quad (20)$$

Тренд до рівномірного розподілу частот (20) чітко проявляється, в тому числі на стадії перетворення малих за значенням чисел. Тому, оскільки для класичного перетворення Коллатца C_n^+ інші, ніж завершальний цикл

$$\text{cycle}_{1 \leftrightarrow 4 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 1}^{3n+1} = \{1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1\}, \quad (21)$$

не виявлені до цього часу, тренд (20) – це «сильний» аргумент на користь гіпотези Коллатца C_n^+ (див. рис. 4). ■



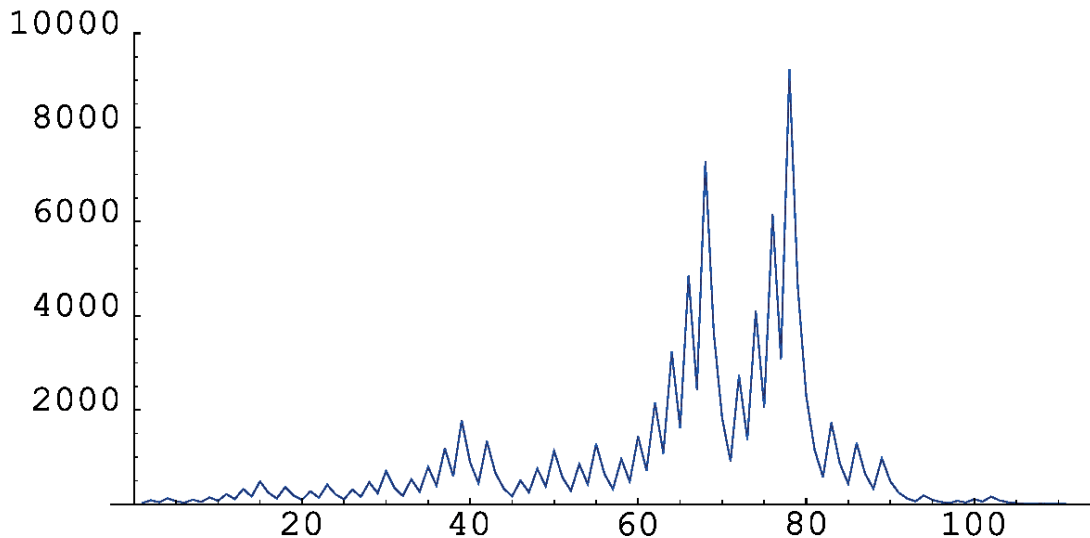


Рис. 4. Графічна ілюстрація задачі Коллатца
(<http://mmf.com.ua/ar/1968>)

Цікаво також, що числа в задачі Коллатца поводяться вкрай дивно: у деяких випадках обчислення завершуються одиницею дуже швидко, а іноді проміжний підсумок добирається до досить великого числа, а потім швидко зривається вниз - до самої одиниці.

Наприклад, для початкового числа 27 проміжний підсумок досягає 9232, а потім за кілька кроків швидко спускається до 1.

У результаті кількість кроків для 27 дорівнює 111. І це при тому, що для 26 воно дорівнює 10 (тут максимальним проміжним числом є 40), а для 28 - 18 (максимальним проміжним числом є 52)

Література

1. Collatz Conjecture. <https://www.dcode.fr/collatz-conjecture>.
2. А. Грубий. Автоматні реалізації процесу породження послідовності коллатца. Кібернетика і системний аналіз, 2012, №1, 129–138.
3. S. Abramovich, V. Freiman. Using an Unsolved Problem to Motivate Student Interest in Mathematics. SPREADSHEETS in EDUCATION. Bond University Volume 12 | Issue 3 | 2021; using-an-unsolved-problem-to-motivate-student-interest-in-mathematics.pdf
4. П. Кособуцький. Львівський математик Станіслав Улам – творець методу статистичного моделювання або методу Монте-Карло. Світ фізики. 2012, №4, 22–30
5. B. Hayes, "Computer recreations: The ups and downs of hailstone numbers," Scientific American, vol. 250, no. 1, pp. 10–16, 1984.
6. Collatz conjecture. Collatz best results. <https://www.dcode.fr/collatz-conjecture>
7. <https://distributed.org.ua>
8. C. Cadogan. Caribb. J. Math. Comput. Sci. 2006. 13, p. 1–11.
9. И. Рысцов. Замечание по поводу доказательства гипотезы Коллатца. Украинский математический конгресс. 2009. (Ukrainian Mathematical Congress – 2009 (Dedicated to the Centennial of N.N. Bogoliubov). Kyiv, Institute of Mathematics of NASU, August 27–29, 2009), <https://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Rystcov.pdf>; Декілька зауважень із задачі Коллатца. Кібернетика і системний аналіз. 2013, №3, 32–46.
10. L. Green. LOGbook. <http://lesliegreen.byethost3.com/publications.html>
11. F. Galetto. https://www.academia.edu/38335647/Proof_of_Syracuse_Collatz_Conjecture; <https://independent.academia.edu/FaustoGaletto>
12. I. Korec. A density estimate for the $3x+1$ problem. Mathematica Slovaca (1994) Vol. 44, Issue 1, 85–89; MathSlov_44-1994-1_8.pdf
13. T. Tao. Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values. arXiv:1909.03562v3 7 Jun 2020/ ; 1909.03562%20Tao.pdf
14. Collatz Conjecture $3n+1$ Calculator – dCode. https://www.google.com/search?q=collatz+calculator&rlz=1C1GCEA_ukUA895UA895&oeq=&aqs=chrome.3.35i39i362l8.237590098j0j15&sourceid=chrome&ie=UTF-8
15. П. Кособуцький, Т. Мікульський. Числа Фідія і Фібоначчі як виразники «золотого» пропорції та рекурентності. (2021) Світогляд. №5(91), 46–48.
16. N. Sloane. The On-line encyclopedia of integer sequences. The OEIS Foundation is supported by donations from users of the OEIS and by a grant from the Simons Foundation. Available online. <https://oeis.org/A002450>; <https://oeis.org/search?q=0%2C1%2C5%2C21%2C85%2C...&sort=&language=&go=Search>. (accessed on 23 February 2022)
17. M. Stein, S. Ulam; M. Well. (1964) American Mathematical Monthly, 71(5):516–520; M. Stein, S. Ulam. (1967) American Mathematical Monthly, 74(1):43–44; S. Porshnev. Cloud of Science. 2017. Т. 4. № 4; Улам_спираль_сору.pdf.
18. W. Kandasamy, I. Kandasamy, F. Smarandache (2016). A New $3n - 1$ Conjecture Akin to Collatz Conjecture. Preprint submitted to Elsevier October 10, <https://vixra.org/pdf/1610.0106v1.pdf>