

# ФУНДАМЕНТАЛЬНА СИСТЕМА ОДИНИЦЬ



**Леонід Чорногор**  
доктор фіз.-мат. наук,  
професор,  
зав. кафедри  
космічної радіофізики  
Харківського національного  
університету ім. В.Н. Каразіна,  
член редколегії  
журналу «Світогляд»,  
м. Харків

## 1. Вступ

У повсякденному житті ми користуємось звичними для нас одиницями вимірювань. До них належать метр, кілограм, секунда. Довжина в один метр є близькою до довжини руки або кроку. Масу в один кілограм має глечик води, буханець хліба, великий овоч або фрукт. Інтервал в одну секунду асоціюється з частотою скорочення серцевого м'яза, з пульсом.

Саме метр, кілограм і секунда відносяться до основних одиниць міжнародної системи одиниць СІ. До них додано також ампер, кельвін, моль і канделу.

У наукових виданнях та на практиці використовують похідні від цих величин, які можуть бути на багато порядків меншими або більшими за вихідні одиниці. Останні є зручними для описання макросвіту. Набагато менші значення зручні для описання мікросвіту, а набагато більші – для описання мегасвіту. Очевидно, що границя між цими світами є досить умовною.

## 2. Експурс в історію

Одиниці системи СІ відносяться до суб'єктивно обраних. Водночас існують натуральні або природні одиниці, справедливі в будь-якій області Всесвіту. Вони виражаються через фундаментальні фізичні константи. Таку систему одиниць слід називати «*фундаментальною*».

Вперше про подібну систему одиниць доповів **М. Планк** 18 травня 1899 р. на засіданні Академії наук у Берліні. У 1901 р. він її вдосконалив. У основу системи М. Планк поклав такі фундаментальні константи: редуковану сталу Планка  $\hbar$ , швидкість світла  $c$ , гравітаційну сталу  $G$  та сталу Больцмана  $k$  (все в сучасних позначеннях). З тих пір таку систему одиниць називають «*планківською*».

## 3. Планківська система одиниць

Із світових констант  $\hbar$ ,  $c$ ,  $G$  і  $k$  можна скласти систему одиниць для всіх фізичних величин та їхніх похідних. Для цього достатньо скористатися методом розмірностей. Розглянемо механічні параметри.

Планківська довжина описується таким співвідношенням

$$l = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}. \quad (1)$$

Значення  $l$  – порядку  $10^{-35}$  м. Такий розмір може мати гіпотетичний квант простору.

Планківський час визначається формулою

$$t = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}, \quad (2)$$

що за порядком величини складає  $10^{-43}$  с. Цей найменший інтервал часу має зміст кванту часу.

Планківська сила обчислюється зі співвідношення

$$F = \frac{c^4}{G}. \quad (3)$$

Фізичний зміст цієї сили буде обговорюватися нижче, її порядок становить  $10^{44}$  Н.

Планківська маса описується такою формулою:

$$m = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}. \quad (4)$$

За порядком величини вона дорівнює  $10^{-8}$  кг. Покажемо, що планківська маса представляє собою оцінку низу для чорної діри з радіусом  $r_g$ , який дорівнює комптонівській довжині хвилі  $\lambda_K$ . Припускаючи (тут і далі множник  $\sim 1$  опускаємо), що

$$r_g = \frac{Gm}{c^2},$$

$$\lambda_K = \frac{\hbar}{mc},$$

з цих співвідношень отримаємо формулу (4).

З іншого боку,  $m$  – оцінка зверху для маси елементарної частинки. Масу  $m \sim 10^{-8}$  кг має гіпотетична частинка, названа «максимоном».

Планківська густина речовини може бути отримана з використанням співвідношень (1) і (4). Вираз для неї має вигляд:

$$\rho = \frac{c^5}{G^2 \hbar}. \quad (5)$$

Обчислення за формулою (5) дають  $\rho \approx 5 \cdot 10^{96}$  кг/м<sup>3</sup>. Для порівняння зазначимо, що густина нейтронної речовини порядку  $10^{17}$  кг/м<sup>3</sup>.

Планківське прискорення. Припустимо, що  $a = l/t^2$ . Тоді

$$a = \sqrt{\frac{c^7}{\hbar G}}.$$

Порядок величини становить  $10^{52}$  м/с<sup>2</sup>.

Планківський імпульс описується таким співвідношенням:

$$i = \sqrt{\frac{\hbar c^3}{G}}.$$

Значення  $i \approx 6.52$  (кг\*м)/с представляє собою граничний імпульс фотона з мінімальною довжиною хвилі  $l \sim 10^{-35}$  м.

У той же час таке значення імпульсу відноситься до макроскопічних.

Планківський тиск визначається такою формулою:

$$p = \frac{c^7}{G^2 \hbar}.$$

За порядком величини тиск складає  $10^{113}$  Н/м<sup>2</sup>.

Планківська енергія  $E = mc^2$  може бути обчислена з наступного співвідношення:

$$p = \frac{c^7}{G^2 \hbar}.$$

Порядок величини –  $10^9$  Дж. Планківська енергія – енергія чорної діри з радіусом, який дорівнює  $\lambda_K$ , і масою  $m \approx 2,18 \cdot 10^{-8}$  кг.

Планківська потужність  $P = E/t$ . Тоді

$$P = \frac{c^5}{G}.$$

Як і планківська сила, ця потужність не залежить від  $\hbar$ . За порядком величини  $P$  складає  $10^{52}$  Вт.

Перейдемо далі від механіки до термодинаміки. У цьому випадку, крім  $\hbar$ ,  $c$  і  $G$ , необхідно залучити сталу Больцмана  $k$ .

Планківська температура описується таким співвідношенням:

$$T = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}.$$

За порядком величини вона становить  $10^{32}$  К.

Через температуру виражаються інші термодинамічні величини та функції стану (ентропія, внутрішня енергія, ентальпія і т.п.).

Розглянемо далі електричні параметри.

Планківський заряд обчислюється з використанням закону Кулона. Вираз має вигляд:

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c}, \quad (6)$$

де  $\epsilon_0$  – електрична стала.

Як видно з (6),  $q$  не залежить від  $G$ . Для визначення електричних величин потребувалось залучення електричної сталої. Порядок заряду –  $10^{-18}$  Кл. Заряд не дуже відрізняється від заряду електрону або протону  $e$ . Й це не випадково. Виявляється, що планківський заряд можна зв'язати зі сталої тонкої структури:

$$q = e / \sqrt{\alpha}, \quad \text{де} \quad \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

Планківська сила струму  $I = q/t$  знаходиться з такого співвідношення:

$$I = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 c^6}{G}}.$$

За порядком величини сила струму становить  $10^{25}$  А.

Планківський опір виражається через планківську напруженість електричного поля  $E_e$ :

$$R = \frac{E_e l}{I}.$$

З урахуванням  $E_e$  (див. нижче) приходимо до співвідношення

$$R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}.$$

Величина  $R \approx 30$  Ом.

Важливо, що  $q$ ,  $I$  і  $R$  не залежать від  $G$ . Більш того,  $R$  визначається лише швидкістю світла, а також  $\epsilon_0$ . Остання залежить від вибору системи одиниць (у системі СГС замість  $4\pi\epsilon_0$  фігурує множник 1).

Перейдемо до параметрів електродинаміки.

Планківська напруженість електричного поля  $E_e$  описується співвідношенням, яке випливає з рівності

$$F = qE_e.$$

Таблиця. Основні співвідношення та числові значення

Параметр	Система одиниць Планка	Фундаментальна система одиниць	Числове значення	Примітка
Довжина	$l = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$	$l = \sqrt{\frac{\hbar c}{F}}$	$1.61 \cdot 10^{-35}$ м	Гіпотетичний квант простору
Час	$t = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$	$t = \sqrt{\frac{\hbar}{cF}}$	$5.39 \cdot 10^{-44}$ с	Гіпотетичний квант часу
Сила	$F = \frac{c^4}{G}$	$F$	$1.21 \cdot 10^{44}$ Н	Гранична сила
Маса	$m = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	$m = \sqrt{\frac{\hbar F}{c^3}}$	$2.18 \cdot 10^{-8}$ кг	Маса чорної діри з радіусом, який дорівнює комптонівській довжині хвилі
Густина	$\rho = \frac{c^5}{G^2 \hbar}$	$\rho = \frac{F^2}{c^3 \hbar}$	$5.16 \cdot 10^{96}$ кг/м <sup>3</sup>	Граничне значення
Прискорення	$a = \sqrt{\frac{c^7}{\hbar G}}$	$a = \sqrt{\frac{c^3 F}{\hbar}}$	$5.56 \cdot 10^{51}$ м/с <sup>2</sup>	Граничне значення
Імпульс	$i = \sqrt{\frac{\hbar c^3}{G}}$	$i = \sqrt{\frac{\hbar F}{c}}$	6.52 (кг·м)/с	Імпульс фотона з довжиною хвилі $l$
Тиск	$p = \frac{c^7}{G^2 \hbar}$	$p = \frac{F^2}{c \hbar}$	$4.63 \cdot 10^{113}$ Н/м <sup>2</sup>	Граничне значення
Енергія	$E = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$	$E = \sqrt{\hbar c F}$	$1.96 \cdot 10^9$ Дж	Енергія чорної діри з радіусом, який дорівнює комптонівській довжині хвилі
Потужність	$P = \frac{c^5}{G}$	$P = Fc$	$3.63 \cdot 10^{52}$ Вт	Граничне значення
Температура	$T = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$	$T = \frac{1}{k} \sqrt{\hbar c F}$	$1.42 \cdot 10^{32}$ К	Граничне значення
Заряд	$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$	$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$	$1.88 \cdot 10^{-18}$ Кл	Більше заряду електрона в $\sqrt{\alpha^{-1}} \approx 11.7$ разів
Сила струму	$I = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 c^6}{G}}$	$I = \sqrt{4\pi\epsilon_0 c^2 F}$	$3.48 \cdot 10^{25}$ А	Граничне значення
Опір	$R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}$	$R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}$	29.98 Ом	Макроскопічне значення
Напруженість електричного поля	$E_e = \frac{c^4}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c G^2}}$	$E_e = \frac{F}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c}}$	$6.47 \cdot 10^{61}$ В/м	Граничне значення
Індукція магнітного поля	$B = \frac{c^3}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c G^2}}$	$B = \frac{F}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 \hbar c^3}}$	$2.16 \cdot 10^{53}$ Тл	Граничне значення
Частота	$\omega = \sqrt{\frac{c^5}{\hbar G}}$	$\omega = \sqrt{\frac{cF}{\hbar}}$	$1.85 \cdot 10^{43}$ с <sup>-1</sup>	Граничне значення частоти кванта енергії

Тоді

$$E_e = \frac{c^4}{\sqrt{4\pi\epsilon_0\hbar c G^2}}.$$

За порядком величини  $E_e$  складає  $10^{62}$  В/м.

Планківська індукція магнітного поля може бути знайдена зі співвідношення  $B = Ee/c$ . Тоді

$$B = \frac{c^3}{\sqrt{4\pi\epsilon_0\hbar c G^2}}.$$

Оцінка дає  $B \sim 10^{53}$  Тл.

Планківська частота відноситься до параметрів квантової електродинаміки. Її значення  $\omega = t^{-1}$  впливає зі співвідношення (2):

$$\omega = \sqrt{\frac{c^5}{\hbar G}}.$$

Порядок планківської частоти становить  $10^{43}$  с<sup>-1</sup>. Це гранична частота кванту енергії.

#### 4. Особливості планківської системи одиниць. Планківська епоха

У планківській системі присутні дві виключно малі (за мірками макросвіту та навіть мікросвіту) величини – довжина (радіус)  $l \sim 10^{-35}$  м та інтервал часу  $t \sim 10^{-43}$  с. Вони відносяться до планківської епохи. Планківська епоха – найдавніша космологічна епоха, яка тривала від моменту Великого вибуху до  $\sim 10^{-43}$  с після нього. За  $t \sim 10^{-43}$  с густина та температура, а також низка інших параметрів набували винятково великих значень (таблиця). В планківську епоху значення  $\rho$ ,  $T$ ,  $m$ ,  $E$ ,  $P$ ,  $\omega$  та інші параметри залежали від  $\hbar$ ,  $c$  і  $G$ . Це означає, що гравітаційна взаємодія була сумірною з іншими фізичними взаємодіями. Іншими словами, мало місце супероб'єднання всіх відомих взаємодій.

Цікаво відзначити, що планківський заряд не залежить від  $G$ , тобто від гравітаційної взаємодії, а планківська сила струму не залежить від  $\hbar$ . Планківський опір взагалі визначається лише швидкістю світла, тобто не залежить від  $\hbar$  і  $G$ .

Додамо, що значення планківських маси, енергії, імпульсу та опору можна віднести до макроскопічних. Справді, масу  $\sim 10^{-8}$  кг має пилінка або аерозоль розміром  $\sim 0.1$  мм. Енергія  $\sim 10^9$  Дж витрачається на нагрів 5 л води на 100 К. Звичним є опір у 30 Ом і імпульс порядку 10. Такий опір має мідний дріт перерізом в 1 мм<sup>2</sup> і довжиною в 174 м. Такий імпульс має дитина масою 10 кг, яка переміщується зі швидкістю 1 м/с.

Планківська система одиниць, незважаючи на її натуральність і універсальність, не прижилася в теоретичній фізиці саме через виключно малі та виключно великі величини.

Особливістю планківської системи одиниць є й те, що вона базується на експериментально визначуваних константах  $\hbar$ ,  $c$  і  $G$ .

#### Література

1. Планк М. Избранные труды. Москва: Наука, 1975. 788 с.
2. Томилин К. А. Фундаментальные физические постоянные в историческом и методологическом аспектах. Москва: Физматлит, 2006. 368 с.
3. Чорногор Л. Ф. Природознавство: Інтегруючий курс. Пер. з рос. Харків.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2008. 524 с.

Стала Планка дорівнює мінімальній дії на квантову систему, вона також накладає обмеження знизу на точність одночасних вимірювань імпульсу та координати, енергії та інтервалу часу. Швидкість світла є граничною за будь-якої взаємодії. Стала гравітації – це коефіцієнт у рівнянні всесвітнього тяжіння. Вона не відноситься до граничних значень. Являє інтерес пошук замість  $G$  параметра з граничним значенням. Таких параметрів може бути багато –  $F$ ,  $\rho$ ,  $T$ ,  $P$ ,  $a$  і т.д. Серед них особливе місце займає сила, оскільки вона описує всі відомі взаємодії (сильну, слабку, електромагнітну та гравітаційну). Планківська сила описується співвідношенням (3). З нього випливає, що

$$G = \frac{c^4}{F}. \quad (7)$$

#### 5. Фундаментальна система одиниць

Замінюючи в планківських параметрах  $G$  у відповідності з виразом (7), отримуємо фундаментальну систему одиниць (див. таблицю). Важливо, що тепер усі фізичні параметри залежать від трьох граничних величин –  $\hbar$ ,  $c$  і  $F$ .

Який фізичний сенс фундаментальної сили  $F$ ? Вона, наприклад, описує самотискання маси, границею якого стає чорна діра. Її радіус за порядком величини описується співвідношенням

$$r_g = \frac{Gm}{c^2}. \quad (8)$$

Вдалині від  $r_g$  справедливий закон всесвітнього тяжіння тіла, яке стискається, масою  $m$  в вигляді

$$F = G \frac{m^2}{r^2}. \quad (9)$$

Замінюючи в (9)  $r$  на  $r_g$  згідно з (8), отримуємо співвідношення (3). Таким чином, фундаментальна сила – це гранична сила при самотисканні гравітаційної маси.

Цікаво, що  $F$ , а також  $P$  не залежать від  $\hbar$ , що свідчить про їхнє неквантове походження.

Сила  $F$ , на відміну від  $\hbar$ ,  $c$  і  $G$ , на цей час не відноситься до вимірюваних. Вона обчислюється за допомогою експериментально знайдених значень  $c$  і  $G$ .

#### 6. Висновки

1. Планківська система одиниць є універсальною й об'єктивно існуючою, справедливою для будь-якої області нашого Всесвіту.

2. Основною особливістю планківської системи одиниць є те, що вона базується на експериментально визначуваних двох граничних константах і одній константі, яка не відноситься до граничних.

3. Пропонується відмовитись у планківській системі одиниць від гравітаційної константи, замінюючи її фундаментальною силою, яка є граничною. Ця константа на даний час експериментально не визначається.

Таку систему доцільно називати «фундаментальною системою одиниць». ■