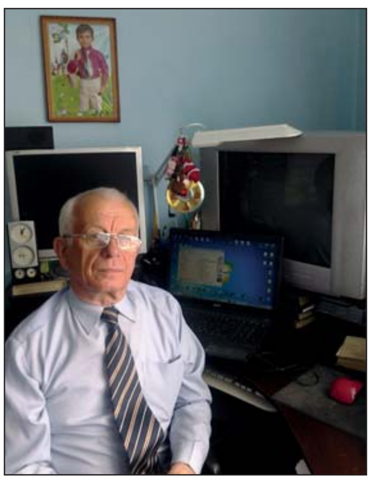
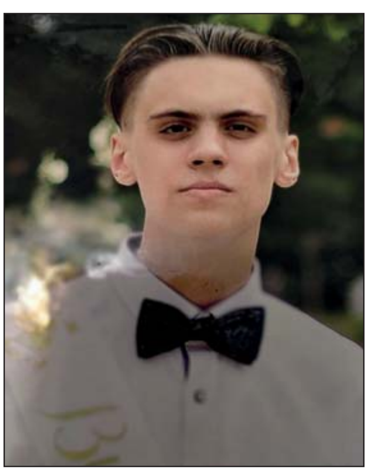
Числа Фідія і Фібоначчі як виразники «золотого» пропорції та рекурентності



Петро Кособуцький
доктор фіз.-мат. наук, професор
Національного університету
«Львівська політехніка», м. Львів



Тарас Мікульський
студент
Національного університету
«Львівська політехніка», м. Львів

Мабуть, не так багато є математичних задач, яким приділялось стільки уваги дослідниками, як задачі, пов'язані із «золотим» перерізом (числа ***Фідія***) та рекурентними послідовностями (числа ***Фібоначчі***). Не залишались осторонь цієї проблематики й українські вчені [1–2], а поштовхом до проведення таких досліджень стали монографії [3–5] та створення в 1963 р. асоціації Фібоначчі. Асоціація не лише почала видавати щоквартальний математичний журнал The Fibonacci Quarterly, але з 1984 року проводила регулярні конференції. Одним із засновників асоціації і журналу був американський математик ***В. Хоггатт*** (V.Hoggatt). Потужним джерелом інформації став сайт асоціації Фібоначчі та сайт «Fibonacci Numbers and the Golden Section», створений англійським математиком ***Р. Кнотом*** (R. Knott). При цьому були розв'язані дві актуальні задачі – створена нова система лічби на основі золотого перерізу (***Дж. Бергман*** [6]) та за допомогою чисел Фібоначчі розв'язана 10-а проблема ***Гільберта*** (***Ю. Матіясевич*** [7]).

Журнал «Світогляд» також не перебував осторонь, а популяризував результати, опублікувавши в цьому напрямку популярні статті [9–11]. Мета нашої публікації – відійти від дещо традиційної популяризації задачі про числа Фідія і Фібоначчі та продемонструвати більш глибинну математику витоків їх появи та зв'язок між ними.

Відома «золота» пропорція відношень двох нерівних частин $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{L-x}$ відрізку довжиною $\boldsymbol{L}$, поділеного точкою із координатою $\boldsymbol{x>L/2}$, має вигляд рівності

$$\frac{x}{L}=\frac{L-x}{x}. \tag{1}$$

Якщо ввести відносні величини $\boldsymbol{\varphi=x/L}$, $\boldsymbol{\Phi=L/x}$, то взамін квадратного тричлена $\boldsymbol{x^2 = L(L-x)}$ із (1) одержимо квадратне рівняння

$$\varphi^2+\varphi-1=0, \tag{2}$$

із розв'язками

$$\varphi_{\pm}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\begin{cases}\varphi=\varphi_{+}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\cong 0.618,\\ \Phi=\dfrac{1}{|\varphi_{-}|}\cong 1.618,\end{cases} \tag{3}$$

де $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\Phi}$ відомі як числа Фідія, що задовольняють рівність

$$\varphi+\Phi=\varphi\cdot\Phi=1. \tag{4}$$

Перепишемо квадратне рівняння (2) як рівність $\boldsymbol{\varphi^2=1-\varphi}$ і здійснимо над ним степеневі перетворення:

$$\begin{cases} n=0: & \varphi^0 = 0\cdot\varphi + 1 = \alpha_0\cdot\varphi + \beta_0, & \Rightarrow & \alpha_0 = 0, \\ n=1: & \varphi^1 = +1\cdot\varphi + 0 = \alpha_1\cdot\varphi + \beta_1, & \Rightarrow & \alpha_1 = 1, \\ n=2: & \varphi^2 = -1\cdot\varphi + 1 = \alpha_2\cdot\varphi + \beta_2 & \Rightarrow & \alpha_2 = -1, \\ n=3: & \varphi^3 = +2\cdot\varphi + 1 = \alpha_3\cdot\varphi + \beta_3 & \Rightarrow & \alpha_3 = 2, \\ n=4: & \varphi^4 = -3\cdot\varphi + 2 = \alpha_4\cdot\varphi + \beta_4, & \Rightarrow & \alpha_4 = -3, \\ n=5: & \varphi^5 = +5\cdot\varphi - 3 = \alpha_5\cdot\varphi + \beta_5, & \Rightarrow & \alpha_5 = 5 \\ n=6: & \varphi^6 = -8\cdot\varphi + 5 = \alpha_6\cdot\varphi + \beta_6 & \Rightarrow & \alpha_6 = -8, \\ ..... & \varphi^n = \alpha_n\cdot\varphi + \beta_n \end{cases} \quad (5)$$

Ряд числових значень коефіцієнтів

$$\{\alpha_n\}: \quad 0, 1: -1, 2, -3, 5, -8, ..., \alpha_n \; ..., \quad (6)$$

є відомою в літературі послідовністю $\{F_n\}$ чисел Фібоначчі F_n. Вона рекурентна, другого порядку, а її кожний наступний член дорівнює сумі двох попередніх:

$$\{\alpha_n\}: \quad 0, 1: -1, 2, -3, 5, -8, ..., \alpha_n \; ...,$$

або для $\{F_n\}: \quad F_{n+2} = -F_{n+1} + F_n, \; n \rangle 0\,.$ (7)

У (6) перші два числа фіксовані $\alpha_0=0$, $\alpha_1=1$ відомі як початкові умови задачі. Відома формула Біннета [12], яка зв'язує між собою числа Фідія і Фібоначчі:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi_+{}^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi_-{}^n\,. \quad (8)$$

Привабливість формули (8) полягає в тому, що за її допомогою сума двох доданків із ірраціональними виразами виражається через цілі числа.

Тому з точки зору моделювання процесів [13–15] привабливою є поведінка відношення сусідніх членів рекурентних послідовностей. Для послідовності Фібоначчі $\{F_n\}$ відношення або осцилює, або змінюється монотонно (див. рис. 1) і за відомою теоремою Пуанкаре [16] гранично наближається при цьому до більшого за значенням модуля кореня

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \max|\varphi_\pm|\,. \quad (9)$$

Формула Біннета (8), як і границя (9), відображають єдину природу чисел Фідія і Фібоначчі. Нижче ще повернемось до обґрунтування цього висновку.

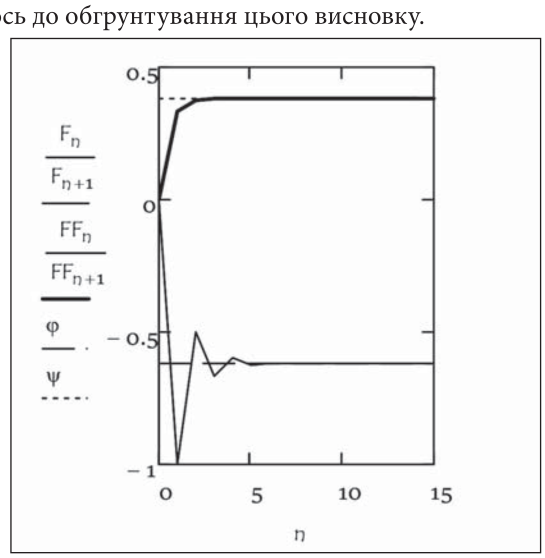


Рис.1

Виникає запитання, чи єдині по своїй природі «золоті» числа φ, Φ ? Щоб дати відповідь, розглянемо «золотий» поділ одиничного відрізка точкою із координатою $x>1/2$ для моделі $p\neq1$, $q\neq1$. У цьому випадку розв'язки

$$x_\pm = \frac{p \pm \sqrt{p^2+4q}}{2}$$

квадратного тричлена

$$x^2 = px + q\,, \quad (10)$$

за відомою теоремою Вієта

$$\begin{cases} x_+ + x_- = p, \\ x_+\cdot x_- = -q, \end{cases} \Rightarrow x_+ = \frac{-q}{x_-}\,, \quad (11)$$

також ілюструють схожі числам φ, Φ закономірності. Наприклад, якщо $p=2$, $q=2$, то для одиничного відрізка довжина більшої частини поділу складатиме $x_+\approx0{,}732$ і пропорція (1) запишеться як рівність відношень:

$$\frac{0.732}{1} = 2\frac{1-0.732}{0.732}$$ [13].

У цьому випадку, якщо взяти прямокутник із розмірами сторін 1×0.372, то, використовуючи властивості золотої пропорції між парою чисел $\varphi_{2.2}=|x_+|=0.732$ та $\Phi_{2.2}=2/0.732=2.732...$, в даний прямокутник можна щільно упакувати один квадрат розмірами 0.732×0.732, два квадрати розмірами 0.268×0.268, один квадрат розміром 0.196×0.196, два квадрати розмірами 0.072×0.072 та два квадрати розмірами 0.026×0.026 так, що сума площ буде дорівнювати $S=1\times0.732=0.732$. Таким чином, розв'язки рівняння (10) при $p=2$, $q=2$ також дозволяють будувати аналог відомих [6] прямокутників «золотого» перерізу за допомогою чисел Фідія $\varphi=0.618$, $\Phi=1.618$ у моделі $p=1$, $q=1$.

Цілий відрізок має дві рівноправні половинки. Тому розглянемо «золотий» поділ одиничного відрізка точкою із координатою $y<1/2$. Відрізок довжиною y – це менша частина поділу цілого одиничного відрізка, а довжиною $(1-y)$ – його більша частина. Тому в цьому випадку «золота» пропорція (1) запишеться у вигляді:

$$\frac{1-y}{y} = \frac{1}{1-y}\,. \quad (12)$$

У (12) $L=1$, тому якщо ввести відносні величини $\Psi=y/L$, $\Psi=1/\psi$, то одержимо відповідне квадратне рівняння із розв'язками:

$$\frac{1-\psi}{\psi} = \frac{1}{1-\psi} \Rightarrow \psi^2 - 3\psi + 1 = 0 \Rightarrow \psi_\pm = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\,. \quad (13)$$

По аналогії із числами $|\varphi_-|=\varphi$, $|\varphi_+|=\Phi$ для «золотого» поділу в інтервалі $y<1/2$ можна також ввести числа Фідія: $|\psi_-|=\psi$, $|\psi_+|=\Psi$. Тоді між парами чисел Фідія φ, Φ та ψ, Ψ справджуються зв'язки:

$$\psi \cong 0.382 = \varphi^2,\; \Psi \cong 2.618 = \Phi^2\,. \quad (14)$$

Сформуємо тепер послідовність чисел Фібоначчі для чисел Фідія ψ, Ψ. Для цього піддамо степеневому перетворенню квадратний тричлен $\psi^2=3\psi-1$:

$$\begin{cases} n=0: & \psi^0 = 0\cdot\psi+1 = \chi_0\cdot\psi+\delta_0, \ \Rightarrow \ \chi_0 = 0, \\ n=1: & \psi^1 = 1\cdot\psi-0 = \chi_1\cdot\psi+\delta_1, \ \Rightarrow \ \chi_1 = 1, \\ n=2: & \psi^2 = 3\cdot\psi-1 = \chi_2\cdot\psi+\delta_2 \ \Rightarrow \ \chi_2 = 3, \\ n=3: & \psi^3 = 8\cdot\psi-3 = \chi_3\cdot\psi+\delta_3 \ \Rightarrow \ \chi_3 = 8, \\ n=4: & \psi^4 = 21\cdot\psi-8 = \chi_4\cdot\psi+\delta_4, \ \Rightarrow \ \chi_4 = 21, \\ n=5: & \psi^5 = 55\cdot\psi-21 = \chi_5\cdot\psi+\delta_5, \ \Rightarrow \ \chi_5 = 55 \\ n=6: & \psi^6 = 144\cdot\psi-55 = \chi_6\cdot\psi+\delta_6 \ \Rightarrow \ \chi_6 = 144,... \\ n: & \psi^n = \chi_n\cdot\psi+\delta_n, \ \Rightarrow \ \chi_n = G_n, \ \ n\ge 0 \\ ... \end{cases} \qquad (15)$$

Отже, в даному випадку степеневі перетворення формують послідовність чисел $\{\chi_n\}$:

$$0, 1: \ 3, 8, 21, 55, 144, ..., \chi_n \ ..., \qquad (16)$$

яка також рекурентна, другого порядку, а її члени обчислюються за аналогічною (7) формулою

.

$$\chi_{n+2} = 3\chi_{n+1} - \chi_n, \quad n \rangle 0 . \qquad (17)$$

Порівняємо тепер між собою послідовності чисел (6) і (16). Очевидно, що коли не приймати до уваги знаки членів (6), то послідовність (16) одержується шляхом видалення в (6) кожного другого члена (бісекція). Таким чином, ряд чисел (16) – це також послідовність чисел Фібоначчі ***{FF$_n$}***, тобто ***{χ_n}= {FF$_n$}***.

На відміну від різнознакової послідовності Фібоначчі ***{F$_n$}*** послідовність ***{FF$_n$}*** однознакова, а відношення її сусідніх членів монотонно наближається до границі (рис.1):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\chi_{n+1}}{\chi_n} = \max|\psi_{\pm}| . \qquad (18)$$

Отже, числа Фідія і Фібоначчі – це виразники процесу поділу цілого системи на нерівні частини через закономірності коренів квадратного рівняння у вигляді теорем Вієта та Пуанкаре. Якщо і в читача сформувалось таке ж переконання, мета статті досягнута, однак крапку ставити рано. Адже кількість доданків в рекурсії (7) чи (17) можна збільшувати. Так, якщо їх три – одержимо числа Трібоначчі і т.д. Але це вже інша математична задача.

Література

1. Стахов О.П. Математика гармонии. От Эвклида к современной математике и компьютерной науке. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. 2013. № 1. 7-15
2. Боднар О.Я. Золотий перетин і неевклідова геометрія у науці та мистецтві. Львів: НВФ «Українські технології» (2005)
3. Марушкевич. Возвратные последовательности. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. Популярные лекции по математике. Вып. 1, 1951.
4. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Популярные лекции по математике, вып.6, М.: Наука (1961).
5. Реньи А. Вариация на тему Фибоначчи .Трилогия о математике. Перевод с венгерского. М.: Мир, 1980
6. Huntley, H.E. The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty. Dover Publications (1970).
7. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31. P.: 98-119.
8. Yu. V. Matiyasevich. Hilbert's Tenth Problem: Diophantine Equations in Twentieth Century// Mathematical Events of the Twentieth Century = Математические события XX века / ed. A. A. Bolibruch, Yu. S. Osipov, Ya. G. Sinai. — Berlin: Springer, 2006. — C. 185—214.
9. Балашевич Р., Пилипчук І.П. Золота пропорція як прояв гармонії навколишнього світу. Світогляд. 2009. № 1, 62—71
10. Григорчук М.І. Золоте ірраціональне число. Світогляд, 2017, №6, 43-60
11. Дорошенко В.С. Про гармонізацію конструкцій металовиробів із природою з метою заощадження металу. Світогляд. 2017, № 6, 61—67
12. Koshy T. Fibonacci and Lucas numbers with application. A Wiley-Interscience Publication: New York (2001)
13. Ковалев А.Н. В поисках пятого порядка. Издательские решения, Москва, (2020)
14. Gazale M. J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press (1999)
15. Kosobutskyy P.S. Modelling of electrodynamic systems by the method of binary separation of additive parameter in golden proportion Journal of Electronic Research and Application. 2019, 3(3) 8-12
16. Poincaré H. American Journal of Mathematics, 7(3), 203 (1885). In the article: Fiorenza A.,Vincenzi G. From Fibonacci Sequence to the Gold Ratio. J. Mathemat. Vol.2013, Article ID 204674, 3 p. http://dx.doi.org/10.1155/2013/204764
17. Kosobutskyy P.S. Phidias numbers as a basis for Fibonacci analogues. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics. 2020, 26(1): 172—178