

СИМВОЛІКА СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ

Cogito ergo sum.

«Я мислю – отже, я існую»



Микола Григорчук
доктор фіз.-мат. наук,
пров. наук. співроб.
Інституту теоретичної фізики
ім. М.М. Боголюбова
НАН України,
м. Київ

Системи числення ділять на *позиційні* і *непозиційні*. Система числення, в якій кожна цифра стоїть в довільному місці й не впливає на назву числа, називається *непозиційною*. В непозиційних місцях знаходження окремо взятої цифри у запису числа не змінює загальної величини. Система числення, в якій значення кожної цифри залежить від місця в послідовності цифр у записі числа, називається *позиційною*. Як приклад, можна взяти число 19, де 1 – на першому місці, а 9 – на другому. Якщо поміняти ці цифри місцями, то отримаємо набагато більше число. Ідея приписувати цифрам різні величини, в залежності від того, яку позицію вони займають у записі числа, уперше з'явилася в прадавньому Вавилоні приблизно в III тисячолітті до нашої ери.

Представники давніх цивілізацій дбали передусім про передачу на письмі словесних виразів, тобто, про запровадження писемності. Числові символи опинялись на другому місці. Бо важливо спершу «що», а потім «скільки» його. Мабуть тому в математичних записях давніх манускриптів багато загадок і таємниць. У розумінні символіки різних систем числення є справжня цінність. Видно, що західний шлях розвитку не був єдиним.

1. Цистеріанська система

Цю систему розробили ченці-цистеріанці (або ченці Білого ордену) в кінці XIII століття, і впродовж двох наступних століть нею користувались монастирі всієї Європи. Британський історик *Девід Кінг* написав книгу «Шифри ченців: забута система числення Середньовіччя». На його думку система базувалась на дуже простому кодуванні чисел (від 1 до 99), яку придумав чернець *Іоанн Бейзінгстокський*, який прибув у XIII столітті до Англії з Афін.

У ті часи в Європі діяла римська система числення, але все більшої популярності набувала арабська система, яка через кілька століть повністю витіснила римську. Ченці-цистеріанці (рис. 1) не брали участі у змаганні двох систем числення, а утаємничено зробили свою систему, яка виявилась простою і зручною для європейських монастирів й активно поширювалась – від Англії до Італії та від Іспанії до Швеції. Вона стала популярною тому, що на відміну від римської чи арабської системи числення, позначала будь-яке число в межах від 1 до 9999 за допомогою всього лише одного-єдиного символу. Середньовічний німецький натурфілософ і алхімік *Агріна Неттесгаймський* назвав їх «дуже елегантними символами». На рис. 2 наведено відповідність цистеріанських чисел сучасним арабським.

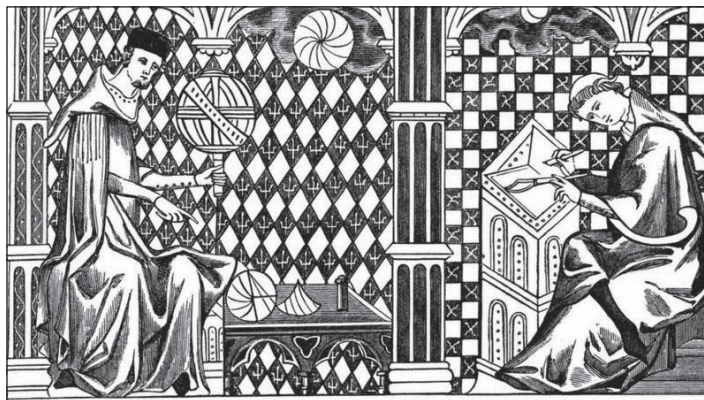


Рис. 1. Ченці-цистеріанці

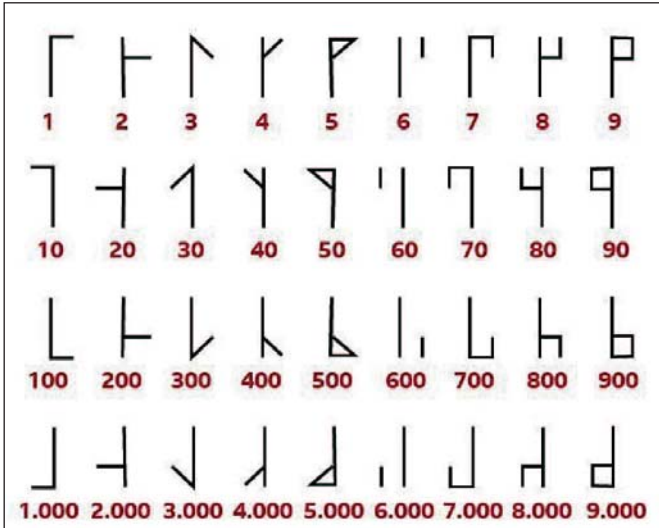


Рис. 2. Цистеріанський запис чисел

Чернець-бенедиктинець *Матвій Паризький* у своїй відомій праці з історії «Chronica Majora» (Велика Хроніка) вчить, як користуватись цією системою числення.

На рис. 3 зображено умовний квадрат, поділений на чотири квадранти або сектори. У нижньому лівому секторі записують число тисяч, у нижньому правому секторі – число сотень, у верхньому лівому секторі – число десятків, і, нарешті, у верхньому правому секторі – число одиниць. Число треба записувати (й читати), починаючи з нижнього лівого сектора, рухаючись від тисяч до сотень (1→2), від сотень до десятків (2→3), і від десятків до одиниць (3→4), як зображено стрілками на Рис. 3. Очевидно, що числам 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999 відповідатимуть дзеркально симетричні фігури.

Проте, як і римська, цистеріанська система була незручною при виконанні операцій множення чи ділення чисел на письмі. До часу, коли на зміну рукописам прийшли друковані книжки, арабська система числення з цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 вже міцно утвердилась у світі. Римські ж символи I, V, X, L, C, D і M вийшли з широкого вжитку, так само як і цистеріанські. Останні стали настільки забутими, що через якихось сто років їх стали розглядати, за невеликими винятками, як щось загадкове. Цими винятками було продовження їх використання у виноробстві для зарубки на діжках, де витримували вино та для винних мірних рейок, яке у Фландрії (регіон на півночі Франції) тривало аж до XVIII століття.

Спахи цікавості до цистеріанських чисел спостерігались не раз в історії людства. Так, наприклад, у 1870 році у Парижі їх стали використовувати масони. А у 1930-х роках ними зацікавились німецькі націонал-соціалісти.



Рис. 4. Фрагмент манускрипту з виноробства

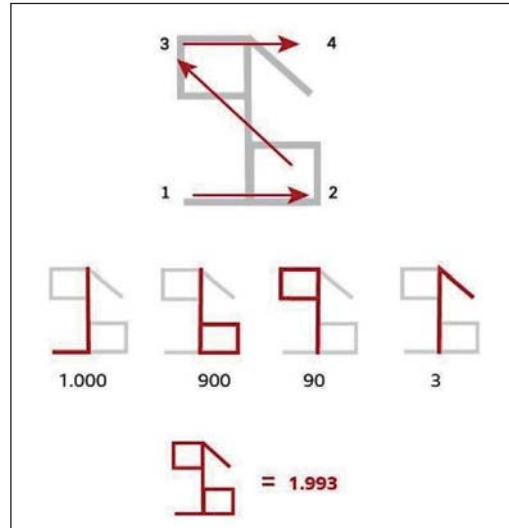


Рис. 3. Порядок запису й читання числа

У 1991 році аукціонний дім Christie's в Лондоні одержав старовинну астролябію, що вирізнялась не лише красою, але й гравіюванням загадкових цифр. Цим приладом користувались у давнину для астрономічних обчислень, зокрема розрахунків положення зірки або планети. Її виготовили в Іспанії наприкінці XIV століття. З поміж інших приладом зацікавився згаданий вище Д. Кінг. Він помітив символи, схожі на знайомі йому з одного манускрипту, який походив з Нормандії – регіону на півночі Франції. Цікаво, що астролябія була датована тим самим часом, що й манускрипт. Цифрові зображення були виконані в системі числення, невідомій навіть фахівцям із Середньовіччя або історії математики.

2. Римська система

Система римських цифр базується на використанні особливих символів для запису десяткових розрядів та їх половин [2]. Для зображення чисел римськими цифрами використовують лише 7 букв латинського алфавіту (див. табл. 1):

Таблиця 1

Римські цифри	Число
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Натуральні числа записуються за допомогою повторення цих цифр. Для скорочення запису і уникнення громіздкості, римляни не використовували повторення одного й того самого символу чотири рази підряд. Тому для запису чисел, що починаються на 4 і 9, поставала проблема. Для її вирішення ввели такі два правила:

- якщо більша цифра стоїть перед меншою, то вони додаються одна до одної;
- якщо ж менша стоїть перед більшою, то менша віднімається від більшої.

Наприклад, знаки I, X, C, що стоять перед, відповідно, X, C, M, позначають 9, 90, 900. Якщо ж символи I, X, C стоять перед V, L, D, то позначають – 4, 40, 400.

Наприклад, VI = 5 + 1 = 6, IV = 5 - 1 = 4 (замість III).

XIX = 10 + 10 - 1 = 19 (замість XVIII),

XL = 50 - 10 = 40 (замість XXXX). Треба зазначити, що інші способи «віднімання» неприпустимі. Отже, число 99 має лише вигляд XCIX, а не IC. Для правильного запису великих чисел потрібно спершу записати число тисяч потім сотень, десятків, і, в кінці, одиниць.

У наведеній табл. II подано приклади запису римських цифр від 1 до 99, а табл. III подає приклади запису чисел від 200 до 3000.

Середина XX століття записується як MCML. Поточний 2021 рік римськими цифрами буде: MMXXI. Найбільше число, яке можна зобразити у цій системі є 3999. Воно має такий римський відповідник MMMCMXCIX. Цікаво, що у римському легіоні число легіонерів не перевищувало 4 тисячі осіб. Центурія мала 100 осіб.

Таблиця 2

1	I	21	XXI	41	XLI	61	LXI	81	LXXXI
2	II	22	XXII	42	XLII	62	LXII	82	LXXXII
3	III	23	XXIII	43	XLIII	63	LXIII	83	LXXXIII
4	IV	24	XXIV	44	XLIV	64	LXIV	84	LXXXIV
5	V	25	XXV	45	XLV	65	LXV	85	LXXXV
6	VI	26	XXVI	46	XLVI	66	LXVI	86	LXXXVI
7	VII	27	XXVII	47	XLVII	67	LXVII	87	LXXXVII
8	VIII	28	XXVIII	48	XLVIII	68	LXVIII	88	LXXXVIII
9	IX	29	XXIX	49	XLIX	69	LXIX	89	LXXXIX
10	X	30	XXX	50	L	70	LXX	90	XC
11	XI	31	XXXI	51	LI	71	LXXI	91	XCI
12	XII	32	XXXII	52	LII	72	LXXII	92	XCII
13	XIII	33	XXXIII	53	LIII	73	LXXIII	93	XCIII
14	XIV	34	XXXIV	54	LIV	74	LXXIV	94	XCIV
15	XV	35	XXXV	55	LV	75	LXXV	95	XCIV
16	XVI	36	XXXVI	56	LVI	76	LXXVI	96	XCVI
17	XVII	37	XXXVII	57	LVII	77	LXXVII	97	XCVII
18	XVIII	38	XXXVIII	58	LVIII	78	LXXVIII	98	XCVIII
19	XIX	39	XXXIX	59	LIX	79	LXXIX	99	XCIX
20	XX	40	XL	60	LX	80	LXXX	100	C

Ще двісті років тому в ділових паперах числа повинні були позначатися римськими цифрами (вважалось, що звичайні арабські цифри можна легко підробити). Виконувати арифметичні дії над багатозначними числами в цьому записі було вельми незручно.

У теперішні часи римські цифри застосовується для позначення: століть (XV століття); років нашої ери (MMXXI рік); місяців при вказівці дат (наприклад, 14.IX.1986); томів і розділів у книгах; порядкового номера монарха, валентності хімічних елементів; порядкових числівників, а також у диференційному численні для похідних порядків, більших трьох: у IV, у V і т.д. Їх часто можна бачити на циферблатах старовинних годинників, особливо – сонячних, як на Подолі у Києві. Побудовані вони були у XVIII ст.

Пером Брульоном – учителем математики Києво-Могилянської Академії і залишаються й донині точним показником часу у сонячні дні.

Таблиця 3

CC	200
CCC	300
CD	400
D	500
DC	600
DCC	700
DCCC	800
CM	900
M	1000
MM	2000
MMM	3000

Найдавніший абрис латинського письма носить назву «капітальне письмо», або «капітальний шрифт» (I–V ст.). Написи цим шрифтом виконувалися на папірусних свитках і пергаментних кодексах. На папірусі писали тростинним пером, а на пергаменті – гусячим. На кам'яних плитах букви висікалися. Капітальне письмо було двох видів: *квадратне* (гарне, монументальне) й *рустичне* («сільське»). Квадратне письмо носило геометричний характер: всі букви вписувалися в квадрат. Рустичне письмо відрізнялося деякою простотою і свободою виконання, літери мали декоративну ромбоподібну форму. Для більш швидкого написання тексту з'явився шрифт «курсив» (у перекладі з латини – «похилий»). Потім стали застосовувати на письмі заокруглені букви. Заокругленість букв сприяла швидкості написання. Писали тоді на воскових табличках.

3. Єгипетська система

Єгиптяни раніше від багатьох інших народів освоїли математику [3]. Єгипет був поважною державою і з кожним роком ставав все багатшим і могутнішим. Проводилось будівництво храмів, гребель, каналів, військових укріплень, розвилась астрономія, мореплавання, землемірство, геометрія. Величчю урожаю, господарських об'єктів, планування у головних органах управління. Тому придуманий єгиптянами спосіб числення глибоко укорінився у побуті й проіснував досить довго – аж до X століття нашої ери. Грецькі математик и вчилися у єгиптян. Цікаво, що грошей, як і грошових розрахунків у Єгипті не було. На стелі принцеси **Нефертіабет** з її гробниці в Гізі (рис. 5) подано числа жертв 1000 волів, хліба, пива.

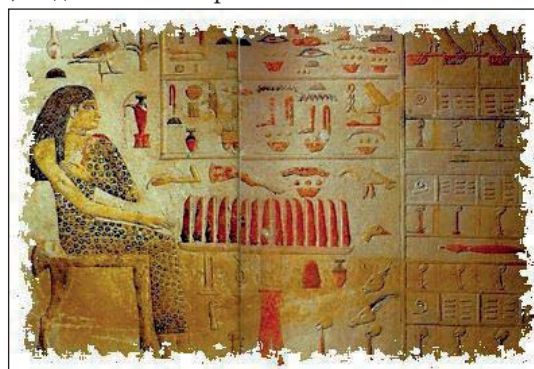


Рис. 5. Стела принцеси Нефертіабет (2590–2565 до н.е.). Зберігається в Луврі

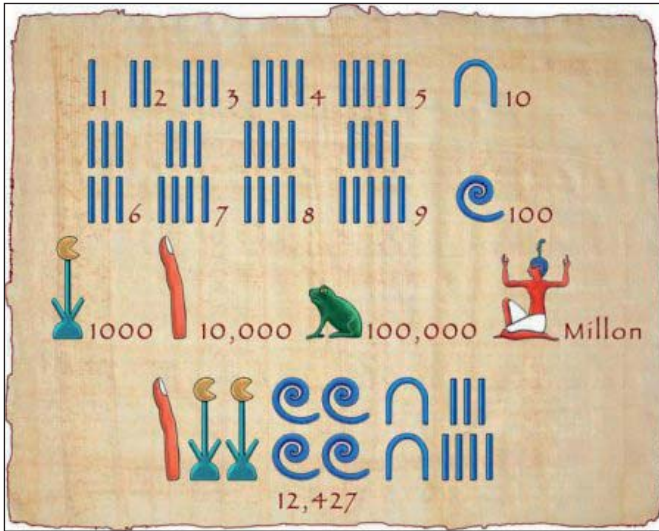























Рис. 6. Єгипетські ієрогліфи для чисел

Система числення, яку використовували в Стародавньому Єгипті відома від 3300 років до нашої ери. Це десяткова (можливо, по числу пальців на обох руках) система числення. Для позначення чисел використовували ієрогліфи, які позначали одиницю, десять, сто, тисячу, десять тисяч, сто тисяч, мільйон та десять мільйонів. Решта чисел складалась з цих основних за допомогою додавання.

Словесний опис цих ієрогліфів такий: 1 – це одна вертикальна риска (подібна до римського числа I), 10 – п’ята, 100 – петля мотузки, 1000 – лілія або лотос, 10 000 – загнутий палець, 100 000 – жаба, або пуголовок, 1 000 000 – людина з піднятими вгору руками (рис. 6), 10 000 000 – сонце (). Числам від 1 до 9 відповідало число однакових вертикальних паличок. Для чисел, не кратних 10, певний ієрогліф повторяли стільки разів, скільки було відповідних йому десятків, сотень, тисяч і т.д., хоч це вимагало чимало папірусу. Кожна цифра могла повторюватись не більше 9 разів. На рис. 6 подано також приклад запису числа 12 427. А у табл. 4 – приклади запису чисел від 5 до 5000.





Таблиця 4




1 = 	10 = 	100 = 	1000 = 
2 = 	20 = 	200 = 	2000 = 
3 = 	30 = 	300 = 	3000 = 
4 = 	40 = 	400 = 	4000 = 
5 = 	50 = 	500 = 	5000 = 

Сучасний 2021 рік єгиптяни записали б так:



Єгипетська система числення до того ж була непозиційною. Фіксованого напрямку запису чисел не було. Вони могли записуватись справа наліво або зліва направо і, навіть, – вертикально. Наприклад, запис IIII і зворотний запис III позначали одне й те ж число 13. Окрім ієрогліфічної системи запису чисел у єгиптян існували ще дві пізніші системи: ієратична та демотична.

Дробі. Досягненням єгиптян було введення дробів. Будь-яке раціональне число вони намагались подати у вигляді суми одиничних дробів ($1/n$). Наприклад, $\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$. Існували спеціальні таблиці, які дозволяли переписати будь-який дріб вигляду (m/n) як суму одиничних дробів. Для ієрогліфічного ж запису одиничного дроби використовувався ієрогліф «око» або «рот» () , який означав частину. Наприклад,  III = $\frac{1}{3}$;  O = $\frac{1}{10}$. Цей запис міг носити й вертикальний характер. У чисельнику завжди фігурував символ, що імітує форму людського ока, а в знаменнику вказували вже ієрогліф числа. Відому фізикам сталу тонкої структури ($1/137$) єгиптяни записали б так: 

Для окремих дробів, які використовувались дуже часто, наприклад, як $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ та $\frac{3}{4}$, існували спеціальні ієрогліфи:  = $\frac{1}{2}$;  = $\frac{2}{3}$;  = $\frac{3}{4}$.

На початку ХХ століття існувала гіпотеза, що для дробів з одиницею в чисельнику ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{64}$) використовували частини ока Гора (див. рис. 7). Проте згодом це припущення було спростовано.

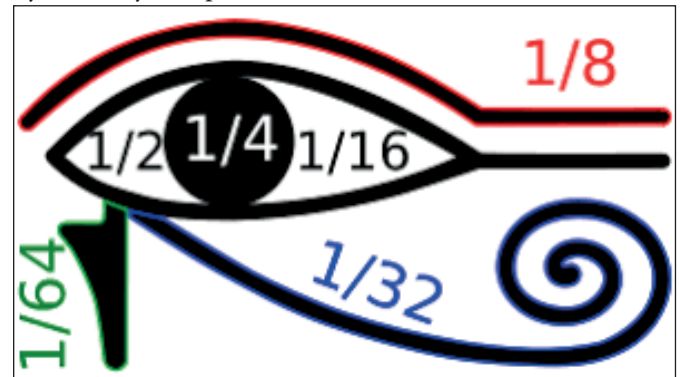




Рис. 7. Око Гора

Математичні операції. Єгипетська система числення справлялася з операціями над числами. Найпростіше виконувалося додавання і віднімання. Для знаків плюс та мінус вибрали два ієрогліфи:  – плюс,  – мінус. Якщо нога у напрямку письма, це означало плюс, якщо у протилежному – мінус (а писали єгиптяни справа наліво).

Для додавання ієрогліфи двох чисел (див. рис. 8) записували в ряд, між ними враховувалася зміна розрядів. Віднімання відбувалося у зворотному до додавання порядку. Складніше зрозуміти, як єгиптяни множили і ділили, оскільки тодішні записи мало чим нагадують сучасні.

Головне досягнення стародавніх єгиптян у математиці – це простота і точність. Дивлячись на ієрогліф, завжди можна було визначити, скільки десятків, сотень або тисяч записано на папірусі.



Рис. 8. Додавання єгиптянських чисел

Недоліком єгипетської системи числення була плутанина, зумовлена безладним записом чисел, які записували в будь-якому напрямку, що вимагало більшого часу на їх розшифровку. Не останню роль відігравала й естетика запису, коли доводилось виписувати на папірусі довгі ряди з символів, що дублюються.

Сучасні жителі Єгипту користуються тими ж арабськими цифрами як і ми, записуючи їх у суворій відповідності з потрібним порядком і зліва направо.

4. Вавилонська система

Одним із найдавніших письмових пам'яток людства є вавилонський клинопис на глиняних табличках [4, 5]. Він виник ще у Межиріччі, у двох могутніх державах Шумеру і Аккадії десь в IV столітті до н.е. і перейшов у Вавилонське царство. Папірусу не було, писали на табличках з мокрої глини. Малювати на глині було важко, тому гострою паличкою витискували різні клинці, яких набиралось аж до п'яти тисяч. Звідси й писемність дістала назву клинопису. Таблички висушували і складали в сховища (бібліотеки). До нашого часу протрималось багато з них. На табличках Давнього Вавилону вирішувались найскладніші на той час завдання, такі як обчислення урожаю з полів різної площі, знаходження кореня квадратного, об'єму піраміди тощо. На Рис. 9 наведено приклад з обчислення довжини діагоналі одиничного квадрата (зі стороною, рівною 1):

$$\sqrt{2} \approx 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1,41421296$$

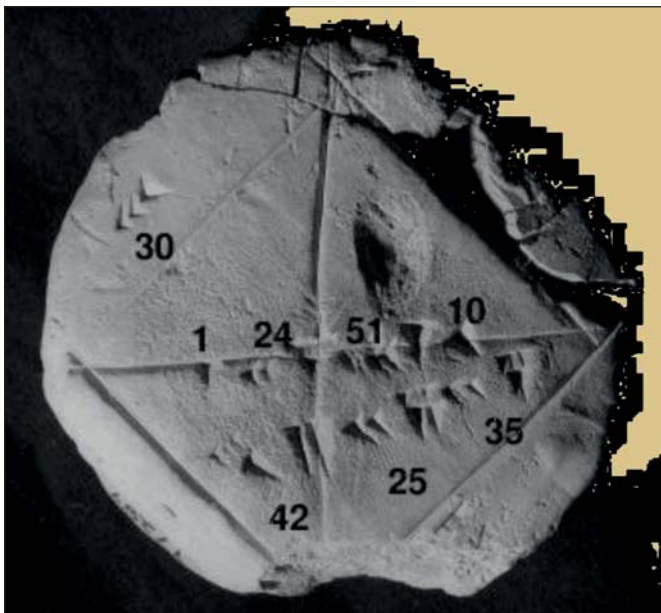


Рис. 9. Вавилонська табличка (~1800-1600 р. до н.е.)

Набагато пізніше піфагорійці, не знаючи здобутку вавилонян, ламали собі голову, як це так, мов, що діагональ у квадраті несумірна з його стороною, що немає ні цілих, ні раціональних чисел, квадрат яких дорівнював би 2. Поняття про ірраціональні числа у них не було. Оскільки є ірраціональне число, то воно не мало точного вираження в шістдесятковій системі числення. У цій системі, наприклад, 1 радіан градусів.

$$1 \text{ радian} \approx 57^{\circ}17'45'' = 57 + \frac{17}{60} + \frac{45}{60^2}$$

Важливим досягненням вавилонської математики було створення першої в історії *позиційної шістдесяткової системи числення*. В її основі, знову ж таки, лежала лічба на пальцях. Великим пальцем лівої руки рахували фаланги інших пальців правої руки (4 по 3 = 12). Далі загинали палець лівої руки. Коли усі пальці лівої руки були загнуті – отримували 60.

У шістдесятковій системі 1, 2, ... 58, 59 були одиницями першого розряду, 60 одиниць першого розряду становили одиницю другого розряду, 60 одиниць другого розряду – одиницю третього розряду і т. д. У межах одного розряду, наприклад від 1 до 59, лічба йшла за десятковою непозиційною системою, але при переході до кожного вищого розряду – за шістдесятковою позиційною.

Відлунням цієї системи числення у сьогоденні є збережений звичай встановлення географічних координат, ділити повний кут на 360 градусів, одну годину – на 60 хвилин, одну хвилину – на 60 секунд. Цікаво, що хвилини і секунди не використовували у стародавньому Вавилоні, бо застосовували подвійну годину, тривалістю 120 сучасних хвилин. Також мав поширення «час-градус» тривалістю $1/360$ дня = 4 хвилини.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
20	31	50	60	70

Рис. 10. Вавилонський запис чисел

Для запису чисел вавилоняни використовували всього два значки: клин вертикальний, або прямий (Y) – для одиниць, і клин горизонтальний, або лежачий (<) – для десятків всередині шістдесяткового розряду. Новий розряд починався з появою прямого клина після лежачого, якщо читати число справа наліво. Усі числа від 1 до 59 записувалися за допомогою цих двох значків, як у звичайній ієрогліфічній системі (рис. 10).

Приклад: <<<<YYYYY = 45. Усі числа в цілому записувалися в позиційній системі числення. Це означає, що запис чисел проводився справа наліво і в порядку спадання. На першому місці стоїть сотня, потім десяток, далі – одиниці. Другою характерною ознакою є шістдесяткова циклічність. Кількість лежачих та стоячих клинів показувала, скільки десятків і одиниць в даному числі. Відлік проводився до 59-ти, після чого перед числом записували новий вертикальний клин, який вже вважався числом 60, і помічався розряд маленькою комою вгорі. Достатньо було порахувати кількість цих ком і клинів, що перебували між ними, як ставало ясно яке маємо число. Шістдесяткові цифри записувалися вже в адитивній десятковій системі.

Такий запис склався історично. Від шумерів вавилоняни запозичили шістдесятковий числовий ряд із розрядами, а від аккадців – десятковий ряд і об'єднали їх. Пояснимо це на прикладах. Запис YYYYYY YYY позначав $6 \times 60 + 3 = 363$, подібно до того, як наш запис 63 позначає $6 \times 10 + 3$. Аналогічно записувались дробі. Для популярних дробів $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{3}$ були спеціальні значки. Їх потім запровадили й єгиптяни. Принцип позиційного запису чисел перейшов до грецьких, римських і арабських систем числення.

Був у вавилонян і знак, що відігравав роль нуля. Ним позначали відсутність проміжних розрядів, коли всередині числа не було одиниць якогось розряду. Раніше відсутність таких одиниць позначали інтервалами між клинописними знаками. Свій нуль шумери використовували лише всередині числа, й ніколи не писали його, коли в числі не було одиниць першого розряду. Тобто відсутність молодших розрядів не позначали ніяк. Так число YYY могло позначати й 3 і $180 = 3 \times 60$ і $10800 = 3 \times 60 \times 60 = 363$ і т.д. Це зумовлювало багатозначність. Розрізнити такі числа можна було лише за змістом.

Додавання і віднімання відбувалось за схемою: треба було поррахувати кількість розрядів, десятків і одиниць в кожному числі, а потім додати їх або відняти від більшого менше. Для множення невеликих чисел застосовували багатократне додавання або комплекс таблиць. Ділення m/n замінювали множенням m ($1/n$). Для знаходження ж $1/n$, знову ж таки, мали таблиці. За таблицями підносили до степеня і добували корінь. У школярів 60-их років ХХ ст. на пам'яті таблиці Брадїса.

У сучасній науковій літературі використовують для зручності компактний запис вавилонського числа. Наприклад, 4,2,10; 46,52. Його розшифровка така: $4 \times 3600 + 2 \times 60 + 10 + 46/60 + 52/3600$. У структурі шістдесяткового числа перший знак після коми називається *мінута* ('), другий – *секунда* ("). Для третього знака вживали назву *терція* (""), четвертого – *кварта*, п'ятого – *квінта* і т.д.

Значні досягнення вавилонських математиків і астрономів стали основою для наук наступних цивілізацій, особливо – науки Стародавньої Греції.

5. Грецька система

1 α	10 ι	100 ρ	1000 ,α
2 β	20 κ	200 σ	2000 ,β
3 γ	30 λ	300 τ	3000 ,γ
4 δ	40 μ	400 υ	4000 ,δ
5 ε	50 ν	500 φ	5000 ,ε
6 ς	60 ξ	600 χ	6000 ,ς
7 ζ	70 ο	700 ψ	7000 ,ζ
8 η	80 π	800 ω	8000 ,η
9 θ	90 φ	900 Ϙ	9000 ,θ

Рис. 11. Грецьке числення

Греки не знали цифр і замінювали їх літерами свого алфавіту [4]. Аби відрізнити числові записи від словесного тексту, з правого боку літери вгорі ставили штрих або горизонтальну риску. Оскільки поняття нуля тоді не існувало, то можна сказати, що давні греки користувались дев'ятковою системою числення. При цьому перші дев'ять букв грецького алфавіту зі штрихами позначали цифри від 1 до 9. Наступні дев'ять букв позначали десятки від 10

¹За іншими даними: 156 року н.е.

до 90. Подальші сім букв – позначали сотні, від 100 до 900. Для позначення цифр 90 і 900 були запозичені дві букви зі старого алфавіту (рис. 11). Аби передати число тисяч, ставили внизу штрих, з лівого від букви боку. Наприклад, число 1849 вони б записали так: ,α'ω'μ'θ'. Отже, найбільшим числом, рахунків у греків було десять тисяч. Його вони називали «*мірадою*». За такого запису чисел прості арифметичні дії викликали у давніх греків певні труднощі. Для запису дробів використовували вавилонську шістдесяткову та єгипетську систему числення. Десятинні дробі з'явилися в Європі аж в епоху пізнього Ренесансу.

Старослов'янська або кирилична система числення запозичила принцип написання чисел у давніх греків (див. рис. 12), тобто числа позначали буквами кириличної абетки (або глаголиці) з позначкою – *титлом* (яке також вживали для скорочення написання слів). Використовували 27 букв цієї абетки, – ті, що мали відповідники у грецькій абетці (а також виключно кириличні «ч» і «ц»).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1̄	2̄	3̄	4̄	5̄	6̄	7̄	8̄	9̄
10	20	30	40	50	60	70	80	90
1̄0̄	2̄0̄	3̄0̄	4̄0̄	5̄0̄	6̄0̄	7̄0̄	8̄0̄	9̄0̄




Рис. 12. Кирилична система числення

6. Цифри майя



Рис. 13 Святилище майя

У ході розвитку цивілізації майя для практичних потреб у будівництві (рис. 13) і для астрономічних досліджень, створення свого календаря була розроблена своя система числення [6]. Це позиційна система, яка базується на двадцятковій системі числення, де за основу взято число 20 (можливо, за числом пальців на руках і ногах однієї людини). Майя мали сім ступенів підрахунку, з яких кожна наступна дорівнювала двадцяти попереднім. Якщо лічити за десятковою системою, то найвища ступень становила 25 600 000 000 (20^6). Великим досягненням майя вважають впровадження нуля (зафіксоване на стелі 36 року до н.е.¹).

Як цифрові знаки майя вибрали крапки і тире. Сучасники сказали б – вибрали *шифр* Морзе. Крапка завжди означала одиниці даного порядку, а тире – п'ятірки. Якщо додати й нуль, то за основу цифр майя будуть лише три базові елементи:  – знаком черепашки позначали нуль;  – жирною крапкою одиницю, і  – жирною горизонтальною рисою – п'ятірку. Будь-яке число від 1 до 20-ти зображали за допомогою лише цих символів (див. Рис. 14). Наприклад, 19 зображали як три горизонтальні риси одна під одною, над якими ставили чотири крапки.

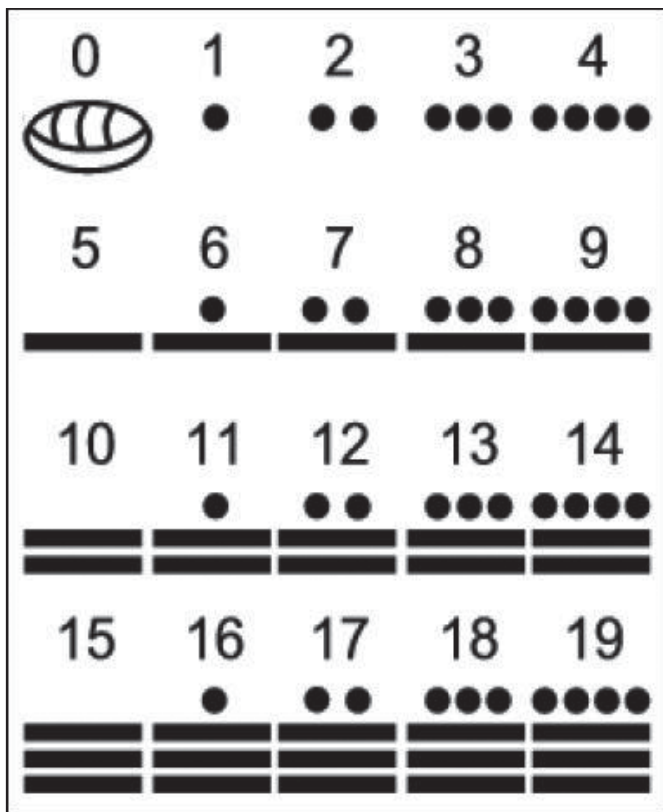


Рис. 14. Числа майя

Числа, більші від 19 писали не горизонтально, а вертикально знизу догори, зводячи ніби етажерку з цифр, де кожна верхня полиця (розряд) відрізнялась від сусідньої нижчої від неї у 20 раз, оскільки система числення була двадцятковою. Для прикладу, див. табл. 5. Увесь рядок першої полиці, що є першим розрядом, умовно можна сказати, множиться на одиницю. Увесь рядок другої полиці, що складає другий розряд, множиться на двадцять. Увесь рядок третьої полиці, що є третім розрядом, множиться на чотириста, оскільки сусідні розряди удвадцятую відрізняються один від одного. Аби одержати загальне число, необхідно додати між собою числа з кожної полиці (розряду). Тому у табл. 5, якщо, для зручності, додавати до вищих розрядів нижчі під ними, числа 42 передається як $20 \times 2 + 1 \times 12$;

449 як $400 \times 1 + 20 \times 2 + 1 \times 9$,

4805 як $400 \times 12 + 20 \times 0 + 1 \times 5$.

96209 як $8000 \times 12 + 400 \times 0 + 20 \times 10 + 9 \times 1$, або

$96209 = 20^3 \times 12 + 20^2 \times 0 + 20^1 \times 10 + 9 \times 1$.

Передостанній стовбець передає запис теперішнього року, як це зробили б майя.

Таблиця 5.

Четвертий розряд (×8000)					
Третій розряд (×400)		.			
Другий розряд (×20)	
Перший розряд (×1)				.	
	42	449	4805	2021	96209

Іспанський єпископ *Дієго де Ланда*² (1524-79 рр.) відзначав здатність майя легко оперувати великими числами: «Їх числення ведеться по 5 до 20, по 20 до 100, по 100 до 400, по 400 до 8000. Цим численням вони широко користуються при торгівлі какао». Далі, рахуючи 8 тисяч 20 разів, що становить 160 000, беруть його 20 раз, і так можуть рухатись до нескінченості... У календарі майя було 360 днів, які ділили на 18 двадцятиденних місяці.

Цивілізація вайя користувалась цією системою до приходу *Колумба* в Америку. Стародавні майя прийшли до використання позиційного принципу. На відміну від європейців, їм ні в кого було запозичити цей принцип, і вони самі додумалися до нього, причому майже на ціле тисячоліття (!) раніше Старого Світу.

Писемність у майя була ієрогліфічною. Вона чи не єдина з центрально-американських систем письма, яку вдалося здебільшого розшифрувати. Найбільш ранні написи, датовані III століттям до н.е., знайдені на території сучасної Гватемали. Цією системою письма користувались у всій Центральній Америці аж до XVI століття – часу прибуття іспанських конкістадорів.

7. Арабська система

Загальноприйнятою зараз у світі є десяткова система числення, в якій можна записати будь-яке число [7]. Вважається, що її запровадили араби і, навіть, відома адреса, де зародилися сучасні арабські цифри і самостійне число нуль (zero). Це – Багдад, бібліотека халіфа *Аль-Рашида*, що перетворилась згодом на державну академію. Бібліотеку назвали «*Будинком мудрості*». Започаткована вона була в кінці VIII століття. Її двері були відкриті для представників усіх панівних релігій, що притягало до Багдада вчених з усього світу. Він став центром вивчення природничих і гуманітарних наук. Будинок мудрості зруйнували монголи у 1258 році під час облоги цього міста. У річку Тигр потрапило стільки рукописів, що, за легендою, вона почорніла від чорнила. Проте створена тут абстрактна математична мова залишилась в Ісламській імперії, Європі і всьому світі.

Побутує версія, що араби завезли в Європу цю мову після завоювання Іспанії. Самі ж вони запозичили її в Індії, бо до появи ісламу (VII ст.) не мали своєї системи числення. Однак широкого поширення в Європі арабська система числення набула кілька століть пізніше. Італійський математик Леонардо з міста Піза відомий більше за своїм прізвищем *Фібоначчі* (Fibonacci — скорочення від *filii Bonacci* — син Боначчі) (1175~1250) у 1202 році, після повернення з Близького Сходу, оприлюднив свою матема-

²Автор кількох книг про майя, організатор інквізиції. Просуваючи католицизм на Юкатані, спалив на автодафе 12 липня 1562 року принаймні 40 безцінних рукописних книг майя з майже 20 тисячами культових зображень

тичну працю «Liber abacci» (*abacci* — рахувальна дошка), у якій були зібрані всі відомі на той час математичні задачі. Ця книга зіграла помітну роль у розвитку математики в Західній Європі протягом кількох наступних століть. Зокрема, саме по цій книзі європейці широко познайомилися з індуськими («арабськими») цифрами. До цього часу вони оперували римськими цифрами, які були незручними в операціях множення і ділення. Спробуйте, для наочності, поділити чи помножити MСML на CLV.

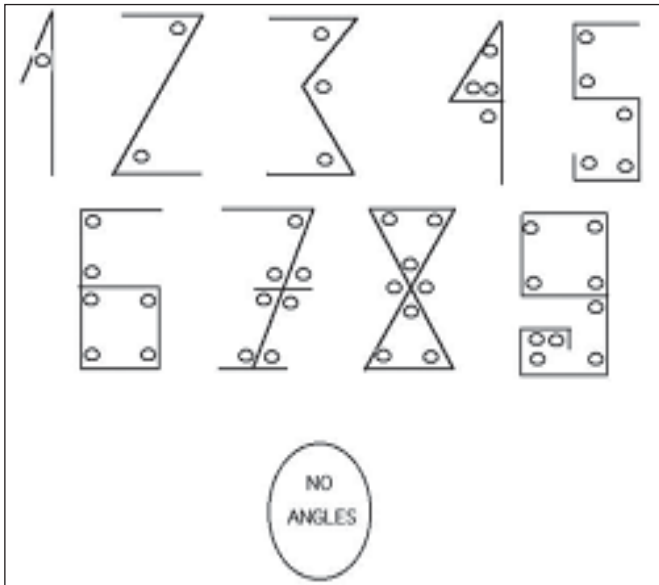


Рис. 15. Арабські цифри і кути

Книга Фібоначчі майже цілком опиралася на алгоритми перського математика IX століття *Аль-Хорезмі*, якого називають «*батьком алгебри*», через придуманий ним спосіб розв'язання квадратних рівнянь. Аль-Хорезмі від 821 року був головним бібліотекарем «Будинку мудрості» і в 825 році видав книжку «Про лічбу з цифрами гінді». У його трактаті вперше й була представлена десяткова система числення. Існує популярний міф, який стверджує, що початковими символами для написання арабських цифр були кількість кутів, що відповідала числовому значенню цифри (див. рис. 15).

Фібоначчі й Аль-Хорезмі розділяло майже чотири століття, проте їх поєднала бібліотека – «Будинок мудрості». Ось що означає стояти на плечах гігантів.

Головним здобутком арабської системи є використання позиційного принципу: цифри розміщуються справа наліво – одиниці, десятки, сотні, тисячі і т.д. Значення кожної цифри визначається її місцем у числі. Так у числі 95093 є дві однакові цифри 9, проте вони різняться своєю вагою. Перша дев'ятка дає дев'яносто тисяч, тоді як друга дев'ятка у цьому числі означає дев'ять десятків.



Статуя Аль-Хорезмі в університеті Аміра Кабіра. Тегеран, Іран

Порівняємо сучасний запис десяти арабських чисел із справжніми, первісними, у яких присутні елементи арабського декору. Такий їх вигляд зараз рідко де можна зустріти.



Арабська система числення поширилась не тільки в країнах, що використовували латинську абетку, а й серед таких, наприклад, як Китай і Японія. ■

Література

1. Математична хрестоматія. За ред. Проф. М.І. Кованцова. Київ: Радянська школа, 1977. – 216 с.
2. Берд Мері. S.P.Q.R. Історія стародавнього Риму. – Київ: BookChef: Форс Україна, 2019. – 478 с. – ISBN 978-617-7561-31-5.
3. Бородин О.І. Історія розвитку поняття про число і системи числення (3-тє вид.). – Київ: Радянська школа, 1978.
4. Гуменяк О.В. Світ чисел. – Львів: Каменяр, 2011. – 148 с. – ISBN 978-966-607-181-4.
5. Kline Morris. Mathematical through from Ancient to Modern Times. – Oxford University Press, 1974.
6. Coe Michael D. The Maya (4th edition, revised). London, New York: Thames & Hudson, 1987. – ISBN 0-500-27455-X. OCLS 15895415.
7. Smith D.E., Karpinski L.C., The Hindu-Arabic Numerals, 2013. [first published in Boston, 1911] Dover. – ISBN 0486155110.