ВІД ПІФАГОРА ДО АРХІМЕДА

"Дайте мені точку опори і я переверну світ".

Архімед

Микола Григорчук
доктор фіз.-мат. наук,
пров. наук. співроб.
Інституту теоретичної фізики
ім. М.М. Боголюбова
НАН України,
м. Київ

Данилкові і Юлії присвячую

Універсальна обдарованість давніх греків поставила цей народ на передові позиції в розвитку Західної цивілізації. Їхній внесок у розвиток філософії, геометрії й арифметики назавжди залишиться джерелом, до якого з вдячністю припадатиме людський розум. У давньогрецьких школах основними для вивчення були сім предметів: граматика, риторика, поетика, арифметика, геометрія, астрономія і музика. Уже в VII–V ст. до н.е. греки мали квітучі міста-колонії Мілет, Ефес, Кротон та ін. З'явилися наукові праці з астрономії, геометрії, медицини тощо. Зародились і перші натурфілософські теорії. Грецькі геометри були знаними землемірами в Єгипті і Вавилоні. Їхні діти навіть арифметику вивчали за допомогою геометричних фігур.

Не дивно, що греків вважають вправними математиками. Вони перетворили цей предмет у найбільш послідовну і струнку з усіх наук, в якій досягли великої точності. Греки запропонували чотири задачі, які треба розв'язати лише за допомогою циркуля і лінійки без поділок. Кращі розуми понад два з половиною тисячоліття намагались впоратись з ними. Це довга й повчальна історія. Ось ці задачі [1]:

1) побудувати квадрат, площа якого має дорівнювати площі заданого круга (задача про квадратуру круга);

2) побудувати куб, об'єм якого мав би бути удвічі більший, ніж вихідний куб (делоська[1] задача);

3) поділити будь-який кут на три рівні частини;

4) поділити коло або дугу на довільне число рівних частин, або побудувати в колі правильний багатокутник з будь-яким числом сторін.

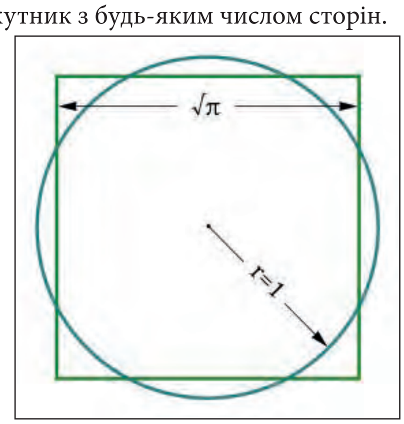


Рис.1. Квадратура круга

І Піфагор, і Архімед стояли на плечах гігантів.

[1]**Від назви о. Делос, на якому, аби позбутись епідемії, оракул порадив удвічі збільшити об'єм кубічного жертовника, не змінюючи його форми.**

ПРЕДТЕЧІ

Найпершим грецьким математиком був ***Фалес Мілетський*** (624–548 до н.е., м. Мілет) [2]. Його вважають засновником європейської науки та відносять до «семи мудреців», які заклали основи грецької культури і державності. Фалес вивчав природничі науки в Єгипті (Мемфіс, Фіви), де чи не вперше обчислив висоту єгипетських пірамід за довжиною їхніх тіней, виміряних у момент, коли довжина тіні від забитої в землю палиці, ставала рівною її висоті. Був ще й другий спосіб: у кінці тіні від вершини піраміди вертикально забивали палицю і вимірювали, як відноситься довжина тіні піраміди до довжини тіні від палиці. На основі подібності двох трикутників висота піраміди буде відноситися до довжини палиці у такому ж співвідношенні. Якщо довжина тіні дорівнює довжині палиці, то, очевидно, й висота піраміди дорівнюватиме довжині тіні від її вершини.

Рис. 2. Піраміда під час заходу Сонця

Повернувшись із Єгипту у Грецію, Фалес заснував мілетску (іонійську) філософську школу, з якої й починається історія європейської науки. У школі вважали, що все існуюче породжене водою і все у воду переходить, тобто початок і кінець Всесвіту – вода. Стверджували, що все, що дає рух, має душу, вірили, що душа розлита у всьому і космос просякнутий духом.

Це Фалес почав у математиці доводити теореми, зокрема теорему про те, що вписаний у коло трикутник, одна із сторін якого є діаметром, – прямокутний. Дійшла до нашого часу й інша теорема, що носить його ім’я (теорема Фалеса): «*Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають рівні відрізки на одному його боці, то вони відтинають рівні відрізки і на іншому його боці: DE/BC = AE/AC = AD/AB*» (рис. 3). Фалес запровадив за єгипетським зразком тривалість року в 365 днів, які поділив на 12 місяців по 30 днів. Під час війни між Лідією і Мідією він передбачив сонячне затемнення 28 травня 585 року до н.е. [3]. Коли затемнення таки сталося, то це настільки вразило і налякало супротивників, що битву припинили і уклали мир, а Фалес став знаменитим навіки. Йому приписують встановлення відношення діаметра Сонця до довжини екліптики, як ***1/720***. На його пам’ятнику вирізьбили: «*Настільки мала ця гробниця, настільки велика слава цього царя астрономії*». Його учнями були ***Анаксімандр*** та ***Анаксімен***.

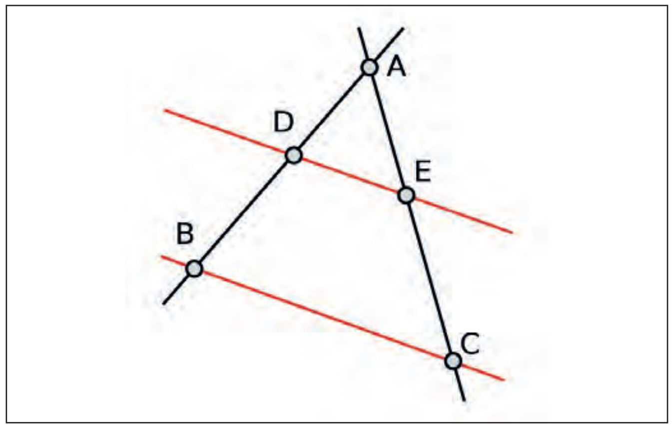


Рис.3. Теорема Фалеса

ПІФАГОР (Πυθαγόρας, 570 – 497 до н.е.)

Народився в Сідоні Фінікійському, на острові Самос в сім’ї купця і золотих справ майстра Мнесарха. У 306 р. до н. е. йому, як найрозумнішому з греків, поставили пам’ятник на римському Форумі. Батько історії Геродот називав його «*великим еллінським мудрецем*». Йому належать філософські твори: «Про природу», «Про виховання» «Про державу», «Про світ», «Про душу».

Вже з дитинства Піфагор знав напам’ять «Іліаду» й «Одіссею» ***Гомера***. Коли до влади у Самосі прийшов тиран ***Полікрат***, Піфагор перебрався в м. Мілет, де ще жив Фалес. Цей мудрець передав йому свої знання та настанови. Однією з них була порада відправитись в Єгипет для перейняття таємних знань у єгипетських жерців. По дорозі в Єгипет вчений зупинився в фінікійському місті Сідон. Цілих сім років вивчав він тут фінікійську арифметику і теорію чисел. Загроза нападу персів змусила його продовжити шлях до Єгипту. Там він поступив на навчання до жерців єгипетських храмів. Його захопила таємнича єгипетська символіка. Піфагор пробув в Єгипті 12 років, вивчаючи астрономію, геометрію і медицину, аж поки персидський цар ***Камбіз***, що завоював Єгипет у 525 році до н.е., не забрав його в полон до Вавилону. З полоненими поводилися лояльно. У Вавилоні Піфагор пробув 12 років. Тут персидські мудреці та халдеї познайомили його зі знаннями, які східні народи збирали протягом багатьох віків: з астрономією та астрологією, медициною та арифметикою. Довідавшись, що Полікрата отруїли, Піфагор вирішив повернутися у Грецію. Йому вже йшов 56-й рік.

Піфагор. Фрагмент з картини Рафаеля «Афінська школа»

Подорожуючи майже тридцять чотири роки, він побував у Єгипті, Персії, Вавилоні і навіть в Індії. Повернувшись, Піфагор, збагачений досвідом, створив таємну спільноту – орден піфагорійців, які любили мудрість (філософію) і своє життя присвячували вивченню природи речей. Вони сповідували теорію вічності душі з її періодичними переселеннями. Це був одночасно і релігійний союз, і політичний клуб, і наукове товариство. Аби стати найближчим учнем Піфагора, необхідно було зректися свого майна на користь союзу, не проливати крові, не вживати м'яса, триматися подалі від жінок, берегти таємницю вчення і не навчати учнів за винагороду. Власність була спільною. У школі було два ступені: акусматичний і математичний. На першому ступені послушники мали засвоювати знання догматично і мовчати впродовж перших п'яти років, що мало сприяти зосередженню. Їм дозволялося лише через запону слухати розмови Учителя з учнями-езотериками, що пройшли випробування на першому етапі. Езотерики вже мали можливість безпосередньо слухати Піфагора і займатися обґрунтуванням складних проблем. Через вісім років їм дозволяли вчити інших. Піфагор був певен: аби пізнати суть речей, необхідно подолати в собі марноту та навчитись пробуджувати інтуїцію, яка мимоволі допомагає людині силою думки проникати в таємниці Всесвіту. Піфагор першим назвав Всесвіт «*космосом*». А ще, знаючи крихкість людської думки, він намагався оберігати піфагорійців від гуркоту зовнішнього світу.

На запитання «*Скільки учнів навчається у твоїй школі?*» Піфагор відповідав: «*Половина вивчає математику, четверта частина – музику, сьома частина – мовчить, і є ще три жінки*». Уважний читач сам легко знайде відповідь. Священним символом піфагорійців, символом здоров'я і досконалості, а також їхнім розпізнавальним знаком була пентаграма [4].

У віці 60-ти років (за настійливим проханням своєї матері) Піфагор одружився на крітянці Теано. Вона була його ученицею і підкорила його своєю любов'ю і відданістю. Від їхнього союзу народилось троє синів і дві дочки. Коли виникла загроза повернення до влади на Самосі братів тирана Полікрата, Піфагор перебрався до південної Італії, в місто Кротон, де йому судилось прожити ще 20 років.

Погруддя Піфагора на Капітолії

У «Золотих віршах» Піфагор вивів ті моральні правила, суворе дотримання яких веде до ідеалу. Ось деякі з них:

- **Навчись тому, що слід знати.**
- **Не нехтуй здоров'ям свого тіла.**
- **Привчайся жити просто і без розкоші.**
- **Прагни завжди в словах і вчинках бути справедливим.**
- **Не ходи второваними стежками. Пантруй не думку натовпу, а думки небагатьох розуміючих.**
- **Не переступай через вагу. У всьому май міру.**
- **Допомагай здібним і не допомагай тим, хто уникає відповідальності. Гріх допомагати лінивим.**
- **Не дозволяй ластівкам селитися у твоєму будинку.**
- **Роби тільки те, що не засмутить тебе і не примусить каятись.**
- **Хай твоїм головним суддею (що найважливіше) стане совість.**
- **Не закривай очей, коли хочеш спати, не розібравши всіх своїх вчинків за минулий день.**
- **Виганяй із тіла хвороби, із душі – невігластво, із живота – обжерливість, із міст – заклики до бунту, із сім'ї – чвари.**

На його персні було викарбувано гасло: «*Тимчасова невдача краща тимчасової удачі*».

Піфагор забороняв вживати боби, бо вони, хоч і були священними для піфагорійців (містили душі мертвих), але віднімали у людини частину душі, перетворюючи її в газ, що виходить із тіла.

Піфагорійці вважали, що в основі всіх речей лежить число: «*Всі речі – суть числа*» [5]. Без чисел нічого не було б, і не було б порядку й гармонії. А Бог – це число чисел, яке містить у собі все. Отже, той, хто хоче пізнати світ і речі в ньому, повинен зрозуміти природу числа і гармонію чисел. Числам надавали містичних властивостей. Одні числа приносять добро, успіх; інші – зло. Усе в світі починається з одиниці. Піфагор вважав, що число 5 символізує колір, 6 – холод, 7 – розум, здоров'я та світло, 8 – кохання та дружбу, 9 – постійність. Найкращим, ідеальним числом у піфагорійців було 10. Воно означало повноту Всесвіту (7 відомих тоді планет + Сонце + Місяць + Земля!). Нелюбими були числа 13 та 17. У Біблії, наприклад, число 666 вважається числом звіра, 12 – таким, що несе щастя, а 13 – нещастя.

Велику увагу піфагорійці приділяли дослідженню прямокутних трикутників, сторони яких визначаються цілими числами. Найпростіший з таких трикутників, – так званий єгипетський, зі сторонами 3, 4, 5, – був відомий Піфагорові ще з часів його подорожі до Єгипту. Тому числа 3, 4, 5 назвали «*піфагоровою трійкою*». За священний символ вони вибрали «тетрактис» – трикутник з десятьма крапками в чотирьох рядках (4, 3, 2, 1) усередині, який показував математичну точність організації простору і Всесвіту.

Найпопулярнішою з усіх теорем планіметрії є теорема Піфагора: ***сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи***. У перекладі з грецької гіпотенуза – та, що стягує, а катет – перпендикуляр. Подейкують, що, довівши свою знамениту теорему, Піфагор віддячив богам, принісши їм у жертву 100 биків (*гекатомбу*, від ст.-гр. κατόμ – сто, βόες – бик).

При доведенні теореми Піфагор побудував фігуру, де на сторонах прямокутного трикутника розташовані квадрати. Доказ теореми полягав у тому, що сума площ квадратів, побудованих на катетах прямокутного трикутника, дорівнює площі квадрата, побудованого на гіпотенузі цього трикутника.

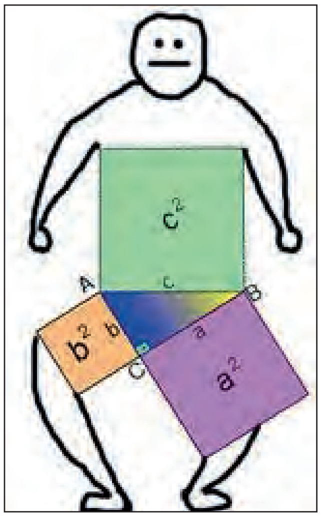


Рис. 4. «Піфагорові штани»

Оскільки квадрати, побудовані на сторонах трикутника розходяться в різні боки і нагадують крій чоловічих штанів, то молодь, що вивчала теорему у середні віки, жартівливо назвала ілюстрацію "*штанами"* (рис. 4), які мають властивість: «*Піфагорові штани – на всі боки рівні вони*». Також малювали шаржі, на кшталт рис. 5. Піфагорові приписують і теорему про те, що площі подібних фігур відносяться як квадрати відповідних сторін.

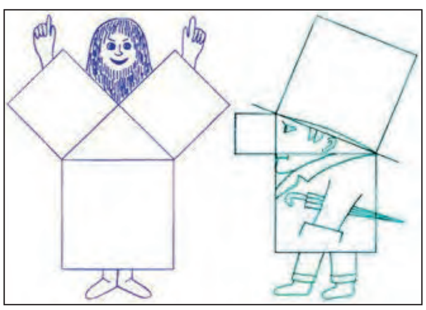


Рис. 5. Приклад шаржу

Від давніх часів дійшла головоломка «Піфагор» (рис. 6), яка є і головоломкою і конструктором водночас.

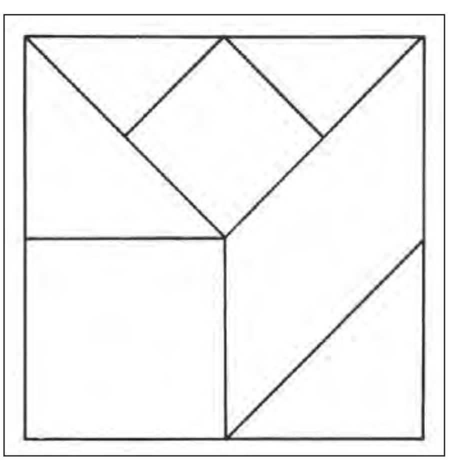


Рис. 6. Пазл «Піфагор»

Тригонометрична тотожність Піфагора. Якщо взяти прямокутний трикутник із сторонами a, b, гіпотенузою c та кутом θ між стороною a та гіпотенузою (рис. 7), то за визначенням тригонометричних функцій синуса і косинуса :

$\sin\theta = b/c, \cos\theta = a/c$. Звідки випливає, що:

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = (a^2+b^2)/c^2 = 1$ де наприкінці, застосовано теорему Піфагора. Цю взаємозалежність між синусом і косинусом називають ще «*фундаментальною тригонометричною тотожністю Піфагора*».

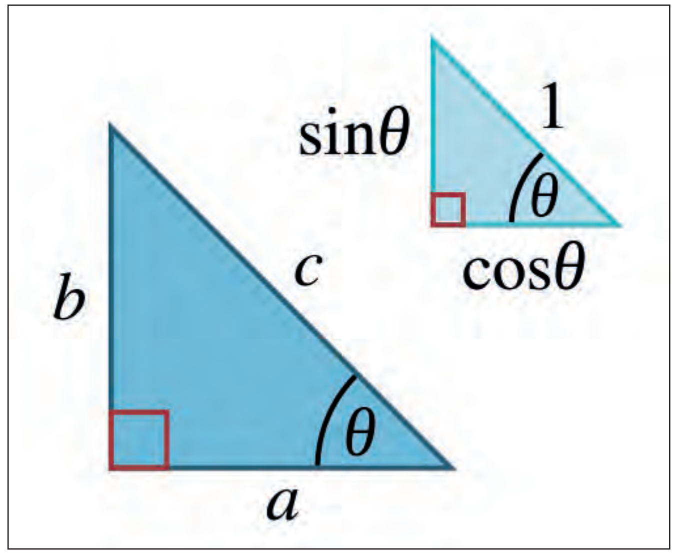


Рис. 7. Синус і косинус кута θ

Теорема косинусів. Якщо трикутник не прямокутний і між його сторонами a і b є якийсь кут φ, то тригонометричну тотожність Піфагора можна узагальнити. Вона відома як теорема косинусів: $a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = c^2$ і пов'язує довжини сторін у довільному трикутнику. Якщо ж φ сягає 90°, тоді $\cos\varphi = 0$ і формула переходить у тригонометричну тотожність Піфагора.

Дерево Піфагора. У наш час «піфагорові штани» перетворились у справжнє дерево. Цікавою властивістю дерева Піфагора є ось що: якщо площа першого квадрата дорівнює одиниці, тоді на кожному етапі сума площ квадратів також буде дорівнювати одиниці. Якщо в класичному дереві Піфагора за основу взято рівнобедрений трикутник з кутами, що дорівнюють 45°, то дерево буде симетричним (рис. 8). Можна побудувати також і узагальнене дерево, в основі якого є трикутник з нерівними кутами.

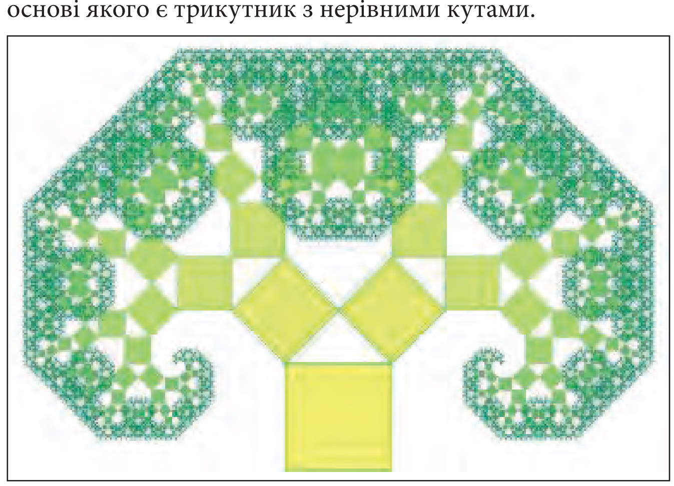


Рис. 8. Класичне дерево Піфагора

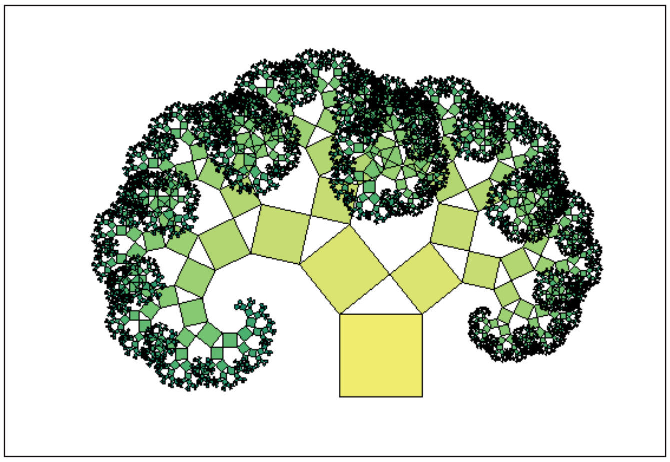


Рис. 9. «Овіяне» дерево Піфагора

Тоді виникає несиметричне дерево (рис. 9), яке ще називають «*овіяне вітром*».

У Франції та Німеччині в епоху середньовіччя теорему Піфагора називали ще «*віслючним мостом*», бо хто не пройшов через неї – справжній віслюк! Так само, як і той, хто не міг відповісти на запитання, чи можна побудувати прямокутний трикутник із одних непарних чисел? Це запитання виникло із поняття чисел Піфагора (піфагорових трійок), які складаються з трьох натуральних чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, таких, що $\boldsymbol{a^2+b^2 = c^2}$. Найпростіші їх приклади: (***3,4,5***), (***5,12,13***), (***7,24,25***)***…*** . Для $\boldsymbol{c<100}$ усього є шістнадцять піфагорових трійок. Піфагорійці першими ввели поняття парного й непарного числа, простого й складеного числа (парні – «*чоловічі*» – називали злими числами, а непарні – «*жіночі*» – добрими числами). Вони помітили, що будь-яке непарне число є різницею квадратів двох послідовних чисел. Наприклад, $\boldsymbol{3 = 2^2–1^2}$, $\boldsymbol{5 = 3^2–2^2}$, $\boldsymbol{7 = 4^2–3^2}$, $\boldsymbol{9 = 5^2–4^2}$ і т. д. Досконалими вважали числа, в яких сума дільників дорівнює самому числу. Наприклад, $\boldsymbol{28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14}$. З іншого боку, $\boldsymbol{28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}$. Але найбільшої уваги заслужило число 36, яке, з одного боку, є сумою кубів трьох перших чисел натурального ряду ($\boldsymbol{1^3 + 2^3 + 3^3}$), а з другого – сумою перших чотирьох парних і непарних чисел ($\boldsymbol{2 + 4 + 6 + 8}$) + ($\boldsymbol{1 + 3 + 5 + 7}$). На думку піфагорійців, увесь світ побудований на перших чотирьох парних і перших чотирьох непарних числах, а тому найсуворішою клятвою піфагорійців вважалася ***клятва числом 36***.

Піфагорійці були дуже вражені тим фактом, що діагональ у квадраті не сумірна з його стороною. Виявилося, немає ні цілих, ні раціональних чисел, квадрат яких дорівнював би, наприклад, ***2***. Виходить, існують якісь інші числа! Це настільки суперечило їхньому вченню, в основі якого лежали лише раціональні числа, що вони заприсяглися своїм магічним числом ***36*** засекретити своє відкриття. Поняття про ірраціональні числа тоді ще не було (а, отже й про $\sqrt{2}$). Учень Піфагора ***Гіппас Месопотамський*** після його смерті розсекретив цю таємницю, за що, вважають, був покараний богами і загинув під час морської бурі.

Піфагорійська терція. Піфагорові приписують і математичну теорію музики. Гуляючи біля кузні, він виявив гармонію у звуках від ударів молота. Попрактикувавшись, встановив, що відмінність у звуках залежить від маси молота, а не від сили удару. Згодом Піфагор відкрив закони гармонії і гармонічного відношення між звуками. Це дозволило запровадити лікування музикою. Лягаючи спати, піфагорійці звільняли розум від пристрастей і шуму, що накопичилися за день, спеціальними мелодіями. А прокинувшись, знімали сонливу в'ялість і заціпеніння іншими мелодіями. Одні мелодії у них були від смутку й мук, інші – від гніву й злості, ще інші – від пристрастей. Наприклад, ***дито́н*** (дав.-гр. ***δίτονον***, лат. ***ditonus***) у піфагорійському строї – музичний інтервал, що складається з двох цілих тонів (***9 : 8***), має прогнозовано різке звучання, яке є неприємним у вертикалях багатоголосся. Один із способів отримання дитону: чотири квінти вгору, потім дві октави вниз. При цьому співвідношення частот $\boldsymbol{(3/2)^4/2^2}$ = $\boldsymbol{(9/8)^2}$ = ***81/64*** вказує на те, що перший дитон буде доволі далеко від основного тону, а саме між 64-м та 81-м обертонами. Дитон ***81 : 64*** називають ще *піфагорійською терцією*.

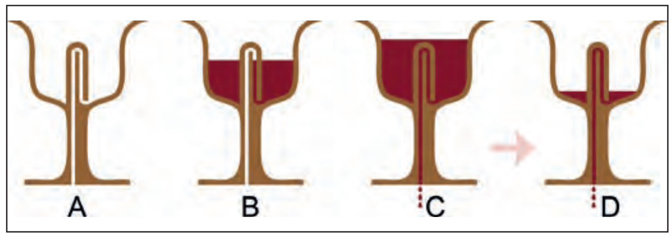


Рис. 10. Келих Піфагора

Келих Піфагора. Винаходом Піфагора вважають і спеціальну форму чаші, відому як «*келих Піфагора*» (рис. 10, A), в яку багато не наллєш, бо зайве витече. Якщо наповнити келих до певного невисокого рівня (B), то з нього можна спокійно пити, але якщо налити напою вище цього рівня, то вміст келиха виллється через отвір у дні. Піфагор придумав цей келих, аби раби на острові Самос, де він мешкав, не перевищували норму питва. Секрет конструкції келиха полягає в тому, що по центру він має виступ у вигляді скляного стержня, з невеликим отвором, який з'єднував дно келиха з верхом стержня, де розвертався й опускався до споду ніжки келиха. Коли рівень напою в келиху стає над верхом стержня (C), то за законом сполучних посудин гідростатичний тиск утворює сифон і надлишок напою виливався через дно (D). Звісно, у країнах, де вогняну п'ють гранчаками, такий винахід може видатись як «приший кобилі хвіст», проте у більш розвинених країнах – виховує почуття міри.

ЕВКЛІД (Εὐκλείδης, ~365-300 рр. до н.е.). Майже через сто п'ятдесят років після Піфагора з'явився геніальний олександрійський геометр Евклід, який уклав 13 книг логічної побудови геометрії від простого до складного на основі аксіоматики під спільною назвою "Початки" або «Засади» [6]. Ця книга була підручником з геометрії впродовж двох тисяч років! Після «Біблії» це найбільш тиражована книга в історії Західної цивілізації. В одній праці Евклід намагався об'єднати три великі грецькі відкриття: теорію відношень і метод вичерпування ***Евдокса Кнідського*** (~ 408–355 рр. до н.е.), теорію ірраціональних чисел та теорію п'яти правильних багатогранників Платона. «Початки» охоплюють планіметрію, стереометрію і теорію чисел (прості, раціональні та ірраціональні). Коли Птолемей зажадав швидко освоїти «Початки», Евклід відповів йому, що «*в геометрії немає царських шляхів*», бо, як казав Арістотель, «*хоч Платон мені друг, але істина – дорожча*».

Евкліда вважають учнем Платона, оскільки він дотримувався його настанови стосовно будь-якої науки – «*систематизувати вже відомі знання*». Наукова діяльність Евкліда проходила в Олександрійській бібліотеці, яка була водночас центром науки і культури. Тут він записав п'ять знаменитих аксіом:

1. Зі всіх ліній, що мають спільні кінці, пряма є найкоротшою з них.

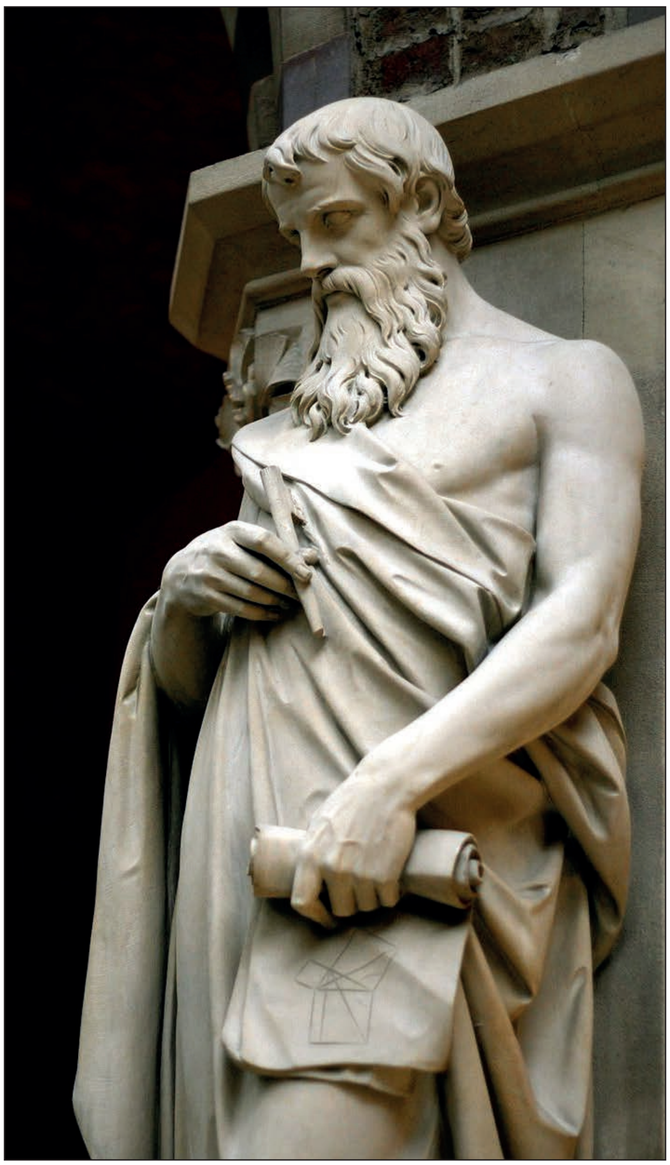
2. Обмежену лінію можна безперервно продовжувати до прямої.

3. З усякого центра довільним розхилом циркуля може бути описане коло.

4. Усі прямі кути рівні між собою.

5. Якщо пряма, що перетинає дві прямі, утворює внутрішні односторонні кути, які менші, ніж два прямі кути, то ці дві прямі перетнуться як завгодно далеко з тієї сторони, де кути.

П'яту аксіому називають ще «*постулатом про паралельність*». У сучасних джерелах подають ще таке його формулювання: «*У площині через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести одну і лише одну пряму, паралельну даній*».



Статуя Евкліда.
Оксфордський університет. Великобританія

Впродовж двох тисячоліть не припинялися спроби виключити п'ятий постулат Евкліда зі списку аксіом і вивести як теорему. Всі закінчились невдачею. У науці важко знайти більш захоплюючу і драматичну історію, ніж історія п'ятого постулату Евкліда.

Метод Евкліда полягав у доведенні багатьох інших теорем на основі невеликого набору інтуїтивно зрозумілих аксіом.

Аксіоми відображали уявлення Евкліда про фізичний простір. Простір Евкліда є необмеженим, але скінченновимірним, однорідним й ізотропним, таким, що немає власної кривини. Лише теорія відносності Ейнштейна спричинила повний перегляд наукових уявлень про геометрію Всесвіту.

Евклід придумав алгоритм для визначення найбільшого спільного дільника (НСД) двох чисел, тобто числа, на яке вони діляться без остачі. Алгоритм базується на факті, що НСД не змінюється, якщо від більшого числа відняти менше. Повторне виконання цієї операції веде до сталого зменшення більшого з двох чисел, допоки різниця не зійде до нуля. Ці останні числа і дають НСД.

Алгоритм Евкліда має багато застосувань на практиці та в теорії. З його допомогою можна згенерувати практично всі найважливіші музичні ритми різних культур у всьому світі. Він відіграє провідну роль у методі криптографії з відкритим ключем. Його також використовують для пошуку дійсних коренів полінома, розв'язків Діофантових рівнянь та для побудови ланцюгових дробів.

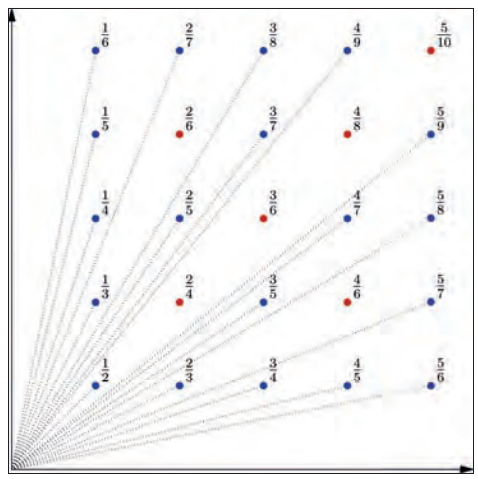


Рис. 11. Кут саду Евкліда, в якому «дерева» підписані координатою x при проекції на площину x + y = 1. Дерева, котрі видно з початку координат, позначені синіми кружальцями

Від алгоритму Евкліда походить і назва «сад Евкліда». В евклідовій геометрії двома основними типами вимірювань є кут і відстань. Числа подаються у вигляді ліній різної довжини. Сад – це масив з одновимірних «дерев» одиничної висоти, посаджених в точках квадратної ґратки. Інакше кажучи, сад Евкліда – це множина відрізків, починаючи від $(i, j, 0)$ до $(i, j, 1)$, де i та j – додатні цілі числа. «*Деревами*», що видимі з початку координат у вузлах ґратки $(m, n, 0)$ є такі, у яких m та n – взаємно прості числа, тобто m/n – нескорочувальний дріб. Точка $(m, n, 1)$ проектується в $[(m/m + n), (n/m + n), (1/m + n)]$. Якщо «*сад*» проектувати щодо початку координат на площину $x + y = 1$, то верхівки «*дерев*» утворюють графік з чисел, зображений на рис. 11.

Ще один з наглядних результатів Евкліда зображено на рис. 12. Побудова починається з прямокутного трикутника з катетами, що дорівнюють одиниці. Довжина гіпотенузи у такому трикутнику, очевидно, дорівнює $\sqrt{2}$. Далі, перпендикулярно до кінця цієї гіпотенузи проводять інший катет зі стороною, що також дорівнює одиниці. З'єднавши його кінець з «центром», одержимо другий трикутник з гіпотенузою $\sqrt{3}$. Якщо цю процедуру повторити 18 разів, то перший цикл побудов замкнеться, і в результаті одержимо фігуру, що нагадує равлика.

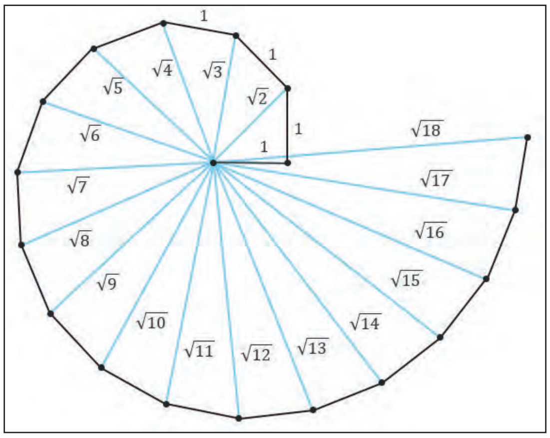


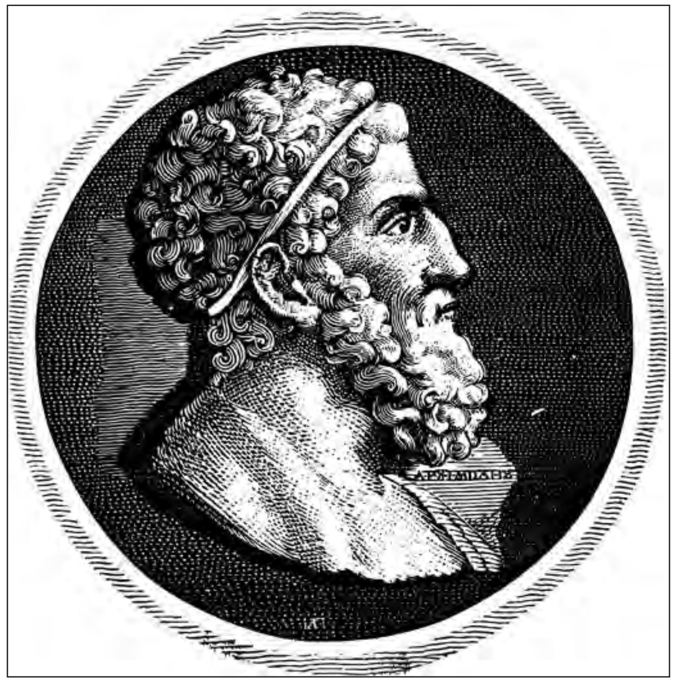
Рис.12. Результат Евкліда

Довжина кожної гіпотенузи вказана числом під знаком кореня. Евклідові приписують встановлення деяких фактів, наприклад про те, що площі двох кіл відносяться між собою як квадрати, побудовані на їхніх діаметрах, а також про те, що сума трьох кутів будь-якого трикутника завжди дорівнює 180°. Евклід мав праці з астрономії й оптики. Є підстави вважати його основоположником геометричної оптики. Він довів, що правильних багатогранників («*платонових тіл*») є лише п'ять: тетраедр (4 грані – трикутники); гексаедр або куб (6 квадратів); октаедр (8 трикутників); додекаедр (12 п'ятикутників); і косаедр (20 трикутників). Із золотою пропорцією пов'язані лише два останні [4]. Додекаедр вважали фігурою, яка є ніби самим Всесвітом, квінтесенцією чотирьох земних стихій – землі, води, вогню і повітря [7]. Архімед вже потім «*зрізав кути*» в «*платонових тілах*» і, таким чином, отримав 13 нових напівправильних багатогранників.

Евкліда не цікавило практичне втілення геометрії, а лише точна абстрактна дедукція. Евклід завершив епоху створення геометрії і приведення її в логічну систему. Наступну епоху почав закладати Архімед.

АРХІМЕД (Ἀρχιμήδης, 287—212 до н.е.).

Цього давньогрецького винахідника й астронома безпомилково вважають ще й найвидатнішим математиком і механіком античності та одним із найвизначніших вчених усіх часів [8]. До його ідей європейці дозріли аж через дві тисячі років. З описів, що залишили нам давні автори – ***Полібій, Тіт Лівій, Ціцерон, Плутарх, Вітрувій*** та ін. – відомо, що Архімед народився в багатому портовому місті Сіракузи – самоуправній грецькій колонії на найбільшому острові Середземномор'я – Сицилії. Є здогад, що його батьком був математик і астроном ***Фідій***, який за свідченням Плутарха, був близьким родичем сіракузького правителя ***Гієрона II***. Для навчання Архімеда відправили в місто Олександрію Єгипетську, назване на честь його засновника ***Олександра Македонського***. Могутні ***Птолемеї*** (нащадки одного з полководців О. Македонського), аби прославитись, збирали звідусіль цвіт науки і поезії й «*підгодовували легіони книжкових черв'яків*». Олександрія на той час славилась як науковий і культурний центр елліно-єгипетського світу. Тут постала школа неоплатоніків і геометрична школа, розгорнувся золотий вік грецької геометрії. У бібліотеці цього міста було зібрано понад 700 тисяч рукописів. Архімед зблизився з учнями Евкліда – ***Ератосфеном, Кононом, Досіфеєм*** – і познайомився з працями ***Демокріта, Евдокса Кнідського, Аристарха Самоського*** та інших знаних геометрів. З низки причин Архімед не захотів залишатись у Єгипті і повернувся в рідні Сіракузи. З собою він привіз основи нової науки, яку нащадки назвуть «*статикою*». Він першим обґрунтував основні її принципи, засновані на ідеї центра ваги.



Архімед. Один із античних бюстів

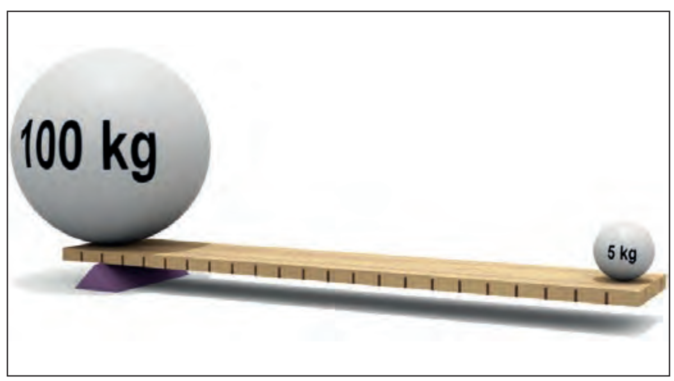


Рис.13. Вага і відстань

Важіль Архімеда. Архімед мав рідкісний дар поєднувати теоретичні напрацювання з віртуозною інженерією. У ньому жила пристрасть до винахідництва, до матеріального втілення виявлених теоретичних закономірностей. Важіль був відомий і до Архімеда, однак лише Архімед розробив повну теорію важеля і застосував її практично. Плутарх пише [9], що Архімед побудував у порту Сіракуз різноманітні блочно-важільні механізми для підйому і транспортування важких вантажів. Архімеда вважають першим теоретиком усякої механіки. Він встановив **золоте правило механіки**: *у стільки раз виграємо у силі, настільки програємо у відстані* (рис. 13). Архімед написав книжку «Про рівновагу пласких фігур», в якій розглянув

ISSN 1819-7329. Світогляд, 2018, №5 (73)

проблему центру ваги паралелограма, трикутника, трапеції і параболічного сегмента. Центр ваги – єдина точка в тілі, у якій можна зосередити всю його вагу, не порушуючи рівноважного стану. Він довів, наприклад, що центр ваги паралелограма знаходиться на перетині його діагоналей, а у трикутнику – у точці перетину його медіан. Архімед також вивів закон важеля, з якого стало зрозуміло, як можна зсунути величезну вагу малою силою. В основі лежало його припущення про те, що тіла рівної ваги на рівних плечах повинні бути врівноваженими. Загалом же тіла врівноважуються на довжинах пліч, обернено пропорційних їхнім вагам (рис. 14): $D_1 F_1 = D_2 F_2$. Тут F_2 – сила, F_1 – опір, D_2– плече сили, D_1 – плече опору. Той, хто носив з криниці на плечі коромисло з відрами, наповненими водою, легко собі може уявити, як слід зміщувати цей важіль під час ходьби, аби з відер не вихлюпувалася вода.

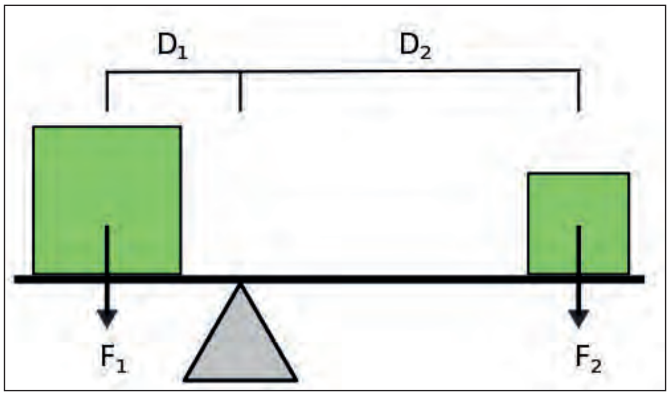


Рис.14. Принцип важеля

Архімед усвідомив, що закони важеля – це достоту всесвітні закони і вибудував низку механічних постулатів і теорем. Зокрема, у його скарбниці – дослідження рівноваги перетину параболоїда, що моделює корабельний корпус. Зрештою, оцінивши силу свого відкриття, Архімед заявив: «*Коли б у моєму розпорядженні була інша Земля, на яку б можна було стати і опертися, то я зсунув би зі свого місця нашу*» (рис. 15). Звідси й крилатий вислів, винесений епіграфом до цієї статті. Якщо вважати, що маса Землі дорівнює 6 $\cdot 10^{24}$ кг, а сила тиску людини на важіль дорівнює 60 кг, то за допомогою згаданої вище формули можна оцінити довжину такого важеля як: $D_2 = 10^{23}$ м!

Рис.15. Якби була точка опори

Блоки Архімеда. Коли цар Гієрон побудував у подарунок єгипетському царю Птолемею III багатопалубний корабель «Сіракузія», то виникла проблема, як спустити його на воду, бо це був, так би мовити, «Титанік» прадавнини. Тоді Архімед сконструював цілу систему блоків (поліспасти) (рис. 16) та важелів, за допомогою яких йому вдалося це виконати одним порухом руки. Людина змогла перемістити великий корабель силою однієї руки! Поліспаст дозволяє значно вигравати в силі під час підйому важких вантажів. Нині цей механізм замінили б простою лебідкою (містить барабан для намотування каната), кількома зубчатими передачами та черв'ячною парою. Якщо, для прикладу, пара зубчатих коліс має відношення радіусів ***5:1***, то на більшому колесі отримуємо п'ятикратний «виграш у силі». Якщо, далі, мале колесо з'єднати ще з одним великим (***1:5***), а його – з іншим малим колесом (***1:5***), то «виграш» зросте у 25 разів і т. д. У цьому – вся могутність механіки.

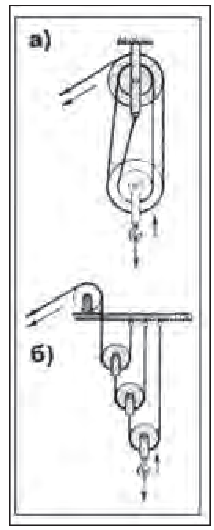


Рис.16. Поліспасти: а – кратний; в – степеневий

Одометр Архімеда. У часи Першої Пунічної війни між Римом і Карфагеном Архімед винайшов одометр – прилад для вимірювання відстані. Після кожної пройденої возом милі у спеціальний контейнер падала кулька, транспортована туди за допомогою спеціального механізму передачі. Число цих кульок і визначало число пройдених миль.

Циліндр і куля. В геометрії Архімед відкрив, що об'єм, як і площа поверхні, вписаної в циліндр кулі, співвідносяться як ***2:3***. Тобто, у циліндрі поміщається рівно півтора об'єми кулі, якщо куля і циліндр мають однакову висоту та діаметр (рис. 17). Наочно у цьому можна переконатися, якщо у циліндр, що вміщує 3 літри води, занурити кулю з діаметром, що дорівнює висоті й діаметру циліндра. Тоді з циліндра виллється рівно 1 літр води. Площа бокової поверхні такого циліндра точно дорівнює площі поверхні кулі (або ж площі чотирьох кругів такого ж радіуса). Якщо сюди додати ще площі основи і верха циліндра, то легко переконатися, що загальна площа циліндра ($6\pi R^2$) справді буде у півтора рази більшою від площі кулі ($4\pi R^2$) в його середині. Цьому відкриттю Архімед надавав настільки великого значення, що заповів своїм найближчим, аби на його надмогильному пам'ятнику було викарбувано зображення циліндра з вписаною у нього кулею. Знайдені співвідношення між об'ємами та поверхнями кулі і циліндра лягли в основу трактату Архімеда «Про кулю і циліндр».

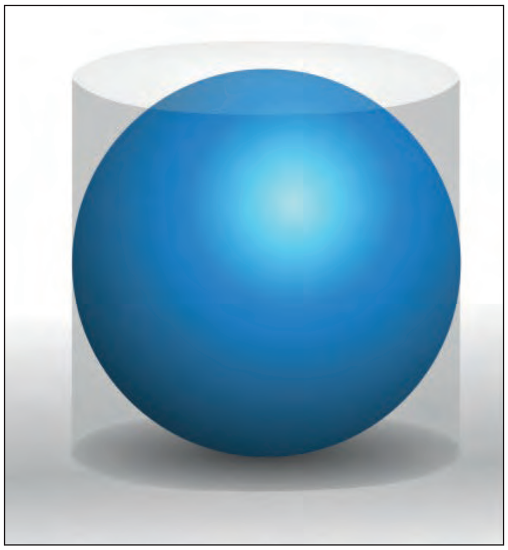


Рис.17. Циліндр і куля

Марк Тулій Ціцерон (Cicero, 106 – 43 до н.е.), який був призначений римським сенатом на посаду квестора на Сицилії, згадував у «Тускуланських промовах», як, відвідавши Сіракузи в 75 році до н.е. (тобто через 137 років після смерті вченого), він відшукав гробницю Архімеда (Tomba di Archimede – італ.) лише за зображенням циліндра на ній. Вона перебувала в напівзруйнованому стані і ніхто з жителів Сіракуз не знав, де знаходиться могила найгеніальнішого з його громадян. Ціцерон писав, що «*цей сицилієць мав у собі геніальність, якої, здається, людська природа не може осягти*».

Куля і конус. Архімед також встановив, що в об'ємі сфери поміщається рівно два об'єми кругового прямого конуса. Справді, об'єм конуса $V_k = \pi R^2 \; h/3$, де h – висота конуса, а об'єм сфери $V_c = 4 \pi R^3/3$. Якщо $h = 2R$, то $V_c/V_k = 2$.

Таким чином, Архімед вивів знаменитий закон, що за однакових основ і за рівних висот співвідношення між об'ємами конуса, кулі і циліндра, вписаних одне в одного, є ***1:2:3***. Воно означає от що: якщо за одиницю взяти об'єм вписаного в сферу конуса, то їхні об'єми співвідносяться як 1:2, якщо ж сферу вписати в циліндр, то їхні об'єми співвідноситимуться як ***2:3***, а якщо конус вписати в циліндр, то їхні об'єми співвідноситимуться як ***1:3***.

Число Архімеда. Ще до Евкліда було відомо, що площа круга дорівнює площі прямокутного трикутника, у якого один катет дорівнює довжині кола, а другий – радіусу цього кола. Звідси випливало, що відношення довжини будь-якого кола до його діаметра буде сталим числом. Визначення його величини мало велике значення, адже воно тісно ув'язане з задачею про квадратуру круга.

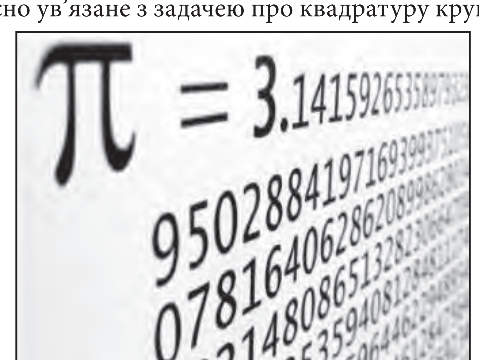


Рис.18. Число π

У своїй роботі «Про вимірювання круга» Архімед дав своє знамените значення для цього числа, нині добре відомого під назвою «*числа π*». Його метод обчислення полягав у вписуванні в коло й довкола нього правильних багатокутників з однаковим числом сторін. Все починалося з 6-кутників. На кожній стороні 6-кутника надбудовувався рівнобедрений трикутник і виникав вписаний 12-кутник. Далі, кожен раз подвоюючи таким способом число сторін багатокутника, Архімед наближав його до кола. Дійшовши до 96-кутників, він зробив оцінку числа π (як відношення периметра багатокутника до його діагоналі, що дорівнює одиниці): $22/7 > \pi > 223/71$. Це число у ті часи дістало назву **числа Архімеда** і дорівнювало ***3⅟7***. Вийшло, що у довжині кола поміщається три цілих його діаметри і ще одна сьома. Архімед також встановив, що площа круга дорівнює цьому числу, помноженому на радіус круга в квадраті. Якщо круг помістити в квадрат зі стороною, що дорівнює його діаметру, то співвідношення їхніх площ буде як ***11/14***. Число Архімеда мало величезне значення для подальшого розвитку математики. Цим числом користувались аж до пізнього періоду епохи Відродження. Щороку третього місяця (березня) 14-ий день відзначають як День числа π.

Квадратура параболи. Велич Архімеда ще й у тому, що, мислячи геометрично (трикутниками, колами, прямими і дугами), він розв'язував нетипові математичні задачі. У праці «Про квадратуру параболи» він, у межах свого підходу, визначив площу сегмента параболи, тобто фактично проінтегрував параболу. Архімед довів, що відношення площ для частин прямокутника, діагоналлю якого є квадратна парабола (рис. 19), становить один до двох: $S_a/S_b = 1/2$.

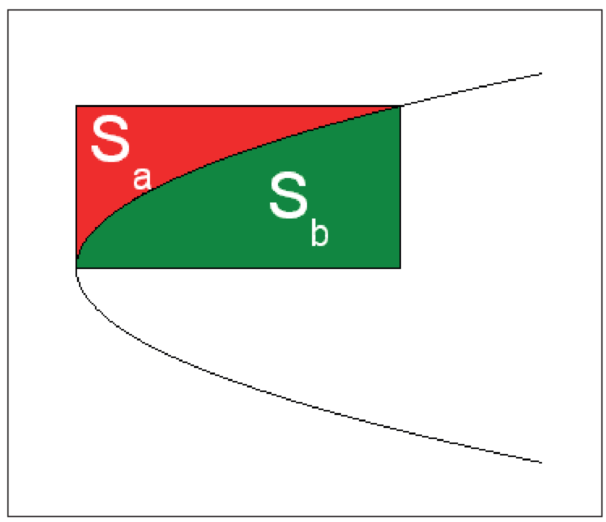


Рис.19. Площа сегмента параболи

У цій же праці він довів, що площа сегмента параболи S_n, яка відтинається від неї прямою (рис. 20), складає ***4/3*** від площі S_m, вписаного у цей сегмент трикутника. Для доведення Архімед обчислив суму нескінченного ряду: $1 + ¼ + 1/4^2 + 1/4^3 + \ldots = 1/(1 - 1/4) = 4/3$, який є сумою нескінченної геометричної прогресії зі знаменником ***1/4***. Про геометричну прогресію Архімед, звісно, нічого не знав. Він просто помітив, що якщо до якоїсь величини ***A*** додати її четвертинку ***A/4***, а до четвертинки – її четвертинку ***A/4 ¼*** і так далі, а в кінці додати ще ***1/3*** від останньої четвертинки, то стільки б не було доданків, де б не перервати ряд, сума такого ряду буде одна й та ж і дорівнюватиме ***4A/3***.

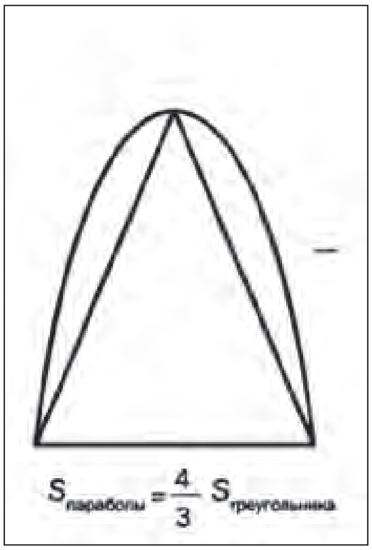


Рис.20. Парабола і трикутник

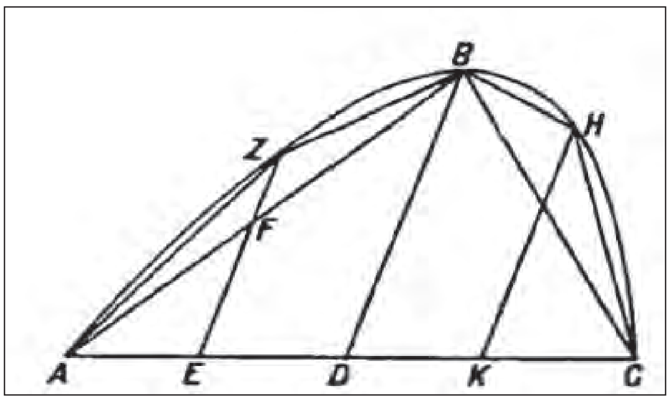


Рис. 21. Вичерпування параболи

Справді: $A + A/3 = 4A/3;$ $A + A/4 + (A/4)(1/3) = 4A/3;$ $A + A/4 + (A/4)(1/4) + (A/4)(1/4)(1/3) = 4A/3;\ldots A + A/4 + A/4^2 +\ldots + A(1/4)^n(1/3) = 4A/3$. Кожен доданок ряду – це загальна площа трикутників, вписаних в неохоплену попередніми членами ряду частину сегмента параболи. Цей метод носить назву «*методу вичерпування Евдокса*» (рис. 21): два додаткові трикутники ***AZB*** і ***BHC*** поміщають між параболою і початковим трикутником ***ABC*** шляхом проведення паралелей до центральної лінії ***BD*** через четвертні точки ***E*** і ***K*** базової лінії ***AC***. Можна показати, що для параболи кожен з нових трикутників буде мати площу 1/8 від площі ***ABC***, а отже, обидва разом – ¼ від цієї площі. За таким принципом кожен раз площа між дугою параболи і хордами буде вичерпуватися. Площа кожного нового трикутника буде складати 1/8 від площі попереднього трикутника. Метод вичерпування породив поняття границі числових послідовностей, яке аж через 2000 років лягло в основу інтегрального числення ***Лейбніца*** і ***Ньютона***.

Архімед першим у математиці винайшов спосіб обчислення суми нескінченного ряду і показав, що сума нескінченного числа доданків може бути скінченною величиною. Це дозволило йому розв'язати відомий парадокс Зенона про змагання бігуна Ахіллеса й черепахи. Зенон припустив, що черепаха рухається удвічі повільніше, ніж Ахіллес. Тому Зенон дав їй фору у половину дистанції. Коли Ахіллес добігав до місця, з якого стартувала черепаха (***AB/2***), вона встигла відповзти на чверть дистанції (***AB/4***), тобто на половину тієї віддалі, яку їй потрібно було подолати (див. рис. 22). Таким чином, ситуація повертається ніби до самого початку: коли Ахіллес знову досягне точки старту черепахи (***AB/4***), вона встигне відповзти до точки (***AB/8***) і так до нескінченності. Виходить, що Ахіллес ніколи не наздожене черепаху. Архімед довів, що хоч відрізок ***AB*** можна ділити на нескінченне число менших відрізків, але з урахуванням, що ці відрізки все менші й менші, то сума їх є скінченним числом, а саме: ***½ + ¼ + 1/8 +… = 1***. Тому Ахіллес не наздожене черепаху.

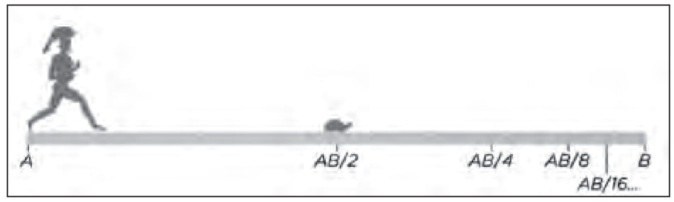


Рис. 22. Ахіллес і черепаха

В іншій своїй роботі «Про коноїди і сфероїди» [10] Архімед вивів формули для визначення площ еліпса, поверхні конуса і кулі, а також для обчислення об'ємів кулі та сегментів параболоїда, гіперболоїда і еліпсоїда обертання.

У «Книзі лем», зокрема, є твердження, що площа круга, описаного довкола квадрата, є вдвічі більшою за площу круга, вписаного в квадрат. Архімед запропонував геометричний спосіб розв'язування кубічних рівнянь типу $x^2(a \pm x) = b$, корені яких знаходив за допомогою перетину параболи і гіперболи. Вчений багато займався також проблемами квадратури круга та подвоєння об'єму куба, які не мають розв'язку в раціональних числах. Так, у першій – сторона квадрата $a = r\sqrt{\pi}$ (рис. 1), а у другій – ребро куба A має бути $\sqrt[3]{2}A$. Числа ж $\sqrt{\pi}$ і $\sqrt[3]{2}$ – ірраціональні.

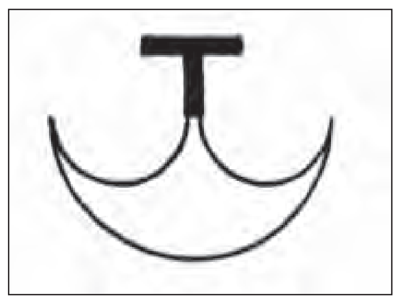


Рис. 23. Ніж «Арбелос»

Арбелос. Арбелос – це античний ніж (рис. 23), який використовували шевці для обробки шкіри. З геометричної точки зору лезо арбелоса – це область площини, обмеженої трьома половинками кіл, що дотикаються одне до одного (рис. 24). Архімед, по-перше, встановив площу такої фігури (фіолетовий колір). Вона дорівнювала площі круга (зелений колір) з діаметром ***CD*** (або $\pi R^2/4$, де R –

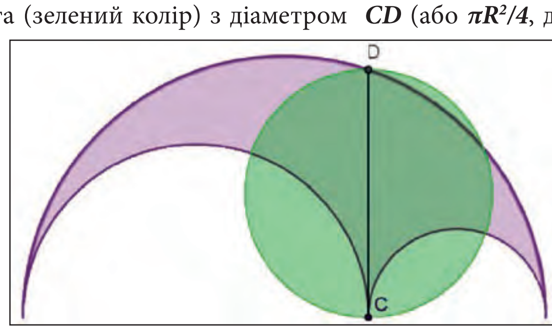


Рис. 24. Площа Арбелоса

радіус фіолетового кола). А по-друге, показав, що якщо з точки ***B*** (рис. 25) підняти перпендикуляр до перетину з найбільшим півколом і вписати два круги C_1 і C_2 так, аби вони одночасно торкались перпендикуляра великого і малого кіл, то площі ***S*** цих кругів дорівнюватимуть ($S_{C1} = S_{C2}$), незалежно від місцезнаходження точки ***B***. Ці круги дістали назву «*кругів-близнюків Архімеда*».

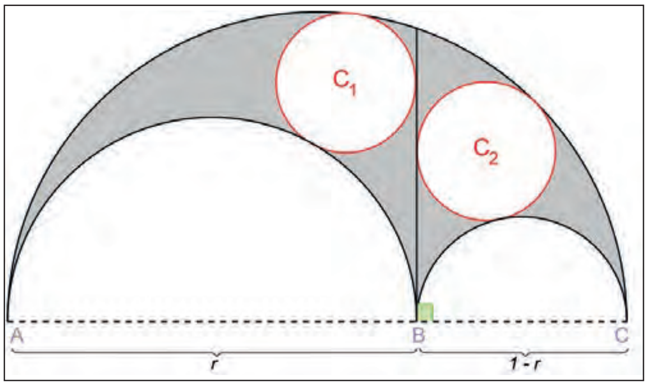


Рис. 25. Круги Архімеда

Салінон. Іншою фігурою, яка зацікавила Архімеда, стала тогочасна сільничка – салінон. На рис. 26 її профіль подано голубим кольором. Геометрично — це замкнута фігура, побудована з чотирьох напівкіл: ***AFB, CED*** та ***AC*** і ***DB***. Архімед довів, що площа цієї фігури дорівнює площі круга (на рисунку обмеженого колом), побудованого з центром у точці O_1 так, аби в точках ***E*** і ***F*** збігатись з краями сільнички. Якщо ***OF = R, OC = R/3***, а $O_1F = 2R/3$, де ***R*** – радіус великого кола, то площа салінону буде $4\pi R^2/9$.

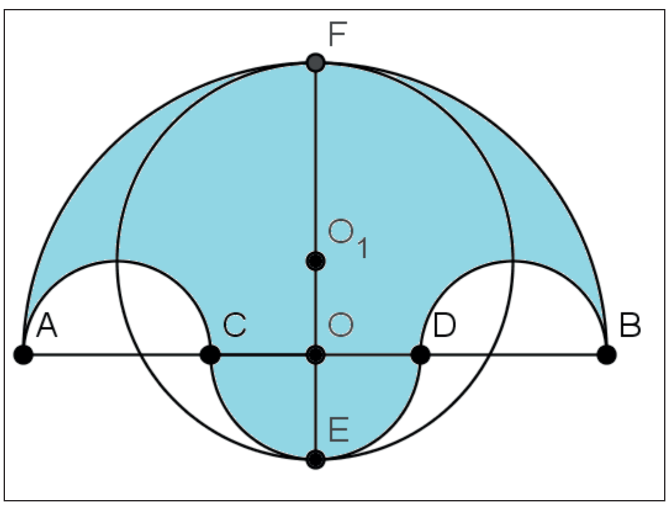


Рис. 26. Салінон

Стомахіон Архімеда [10] складається із 14 пласких фігур різної форми, які усі разом поміщаються у квадрат. Одні вважають стомахіон одним із перших пазлів, інші – початком комбінаторики. Коли побудувати квадрат зі стороною у 12 клітинок загальною площею в 144 клітинки, то площі окремих фігур будуть такими, як зображено цифрами на рис. 27. Одним із завдань, яке ставив Архімед, було визначення числа комбінацій фігур, що поміщаються у квадрат. Лише у 2003 році шляхом комп'ютерного перебору було з'ясовано, що існує існує 17152 таких способів "стомахіона" Архімеда (рис. 27) без урахування дзеркальних відбитків (рис. 27). Із окремих елементів стомахіона можна створювати силуети різних предметів складної конфігурації і тварин, як, наприклад, на рис. 28.

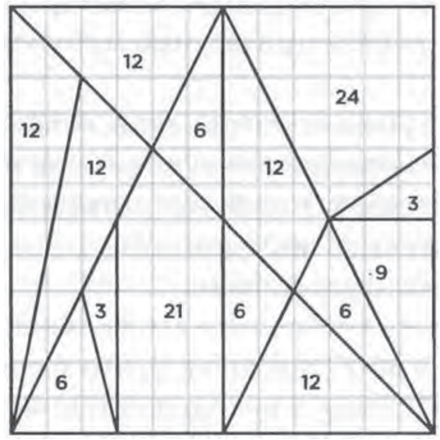


Рис. 27. «Стомахіон» Архімеда

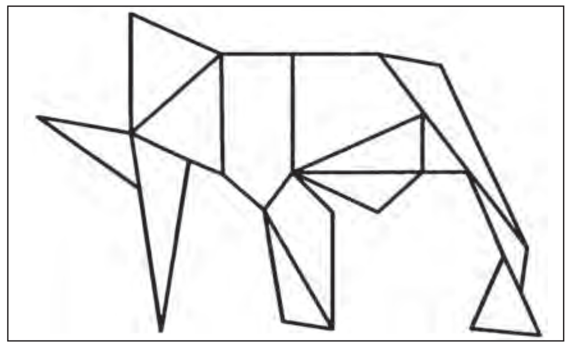


Рис. 28. Слоненя

Великі числа. Греки не знали цифр і замінювали їх літерами свого алфавіту. Аби відрізнити числові записи від словесного тексту, з правого боку літери вгорі ставили штрих або горизонтальну риску. Оскільки поняття нуля тоді не існувало, то можна сказати, що давні греки користувалися дев'ятковою системою числення. При цьому перші дев'ять букв грецького алфавіту зі штрихами позначали цифри від 1 до 9. Наступні дев'ять букв позначали десятки від 10 до 90. Подальші сім букв – позначали сотні, від 100 до 900. Для позначення цифр 90 і 900 були запозичені дві букви зі старого алфавіту (рис. 29). Аби передати число тисяч, ставили внизу штрих, з лівого від букви боку. Наприклад, число 1849 вони б записали так: 'α'ω'μ'θ'. Отже, найбільшим числом, межею усяких рахунків у греків було десять тисяч. Його вони називали «*міріадою*». За такого запису чисел прості арифметичні дії викликали у давніх греків певні труднощі. Для запису дробів використовували вавилонські шістдесятирічні та єгипетські позначення. Десятинні дроби з'явилися в Європі аж в епоху пізнього Ренесансу.

α'	β'	γ'	δ'	ε'	ς'	ζ'	η'	θ'
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι'	κ'	λ'	μ'	ν'	ξ'	ο'	π'	ϙ'
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ'	σ'	τ'	υ'	φ'	χ'	ψ'	ω'	ϡ'
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Рис. 29. Відповідність цифр грецьким буквам

У своєму трактаті під назвою «Псамміт» – «Про число піщинок» — [10] Архімед показує спосіб, як за допомогою згаданої вище системи числення можна записати як завгодно великі числа та дії між ними. Для прикладу він узяв задачу про підрахування кількості піщинок, які могли б поміститись у тодішньому Всесвіті – від Землі до сфери нерухомих зірок. Архімед запропонував рахувати вже самі міріади (числа другого порядку). Тоді найбільшим числом ставало – «*міріади міріад*» – сто мільйонів. Далі він рахував уже міріади міріад, називаючи їх числами «*третього порядку*» і так далі. Знаючи розміри Всесвіту та розмір піщинки, Архімед прийшов до висновку, що число піщинок, які могли б заповнити Всесвіт, не перевищує тисячі міріад чисел восьмого порядку, тобто, у сучасних позначеннях, числа $\boldsymbol{10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{7x8} = 10^{63}}$. Для порівняння, число протонів у Всесвіті зараз оцінюють як $\boldsymbol{10^{82}}$. Це число менше як ґуґол (google), рівне $\boldsymbol{10^{100}}$, тобто, одиниці зі ста нулями. Таким чином, було доведено, що число піщинок є скінченним, а нескінченним є ряд натуральних чисел. Архімед був зачарований світом чисел, логікою вічних законів, у порівнянні з якими закони світу людей є такими швидкоплинними й недосконалими. За словами Плутарха, вчений був настільки захоплений математикою, що забував про їжу і зовсім не дбав про себе.

Задача Архімеда про биків. Задача була написана віршем і адресована олександрійським математикам [11]. Суть її така. Є 4 різноколірні стада биків і 4 різноколірні стада корів: білі, чорні, руді й рябі. Число биків у кожному стаді є таким: 1) білі бики складають ½ +1/3 від чорних биків[2] + повне число рудого стада; 2) чорні бики – ¼ +1/5 від рябих биків + повне число рудого стада; 3) рябі бики – 1/6 +1/7 від білих биків + повне число рудого стада. А для корів були такі пропорції: 1) білі корови складають 1/3 +¼ від чорного стада биків + повне число чорних корів; 2) чорні корови – ¼ +1/5 від рябого стада биків + повне число рябих корів; 3) рябі корови – 1/5 +1/6 від рудого стада биків + повне число рудих корів; 4) руді корови – 1/6 +1/7 від білого стада биків + повне число білих корів.

До цих семи умов були ще дві: 1) сума білих і чорних биків є квадратним числом (1, 4, 9, 16, …), таким, що відповідає квадрату $\boldsymbol{n}$, де $\boldsymbol{n}$ = 1, 2, 3, 4,…; 2) сума рябих і рудих биків є трикутним числом (1, 3, 6, 10, 15, 21,…), тобто таким, яке можна зобразити трикутником і представити як $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} + 1)/2$. Одна задача полягала у тому, аби знайти загальну кількість биків і корів, а друга – визначити кількість биків і корів у кожному стаді.

«*Хто розв'яже цю задачу*, – писав Архімед, – *той стане першим серед мудрих*». Олександрійці так і не спромоглись її розв'язати. Розв'язок знайшли лишень через 2100 років! Якщо виходити з перших семи умов, то відповідь така: загальна кількість худоби = 50 389 082. Якщо ж додати дві останні умови, то задача немає єдиного розв'язку. Наближений розв'язок запропонував у 1880 році ***Карл Амтор***. Його відповідь: загальне число = 7,766 10^{206544} !

Закон Архімеда. Очільника Сіракуз ***Гієрона II*** гризли сумніви, чи зроблена його корона з чистого золота, чи не підмішав часом його ювелір туди менш вартісний метал? Його слуга перевірив, що вага корони відповідає вазі злитка, виданого ювелірові. Але недовіра не зникла. Гієрон попросив у Архімеда допомоги. Дав йому корону і такий самий за вагою злиток золота. Архімед довго обдумував, як розв'язати це завдання.

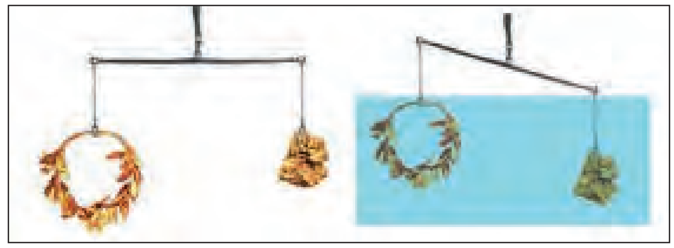


Рис. 30. Зважування корони у повітрі та у воді

Питома вага золота (вага поділена на об'єм) йому була відома, але складність полягала в точному визначенні об'єму корони, адже вона мала незручну для вимірювання горбату форму із зубцями і листками. Допоміг випадок. Якось Архімед пішов у лазню. У ті часи там відпочивали і обмінювались новинами. Лягаючи у наповнену водою ванну, він відчув, що зависає, а рівень води у ній піднімається тим вище, чим глибше він занурюється. До нього дійшло, що об'єм витісненої ним води може збігатися з його об'ємом! Це означало, що й для визначення об'єму корони досить опустити її в посудину, по вінця заповнену водою. Тоді об'єм витісненої води буде дорівнювати об'єму корони. Вражений своїм відкриттям, з криком «*Еврика*!» (ευρηκα), що по-нашому означає: «*Знайшов!*», Архімед вискочив із лазні голим, поспішаючи через центральну площу Сіракуз до свого дому, аби все точно перевірити. Вдома він пересвідчився, що тіло витісняє об'єм води, що дорівнює об'єму самого тіла. При цьому тіло втрачає у воді рівно стільки ваги, скільки важить витіснена ним рідина. Якщо в короні є легший від золота метал, то аби урівноважуватись зі злитком, він повинен мати більший об'єм. А раз так, то при зануренні у воду, корона втратить у вазі більше, ніж злиток, бо предмет з більшим об'ємом буде у воді легшим. Опустивши у воду терези з короною і злитком, які були зрівноважені в повітрі (див. рис. 30), Архімед виявив, що чаша з короною стала легшою і піднялась догори. Обман було викрито. Цю історію записав ***Вітрувій,*** згаданий в [4].

Італійська поштова марка

Так відбулося відкриття основного закону гідростатики – закону Архімеда, відомого кожному зі шкільних років: «*На тіло, занурене в рідину, діє виштовхувальна сила, яка направлена вертикально вгору і дорівнює вазі рідини, витісненої тілом*». Сила виштовхування $\boldsymbol{F}$, яка діє на тіло, дорівнює $\boldsymbol{F = \rho\, g\, V}$, де $\boldsymbol{\rho}$ – густина тіла, $\boldsymbol{g}$ – гравітаційна стала, а $\boldsymbol{V}$ – об'єм витісненої рідини. Вага ж цієї рідини дорівнює $\boldsymbol{F}$. Архімед встановив: 1) якщо густина тіла і рідини однакові, то воно зануриться так, що ніяка його

[2]У ті часи використовували дроби тільки з чисельником, рівним 1.

частина не виступатиме над поверхнею рідини і тіло не опуститься до дна; 2) якщо питома вага тіла менша, ніж питома вага рідини, то воно плаватиме і зануриться у рідину настільки, аби об'єм рідини, витісненої зануреною частиною тіла, мав вагу, що дорівнює вазі всього тіла; 3) тіла, густина яких більша від густини рідини, занурюються у рідину до самого дна і стають легшими на величину ваги об'єму витісненої ними рідини. Таким чином, головне у плаванні густина, а не вага (приклад айсбергів: вода у твердому стані має меншу густину). Архімед описав свій закон у творі «Про плаваючі тіла» поруч зі способами визначення складу сплавів [12]. Прикладами зміни густини тіла: аби плавати на бажаній глибині, є риби зі своїми плавальними міхурами й підводні човни з повітряними балонами. Повітря володіє високим ступенем стискуваності. При зануренні його сильно стискають, а для спливання – тиск зменшують. У Мертвому морі густина води настільки велика (аж до 1,24 г/см^3), що людина може лежачи читати газету на його поверхні.

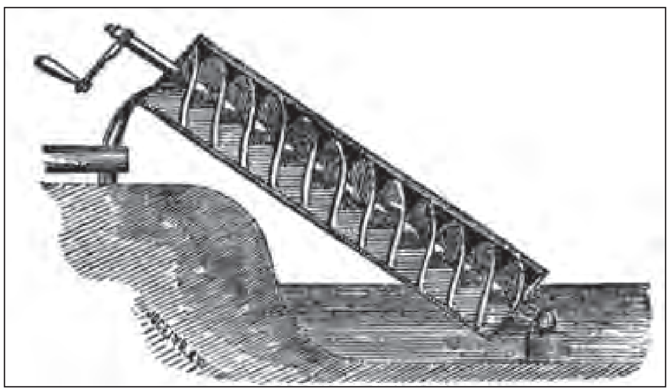


Рис. 31. Архімедів гвинт

Гвинт (шнек) Архімеда. Ще перебуваючи в Єгипті, Архімед винайшов «нескінчений гвинт» (равлик, шнек) для осушування залитих Нілом територій. На вигляд (рис. 31) – це така собі видовжена «*м'ясорубка*». Гвинт використовували також для подачі води з низинних водойм у зрошувальні канали. Він запускався в рух руками. Усередині закритого циліндра гвинт обертали так, щоб можна було викручувати знизу вгору окремі тверді і сипкі предмети, навіть вичерпувати воду (наприклад, з шахт). Звідси поширилась ще назва «*гвинтова помпа Архімеда*». Гвинт Архімеда використовується і сьогодні для підняття рідин та гранульованих твердих речовин, таких, як вугілля і зерно. Його також описав Вітрувій, який хотів удосконалити помпу для зрошення Висячих садів Семіраміди. Перший у світі морський пароплав з гребним гвинтом, збудований у 1839 році, дістав назву «*Архімед*» на честь цього винаходу Архімеда.

Метальні машини та дзеркала Архімеда. Карфаген і Рим боролись за Сіракузи як за центр середземноморської торгівлі. Це стало причиною І-ої Пунічної війни, у якій перемогли римляни. У часи ІІ-ої Пунічної війни, коли ***Ганнібал*** (277–183 до н.е.) перейшов через Альпи, Сіракузи вкотре підтримали Карфаген у його боротьбі з Римом. Римляни на чолі з консулом ***Марком Марцеллом*** і його заступником ***Аппієм Клавдієм*** рушили тоді в похід на Сіракузи, сподіваючись швидко взяти місто штурмом.

Проте «*бліцкриг*» не вдався і їм довелося на довгих 18 місяців затриматися біля його стін. Римляни вперше зіткнулися тут з небаченими досі, як їм здавалось, сторукими атлантами, які кидались величезними кам'яними брилами. Як твердять історики, Архімед став душею найбільш впертого і умілого спротиву. Під його орудою сіракузці заздалегідь збудували десятки потужних метальних машин – катапульт, які прицільно закидали римлян важким камінням [13]. Римляни вирішили вночі підкрадатися під самі стіни міста, гадаючи, що там безпечніше. Але тут на їх біду греки використали метальні машини близької дії, а з бійниць у стінах осипали їх градом списів і дротиків та навіть свинцевими ядрами. Були задіяні також потужні крани (кігті, або ж «пазурі Архімеда»), які чіпляли під водою залізними гаками носи кораблів, піднімали їх вверх, а потім скидали до низу, так що кораблі перевертались і тонули. Діяли вони за принципом колодязного журавля, але через систему блоків. Місто стійко трималося завдяки інженерному генію Архімеда та мужності городян. Римляни вимушені були перейти від штурму до облоги міста. Знаний античний історик ***Полібій*** писав, що «*завдяки одній людині місто не вдалося взяти одразу*». Воювати з геометром було не просто. Як свідчить ***Плутарх***, лише восени 212 року до н.е. Сіракузи таки були взяті римлянами через підкуп зрадника (і у них були свої Носи*), який відкрив міські ворота. Грабунки й насильство прокотились містом. При цьому «Головний конструктор» оборони загинув у своєму будинку від меча римського легіонера, просячи єдине: «*Noli turbare circulos meos!*» – «*Не чіпай креслень моїх!*». Художник ***Едуард Вімонт*** (1846–1930) зобразив цю подію в картині «Смерть Архімеда». Вченому йшов 75 рік. Марцелл, який хотів бачити його живим, був сильно розчарований, адже він знав, що цей талант вартував цілої армії. Разом з вдячними громадянами і римлянами він влаштував Архімеду пишні похорони. Поховали генія на цвинтарі серед могил його родичів, а згодом спорудили склеп. Єдиним трофеєм, який взяв Марцелл після захоплення Сіракуз був «Небесний глобус» Архімеда. Він помістив його в храм «Доблесті» в Римі.

Рис. 32. Оборона Сіракуз, 212 р. до н.е.

Прокл, Лукіан, Гален, Цеці та Євстахій Солунський, згадуючи осаду Сіракуз, розповідають, що римські галери та триреми, які знаходились на відстані польоту стріли, були спалені захисниками міста за допомогою «променевої зброї» – увігнутих дзеркал («запалювальних скелець») і відполірованих до блиску мідних листів, прикріплених до дерев'яних щитів [14].

***Прилуцький полковник Іван Ніс в часи гетьмана Івана Мазепи при обороні неприступної гетьманської столиці Батурин показав московитам таємний підземний вхід у фортецю і все закінчилося відомою в історії різаниною 2 листопада 1708 року, у якій загинуло від 11 до 15 тисяч батуринців.**

ISSN 1819-7329. Світогляд, 2018, №5 (73)

Рис. 33. Увігнуте дзеркало Архімеда

Скориставшись сонячною погодою, сіракузці під орудою Архімеда сфокусовували сонячні промені на паруси окремого судна та на його смоляні борти. Коли воно загорялось, переходили до наступного і т.д. Цей епізод розбирав в деталях один із архітекторів Святої Софії в Константинополі ***Анфімій Траллійський*** (VI ст.) у своєму трактаті про випуклі й увігнуті дзеркала. Однак таку можливість заперечував ***Рене Декарт*** (1596–1650) у своїй «Діоптриці». Відродив віру в «сонячну піч дзеркал» ***Бюффон*** у своїй праці «Винахід дзеркал для запалювання предметів на великих відстанях», опублікованій у 1747 році. Він зумів за допомогою системи дзеркал протягом півгодини запалити дерево на відстані 50 метрів.

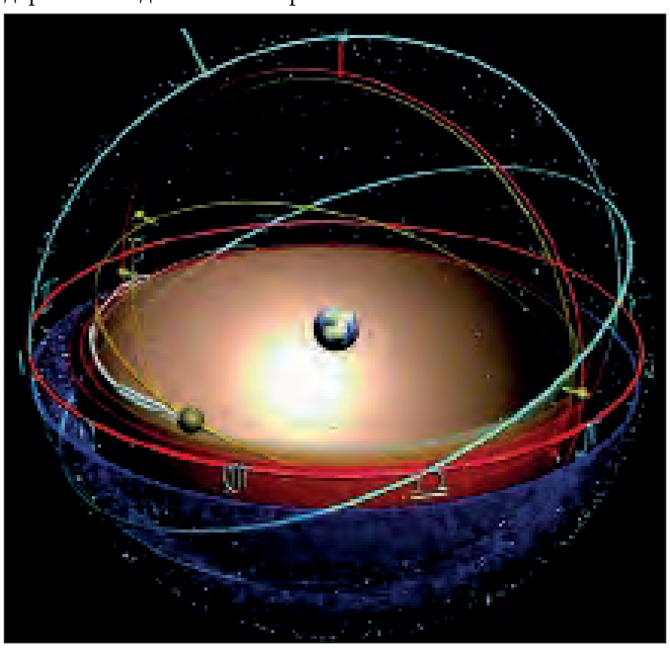


Рис. 34. Планетарій Архімеда

Небесний глобус Архімеда. Ще у V ст. до н.е. грецькі астрономи встановили, що дні весняного і осіннього рівнодення ділять рік не на рівні частини. Це на їх погляд означало, що Сонце рухається по небесному склепінню з непостійною швидкістю.

Архімед побудував «небесний глобус» – своєрідний планетарій у вигляді небесної сфери, при русі якої можна було слідкувати за переміщенням п'яти планет, сходами Сонця і Місяця, їх заходами за лінію горизонту та фазами затемнення Місяця. Цей глобус став символом могутності людського розуму. Базою механічного глобуса Архімеда був звичайний зоряний глобус, на поверхню якого були нанесені зірки, фігури сузірь, небесний екватор та екліптика – лінія перетину площини земної орбіти з небесною сферою (див. рис. 34). Вздовж екліптики розміщені 12 зодіакальних сузірь, через які рухається Сонце, проходячи одне сузір'я за Місяць. Глобус закріпили на вісі, спрямованій на полюс світу (Полярну зірку) і до половини занурили в кільце, що зображало горизонт. Зоряний глобус використовували як рухому карту зоряного неба. Повертаючи кулю на потрібні кути, можна було легко впізнати вигляд неба в будь-який час. Так, за один оберт глобуса «Місяць» повинен був переміщатися на 1/27 долю кола у напрямку, протилежному до його обертання, тоді як «Сонце» повинно було проходити за «Місяцем» шлях, приблизно у 12,5 рази менший. В античну епоху не було за складністю інших механізмів, хоч трохи наближених до «архімедової сфери». Пізніші механічні годинники багато чого запозичили від цієї конструкції Архімеда. Тому нею так захоплювались.

Архімед знайшов розміри Землі та визначив віддалі між Землею і Місяцям, Землею і планетами та між орбітами Сонця і планет. Усього 12 відстаней. Межею Всесвіту було небо з нерухомих зірок. Вчений встановив, що діаметр Сонця у 30 разів більший від діаметра Місяця, а також, що поперечник Сонця лежить у межах кутів від 35'55'' до 27' (насправді – 32'). В основі обчислень лежала система світу, центром якого є Земля, довкола якої обертаються Місяць і Сонце.

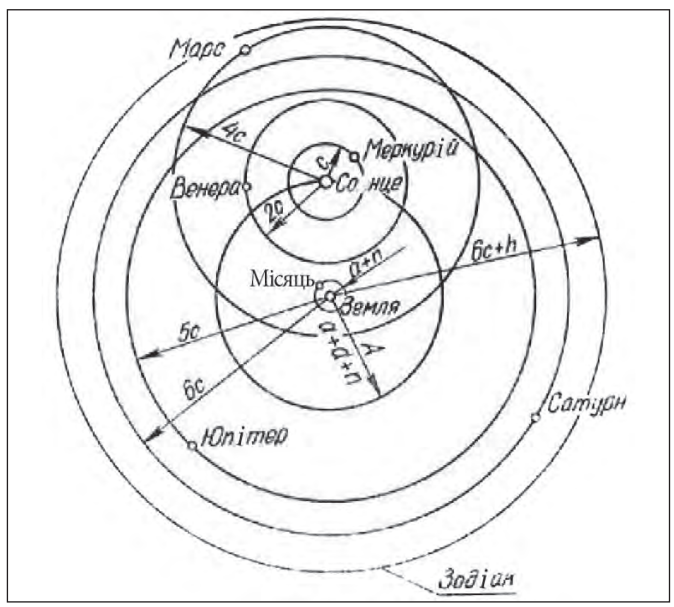


Рис. 35. Система світу Архімеда. Міжпланетні віддалі подані в міріадах стадій: $a = 554$, $d = 5081$, $A = 5640$, $c = 2027$, $h = 2007$, $n = 4$

Однак три найближчі планети – Меркурій, Венера («нижні») і Марс – обертаються довкола Сонця (рис. 35). Радіуси орбіт цих планет кратні між собою і співвідносяться як 1:2:4. Цікаво, що ці числа близькі до справжніх. За даними Архімеда, якщо взяти віддаль від Землі до Сонця за одиницю, то відносна відстань від Сонця до орбіти Меркурія складатиме 0,36 (насправді – 0,39, похибка 8 %), орбіти Венери – 0,72 (збігається зі справжнім), Марса –1,44 (насправді – 1,52, похибка 5 %).

Описана епіциклічна схема лягла в основу системи світу ***Клавдія Птолемея***, що тривалий час була вінцем античної астрономії. Хоча Архімед її не заперечував, все ж у своєму творі «Псамміт» він подав відомість і про геліоцентричну систему світу ***Арістарха Самоського*** (бл. 280 р. до н.е.) – «Коперника античності».

Спіраль Архімеда. До важливих відкриттів Архімеда в геометрії необхідно додати ще дослідження властивостей спіралей. Спіральність дуже поширена в природі. Мушля є одним із прикладів спіралі, яка розкручується від центру. Саме її форма й привернула увагу Архімеда. Вивчаючи її, він вивів рівняння спіралі ($r = \alpha\varphi$), яке відоме під назвою «*спіралі Архімеда*» і написав працю: «Про спіралі». Ріст її кроку є сталою величиною, незмінною зі зміною кута φ. Спіраль виникає як слід, який може залишати тіло, рівномірно рухаючись від осі обертання диску до його периферії. Для ілюстрації уявімо низку концентричних кіл з однаковою відстанню одне від одного, розбитих на однакові сектори (рис. 36). Нехай промінь ***a*** обертається довкола точки ***O*** з постійною кутовою швидкістю ω, а точка ***P*** рухається з постійною швидкістю υ вздовж променя ***a***. Враховуючи обертання, точка ***P*** опинятиметься в положеннях, позначених на рисунку цифрами. Якщо з'єднати їх, отримуємо спіраль. Архімед показав, як побудувати дотичну до спіралі в заданій точці, та знайшов площу її першого витка. Вона виявилася рівною 1/3 від площі круга, в яку вона вписана.

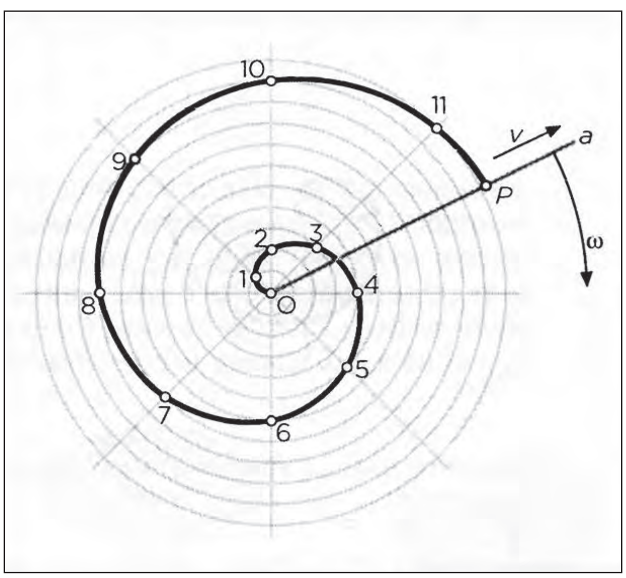


Рис. 36. Спіраль Архімеда

Спіраль Архімеда допомогла й у вирішення давньої проблеми про трисекцію заданого кута (задача 3, див. на початку). Розглянемо кут, утворений променями ***OA*** та ***OB*** (рис. 37). Нехай промінь ***OA*** рівномірно обертається довкола точки ***O***. Тоді точка ***P***, що рівномірно рухається по цьому промені, утворить спіраль.

Коли промінь ***OA*** співпаде з променем ***OB***, відрізок ***OP*** ділять на три рівні частини ***OR*** = ***RQ*** = ***QP***. Циркулем з центра ***O*** проводять дуги ***RU, QV*** до перетину зі спіраллю. Промені, проведені через точки ***U*** і ***V***, якраз і поділять кут на три рівні частини.

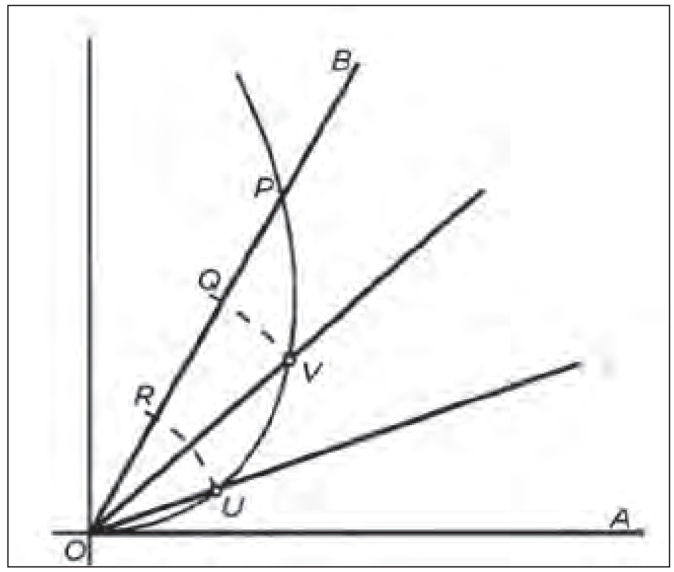


Рис. 37. Трисекція кута

Найбільш поширеною є логарифмічна спіраль, крок якої наростає по мірі її розкручування. Вона є символом руху й розгортання Всесвіту. Якщо числа з ряду Фібоначчі зобразити графічно у вигляді квадратів зі сторонами 1, 1, 2, 3, 5, 8,… і провести огинаючу криву, то одержимо спіраль, зображену на рис. 38. Неважко пересвідчитись, що на кожному витку розкручення спіраль підкоряється пропорції золотого перетину.

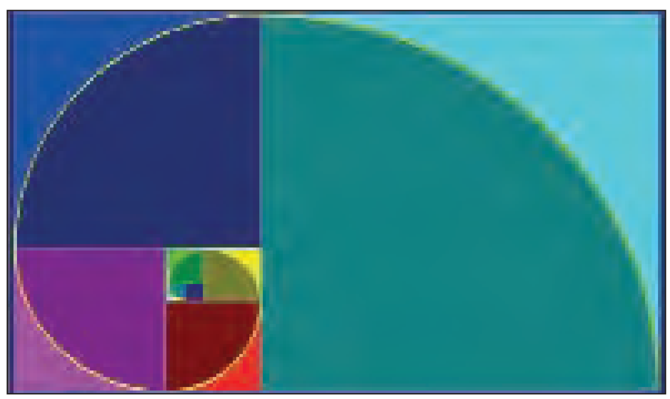


Рис.38. Логарифмічна спіраль

Релятивістський парадокс Архімеда. Уявімо собі підводний човен, густина якого збігається з густиною води, так що він не тоне й не спливає в океані. Далі уявімо, що цей човен набуває швидкості, близької до світлової. За законом загальної теорії відносності маса рухомих тіл зростає тим більше, чим ближча їх швидкість до швидкості світла. З точки зору спостерігача на березі, човен, маса якого зросла, має потонути. Однак, з точки зору капітана човна, все виглядає цілком інакше. Це не він рухається, а вода довкола човна проноситься повз нього з шаленою швидкістю, а отже її молекули стають важчими й густина води зростає порівняно з човном, і він має бути виштовхнутим на поверхню води. Виникає парадокс – потоне чи спливе човен? Для його розв'язання необхідно врахувати, що плавучість тіл, занурених у рідину, залежить від їхньої ваги, тобто від їх притягування до Землі – гравітації. Гравітація між тілами сама залежить від швидкості їх відносного руху. А раз так, то зростає не тільки густина води, але й гравітаційна взаємодія між підводним човном і рухомою Землею, тобто Земля притягуватиме човен з більшою силою. Якщо підрахувати, то це зростання гравітації виявляється більшим за зростання густини води. Інакше кажучи, збільшення ваги човна за рахунок збільшення його гравітаційної взаємодії з Землею перевищуватиме збільшення густини води, тобто перекриватиме зростання виштовхувальної сили Архімеда. А отже, й з точки зору капітана, його човен повинен затонути. В результаті маємо, що спостерігач на березі думає, що човен піде на дно через збільшення густини води, а капітан пояснює такий же результат зростанням гравітаційного поля.

Платон і Аристотель. Фрагмент з картини Рафаеля

Велич Архімеда. Деякі зі своїх творів Архімед, аби увічнити їх, відсилав у Олександрійську бібліотеку до її хранителя ***Ератосфена*** (276–194 рр. до н.е.), відомого математика, що першим з великою точністю обчислив діаметр Землі. Ідеї Архімеда майже на дві тисячі років випередили його час. Лише в XVII столітті вчені зуміли розвинути його математичні праці. Велич Архімеда невмируща.

Міжнародний математичний союз заснував медаль Філдса, якою раз в чотири роки нагороджують учених за видатні здобутки в математиці. Ця нагорода є найвищою у математиці, оскільки Нобель не забажав цю науку відзначати своєю премією. Так ось, на одному боці цієї медалі вибито рельєфний портрет Архімеда зі словами римського поета ***Марка Манілія*** довкола нього: «*Transire suum pectus mundoque potiri*» – «*Перевищити людську природу і підкорити Всесвіт*».

Від V-го століття нашого літочислення грецька наука занепала майже на сімсот років, впродовж яких європейські народи не тільки нічого нового не запропонували у розвитку математики, але забули про досягнення давніх греків. Так, з твором Евкліда «Початки» європейці познайомилися за арабським перекладом. Деякі праці Архімеда так і залишилися не перекладеними з арабської мови. Загалом праці Архімеда дійшли на Захід через Візантію та арабський світ. Араби зберегли для європейців також і твори Платона та Арістотеля. Аж у 1879 році данський математик ***Гейберг*** (1854–1928) виявив у Константинополі палімпсести [15,16] – богословські тексти (XII–XIV ст.) на пергаменті з більш ранніми (X ст.) давньогрецькими текстами семи робіт Архімеда. Це яскравий приклад, що робила з наукою догматика у Середньовіччі.

Лише у 1202 році італійський математик ***Леонардо Пізанський*** (родом з міста Піза), відомий більше за своїм прізвиськом ***Фібоначчі*** (1175 – біля 1250 р.) оприлюднив свою математичну працю «Liber abacci» (abacci – рахувальна дошка). Ця книга відіграла помітну роль у розвитку математики в Західній Європі протягом кількох наступних століть. Зокрема, саме по цій книзі європейці познайомилися з індуськими («арабськими») цифрами. У ці темні для Європи часи народи Індії, Китаю, середньої Азії продовжували розвивати як філософію, так і точні науки. Їх досягнення, завдяки торговим зв'язкам, поступово проникали в Європу. Тільки в епоху Відродження починається самостійний розвиток алгебри в Європі, а вже в XVII столітті зароджується сучасна вища математика.

ВИСНОВКИ

В історії науки не так уже й багато прикладів яскравих наукових досягнень з втіленням геніальних ідей, які пережили тисячоліття. Важко собі уявити, що вигадали б Піфагор чи Архімед, якби у їх розпорядженні були сучасні комп'ютери. ■

Література

1. Депман І. Розповіді про математику. Київ: Радянська школа, 1957. 132 с.
2. Heath T.L. A History of Greek Mathematics. 2 vols., republished by Dover Publ. Inc., New York. 1981. First published by Clarendon Press, Oxford. 1921.
3. Stephenson F.R., Fatoohi L.J. Thales' prediction of a solar eclipse. Journal for the History of Astronomy. 1997. V.28. P. 279.
4. Григорчук М. Золоте ірраціональне число. СвітОгляд. 2017. №6. С. 42–60.
5. Van der Waerden B.L. Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Springer. 1983.
6. Euklide. Les Éléments. 4 vols. Trad. et comm. B. Vitrac; intr. M.Cavening. P.: Presses universitaires de France, 1990–2001.
7. Платон. Діалоги. Харків: Фоліо. 2008.
8. Dijksterhuis E.J. Archimedes. 1987. Princeton University Press. Princeton, N.J.
9. Plutarch. Lives of the Noble Grecians and Romans. Translated by John Dryden. Edited by A.H. Clough. New York: Croewell. 1909.
10. Heath T.L. The Works of Archimedes. 2002. Dover Publications.
11. Nelson, H.L. A solution to Archimedes' cattle problem. 1980–81. Journal of Recreational Mathematics. V. 13. PP. 162–176.
12. Chris R. Archimedes' floating bodies on a spherical Earth. 2016. American Journal of Physics. V. 84. №1. P. 61.
13. Chandras T. Archimedes' life, works, and machines, 2010. Mechanism and Machine Theory. V. 45. Is. 11. PP. 1766–1775.
14. Simms D.L. rchimedes and the Burning Mirrors of Syracuse. 1977. Technology and Culture. Vol. 18. №. 1. PP. 1–24.
15. Reviel N., Noel W., Tchenetska N. and Wilson N. (eds). The Archimedes Palimpsest. 2011. Cambridge: Cambridge University Press.
16. Netz R., Noel W. The Archimedes Code. Weidenfeld & Nicolson. 2007. 313 p.