

Музика і гармонія Всесвіту

(про роботи Л. Ейлера та Й. Кеплера,
які стосуються теорії музики і відкриття
390 років тому “основного рівняння астрономії”)



Володимир Смирнов
канд. фіз.-мат. наук,
м. Одеса

У фундаментальних працях Й. Кеплера, написаних у 1610—1619 рр., і Л. Ейлера у 1739 р., розроблені положення теорії музики, які служать “методом гармонії” для пізнання й обґрунтування основоположних математичних і фізичних (включно з третім законом Кеплера) закономірностей. Виступаючи “композитором-астрономом”, Кеплер вибудовує контрапункт планет. Уведене Кеплером поняття формотворчої сили дає можливість на основі механізму “золотого” чи, за Кеплером, “божественного перетину” сформулювати закони розвитку природи, які мають антиентропійний характер. “Метод гармонії” дозволяє пояснити дію кеплерівської “формотворчої” сили, пояснює закономірності розвитку в часі фізичних процесів, які досі не знайшли належного формулювання при викладанні курсу фізики.

Гармонія світу, що проявляється як особлива форма симетрії, знайшла виняткове відображення у музиці, особливо класичній. У вигляді зворотного зв’язку для багатьох видатних учених (Л. Ейлер, Й. Кеплер та ін.) музика служила методом пізнання та відкриття універсальних світових законів фізики й математики. Так, у Г.Л.Ф. Гельмгольца (1821—1894) читаємо: “Наскільки часто можна довго сидіти на березі і дивитися на рух хвиль. Ритмічність їхнього руху викликає відчуття благодетності, спокою і навіть враження величчя і прекрасно організованого життя. Рух води (чи то у водоспадах, чи то в морських хвилях) справляє враження, аналогічне до вражень від музики”.

Видатний учений XVIII ст. **Леонард Ейлер** (1707—1783), член Петербурзької академії наук, із понад 850 своїх наукових праць певну кількість присвятив музиці. Одна з перших визначних праць **Л. Ейлера** — “*Dissertatio physico de sono*” — присвячена природі, створенню і поширенню звуку. У 1726 р. **Л. Ейлер** писав **Данилу Бернуллі** (1700—1783), що для ноти “до” він, у результаті дослідження, отримав 139 коливань за секунду. В 1727 р. **Л. Ейлер**, перебуваючи у Петербурзі, підготував звіт про свою роботу у вигляді “перерахунку всіх справ щодо примноження й удосконалення наук, які вже виконані чи збираються виконуватись... **Л. Ейлер**, професор вищої математики, ад’юнкт для досліджень, запропонував:

1. Фізико-математичне міркування про звук чи дзвін, у якому представлено нову теорію дзвону та показано, яким чином виконуються обчислення швидкості звуку;

2. Міркування про хитальний (коливальний — авт.) рух струн, дзвонів, барабанів, які продукують дзвін при ударі, коли відповідно до теорії кожного інструмента показано спосіб обчислення швидкості звуку;

3. Про утворення дзвону чи звуку гарматного, громового чи подібного до таких;

4. Нова теорія про дзвони чи голоси флейт, труб та інших інструментів, які шляхом дуття голос подають”.

Основною працею *Л. Ейлера* з питань теорії музики стала *"Tentamen novae theoriae musicae, ex certissimis harmoniae principis dilucide expositae"*¹, надрукована в 1739 р. у Санкт-Петербурзі та віднайдена автором цієї статті у науковій бібліотеці Одеського університету. Музику *Л. Ейлер* сприймав як гармонію пропорцій. Можливо, такі уявлення були запозичені в *Й. Кеплера* з його фундаментальної праці *"Welt-Harmonik"* ("Гармонія Світу"), виданої в 1619 р. у Франкфурті (рис. 1, 2) й перевиданої у Мюнхені—Берліні в 1939 р. ("Земля и Вселенная", 2002, №5).

Як писав у своїй праці *Л. Ейлер*, його теорія музики ґрунтується на двох основах: фізичній (фізичні закони звуку) і метафізичній (вивчення сприйняття звуку). *Л. Ейлер* розглядає питання: що спільного між консонансами і відношеннями цілих чисел, які відповідають, згідно зі сучасною термінологією, частотам коливань струн, що утворюють співзвучність при одночасному звучанні, викликаному цими струнами? Відповідь на подібне питання частково дали *Й. Кеплер* і навіть стародавній філософ *Піфагор*.

Від часів *Піфагора* відома легенда, що *Піфагор*, проходячи повз кузню, почув звуки, які линули від двох молотів, що били по ковадлу. Виходило співвідношення музикальних тонів, яке давало певний музикальний інтервал. *Піфагор* порівняв молоти і дійшов висновку, що за їхньою формою і розмірами можна було знайти таке ж співвідношення (пропорцію) при звучанні, викликаному коливаннями струн.

Виявилось, що чиста кварта дає співвідношення 4:3, квінта — 3:2, секста — 5:3, велика терція — 5:4, мала терція — 6:5. Отже, співвідношення простих чисел сприймається як консонанс, а секунда (16:15) — як дисонанс. *Л. Ейлер* пише: "Якщо ми при сприйнятті звуків не прослідковуємо ніякого порядку чи цей порядок неочікувано порушується, то ми не можемо відчувати задоволення". Іншими словами, для слухача приємне все те, в чому він розпізнає завершеність, певний порядок. Такий порядок створюється за наявності чіткого правила, з якого можна зробити висновки, чому частина цілого розміщена в тому чи тому місці. Такі міркування нагадують про поняття, яке створює образ гармонії при поділі відрізка в серед-

¹ Назва книги *Л. Ейлера* українською "Дослід нової теорії музики, чітко викладений на основі незаперечних принципів гармонії". Переклад книги російською мовою в 1959 році автору допомогла здійснити викладач ОДУ *Н.Л. Сікорська*, за що автор вдячний їй і досі. Методичну допомогу при написанні студентської роботи, за яку автор отримав премію, надавав викладач музичної школи імені професора П.С. Столярського *В.О. Швець* і доцент кафедри математичного аналізу університету *С.М. Кіро*, кому автор також висловлював подяку, але надрукувати це в студентській роботі не дозволили. Тому доцільно висловити цю подяку тепер, через півстоліття після написання праці.

² У математиці адитивність означає, що кожен попередній член ряду чисел $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \dots$ дорівнює сумі двох наступних: $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$ і т. д. Мультиплікативність позначає, що у тому ж числовому ряді всі члени пов'язані геометричною прогресією: $\Phi_1 : \Phi_2 = \Phi_2 : \Phi_3$.

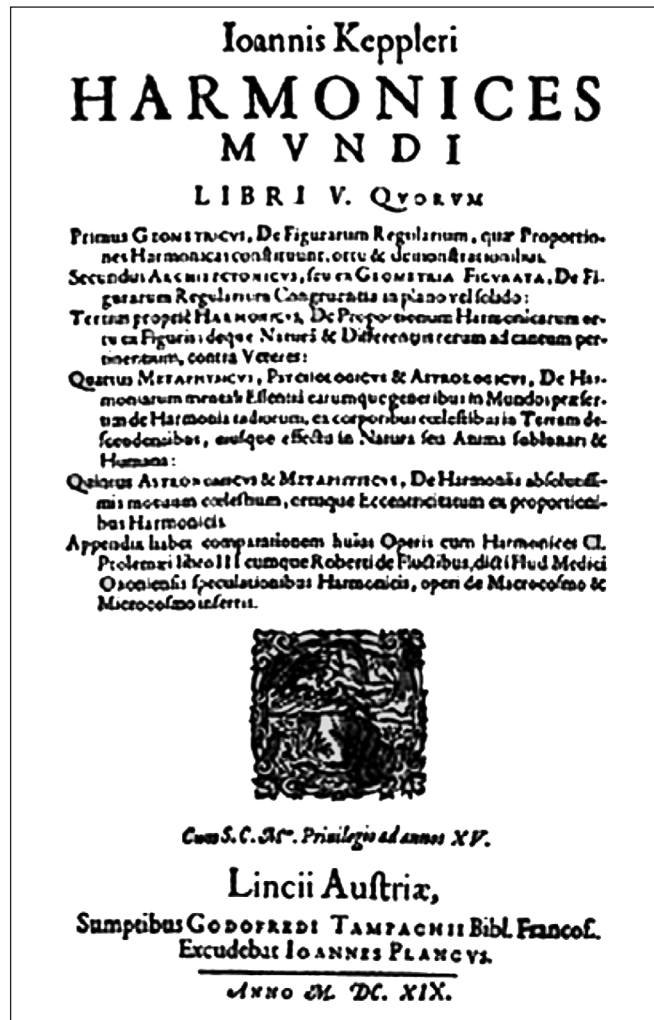


Рис. 1. Титульна сторінка першого видання праці *Й. Кеплера* "Гармонія Світу", Франкфурт, 1619 р.

ньо-пропорційному співвідношенню, коли, зокрема, ціле так співвідноситься до більшої своєї частини, як більша частина — до меншої:

$$(a+b)/b = b/a,$$

$$\text{де } a = 1, b = x, x^2 - x - 1 = 0.$$

Отже, пропорція перетворюється на рівняння з коренями $\pm\Phi$, які мають низку дивовижних властивостей. Наприклад, якщо число $n = 0, 1, 2, 3 \dots \infty$, то корені цього рівняння можуть утворити таку залежність: $\Phi^n + \Phi^{(n+1)} = \Phi^{(n+2)}$, яка визначає єдність адитивних і мультиплікативних властивостей цих чисел, що утворюють ряди Фібоначі, і проявляються при розвитку різноманітних явищ природи (наприклад, розмноження кролів)². Про згадану "божественну пропорцію" чи "божественний (золотий) перетин" *Й. Кеплер* говорив, розглядаючи геометрію сніжинок.

Як виявилось у подальшому, існування “золотого перетину” в природі визначається у величезній кількості випадків. Не тільки музичне сприйняття, але й сам розвиток природної форми у найбільш сприятливому напрямі, наприклад розвиток листя чи ріст крони дерева. У книзі “Про шестикутні сніжинки” (у перекладі з латини на російську мову ця книга перевидана видавництвом “Наука” в Москві в 1982 р. із видання 1611 р., Франкфурт на Майні) **Кеплер** писав: “За зразком і подобою пропорції, яка продовжує саму себе, створюється, як я вважаю, продуктивна сила, і цією продуктивною силою втілюється у квітці смисл п’ятикутника” (рис. 3).

У збірці доповідей, виголошених на 6-му з’їзді Європейського і національних астрономічних товариств “JENAM-97”, який відбувся 2—5 липня 1997 р. у Салоніках (Греція), у розділі “Історія астрономії” відзначено висновок автора статті про те, що “метод гармонії Кеплера пояснює існування антиентропійних процесів, широко розповсюджених у природі”. Інакше кажучи, цей метод дозволяє пояснити дію кеплерівської “формотворчої” сили, пояснює закономірності розвитку в часі фізичних процесів, які досі не отримали належного формулювання при викладанні курсу фізики.

У третій частині книги “Гармонія світу” **Кеплер** виклав свою теорію розділення музичних інтервалів: “мелодія, піднявшись від основного тону, має повернутись до нього”. **Кеплер** розмірковує над тим, що є основою природи милозвучності співу, відзначаючи, що в трубних звуках інструментів турків й угорців “міститься наслідування диких тварин”. Учений критикує використання заборонених інтервалів під час співу, тому що така музика безладна і недопустима, і не може утримуватися в пам’яті слухача. Мелодія має бути милозвучною, “приносити насолоду слуху, повинна виходити з певного основного тону через інтервали і повертатися до нього”. “Дисонантні інтервали, — пише **Кеплер**, — повинні пробігати швидко, але консонантні мають затримуватися”. **Кеплер**, на основі своєї теорії, надає рекомендації для вживання інтервалів при композиції.

Перерахуємо деякі з цих рекомендацій **Й. Кеплера**:

- дієз не дає мелодії перед напівтоном;
- два напівтони допустимі, якщо вони йдуть один за одним у послідовності малих інтервалів;
- два напівтони всередині кварта немелодійні;
- немелодійні чотири цілих тони, які йдуть один за одним;
- немелодійна септима та інші інтервали через октаву;
- сексти допускаються зрідка; консонують малі сексти;
- не рекомендовано використовувати два тетрахорди однієї октави;
- заборонено використовувати три цілі тони, які йдуть один за одним;
- два напівтони також немелодійні;
- октавні системи немелодійні, якщо внизу лежить кварта чи квінта.

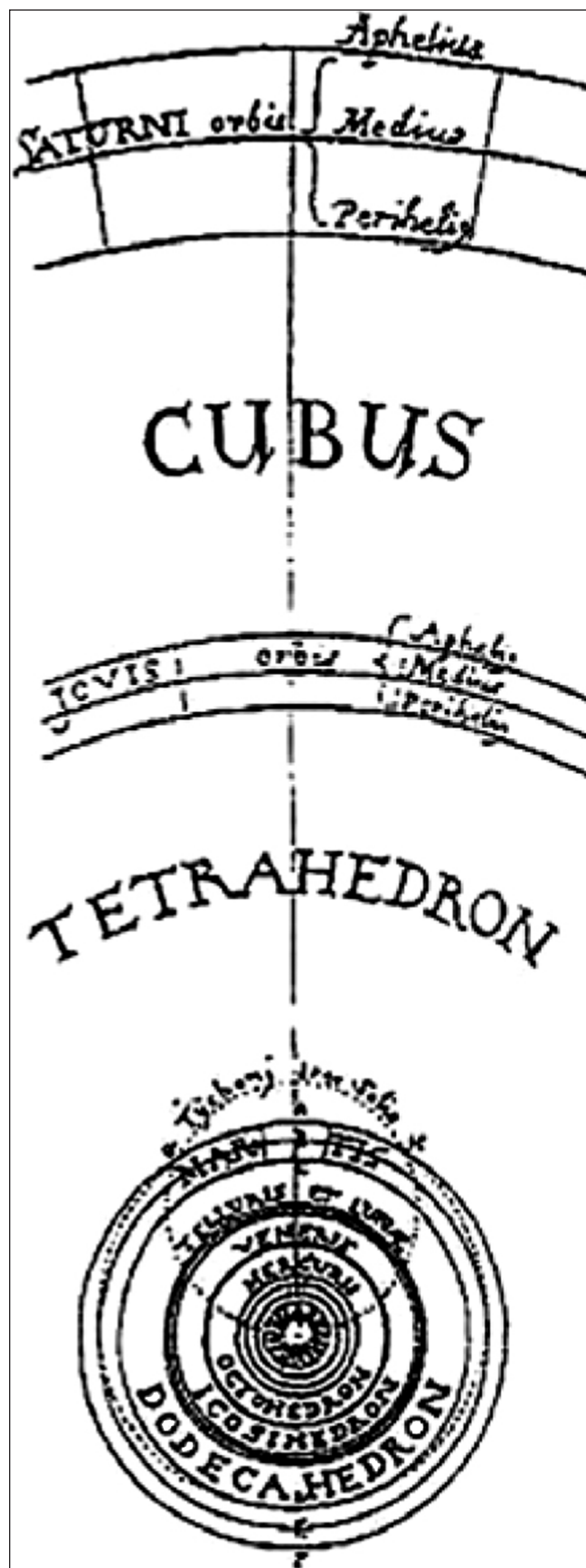


Рис. 2. План орбіт планет, побудований за допомогою вписаних й описаних багатогранників, наведений у книзі Й. Кеплера “Гармонія Світу”. Відстані до планетних орбіт автор визначає відповідно до “золотого перетину”, використовуючи довжину енергетичної стоячої хвилі

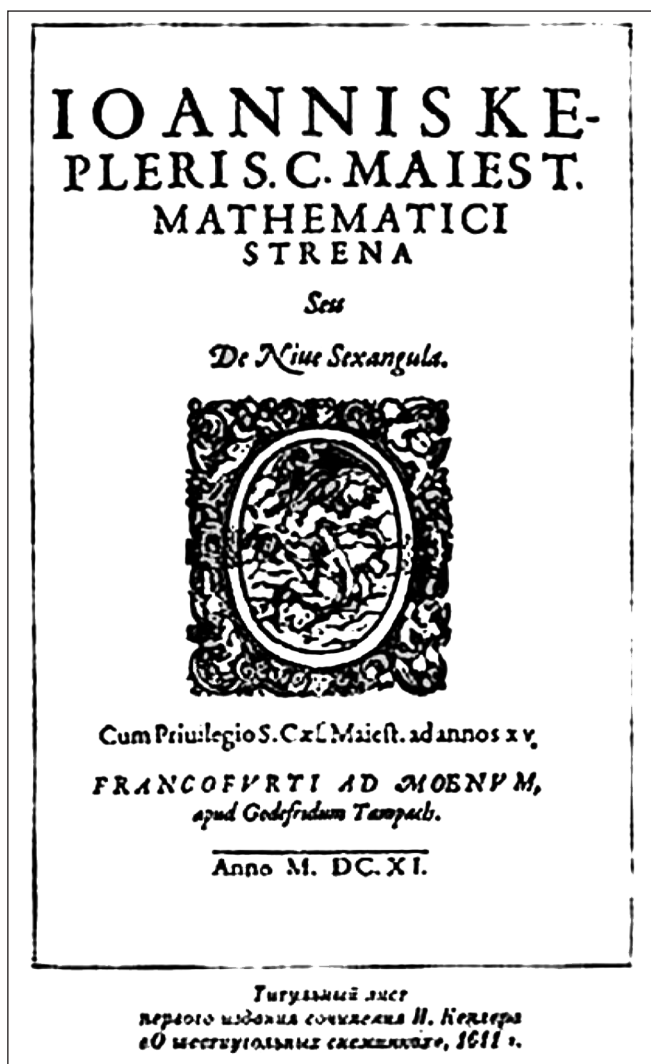


Рис. 3. Титульна сторінка першого видання праці Й. Кеплера “Про шестикутні сніжинки”, Франкфурт, 1611 р.

Як і *Ейлер*, *Кеплер* наполегливо радить уникати дисонуючих інтервалів.

Варто наголосити, що *Й. Кеплер* застосував октавний принцип при порівнянні кутових швидкостей планет у перигеї і афелії і отримав “основні рівняння астрономії”, які в підручниках записуються, як рівність відношень квадратів періодів обертання планет навколо Сонця і кубів їх середніх відстаней до Сонця. При цьому він користувався таблицями для визначення ефемерид планет, укладених його попередником *Тихо Браге* — астрономом імператора *Рудольфа* у Празі, якого *Кеплер*, не без причини, називав своїм благодійником.

У формулюванні *Кеплера* третій закон виглядає так: “Пропорція між періодами обертання будь-яких двох планет становить рівно півтори пропорції їх середніх відстаней”. Одночасно з отриманням “основного рівняння астрономії”, з використанням якого здійснюються розрахунки в небесній механіці, обчислення ефемерид планет на довгі роки наперед, *Кеплер* знаходить залежність між відстанями планет від Сонця в афелії й перигеї і їх найбільшою й найменшою кутовою швидкістю на орбіті.

Відношення швидкостей — це гармонічні інтервали, у більшості випадків — “консонанси”. Таке відношення кутових швидкостей в афелії і перигеї на орбіті Сатурна можна було зіставити з великою терцією (4:5), а на орбіті Юпітера — з малою терцією (5:6), на орбіті Марса — з квінтою (2:3), на орбіті Землі — з дисонуючим напівтоном (15:16), на орбіті Венери — з діезом (24:25), на орбіті Меркурія — з октавою з малою терцією (5:12).

При побудові звукоряду *Кеплер* надавав перевагу природній, “доведеній” системі звуків, використовуючи такі символи: до (ут), ре, мі, фа, соль, ля. *Кеплер* докладно вивчив можливість побудови октавної системи. Відсутність сьомої ноти в системі, яка утворює септиму, можна пояснити бажанням поєднати кількість відомих на той час планет з кількістю нот в октаві, хоча в книзі про це нічого не сказано. При побудові октавних систем *Кеплер* посиляється на роботу *Вінченцо Галілея* (батька *Галілео Галілея*) “Діалог про античну і нову музику”, видану в 1581 р. у Флоренції. У одному з листів *Кеплер* повідомив, що вперше прочитав цю роботу дорогою у Лінц, куди їхав до своєї матері, звинуваченої у чаклунстві. Октаву *Кеплер* будує на тринадцяти струнах за допомогою таких мелодичних інтервалів: напівтон, ліма, напівтон, діез, напівтон, напівтон, ліма, напівтон, діез, напівтон, напівтон, ліма. Загалом сучасний звукоряд утворюється так: якщо октавний інтервал, який відповідає пропорції між числом коливань струн 1:2, розділити на 12 рівних частин (за ступенями гами), то виходить “добре темперований лад”, який використовується переважно в сучасній музиці. Числа, які відображають пропорції частот коливань між ступенями гами, виражаються у вигляді ряду:

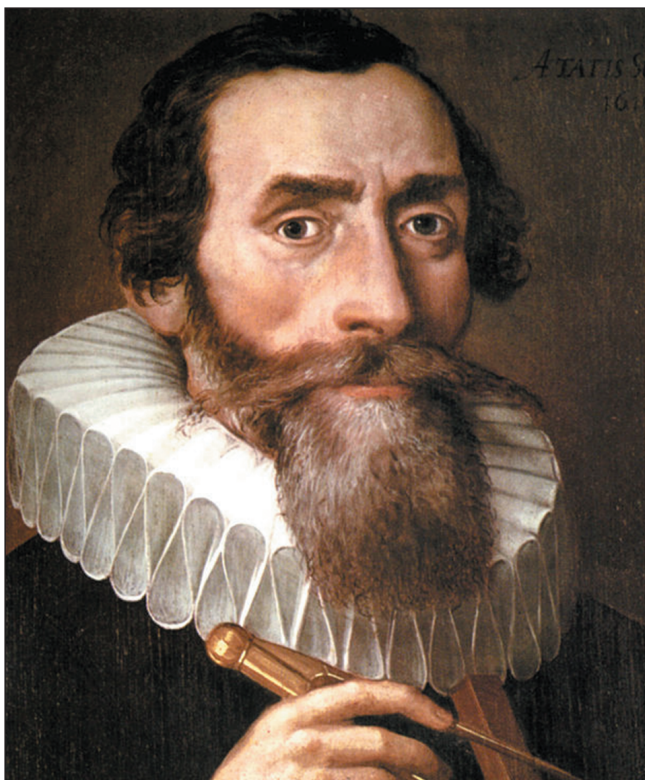
$2^0 \ 2^1/12 \ 2^2/12 \ 2^3/12 \ 2^4/12 \ 2^5/12 \ 2^6/12$
 $2^7/12 \ 2^8/12 \ 2^9/12 \ 2^{10}/12 \ 2^{11}/12 \ 2^{12}/12$.

Отримані геометричні й небесно-механічні співвідношення *Кеплер* аналізує, щоб визначити кількість октав у різних числових інтервалах. Наприклад, згідно з розрахунками між кутовими добовими рухами Землі і Сатурна в афелії міститься п’ять октав.

Для обчислення музикальних пропорцій *Л. Ейлер* увів логарифми при основі 2, оскільки для октави (логарифм співвідношення 2:1) такі логарифми дають ціле число — одиницю. Тоді, при будь-якому переході на октаву десятковий дріб після коми залишається незмінним і потребує лише додавання чи віднімання одиниці.

Ці дані у подальшому не раз використовувалися для розвитку теорії музики. Наприклад, у “Музикальному словнику” *Г. Рімана* логарифми *Ейлера* використані для математичного визначення відношення тонів за висотою.

Для опису милозвучності інтервалів *Ейлер* вводить ступені милозвучності — *gradus suavitatis*, про які говорив ще *Кеплер*. Ці кількісні визначення милозвучності інтервалів і акордів *Ейлер* знаходить за таким арифметичним правилом (відзначмо, що такий



Йоганнес Кеплер (1571–1630) —
видатний німецький математик, астроном, механік, оптик

математичний підхід цілком обґрунтований для різних застосувань, оскільки математичні символи у всіх випадках залишаються незмінними).

Згідно з *Ейлером*, для простих натуральних чисел ступінь милозвучності збігається зі значенням такого числа. Всі інші числа розглядаються як добуток згаданих “початкових” чисел. Ступінь милозвучності добутку простих чисел дорівнює сумі цих чисел мінус одиниця. Якщо потрібно знайти ступінь милозвучності акорду, то беремо найменше число, яке б ділилось на всі найменші множники в співвідношенні чисел коливаль. Наприклад, для чотирьох ступінь милозвучності визначається так: $2+2-1=3$. Для дванадцяти (4:3) ступінь милозвучності чотирьох дорівнює 3, звідки отримуємо ступінь милозвучності для дванадцяти: $3+3-1=5$. Для натуральної септими (4:7) найменшим числом, яке ділиться на 4 і 7, є $28=4 \cdot 7$. Але ступінь милозвучності чотирьох є 3, тоді ступінь милозвучності для септими буде $3+7-1=9$. *Ейлер* писав, що знайдені таким чином ступені милозвучності є важливим елементом у музиці й в інших галузях мистецтва. *Ейлер*, як і *Кеплер*, вивчав не тільки окремі консонанси і акорди, але й їхні послідовності, займався побудовою гам і модуляцій. Одна з систем тонів, отримана *Ейлером*, майже повністю співпадає з діатонічно-хроматичною, яку використовують музиканти сьогодні.

Для *Й. Кеплера* порівняння різних музикальних пропорцій, відомих ще з прадавніх часів, не просто предмет досліджень, а серйозний метод, інструмент, яким він користується для вивчення закономірностей руху небесних світил. Для побудови і визначення орбіт планетної системи *Кеплер* використовував пра-



Леонард Ейлер (1707–1783) —
видатний швейцарський математик та фізик

вильні, вписані й описані багатогранники (платонівські фігури).

Застосування схожих методик до вібруючої струни дозволило виявити у коливаннях її частин музикальні інтервали, а також звучання, яке у подальшому дозволило визначити тембр звуку — обертони. Знайдені *Кеплером* пропорції між консонансними інтервалами одночасно визначали кількісні співвідношення між використаними платонівськими фігурами.

Кеплер показав структуру планетних орбіт на основі платонівських вписаних і описаних фігур. Так, якщо навколо орбіти Землі, яка є мірою всіх інших орбіт, описати додекаедр, а навколо додекаедра — сферу, отримаємо орбіту Марса, яка відповідає цій сфері. Якщо навколо орбіти Марса, пов'язаної з цією сферою, описати тетраедр, а навколо тетраедра — сферу, одержимо сферу орбіти Юпітера. Якщо навколо орбіти Юпітера описати куб, а навколо куба — сферу, отримаємо сферу орбіти Сатурна. Вписані в сферу орбіти Землі ікосаедр і сфера дають сферу орбіти Венери. Нарешті, якщо вписати в сферу орбіти Венери октаедр і в нього вписати сферу, то отримаємо орбіту Меркурія (рис. 4 і 5).

У низці статей я пояснював побудовані таким чином орбіти відомих за часів *Кеплера* планет, а також правило *Тіциуса—Бодде*, наявності загальної міри у вигляді довжини енергетичної стоячої хвилі, хоч такі поняття тоді не були відомі. Планетні відстані у цьому випадку легко визначаються з рівняння стоячої хвилі.

Згідно з нашими розрахунками, у вузлових точках стоячих хвиль, наявних при утворенні Сонячної системи з первинної газопилової хмари, як і в наочному

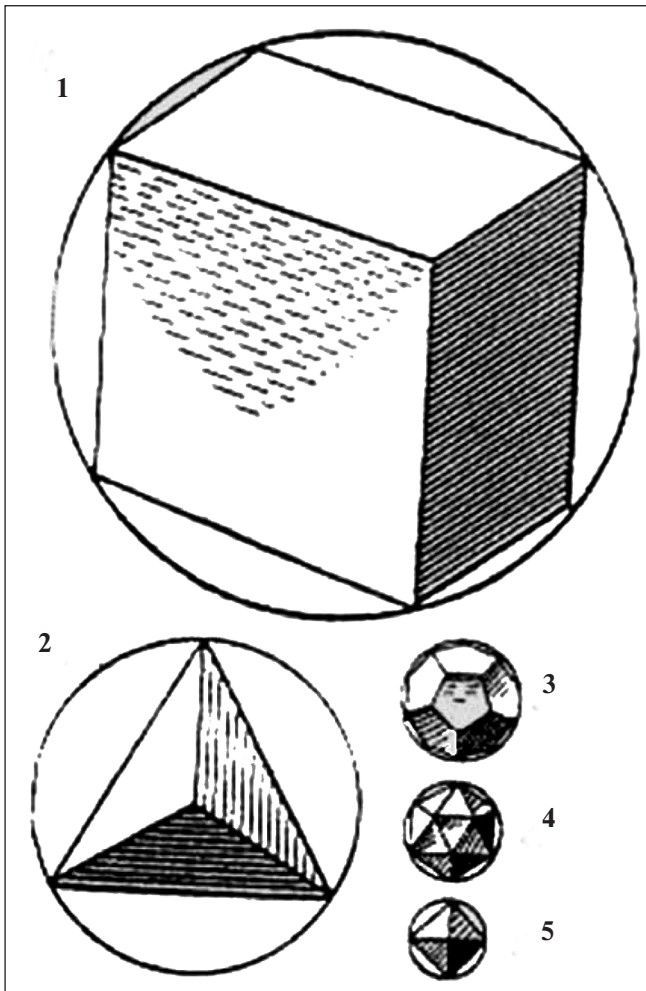


Рис. 4. Космічні комбінації платонівських фігур, які дозволяють, згідно з Кеплером, побудувати орбіти планет у Сонячній системі:
1 — куб, 2 — тетраедр, 3 — додекаедр, 4 — ікосаедр, 5 — октаедр

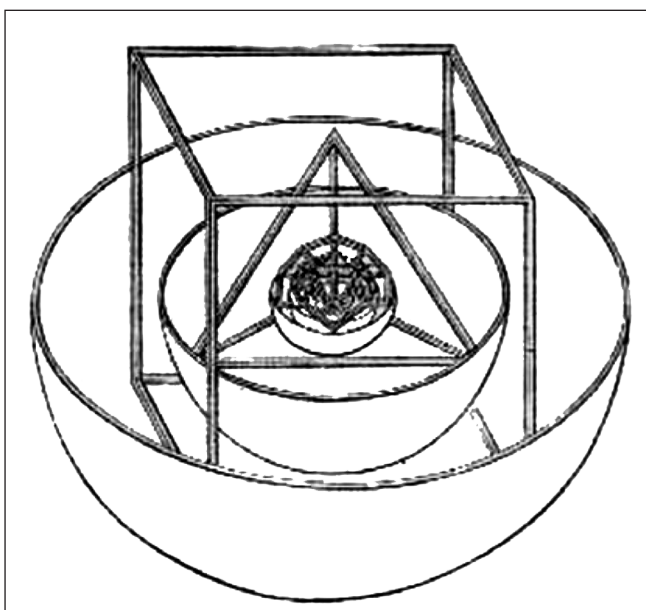


Рис. 5. Кеплерівські багатогранники

випадку експерименту з утворення фігур *Хладні*, мали б утворюватися згустки речовини у вигляді протопланет і протосупутників. Використавши довжину стоячої хвилі λ , можна за допомогою формули хвилі, утвореної гармонічними коливаннями джерела хвилі, яке визначається орбітою Меркурія, вимірювати відстані планет від Сонця чи супутників від планет. При цьому також виявляються властивості “золотого перетину”.

Отже, “золотий перетин” разом із пов’язаним із ним рядом чисел є формотворчою субстанцією, яка полегшує розвиток у вибраному напрямі різних природних явищ, у даному випадку — Сонячної системи. При такому трактуванні залишається низка невизначеностей, які пов’язані з відсутністю формулювань фізичних законів розвитку, що мають антиентропійний характер. На жаль, при викладенні законів фізики завжди наголошується на формулюванні стаціонарних законів збереження, але не зазначається відомий факт існування законів зміни фізичних величин у часі. Наприклад, наведемо формулу механічної роботи:

$$\Delta A = F \Delta s \cos(F, \Delta s),$$

де F — діюча сила, Δs — переміщення тіла, яке виконує роботу, при якій змінюється його енергія, еквівалентна виконаній роботі. У цій формулі для ΔA показані процеси, які відбуваються за час Δt , тобто це — закон зміни енергії.

Проте, зазвичай при викладенні законів фізики формулюються одновимірні стаціонарні випадки, які впливають з постійних у часі фізичних величин і які описують стан ізольованих систем. Вищезгадані антиентропійні закони розвитку, пов’язані за **Кеплером** з дією формотворчої сили, показують спрямованість процесу розвитку, але поки що чітко не сформульовані.

У зв’язку з цим цікаво подумати і про розвиток у цілому музичної культури, враховуючи згідно з **Кеплером** дію “божественного (золотого) перетину”. Звісно, при якісному вивченні цієї проблеми розвиток музичальної культури попадає у пропорції “золотого перетину”, теорію консонансів.

До того ж, в останні десятиріччя музичальна культура розвивалася під великим впливом англійської мови, яка, хоч і стала світовою, сама по собі не має якоїсь особливої музичальності. Доказом цього, пише в своїх щоденниках **В.О. Швець**, є та обставина, що англомовні народи не дали композиторів рівня **Бетховена**, **Верді**, **Скрябіна**, **Чайковського** чи **Шуберта**. Представники “масової культури” найчастіше роблять у своїх творах дисонуючі шумові ефекти, які відображають звуки зникаючих з поверхні Землі джунглів. Такий розвиток суперечить закономірностям, які впливають зі “золотого перетину”, і вказує на те, що англійська мова стала світовою лише через геополітичні причини. ■

Переклад з російської —
Людмила Костенко