

# Про одну гіпотезу з Рамсеївської теорії графів

Нагадаємо, що графом називається сукупність точок та ліній (відрізків), які їх з'єднують. При цьому точки зуться вершинами, а лінії (відрізки) — ребрами. Якщо кожену пару з  $n$  вершин з'єднано ребром, то такий граф називається повним графом на  $n$  вершинах і позначається  $K_n$ . Позначимо через  $R(p, q)$  найменше натуральне число  $n$  таке, що за будь-якого розфарбування ребер повного графа  $K_n$  у два кольори одержуємо або граф  $K_p$  першого кольору, або граф  $K_q$  другого кольору. Вперше існування чисел  $R(p, q)$  встановив англійський математик **Френк Плумптон Рамсей** (1903—1930), на честь якого їх названо (класичними) числами Рамсея й відомо небагато [1].

Якщо графи  $K_p$  та  $K_q$  замінити на довільні графи  $G$  та  $H$ , то отримаємо узагальнені числа Рамсея  $R(G, H)$ . У багатьох випадках узагальнені числа Рамсея  $R(G, H)$  виражені простими формулами. Наприклад,  $R(nK_3, nK_3) = 5n$  для  $n \geq 2$ , де  $nK_3$  — граф, зображений на рис. 1. Цей результат одержали відомі фахівці з рамсеївської теорії графів **Бур**, **Ердеш** і **Спенсер** [2]. Аналогічний результат отримав **С.Г. Сальников** [3] для графа  $nD$  (рис.2) —  $D = K_{1,3} + e$ , де через  $K_{1,n}$  позначено зірку з  $n$  кінцями (рис.3), а  $e$  — ребро графа —  $R(nD, nD) = 6n$  для  $n \geq 2$ .

Зауважимо, що  $K_3 = K_{1,2} + e$ . Використовуючи конструкцію, яку зображено на рис. 4, неважко перекоонатися, що  $R(nX, nX) > (m+3)n$  для  $m, n \geq 2$ , де через  $X$  позначено граф  $K_{1,m} + e$ . Дійсно, число вершин графа, зображеного на рис.4, дорівнює  $m+n-1+2n-1+1 = (m+3)n-1$ . Якби було  $n$  одноколірних графів  $K_{1,m} + e$ , то число вершин мало б бути  $(m+1)n$ . Тому, ані червоний, ані блакитний круги не містять  $nX$ . Інші частини, очевидно, також не містять монохромного графа  $nX$ . Це наводить на таку правдоподібну гіпотезу:  $R(nX, nX) = (m+3)n$  для  $m, n \geq 2$ , яку доведено лише для  $m = 2$  та  $m = 3$ .

Уперше цю гіпотезу опубліковано в журналі "Наука і суспільство" [4] накладом майже 50 000 примірників, але вона залишилась малопомітною для фахівців. Сподіваюся, що тепер гіпотезу буде доведено. ■

Сергій Білий, канд. фіз.-мат. наук,  
Науково-учбовий центр  
прикладної інформатики НАН України

### Література

1. Weisstein, Eric W. "Ramsey Number" From MathWorld-A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/RamseyNumber.html>
2. Грэхем Р. Начала теории Рамсея. — М.: Мир, 1984. — Гл. 6.
3. Сальников С.Г. Теоремы типа Рамсея для непересекающихся копий графа  $K_{1,3} + x$ . Комбинаторный анализ. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — Вып. 7. — С. 155—160.
4. Білий С.Б. Про Рамсейову теорію графів // Наука і суспільство. — 1988. — №4. — Математична сторінка, С. 53—54.

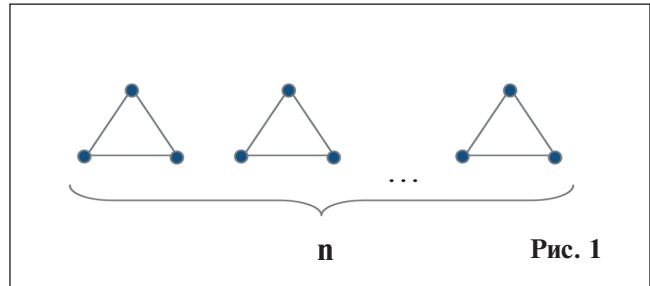


Рис. 1

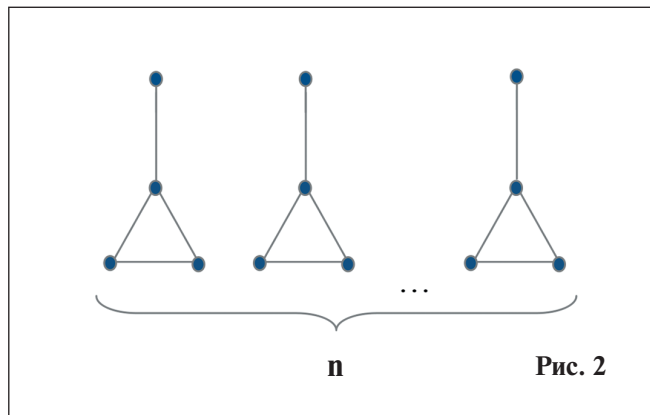


Рис. 2

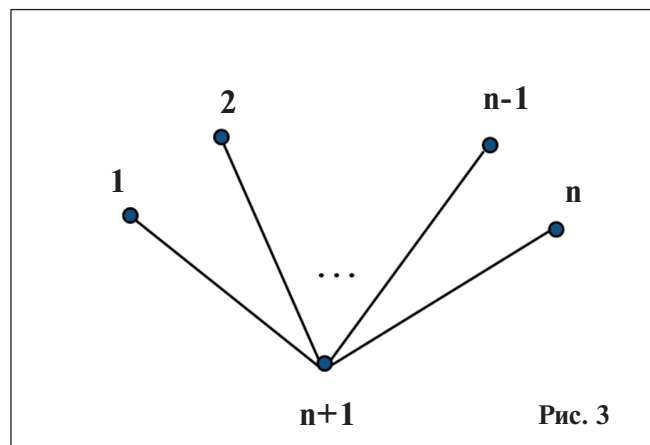


Рис. 3

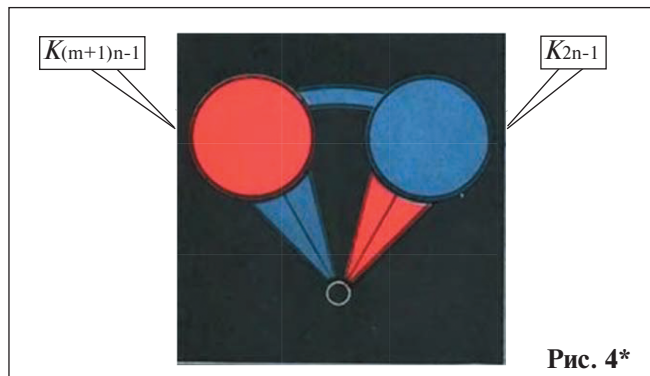


Рис. 4\*

\* Цей рисунок узято з першої сторінки обкладинки книги Рональда Грехема [2].