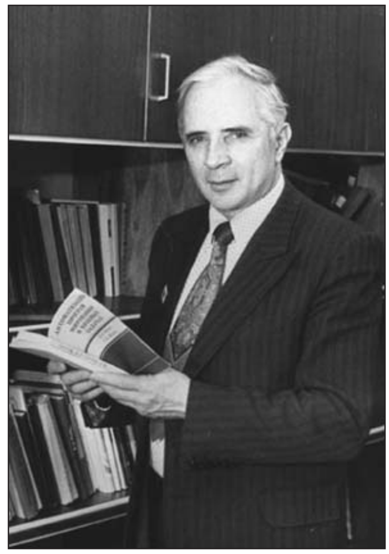
Ці дивовижні R-функції

Кирило Максименко-Шейко
канд.фіз.-мат.наук,
старший наук.співробітник
Інституту проблем
машинобудування
ім. А.Н.Підгорного
НАН України,
м. Харків

Стипендіат
Президента України
для молодих вчених
2005-2007 рр.



**Академік НАН України
В.Л. Рвачов (1926-2005)**

Із відомим українським вченим у галузі математики, механіки і кібернетики, академіком НАН України *Володимиром Логвиновичем Рвачовим* і його всесвітньо визнаною теорією R-функцій я познайомився, будучи ще студентом 4-го курсу механіко-математичного факультету Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Після цього теорія R-функцій, математичне моделювання фізичних полів для складної форми, обчислювальний експеримент стали основним наповненням моєї наукової праці. Упродовж шести років Володимир Логвинович уважно керував моїми дослідженнями, а в 2005 р. його не стало.

Вперше поняття R функцій було введено *В.Л. Рвачовим* у зв'язку з необхідністю будувати рівняння складних геометричних об'єктів (ГО) у процесі пошуку наближених рішень деяких просторових контактних задач теорії пружності. Одним із основних результатів, одержаних на основі теорії R-функцій, є розв'язок зворотної задачі аналітичної геометрії. Кілька слів про історію проблеми. У 1637 р. *Рене Декарт* у своїй книзі "Геометрія" сформулював пряму (відшукати ГО за заданою функцією) і зворотну (побудувати рівняння $f(P) = 0$ заданого ГО) задачі аналітичної геометрії. Відшукання ГО за заданою функцією становить задачу, що має однозначне рішення, у той час як побудова рівняння $f(P) = 0$ за заданим ГО приводить до незліченної кількості розв'язків (пучка функцій, які дорівнюють нулю на межі ГО і відмінних від нуля поза нею). Наприклад, пряма, що відтинає по осях координат відрізки, може бути задана не тільки рівнянням $1 - x/a - y/b = 0$, але і рівняннями $e^{xy}(1-x/a - y/b) = 0$, $\exp(1-x/a - y/b) - 1 = 0$ і т. ін., а для кола можна написати такі рівняння: $|R - (x^2+y^2)| = 0$, $(R^2-x^2-y^2)/2R = 0$.

Зворотну задачу аналітичної геометрії було розв'язано тільки в 1963 р. (через 326 років) *В.Л. Рвачовим*, завдяки створеній ним теорії R-функцій.

Що ж таке R-функції? Щоб хоч якоюсь мірою розкрити їхню проблемну орієнтацію, розглянемо деякі приклади, розв'язані за допомогою R-функцій. Кажуть, що найкращий спосіб розуміння теорії — демонстрація тих нових задач, які вона дозволяє розв'язувати. Рівняння $R^2-x^2-y^2 = 0$ описує коло радіуса R з центром на початку координат. Ліва частина цього рівняння $z = R^2-x^2-y^2$ є функцією, позитивною усередині кола, негативною поза ним і дорівнює нулю на колі (межі кола). Потрібно побудувати аналогічне рівняння для прямокутника. Можна запропонувати наступні варіанти розв'язку цієї проблеми:

$$a^2 + b^2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2} = 0,$$
$$\frac{a^2 - x^2}{2a} + \frac{b^2 - y^2}{2b} - \sqrt{\frac{(a^2 - x^2)^2}{4a^2} + \frac{(b^2 - y^2)^2}{4b^2}} = 0,$$
$$\left[a^2 + b^2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2}\right] \cdot \left[(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2\right]^{m/2} = 0,$$
$$2 - \frac{|x|}{a} - \frac{|y|}{b} - \left|\frac{|y|}{b} - \frac{|x|}{a}\right| = 0.$$

На рис. 1а-г наведено графіки лівих частин наведених рівнянь, на яких чітко простежуються лінії рівня (еквіпотенціалі), що поступово переходять у прямокутник — еквіпотенціалі нульового рівня. (Для простоти графіки наведено лише для внутрішньої частини прямокутника. Поза ним вони становлять розташовані нижче площини xOy поступово спадні опуклі поверхні.) Вони дозволяють скласти наочне уявлення про характер поводження розглянутих функцій усередині прямокутника. Особливістю всіх цих функцій є те, що вони дорівнюють нулю на межі прямокутника, а таких функцій існує нескінченно багато. Тому можна сказати, що на рис.1 наведено графіки лише деяких представників безлічі функцій, які дорівнюють нулю на прямокутнику. Крім того, бачимо істотну відмінність їхнього поводження і диференціальних властивостей. Якій з цих

Рис.2

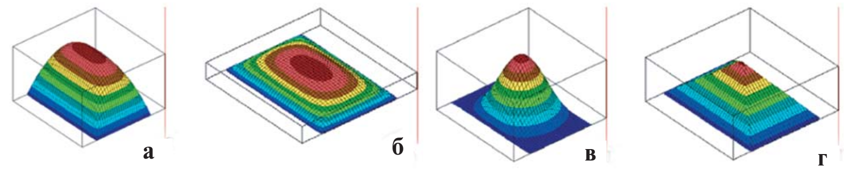
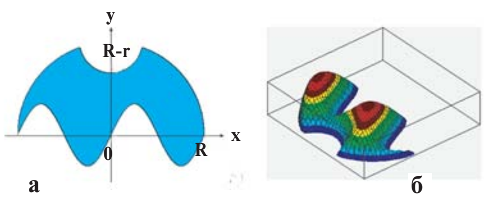


Рис.3



функцій віддати перевагу, наприклад, у ролі початкового наближення в задачі про рівномірно навантажену мембрану (або про мильну плівку), яку натягнуто на прямокутник? Очевидно, що варіанти в) і г) не мають фізичного змісту. Дослідник сам вирішить питання про те, якому з варіантів — а) або б) — віддати перевагу.

Можливо, хтось подумає, що отримані формули — результат одноразової удачі або якихось штучних прийомів. Але що він скаже, якщо треба буде розв'язати наступну задачу. Потрібно побудувати конструкцію, аналогічну до попередньої, але вже для складнішого ГО, що становить межу області Ω (рис. 2а), яка складається з дуг кіл і синусоїди. Чи можна розраховувати в цьому разі на "удачу" або штучний прийом? Навряд чи...

Але теорія R-функцій має у своєму розпорядженні загальний метод розв'язання таких задач. Зокрема, для ГО, зображеного на рис. 2а), отримано рівняння:

$$2R^2 - r^2 + y(1-2R) - \sin\frac{2\pi x}{R} - \sqrt{(x^2+(y-R)^2)-r^2)^2 + (R^2-x^2-y^2)^2} - \\ -\sqrt{\left(y-\sin\frac{2\pi x}{R}\right)^2 + (2R^2 - r^2 - 2yR - \sqrt{(x^2+(y-R)^2)-r^2)^2+(R^2-x^2-y^2)^2})^2} = 0 \tag{1}$$

а еквіпотенціалі його лівої частини наведено на рис. 2б). Можна запропонувати багато інших рівнянь цього ГО, як це було зроблено для прямокутника. Подивившись на наведені вище довгі формули, читач, можливо, подумає, що ми пропонуємо йому вивчити якийсь громіздкий метод і змусити здійснювати не менш громіздкі обчислення. Але це не так. Насправді, усе буде значно простіше і компактніше, ніж у розглянутих прикладах. Замість формули (1) можна буде написати

$$\overline{(\overline{f_1} \vee_0 \overline{f_2})} \wedge_0 f_3 = 0$$

$$f_1 = x^2 + (y-R)^2 - r^2;\ f_2 = R^2 - x^2 - y^2;\ f_3 = y - \sin\frac{2\pi x}{2R},$$

а $\vee_0$, $\wedge_0$ — символи деяких легко реалізованих двомісних елементарних операцій над дійсними числами.

Визнано, що математика базується на "трьох китах": науці про кількісні відносини реального світу, представлені рівняннями і нерівностями усіх видів, науці про геометричні форми і логіці. Питання про логіку міркувань хвилювало математиків з найдавніших часів. Досить згадати аксіоматичну конструкцію геометрії *Евкліда*, древні логічні парадокси. Саме тоді була сформульована проблема: *як довести, що наші доведення є доведеннями*. Намагаючись поставити математичну логіку на строго формальну основу, англійський математик *Дж. Буль* ще в минулому сторіччі побудував свою алгебру, згодом названу *булевою*. Ми усі знаємо, що ця алгебра знайшла широке застосування в комп'ютерній техніці, і зараз ніхто не сумнівається, що це математична теорія. Однак у часи *Буля* багато математиків не вважали цю теорію математичною і, звичайно ж, не могли вгадати такий її успіх у майбутньому. Здавалося, що немає і не передбачається жодного зв'язку між методами дискретної математики і неперервним аналізом. Однак, такий зв'язок був виявлений, і склав ідейну основу теорії R-функцій. З'явилася можливість перенести методи дискретного аналізу, зокрема булеву алгебру, у класичний неперервний аналіз. Саме ця логіка лежить в основі побудови розглянутих вище рівнянь. Залишається лише здогадатися, як цю логіку перетворити у формули звичайної математики, і при цьому елементарної. Це означає, що повинні бути такі елементарні формули, що містять у собі "логічний заряд" — іншого виходу немає. Представлені цими формулами функції і були названі R-функціями.

X	Y	$X \cap Y$	$X \cup Y$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

x	y	$x \vee_0 y = x + y - \sqrt{x^2+y^2}$	$x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2+y^2}$
+	+	+	+
+	—	—	+
—	+	—	+
—	—	—	—

Якщо в другій таблиці замінити "—" на "0", а "+" на "1", то одержимо таблиці двох булевих функцій. R-функції мають таку властивість: знаки аргументів однозначно визначають знак R-функції.

Ми бачили, що наведені вище приклади так чи інакше пов'язані з поняттям пучка функцій, необхідністю його побудови і дослідження. У загальному вигляді пучок функцій — це формула виду $\boldsymbol{u = B(\Phi, \omega, \omega_i, \varphi_i)}$, де функції $\boldsymbol{\omega, \omega_i}$ відносяться до опису меж областей і їхніх ділянок, $\boldsymbol{\varphi_i}$ — деякі відомі функції, що, залежно від конкретних умов, можуть мати різний фізичний зміст, а $\boldsymbol{\Phi}$ — невизначена компонента пучка, яка повинна бути знайдена з деяких додаткових умов. Наприклад, при розгляді крайових задач математичної фізики, у яких необхідно знаходити те чи інше фізичне поле, такими додатковими умовами можуть бути диференціальні рівняння, функціонали, які треба мінімізувати і так далі. Поява і розвиток теорії R-функцій дозволили розробити єдиний підхід до побудови координатних функцій, які точно задовольняють заданим граничним умовам виду $Bku|_{\partial\Omega\kappa} = \varphi_\kappa$ для областей складних конфігурацій. Тим самим було розширено "сферу впливу" варіаційних і проекційних методів.

За останні роки теорія R-функцій одержала подальший розвиток як у плані побудови рівнянь геометричних об'єктів, так і при математичному моделюванні різноманітних фізико-механічних полів. З методами побудови рівнянь ГО на основі теорії R-функцій добре сполучаються класичні прийоми побудови рівнянь поверхонь тіл обертання, призматичних і конічних тіл, скручених циліндрів і змійовиків некласичного поперечного перерізу. Зараз, удосконаливши конструктивний апарат теорії R-функцій, ми вміємо будувати рівняння поверхонь досить непростих машинобудівних деталей (рис.3). Візуалізацію побудованих у 3D рівнянь виконано в системі РАНОК, яку орієнтовано на застосування методу R-функцій.

Одержала подальший розвиток методика побудови симетричних рівнянь для симетричних ГО, зокрема при наявності симетрії трансляційного типу (рис.4).

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

k = 2 k = 3 k = 4

Рис. 6

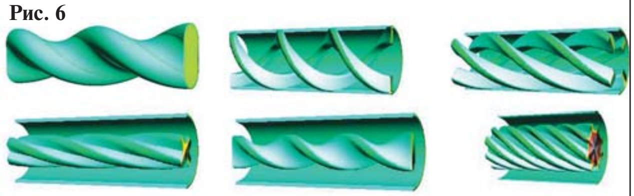
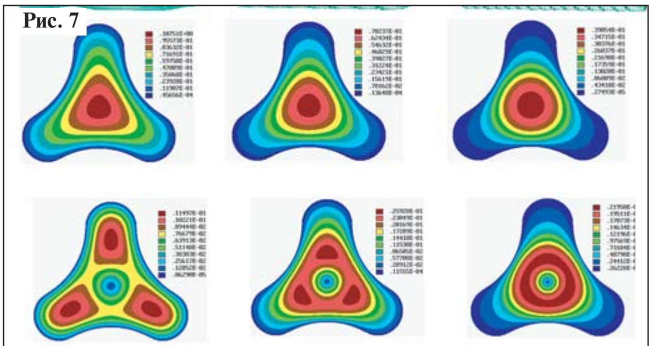
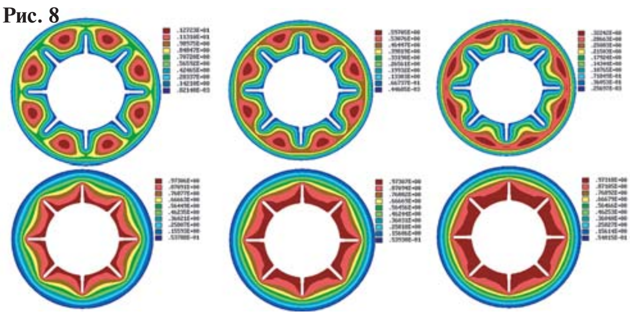


Рис. 7



$\alpha = \pi/10$ $\alpha = \pi/2$ $\alpha = \pi$

Рис. 8



$\alpha = \pi/6$ $\alpha = \pi/3$ $\alpha = \pi/2$

Математичний апарат теорії R-функцій виявився також досить зручним для опису об'єктів фрактальної геометрії. Розроблені методи дозволили побудувати рівняння кривої, сніжинки і хреста Коха (рис.5), килима і серветки Серпинського, дерева Піфагора, кривої Леві тощо.

Наведемо приклади деяких фізичних полів, що останнім часом були досліджені з застосуванням теорії R-функцій:

— Рух нестисливої в'язкої рідини і теплообмін у каналах із гвинтовим типом симетрії (рис.6).

— Задача побудови математичних моделей фізико-механічних полів, що мають гвинтовий тип симетрії, виникає в багатьох галузях: наприклад, скручені труби є простим і зручним засобом для надання потокові обертального руху; у теплотехніці відомі численні застосування змійовиків. Використання закрутки потоку має великі перспективи у вихрових МГД-генераторах, для регулювання тяги ракетних двигунів, у камерах ядерних енергетичних установок, у хімічній, нафтовій, газовій та інших галузях промисловості. Надати потокові рідини обертального руху можна також, наприклад, різними гвинтовими вставками в циліндричний канал. Для збільшення ефективного коефіцієнта теплопередачі в техніці широко використовуються також оребрені теплопередавальні поверхні. Застосовують поздовжні, поперечні, спіральні ребра, зокрема, для оребрення оболонок ТВЕЛів ядерних реакторів і зовнішніх поверхонь труб парогенераторів. Найвигіднішими формами оребрення оболонок ТВЕЛів є шевронне і полізональне оребрення, які виконуються у вигляді багатозахідної спіралі з великим кроком. Уперше були побудовані математичні моделі руху нестисливої в'язкої рідини — рівняння Нав'є-Стокса і процесу теплообміну при русі в'язкої рідини в гвинтовій системі координат і проведені дослідження впливу параметра закрутки на картини гідродинамічних і температурних полів. На рис. 7 зображені картини формування поздовжньої і тангенціальної компонент профілю швидкості при різних значеннях параметра закрутки.

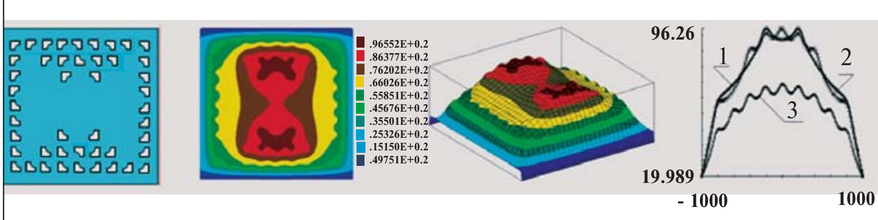
— Досліджено розподіли швидкості течії і теплообміну у ТВЕЛі з полізональним оребренням для різних значень параметра закрутки (рис.8).

— Досліджено теплові режими радіоелектронної апаратури (рис.9). На платі розташовані джерела тепла — елементи електронної схеми. Потрібно знайти стаціонарне температурне поле плати.

— Були також проведені дослідження МГД-течій при великих значеннях числа Гартмана та у бланкеті термоядерного реактора, полів у середовищах з кусково-однорідними включеннями, рівноваги тороїдальної плазми тощо. Обчислювальні експерименти в 2D виконані в системі ПОЛЕ, яку орієнтовано на застосування методу R-функцій.

Завдяки бурхливому розвитку комп'ютерної техніки істотно збільшився інтерес, а, отже, і темпи розвитку теорії R-функцій. Лекції з теорії R-функцій читають в університетах України, Росії, США, Японії, Угорщини. Багато відомих вчених ефективно застосовують теорію R-функцій при розв'язанні прикладних задач.

Рис. 9



Література

1. **Рвачев В.Л.** Теория R-функций и некоторые ее приложения. — Киев: Наук. думка, 1982.

2. **Максименко-Шейко К.В.** R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. — Харьков, ИПМаш НАН Украины, 2009.