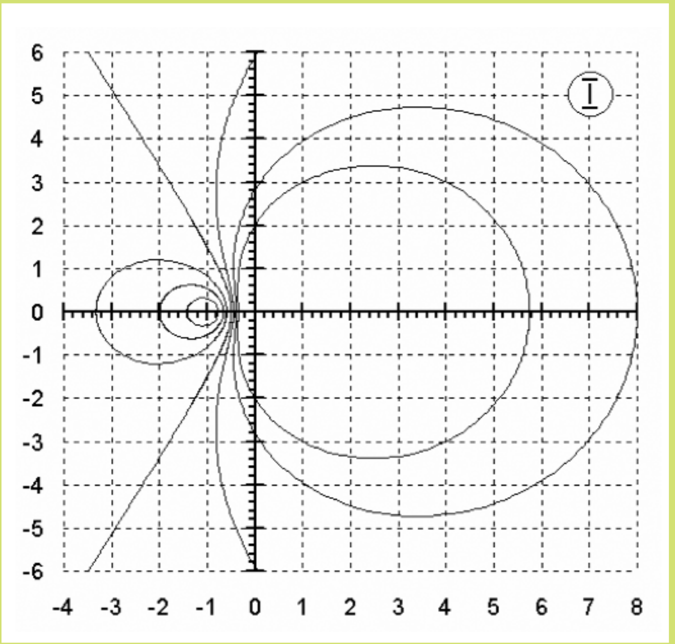
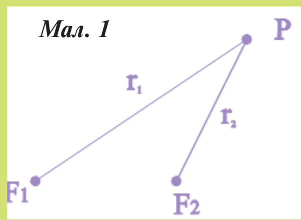


Овали Декарта

Тадеуш Мар'янович
доктор техн. наук,
член-кореспондент
НАН України,
головний наук. співр.
Інституту кібернетики
ім. В.М. Глушкова
НАН України,
м. Київ

Згадаймо, як нам пояснювали, ***що таке еліпс***. Нехай на площині задані дві довільні точки F_1 та F_2 (рис. 1). Назвемо їх фокусами. Якщо P ще якась точка площини, то її положення можна визначити віддалями r_1 та r_2 від точок F_1 та F_2 відповідно. Тепер будемо розглядати не всі точки P площини, а лише ті, для яких сума $r_1 + r_2 = c$ є постійною величиною. Геометричне місце таких точок створює криву, що називається еліпсом.

Мал. 1



Природньо виникає запитання, а що буде, коли розглядати лінійне співвідношення

$ar_1 + br_2 = c,$ де a, b і c довільні дійсні числа? (1)

Це запитання поставив переді мною мій учитель, професор ***Шилов Георгій Євгенович***, коли я був студентом першого курсу механіко-математичного факультету Київського державного університету імені Т.Г. Шевченка.

Криві, що визначаються рівнянням (1), були відомі ще з часів ***Декарта*** і названі його ім'ям [1]. Моє ж завдання полягало в тому, щоб описати весь клас можливих форм овалів Декарта в залежності від параметрів a, b і c [2]. З цього почалися перші кроки мого творчого шляху, за що я до сьогодні вдячний Георгію Євгеновичу.

Я запрошую Вас за одну-дві години знову зробити ці кроки. Частину з них ми пройдемо разом. Іншу ж частину читач має пройти самостійно, озброївшись олівцем, папером і терпінням та спираючись на здобутті в школі знання і мої підказки. При цьому не слід боятися незнайомої справи, тому що, як відомо, ***Ной*** був дилетантом, а “Титанік” будували досвідчені інженери.

Давайте поміркуємо

Почнемо із простих і очевидних випадків.

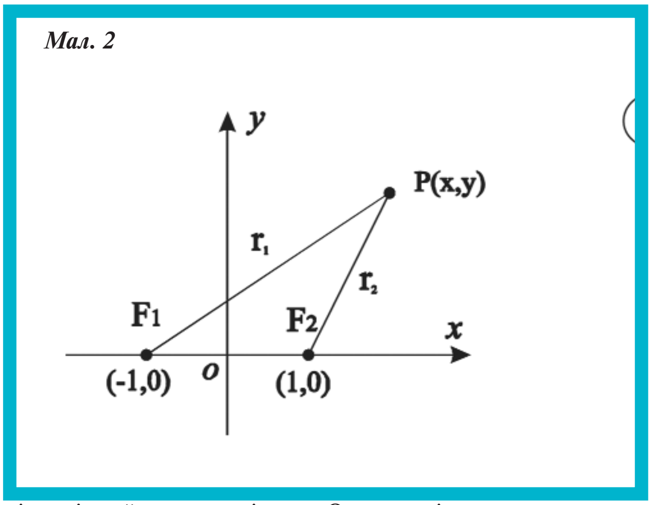
Якщо $a = b > 0$ і $c > 0$, то ми маємо випадок класичного еліпса $r_1 + r_2 = c/a$.

Якщо $a = 0$, а величини b і c мають одинакові знаки, то овалом Декарта служить коло радіуса c/b з центром в точці F_2.

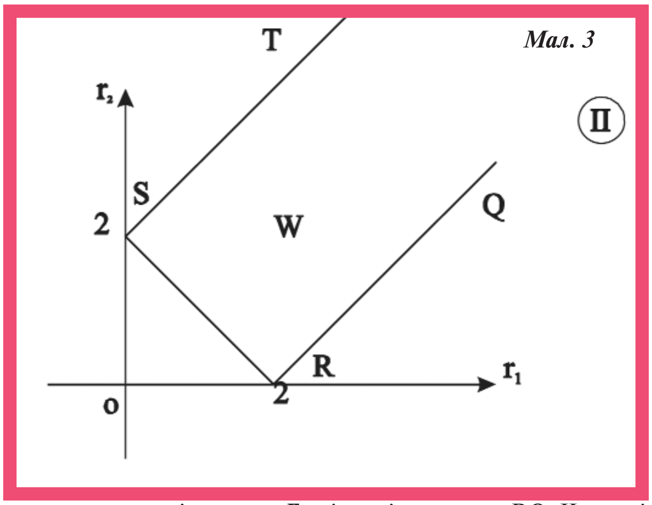
Якщо $b = 0$, а величини a і c мають однакові знаки, то одержимо коло радіуса c/a з центром в точці F_1.

Якщо $a = -b$, то овалом Декарта служить гіпербола $r_1 - r_2 = c/a$, і напрям гілок цієї гіперболи залежить від знаків параметрів a, b і c. Якщо $a > 0$, $b > 0$ і $c = 0$, то

Мал. 2



Мал. 3



відповідний овал не існує. Отже доцільно вважати, що $c \neq 0$.

Введемо позначення $a/c = 1/a_1$, $b/c = 1/a_2$.

Тоді рівняння овалу запишеться в симетричній формі

$$r_1/a_1 + r_2/a_2 = 1 \qquad (2)$$

Таким чином, ми маємо справу з сімейством кривих другого порядку, яке при заданій відстані між фокусами залежить від двох параметрів — a_1 і a_2. Встановимо можливу форму овалу Декарта при тих чи інших значеннях цих параметрів.

Овал як відрізок прямої

Зрозуміло, що при яких завгодно точках F_1 та F_2 завжди можна вибрати масштаб та побудувати прямокутну систему координат так, щоб точка F_1 розмістилась в точці (-1,0), а точка F_2 — в точці (1,0). Розглянемо на площині *I* саме таку систему координат (рис.2). Положення довільної точки $P(x, y)$ можна зафіксувати величинами r_1 та r_2, розглядаючи їх також як координати точки $P(x, y)$. Назвемо ці координати ***біполярними***. Звернемо увагу, що біполярним координатам (r_1, r_2) на площині *I* відповідають дві точки, а саме — точка $P(x, y)$ і симетрична їй відносно осі (0, x) точка $P(x,-y)$. Побудуємо тепер прямокутну систему координат на площині *II* з координатами (r_1, r_2) (мал. 3). Кожній точці $P(x, y)$ з площини *I* з біополярними координатами (r_1, r_2) можна поставити у відповідність точку $N(r_1, r_2)$ з прямокутними координатами (r_1, r_2) на площині *II*. В той же час не кожна точка площини *II* буде мати відповідну їй точку на площині *I*. Точка $N(r_1, r_2)$ з площини *II* буде зображенням певної точки $P(x, y)$ з площини *I* тоді і тільки тоді, коли відрізки r_1, r_2, і 2 (відстань між F_1 та F_2) створюють трикутник. Ми знаємо, що для існування такого трикутника повинні виконуватися нерівності

$$r_1 + r_2 > 2,\ r_1 - r_2 \leqslant 2,\ r_2 - r_1 \leqslant 2 \qquad (3)$$

Дослідимо тепер, де знаходяться ті точки площини *II*, для координат яких ці нерівності виконуються. Спочатку розглянемо рівності

$$r_1 + r_2 = 2,\ r_1 - r_2 = 2,\ r_2 - r_1 = 2$$

На площині *I* перша рівність виконується для координат точок відрізка (F_1, F_2). Друга рівність виконується для координат точок осі (0, x), що лежать справа від точки F_2. Третя рівність виконується для координат точок осі (0, x), що лежать зліва від точки F_1. В площині *II* кожна з цих рівностей є рівнянням прямої, що відтинає на осях (r_1, r_2) відрізки довжиною 2. При цьому відрізкові (F_1, F_2) з площини *I* на площині II відповідає відрізок RS. Частині осі (0, x), що лежить справа від точки F_2, відповідає пряма RQ. Частині осі (0, x), що лежить зліва від точки F_1, відповідає пряма ST. Отже вісь (0, x) площини *I* перейшла в ламану QRST на площині *II*.

Тепер неважко переконатись, що нерівності (3) виконуються для координат точок площини *II*, що належать області *W*, обмеженій ламаною QRST (мал.3).

Таким чином зображенням множини точок площини *I*, де знаходяться овали Декарта, в площині *II* є обмежена ламаною QRST область *W*. А нас цікавлять ті точки площини *I*, біполярні координати яких задовільняють рівняння (2). В площині *II* це рівняння визначає прямі лінії.

Відрізки цих прямих, що належать області W, відповідають овалам Декарта із заданими параметрами α_1 та α_2. Таким чином крива, що є овалом Декарта в площині I, зображується відрізком прямої в площині II.

Допустимі значення параметрів α_1 та α_2

Визначимо тепер, при яких значеннях параметрів α_1 та α_2 прямі (2) перетинатимуть область *W*. Неважко переконатись, що прямі (2) не будуть перетинати область *W* за таких умов:

1) $\alpha_1 < 0,\ \alpha_2 < 0$
2) $0 < \alpha_1 < 2,\ 0 < \alpha_2 < 2$ (4)
3) $\alpha_2 > 2,\ -\alpha_2 < \alpha_1 < 0$
4) $\alpha_1 > 2,\ -\alpha_1 < \alpha_2 < 0$

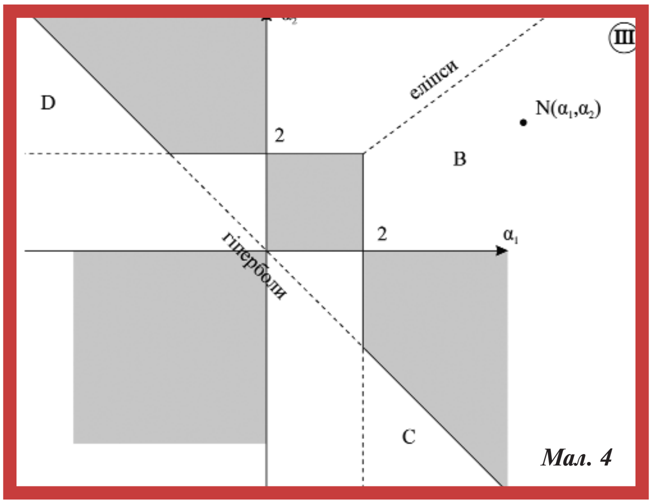
В усіх інших випадках прямі (2) перетинатимуть область *W* і визначатимуть певні овали Декарта.

Для того, щоб наочно уявити собі, при яких значеннях параметрів α_1 та α_2 існують відповідні їм овали Декарта, розглянемо площину *III* з прямокутними координатами (α_1, α_2). Назвемо її ***параметричною***.

На цій площині нерівності (4) виконуються для координат точок, що лежать в зафарбованих областях (мал.4). Отже овалів з такими значеннями параметрів α_1 та α_2 не існує. Координатам точки $N(\alpha_1, \alpha_2)$ в області ***B***, де $\alpha_1 > 0$ і $\alpha_2 > 0$, в області ***C***, де $\alpha_1 > 0$, а $\alpha_2 < 0$ і області ***D***, де $\alpha_1 < 0$ і $\alpha_2 > 0$, відповідає певний овал Декарта. Так, наприклад, точкам $N(\alpha_1, \alpha_2)$, що лежать на бісектрисі першого координатного кута, де $\alpha_1 = \alpha_2$, відповідає сімейство еліпсів.

Точкам $N(\alpha_1, \alpha_2)$, що лежать на бісектрисах другого та четвертого координатних кутів, де $\alpha_1 = -\alpha_2$, відповідає сімейство гіпербол.

Можливі форми овалів Декарта для інших точок $N(\alpha_1, \alpha_2)$ ми дослідимо далі. А зараз встановимо певні загальні властивості цих кривих.



Мал. 4

Деякі загальні властивості овалів

1. ***Кожен овал Декарта є кривою, симетричною відносно осі (0, x).***

Ця властивість випливає з того, що кожній точці P(x, y) з площини ***I*** з біполярними координатами (r_1, r_2) відповідає симетрична відносно осі (0, x) точка ***P(x, -y)*** з тими ж біполярними координатами (r_1, r_2).

2. ***За винятком гіпербол усі овали Декарта є обмеженими, замкнутими кривими.***

Насправді, якщо кутовий коефіцієнт прямої (2) відмінний від 1, то вона перетинає область ***W*** вздовж відрізка скінченої довжини. На цьому відрізку r_1, r_2 обмежені, тобто й овал Декарта обмежений. Точкам перетину цього відрізка з границею області ***W*** відповідають точки перетину овалу з віссю (0, x) і, в силу симетрії, овал замкнутий.

Якщо ж кутовий коефіцієнт прямої (2) дорівнює 1, то ми одержуємо уже розглянутий випадок гіперболи.

3. ***Довільна горизонтальна пряма перетинає овал Декарта не більше, ніж у двох точках.***

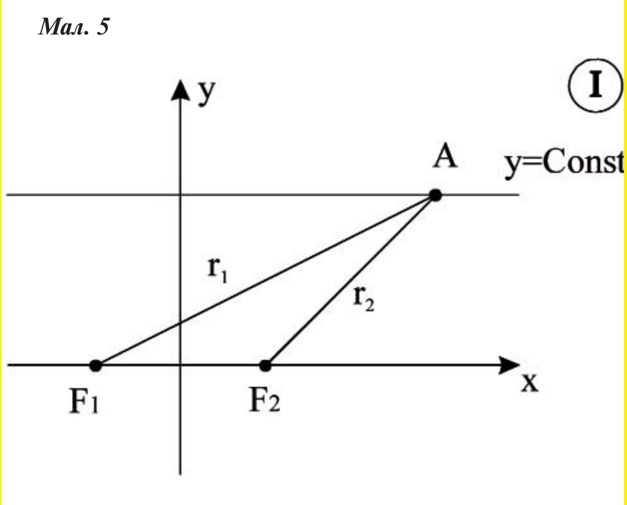
Нехай y = Const є рівнянням однієї з таких горизонтальних прямих (мал.5)

Зауважимо, що для всіх точок ***A*** з цієї прямої площа трикутника F_1AF_2 є постійною величиною, оскільки він має основу рівну 2 і постійну висоту. Запишемо тепер рівняння прямої ***y = Const*** в біполярних координатах (r_1, r_2).

Позначимо через ***p*** напівпериметр трикутника F_1AF_2 і визначимо його площу за трьома сторонами:

$$S_{F_1AF_2} = p(p - r_1)(p - r_2)(p - 2)$$

або



Мал. 5

$$((r_1 + r_2 + 2)/2)((r_2 - r_1 + 2)/2)((r_1 + r_2 - 2)/2) = C^2$$

Використаємо позначення

$$r_1 + r_2 = 2u, \quad r_1 - r_2 = 2v \qquad (5)$$

Одержимо

$$(u^2 - 1)(1 - v^2) = C^2$$

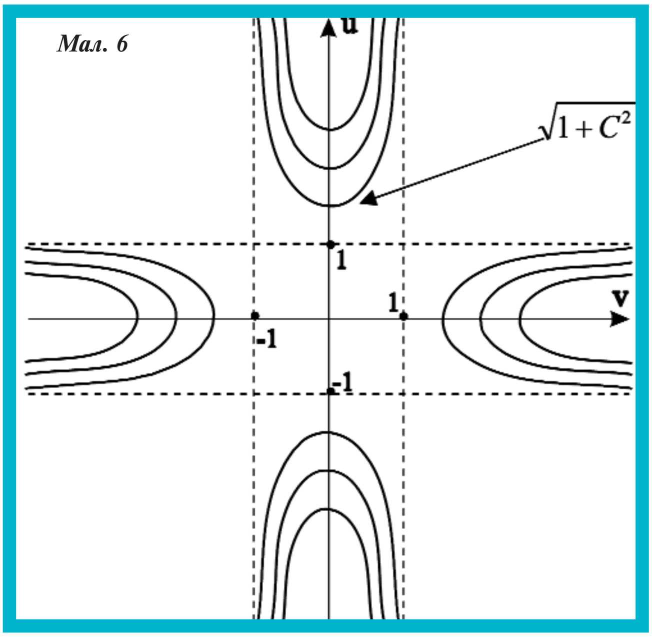
або (6)

$$u^2 = 1 + C^2/(1 - v^2)$$

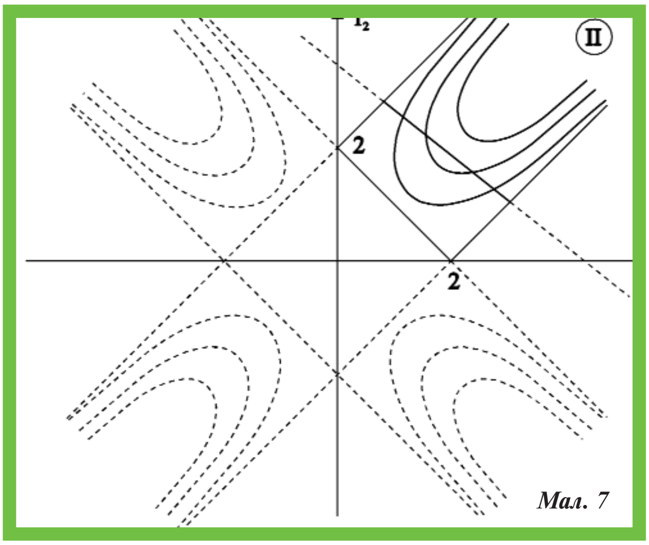
Побудуємо тепер графік функції ***u*** в залежності від ***v***. Обмежимося лише такою підказкою: слід побудувати графік правої частини залежності (6), визначити області аргументу ***v***, де вона додатна, і в цих областях виконати добування кореня, пам'ятаючи, що ця операція дає результати з двома знаками — плюсом і мінусом. В результаті одержимо сімейство кривих ***u*** при різних значеннях ***C***, зображене на мал.6.

Перенесемо тепер ці криві в площину ***II***, маючи на увазі, що, асимптоти $u = \pm 1$ та $v = \pm 1$ перейдуть згідно з (5) в прямі $r_1 + r_2 = \pm 2$ та $r_1 - r_2 = \pm 2$, що є границею області ***W*** на площині ***II***.

Мал. 6



Таким чином сімейство прямих y = Const з площини I переходить в сімейство кривих в області W на площині II , зображених на мал.7. Овалами ж Декарта в площині II , як ми уже встановили, є відрізки прямих (2), що перетинають область W.



Мал. 7

Прямі (2) будуть перетинати криві, що є образами прямих $y = Const$, в області W площини II не більше ніж у двох точках, якщо ці криві є опуклими функціями. Відомо, що функція буде опуклою, якщо її похідна є монотонною. Перевіримо монотонність похідної функції

$$u^2 = 1 + c^2/(1-v^2)$$

Ця похідна є функцією

$$2uu_v = - (2vc^2/(1-v^2)^2)$$

$$u_v = - (vc^2/u(1-v^2)^2)$$

Піднесемо до квадрату ліву і праву частини попередньої рівності і підставимо значення

$$u^2 = 1 + c^2/(1-v^2)$$

Одержимо

$$u_v^2 = c^4v^2/(1+(c^2/(1-v^2))(1-v^2)^4$$

Далі виконаємо очевидні перетворення і одержимо

$$u_v^2 /c^4= 1/(1-((1+c^2)/v^2))(v^2-1)^3$$

Звідси видно, що при зростанні v функція u_v зменшується, тобто є монотонною, і функція u є опуклою функцією.

Аналіз можливих форм овалів

Переходимо тепер до аналізу можливих форм овалів Декарта в залежності від параметрів α_1 та α_2 з дозволенних областей (мал.4).

Зображення овалу Декарта на площині II у вигляді відрізка прямої в області W дає простий наближений спосіб геометричної побудови цих кривих. Якщо необхідно побудувати овал Декарта за рівнянням

$$\alpha r_1 + br_2 = c$$

то достатньо виконати такі дії:

1) обчислити параметри $\alpha_1 = c/a$ та $\alpha_2 = c/b$;

2) переконатись, чи потрапляє точка $N(\alpha_1, \alpha_2)$ на площині III в одну із дозволених областей;

3) на площині II побудувати пряму $r_1/\alpha_1 + r_2/\alpha_2 = 1$, пам'ятаючи, що α_1 та α_2 є відрізками, які відтинає ця пряма на осях координат;

4) визначити відрізок цієї прямої, що належить області W;

5) за допомогою циркуля виміряти координати r_1 та r_2 точок з цього відрізка і відкласти їх від F_1 та F_2, як біполярні координати на площині I.

Точність побудови буде залежати від кількості випробуваних точок. Інший доступний спосіб побудови овалу такий.

Якщо задане рівняння (2) з конкретними значеннями α_1 та α_2, то знаходимо координати точок перетину цієї прямої з границею області W. Ці точки дають значення r_1^{min} та r_1^{max}. Змінюючи з певним кроком r_1 в межах (r_1^{min}, r_1^{max}) та користуючись співвідношенням (2), записаним у вигляді

$$r_2 = \alpha_2(\alpha_1 - r_1)/\alpha_1$$

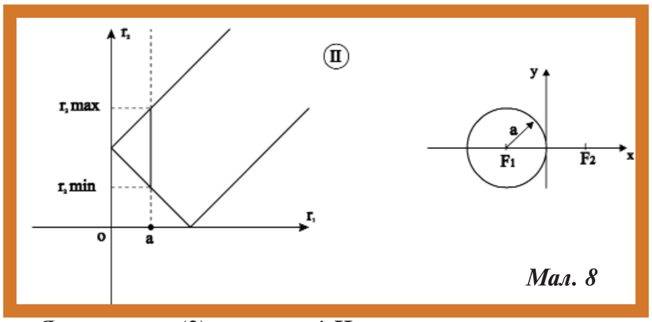
обчислюємо за допомогою калькулятора відповідні значення r_2 і будуємо на площині I овал.

Якщо ж є можливість скористатись комп'ютером, то виконуємо зазначені вище розрахунки і друкуємо точки перетину кіл з радіусами r_1 та r_2 і центрами F_1 та F_2 відповідно. Всі подальші приклади овалів побудовані саме таким способом.

А тепер знову ж таки з початку розглянемо кілька частинних випадків перетину прямої (2) з областю W.

Якщо ця пряма паралельна прямій RS, то вона відтинає на осях α_1 та α_2 рівні відрізки $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, і відповідний овал є еліпсом $r_1 + r_2 = \alpha$.

На параметричній площині II цим випадкам відповідають точки, що лежать на бісектрисі першого координатного кута.



Мал. 8

Якщо пряма (2) в площині II вертикальна, то вона перетинає область W в двох точках. При цьому радіус-вектор r_2 змінюється від r_2^{min} до r_2^{max} а радіус-вектор r_1 залишається постійним, і ми одержуємо коло радіуса $r_1 = \alpha$ з центром в точці F_1. (мал.8)

Якщо пряма (2) на площині II горизонтальна, то має місце аналогічний попередньому випадок кола $r_2 = \alpha$ з центром в точці F_2.

Якщо пряма (2) на площині II паралельна прямій RQ, то вона відтинає на осях α_1 та α_2 відрізки рівної довжини, але різних знаків. Відповідний овал є гіперболою $r_1 - r_2 = \alpha$. Напрям гілок цієї гіперболи залежить від знаків α_1 та α_2.

Бісектриса першого координатного кута на площині II є образом осі (0,y) і розділяє ці два сімейства гіпербол.

На площині III випадку гіпербол відповідають точки бісектриси другого та четвертого координатних кутів (мал.4)

Розглянемо тепер пряму (2) з параметрами $\alpha_1 > 2$, $\alpha_1 = -\alpha_2$. Ця пряма взагалі не перетинає області W. В той же час має існувати гіпербола з цими значеннями параметрів. В чому ж справа? А справа в тому, що ми вже встигли забути про ще один параметр овалів Декарта — про фокусну відстань, довжину відрізка (F_1, F_2).

З самого початку ми домовилися, що фокусна відстань дорівнює 2. Цього достатньо, щоб дослідити, яку форму може мати овал Декарта в залежності від параметрів α_1 та α_2. Якщо ж фокусна відстань відмінна від 2, то достатньо побудувати відповідну їй область W, і всі наші міркування залишаться в силі.

А тепер невеличке запитання до читача: де знаходяться ті точки параметричної площини III, яким відповідає овал Декарта у формі кола?

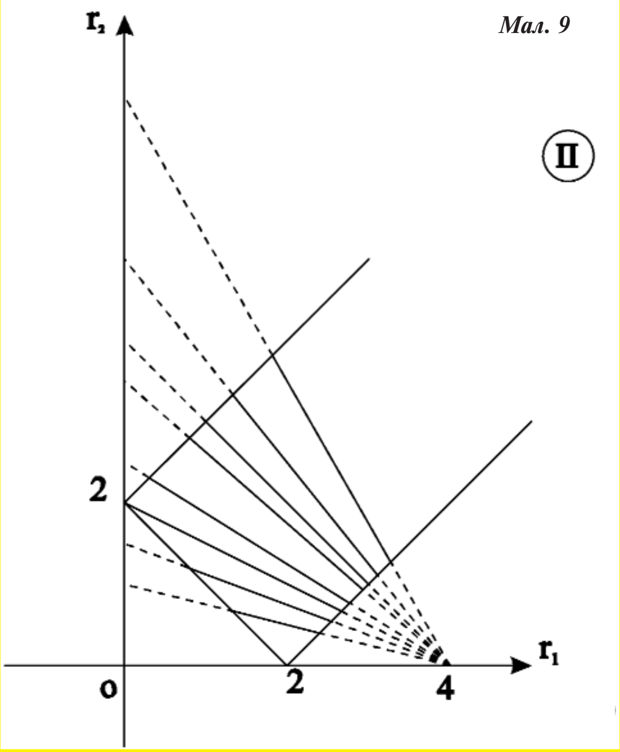
Розглянемо овали Декарта з різними параметрами.

Овали Декарта з параметрами $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$

Нехай точка $N(\alpha_1, \alpha_2)$ належить до області B параметричної площини III. Еволюцію форм овалів прослідкуємо, переміщуючи точку $N(\alpha_1, \alpha_2)$ з початкового положення $N(4,0)$ в напрямку зростання параметра α_2, залишаючи незмінним $\alpha_1 = 4$.

Вибір $\alpha_1 = 4$ зроблено лише для того, щоб одержати овали прийнятного для друку розміру.

Нехай α_2 приймає значення 1; 1,5; 2; 2,5; 3,5; 4; 5; 7. При таких параметрах α_1 та α_2 перетин прямих (2) з областю W зображений на мал. 9. Одержані при цьому овали зображені на мал. 10. Тут спостерігається така закономірність. Від початкової форми, що є деформованим колом з більш загостреною стороною, орієнтованою вліво від точки F_2, овал стає еліпсом, коли точка $N(\alpha_1, \alpha_2)$ досягає бісектриси першого координатного кута. Далі він знову набуває форми деформованого кола і змінює напрямок орієнтації більш загостреною стороню вправо від F_2. Одночасно відбуваєть-



Мал. 9

ся і переміщення точок перетину овалів з віссю (0, x) відносно фокусів F_1 та F_2.

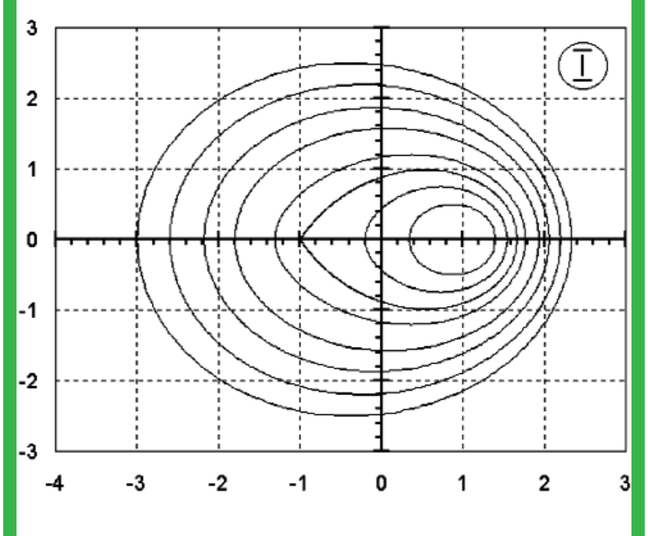
Тепер розглянемо еволюцію форми овалу при переміщенні точки $N(\alpha_1, \alpha_2)$ від початкового положення N(0,4) в напрямку зростання r_1.

Поскільки рівняння овалу (2) симетричне відносно r_1 та r_2, то ми одержимо картину аналогічну попередній, тільки овали будуть орієнтовані в протилежному напрямку.

При інших значеннях параметрів та характеру перетину прямої (2) з областю W буде аналогічний розглянутому в попередніх прикладах.

Отже точкам $N(\alpha_1, \alpha_2)$ з області B параметричної площини III відповідають опуклі криві подібні деформованому колу різного розміру.

Мал. 10



Овали Декарта при $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$

Нехай тепер точка $N(\alpha_1, \alpha_2)$ належить області D параметричної площини. Тут овали Декарта набувають більш різноманітних порівнянр з попередніми форм.

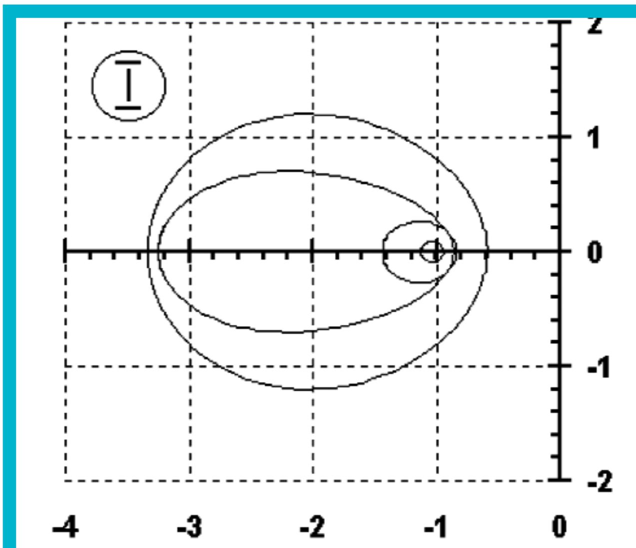
Спочатку розглянемо точки $N(\alpha_1, \alpha_2)$, що належать трикутнику, створеному віссю r_2, прямою $r_2 = 2$ та бісектрисою четвертого координатного кута. В цьому трикутнику завжди $r_2 > -r_1$. Отже пряма (2) перетинатиме область W через відрізок RS та пряму ST. Відповідний їй овал перетинатиме вісь (0,x) між фокусами та зліва від фокусів.

Нехай $\alpha_1 = 0{,}7$, а α_2 приймає значення 1; 1,5; 1,7; 1,8. Ми не будемо зображати перетин прямої (2) з областю W для цих значень параметрів α_1 та α_2, а звернемо увагу лише на те, що коли $\alpha_2 > -\alpha_1$ на невелику величину, то точка перетину прямої (2) з прямою ST буде дуже віддаленою, і відповідний овал буде сильно витягнутим вліво.

Овали з зазначеними вище значеннями параметрів зображені на мал. 11.

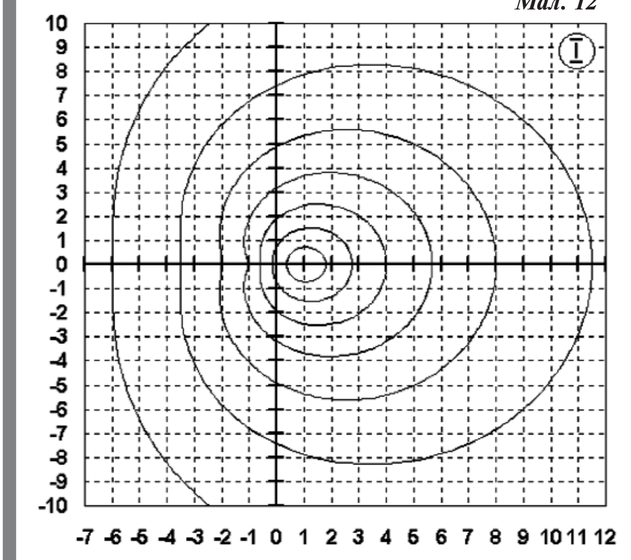
Тепер поцікавимося, що буде, коли точка $N(\alpha_1, \alpha_2)$ знаходиться за межами згаданого трикутника.

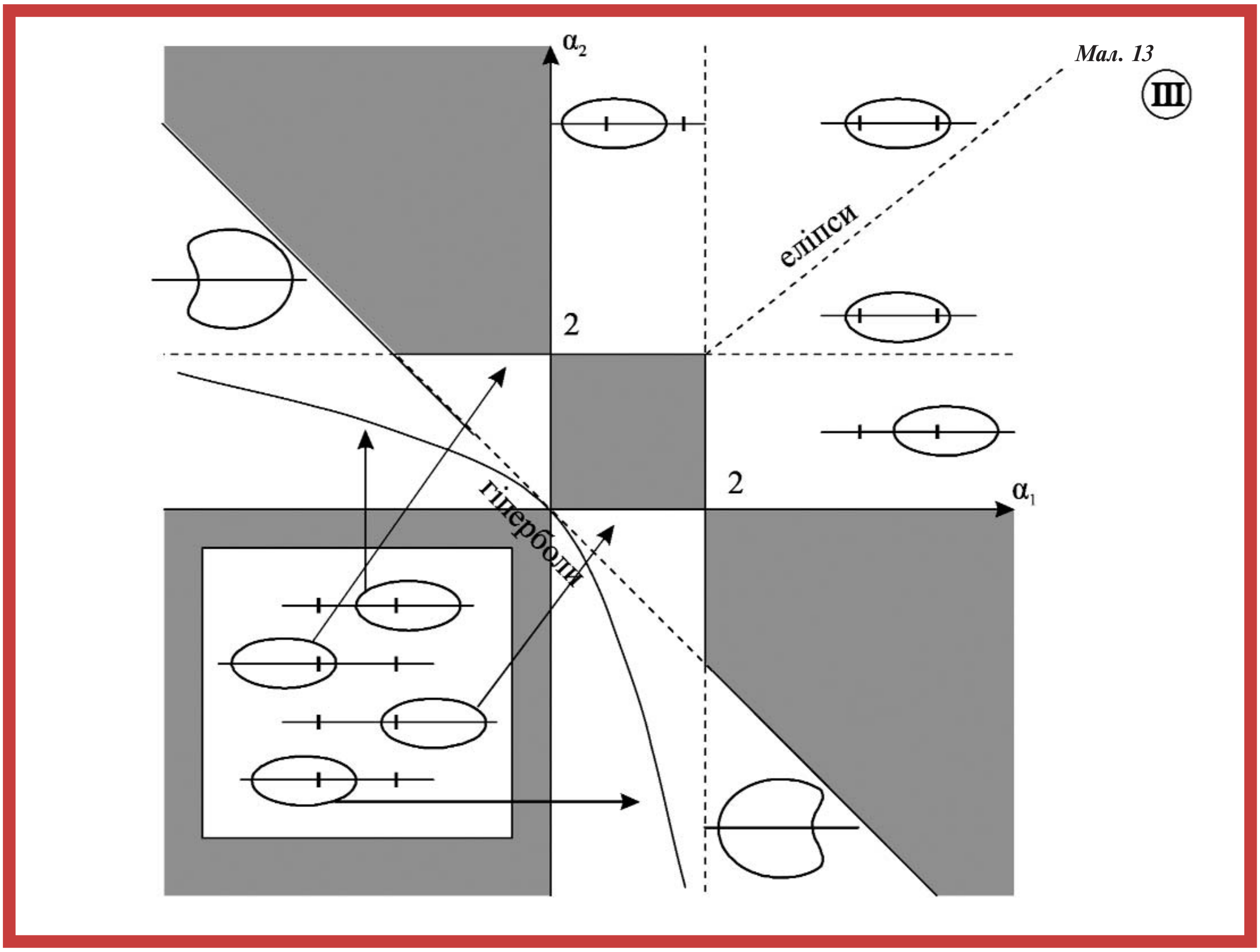
Нехай $\alpha_1 = 5$, а параметр α_2 послідовно приймає значення 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5 і 3.



Мал. 11

Мал. 12





Відповідні цим параметрам овали зображені на мал.12. Як бачимо, серед цих овалів є опуклі та неопуклі криві.

Як відрізнити ті точки $N(\alpha_1, \alpha_2)$ з області D параметричної площини *III*, яким відповідають опуклі овали, від точок, яким відповідають неопуклі овали?

Пропонуємо читачеві докласти зусиль і вирішити це завдання самостійно, використовуючи такі міркування:

1) записати рівняння овалу в прямокутних кординатах (x, y), виразивши через них радіус-вектори r_1 та r_2 :

$$\alpha_2\,((x + 1)^2 + y^2)^{1/2}) + \alpha_1\,((1 - x)^2 + y^2)^{1/2}) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \qquad (7)$$

2) замінити відрізок овалу в малому околі точки x_0 його перетину з віссю (0,X) відрізком параболи

$$x = x_0 + \alpha y^2 \qquad (8)$$

Напрям опуклості цієї кривої залежить від знака коефіцієнта α.

3) підставити співвідношення (8) в рівняння (7) і одержати аналітичний зв'язок коефіцієнта α з параметрами α_1 та α_2 .

4) визначити границю, де $\alpha = 0$. Цією границею має бути гіпербола $\alpha_1 = 2\alpha_2 /(\alpha_2 - 2)$, яка на параметричній площині III відділяє область значень параметрів (α_1, α_2), що відповідають опуклим овалам, від області значень параметрів (α_1, α_2), що відповідають неопуклим овалам (мал. 13).

Овали Декарта при $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 < 0$

Звернемося тепер до області ***C*** параметричної площини ***III***. Оскільки овал симетричний відносно параметрів α_1 та α_2, то в цій області матиме місце картина, симетрична тій, що спостерігається в області ***D***, в чому легко переконатись, побудувавши приклади кривих з параметрами $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 < 0$.

Таким чином ми тепер знаємо, що таке овали Декарта і як вони можуть виглядати.

Наочну картину залежності форми овалу і його розташування відносно фокусів дає схема відповідності овалів точкам $N(\alpha_1, \alpha_2)$, що зображена на параметричній площині (мал.13). Маючи конкретні значення α_1 та α_2, за цією схемою можна передбачити очікувану форму овалу, а потім побудувати саму криву.

Таким чином питання про можливі форми овалів Декарта вичерпане.

І на закінчення невеличкі доручення читачеві:

1) проаналізувати, як трансформується овал при наближенні відповідної йому точки $N(\alpha_1, \alpha_2)$ до границь заборонених областей параметричної площини ***III***.

2) проаналізувати трансформацію овалу при фіксованих значеннях параметрів α_1, α_2 та змінних значеннях фокусної відстані — довжини відрізка (F_1, F_2).

Бажаю успіхів.

Література

1. ***Crofton M.*** On certain properties of the Cartesian ovals, treated by the method of vectorial coordinates // Proceedings of the London Mathematical Society.—1865,—№1.
2. ***Марьянович Т.П.*** Об одном описании овалов Декарта //Научные работы студентов Киевского университета. Математика, XVI, 1955.