

<https://doi.org/10.15407/knit2023.05.069>
УДК 523.68, 520.373, 521.97, 528.021.4, 528.23

П. М. КОЗАК¹, старш. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук
E-mail: kpm@knu.ua
І. В. ЛУК'ЯНИК¹, старш. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук
Л. В. КОЗАК², доцент, канд. фіз.-мат. наук
О. Б. СТЕЛЯ³, старш. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Астрономічна обсерваторія
вул. Обсерваторна 3, Київ, Україна, 04053

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка, фізичний факультет
просп. Академіка Глушкова 4, Київ, Україна, 03680

³ Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет комп'ютерних наук та кібернетики
просп. Академіка Глушкова 4д, Київ, Україна, 02000

ВИКОРИСТАННЯ ГЕОДЕЗИЧНОЇ, ГЕОЦЕНТРИЧНОЇ ТА ТОПОЦЕНТРИЧНИХ СИСТЕМ КООРДИНАТ У МЕТЕОРНИЙ АСТРОНОМІЇ ТА СУМІЖНИХ ЗАДАЧАХ

Розглядається задача використання геодезичної, геоцентричної та топоцентричних систем координат при обробці відеоспостережень метеорів та інших динамічних об'єктів у земній атмосфері. Для метеорних висот діапазону 0...200 км та довільних широт земного еліпсоїда обчислюється різниця геодезичної та геоцентричної широти; відповідна кутівому зміщенню довжина дуги земного меридіана; та різниця геодезичної та геоцентричної висоти над земним еліпсоїдом. Робиться висновок про те, що при обчисленнях кінематичних параметрів метеорів та траєкторних вимірюваннях за спостереженнями балістичних об'єктів на заданих висотах та великих відстанях між пунктами спостережень оптимальним вибором є геоцентрична чи аналогічні топоцентричні системи координат, без використання горизонтальних систем координат як проміжних. Така ж система координат використовується при геоцентрично-геліоцентричних перетвореннях перед безпосереднім обчисленням елементів геліоцентричних орбіт метеороїдів. Відмічається, що при нанесенні проєкцій траєкторій метеорів на карту Землі з метою пошуку їхніх залишків — метеоритів — слід робити перехід від геоцентричної до геодезичної системи координат, оскільки різниця між ними може сягати більш ніж 11 кутових мінут дуги для об'єктів, розташованих на висоті 100 км над поверхнею земного еліпсоїда, що відповідає зміщенню 21 км. Різниця геодезичних та геоцентричних висот є незначною та становить 0.5 м на висоті 100 км та трохи більше від 1 м на висоті 200 км, і нею можна знехтувати при метеорних розрахунках та у більшості задач балістики. Запропоновано альтернативний векторний метод зворотного переходу від геоцентричних до геодезичних координат та приведено числовий розв'язок відповідного рівняння. Для зменшення розрахункового часу при масовій обробці рекомендується замість числового розв'язку зворотної задачі використовувати апроксимацію елементарними функціями. Приводиться приклад апроксимації, який для параметрів земного еліпсоїда дає максимальне відхилення широти порядку однієї кутової мінут дуги, або 35 м на поверхні Землі. Відмічається, що такої точності достатньо для метеорних вимірювань, однак для балістичних задач точність апроксимації має бути кращою.

Ключові слова: метеор, відеоспостереження метеорів, обчислення висоти метеора, проєкція траєкторії метеора на карту Землі, геодезична система координат, геоцентрична система координат, точність обчислень кінематичних параметрів метеора.

Цитування: Козак П. М., Лук'яник І. В., Козак Л. В., Стеля О. Б. Використання геодезичної, геоцентричної та топоцентричних систем координат у метеорній астрономії та суміжних задачах. *Космічна наука і технологія*. 2023. 29, № 5 (144). С. 69—78. <https://doi.org/10.15407/knit2023.05.069>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2023. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

ВСТУП

Важливою задачею обробки метеорних спостережень є точність обчислення кінематичних параметрів метеороїдів. Точність таких параметрів траєкторії метеора, як екваторіальні координати радіанта, модуль швидкості метеороїда, його висота над рівнем моря тощо, а далі і елементів його геліоцентричної орбіти залежить від декількох базових факторів. Насамперед це просторова та часова роздільна здатність спостережної апаратури, зумовлена фокусною відстанню об'єктива і роздільною здатністю приймача випромінювання відеокамери. Точність початкової астрометричної обробки також залежить від цих факторів через похідні параметри, як то кутовий розмір пікселя та поле зору камери, які забезпечують необхідну кількість опорних зір у кадрі та точність вимірів їхніх положень. Крім того, важливим фактором є правильно підібрані редуційні моделі [5]. Остаточна якість фінальних триангуляційних розрахунків забезпечується точністю визначення координат пунктів спостереження на земній поверхні.

Щодо останнього пункту — точності обчислення геодезичних координат пунктів спостереження — на сьогодні немає формальних проблем, оскільки такі координати легко розраховуються за допомогою GPS-приймачів у рамках моделі земного еліпсоїда. Раніше використовувалися географічні координати пунктів спостереження, розраховані геодезистами, і які надалі можна було за необхідності конвертувати у прямокутні геоцентричні координати. Використання саме прямокутних геоцентричних систем координат (СК) дає можливість ефективно оперувати подальшою обробкою кінематичних даних метеора.

Так, в роботі [6] використовується векторний метод, в якому розрахунок траєкторії метеора, включаючи вектор його геоцентричної швидкості, висот над рівнем моря та інших кінематичних параметрів, що підлягають каталогізації, здійснюється у прямокутній геоцентричній правоорієнтованій СК (вісь Z напрямлена у полюс світу, вісь X — у гринвіцький меридіан, вісь Y доповнює СК до правоорієнтованої), та її топоцен-

тричних аналогів, розміщених у пунктах спостережень.

На відміну від класичного підходу, який використовує громіздкі формули сферичної астрономії та локальні горизонтальні системи координат, у яких параметри метеора (елевація чи азимут) не мають особливого значення і самостійно ніде не приводяться (елевація над горизонтом використовується у фотометричній обробці при врахуванні атмосферного поглинання), даний метод дозволяє отримувати одразу шукані кінематичні параметри метеора. Можливість такого підходу зумовлена тим, що астрометрична обробка зображення метеора базується на використанні опорних зірок у кадрі, які забезпечують розрахунок екваторіальних координат метеора. А оскільки екваторіальна і географічна геоцентрична прямокутна СК повернуті одна відносно одної на кут, що є зоряним часом, перехід між ними реалізується елементарно — поворотом навколо осі Z , — знову-таки у векторному вигляді [6, 7]. Якщо йдеться про траєкторії балістичних об'єктів, які розраховуються за допомогою відеокамер, параметри положення яких було відкалібровано у локальних горизонтальних СК без залучення віддалених астрономічних (або інших) опорних об'єктів, то цілком очевидно, що такий підхід неможливий, і використання горизонтальних СК є необхідним. Але і в цьому випадку при значній віддаленості точок старту та приземлення балістичного об'єкта геоцентрична СК може використовуватись як проміжна перехідна СК між заданими координатами в горизонтальних СК. Аналогічна ситуація виникає при випадкових денних спостереженнях болідів, зроблених, наприклад, за допомогою автомобільних відео реєстраторів. У цьому випадку визначаються горизонтальні координати боліда за видимими в кадрі стаціонарними об'єктами, геодезичні координати яких можна знайти на картах (наприклад у програмі “Google Earth”) і далі пов'язати з їхніми локальними горизонтальними координатами [4], враховуючи, що зеніт у горизонтальній СК визначається саме за геодезичною широтою. Однак подальший перехід до геліоцентричної СК знову вимагає знання геоцентричних координат боліда.

Отже, прямокутна геоцентрична СК при опрацюванні знімків метеорів є досить зручним інструментом, тим більше що подальша трансформація координат метеорів в геліоцентричну СК для обчислення орбіт метеороїдів також використовує саме геоцентричну СК. Тим не менш, обчислені висоти метеора (вірніше їхні аналоги) у геоцентричній СК, строго кажучи, не збігаються з їхніми реальними геодезичними висотами над рівнем моря (поверхнею земного еліпсоїда). Виникає запитання, чи варто проводити трансформацію розрахованої геоцентричної висоти у геодезичну перед каталогізацією параметрів метеора, чи такою різницею можна знехтувати? Як було сказано вище, точність розрахунку просторових координат метеора, зокрема його висоти в геоцентричній СК, тісно пов'язана із спостережною апаратурою. Так, при спостереженнях в Києві з телевізійними системами типу суперізокон з використанням фотографічних об'єктивів Геліос-40 ($F = 85$ мм, $F/1.5$, поле зору $13^\circ \times 11^\circ$, розмір пікселя $2.2'$) або Юпітер-3 ($F = 50$ мм, $F/1.5$, поле зору $23.5^\circ \times 19^\circ$, розмір пікселя $4'$) точність обчислення висоти варіює у межах 90...120 м [8], хоча при правильно підібраній базисній відстані та напрямку оптичних осей може бути доведена до 20...30 м [9]. Похибка просторових вимірів, зокрема висоти, для інших метеорних мереж приблизно така ж. Так, для Каліфорнійської метеорної спостережної мережі CAMS характерна похибка порядку 60 м [2, 3]. Інші відео- та фотографічні спостереження мають похибку від 30 до 100 м; радарні спостереження дають похибку 1...3 км (див. таблицю у роботі [3]). Отже, якщо різниця геоцентричної і геодезичної висоти не перевищує похибки розрахунків, переходом від розрахованих із спостережень геоцентричних до геодезичних висот можна знехтувати.

Загалом точність визначення висоти метеора є актуальною задачею фізичних моделей руху метеора в атмосфері, оскільки потребує правильних значень щільності атмосфери на заданій висоті, а також має самостійне значення як для характеру взаємодії метеора з атмосферою, так і для досліджень будови самої атмосфери, зокрема для пояснення аномально великих висот появи світіння, плавлення та абляції метеора [10] та

відносно недавніх досліджень інших метеорних аномалій [11].

Схожа задача виникає і з кутовими координатами точок на траєкторії метеора — топоцентричних довготи і широти. Досить часто для демонстрації траєкторій деяких індивідуальних (як правило яскравих) метеорів в наукових статтях приводять їхні проєкції на земну поверхню, тобто на поверхню земного еліпсоїда. Іншим, ще одним, випадком є нанесення слідів усіх спостережених метеорів за певний період часу, наприклад за час дії деякого метеорного потоку, або за рік спостережень. І хоча така демонстрація не має ніякого наукового продовження, все ж вона має (хоча б наближено) відповідати реальності. Більш того, ситуація радикально змінюється, коли йдеться про знімки яскравих повільних болідів, які можуть випасти на землю у вигляді метеоритів, але у поле зору камер попадали на великих висотах, а отже, їхній пошук є надзвичайно важливим елементом метеорних досліджень, і правильність нанесеної на карту кінцевої ділянки траєкторії є визначальним фактором успіху такої процедури [4, 12]. Як приклад можна навести і іншу важливу причину наводити коректну геодезичну проєкцію на карти — так було при прольоті Челябінського боліда, де аналізувався зв'язок між точкою вибуху і генерації ударної хвилі та пошкодженнями, які цей вибух завдав [1].

Дана робота носить практичний характер в області метеорної астрономії та суміжних задач (наприклад балістики), і присвячена визначенню різниці висот і широт (довготи залишаються незмінними) в геоцентричній і геодезичній СК для достатньо великих висот до 200 км як функції широти та висоти.

КОНВЕРТАЦІЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ КООРДИНАТ У ГЕОЦЕНТРИЧНІ ТА НАВПАКИ В ЗАДАЧАХ МЕТЕОРНОЇ АСТРОНОМІЇ

Загальна постановка задачі. Задача переходу з геоцентричної в геодезичну СК для заданого земного еліпсоїда загалом не є оригінальною, хоча і рідко використовується безпосередньо в геодезії. У підручниках з геодезії і деяких статтях можна зустріти опис трансформації координат з геодезичної (географічної) СК в геоцентричну та навпаки,

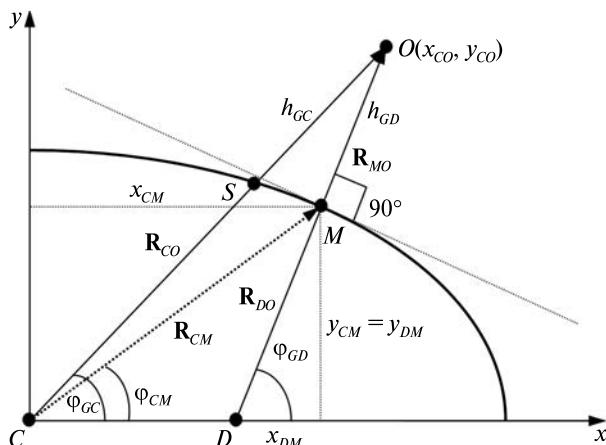


Рис. 1. Двовимірна геометрична схема для пояснення прямої та зворотної задачі перерахунку геодезичних координат об'єкта, а саме висоти над еліпсоїдом та широти в геоцентричній та навпаки

однак приведені формули використовуються радше для поверхні еліпсоїда чи малих висот підвищення поверхні, хоча і розглядаються для різних широт. Зокрема, детальний опис як прямої задачі переходу геодезична СК — геоцентрична СК, так і декілька числових методів розв'язку задачі зворотного переходу геоцентрична СК — геодезична СК можна знайти в роботі [14]. Проте типова для метеорної науки задача про точність трансформації з однієї СК в іншу на висотах над рівнем моря порядку 100 км або вище у літературних джерелах описана недостатньо. Йдеться про обчислення різниці геодезичної φ_{GD} (в літературі, присвяченій геодезії, часто використовується символ B) та геоцентричної φ_{GC} (зазвичай просто φ) широт заданої точки O , а також різниці між геодезичною висотою над рівнем моря $h_{GD} = |\mathbf{R}_{MO}|$ та відстанню від поверхні земного еліпсоїда до даної точки h_{GC} (SO) вздовж геоцентричного радіуса-вектора \mathbf{R}_{CO} (див. рис. 1).

Оскільки пряма задача у векторному вигляді була виведена нами раніше в роботі [6], а зворотна задача розв'язувалася чисельно для аналогічного векторного переходу, незалежно від опублікованих в інших джерелах методів — приведемо їх в даній роботі. Дані методи ми використовуємо для обчислення різниці широт і висот метеора. Вони можуть розглядатися як альтернативні до приведених у літературних джерелах.

Пряма задача — переведення геодезичних координат в геоцентричні для метеорних висот і довільних широт. Пряма задача ставиться таким чином. Нехай для вибраного земного еліпсоїда з великою піввіссю a та ексцентриситетом e (додатково введемо змінні $k^2 = b^2/a^2 = 1 - e^2$, b — мала піввісь еліпсоїда) задано геодезичні координати φ_{GD} , h_{GD} деякої точки O (це може бути як спостережний пункт, розміщений на відносно малих висотах, так і будь-яка точка на висоті метеора) і потрібно розрахувати її геоцентричні координати φ_{GC} , h_{GC} .

На рис. 1 зображено північну чверть земного еліпсоїда у меридіанному розрізі — цього достатньо для загального розв'язку поставленої задачі (для південної півкулі розрахунок здійснюється аналогічно). Меридіанний розріз розглядаємо тому, що довгота не змінюється при переході з однієї СК в іншу, отже слід за координатами φ_{GD} , h_{GD} точки O розрахувати її координати φ_{GC} , h_{GC} . Головна формула, яку планується використати, — векторна і має вигляд

$$\mathbf{R}_{CO} = \mathbf{R}_{CM} + \mathbf{R}_{MO}.$$

Компоненти вектора \mathbf{R}_{MO} можуть бути знайдені з початкових даних за формулами

$$x_{MO} = h_{GD} \cos \varphi_{GD},$$

$$y_{MO} = h_{GD} \sin \varphi_{GD}.$$

Для того щоб знайти вектор \mathbf{R}_{CM} , скористаємося двома формулами, дійсними для точок на поверхні еліпсоїда. Перша формула переводить геодезичну широту об'єкта (точка M на еліпсоїді) у геоцентричну φ_{CM} (рис. 1):

$$\operatorname{tg} \varphi_{CM} = k^2 \operatorname{tg} \varphi_{GD}, \quad (1)$$

а друга служить для визначення геоцентричної відстані CM до згаданої точки:

$$R_{CM} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \varphi_{CM}}} = \frac{b}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \varphi_{CM}}}. \quad (2)$$

Звідси знаходимо прямокутні геоцентричні компоненти вектора \mathbf{R}_{CM} :

$$x_{CM} = R_{CM} \cos \varphi_{CM},$$

$$y_{CM} = R_{CM} \sin \varphi_{CM},$$

і остаточно $\mathbf{R}_{CO} = \mathbf{R}_{CM} + \mathbf{R}_{MO}$. Далі формально

$$\varphi_{GC} = \arctg(y_{CO} / x_{CO}), \quad x_{CO} \neq 0,$$

$$h_{GC} = R_{CO} - R_{CS},$$

де R_{CS} знаходиться з формули, аналогічної формулі (2), у якій використовується отримане значення φ_{GC} .

Паралельно можна визначити, для подальшого порівняння зі зворотним перетворенням, прямокутні координати точки M через геодезичну широту з класичних формул геодезії:

$$x_{CM} = \frac{a \cos \varphi_{GD}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_{GD}}},$$

$$y_{CM} = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi_{GD}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_{GD}}}.$$

Зворотна задача — переведення геоцентричних координат у геодезичні для метеорних висот і довільних широт. Задача ставиться аналогічним чином — для того ж еліпсоїда за обчисленими геоцентричною широтою та висотою φ_{GC} , h_{GC} (CO , рис. 1) деякої точки O на метеорі (чи іншого об'єкта на балістичній траєкторії) отримати її геодезичні аналоги φ_{GD} , h_{GD} . Тобто, відомим вважається вектор \mathbf{R}_{CO} , і планується використати аналогічний векторний підхід.

Наявність відомого вектора \mathbf{R}_{CO} означає, що відомі геоцентричні прямокутні координати точки O , а саме $\{x_{CO}, y_{CO}\}$, однак допоміжний вектор \mathbf{R}_{CM} — невідомий (у підручниках з вищої геодезії [14] можна знайти інформацію про те, що така зворотна задача вирішується чисельно). Будемо виходити з таких міркувань: пряма нормалі з точки O до поверхні еліпсоїда має, з одного боку, проходити через точку O , тобто описуватись рівнянням

$$y - y_{CO} = A_N(x - x_{CO}), \quad (3)$$

де A_N — деякий наразі невідомий коефіцієнт, що відображає тангенс кута нахилу нормалі до осі X . З іншого боку, вона має бути нормаллю до дотичної до еліпса в шуканій точці M , тобто мати прямокутні координати $\{x_{CM}, y_{CM}\}$. Рівняння дотичної до еліпса має вигляд

$$\frac{xx_{CM}}{a^2} + \frac{yy_{CM}}{b^2} = 1$$

у канонічному вигляді, або

$$y = -\frac{x_{CM}}{y_{CM}} \frac{b^2}{a^2} x + \frac{b^2}{y_{CM}},$$

де тангенс кута нахилу відповідно є

$$A_T = -\frac{x_{CM}}{y_{CM}} \frac{b^2}{a^2},$$

а отже для нормалі він буде

$$A_N = -1/A_T = \frac{y_{CM}}{x_{CM}} \frac{a^2}{b^2}. \quad (4)$$

Підставляючи отримане значення у вираз (3), отримаємо рівняння прямої — нормалі до еліпса, яка також проходить через точку O :

$$y - y_{CO} = \frac{y_{CM}}{x_{CM}} \frac{a^2}{b^2} (x - x_{CO}),$$

а безпосередньо для шуканої точки з координатами $\{x_{CM}, y_{CM}\}$ отримаємо вираз

$$y_{CM} - y_{CO} = \frac{y_{CM}}{x_{CM}} \frac{a^2}{b^2} (x_{CM} - x_{CO}). \quad (5)$$

Маємо двоє невідомих $\{x_{CM}, y_{CM}\}$, але оскільки точка M лежить на поверхні еліпса, можна скористатись його рівнянням

$$\frac{x_{CM}^2}{a^2} + \frac{y_{CM}^2}{b^2} = 1, \quad (6)$$

виразити y_{CM} через x_{CM} та підставити у вираз (5). Остаточно отримаємо рівняння для чисельного розв'язку (ми скористалися методом ділення відрізка навпіл):

$$\left(1 - \frac{x_{CO}}{x_{CM}}\right) \frac{a^2}{b^2} + \frac{y_{CO}}{b \sqrt{1 - \frac{x_{CM}^2}{a^2}}} - 1 = 0. \quad (7)$$

Після знаходження x_{CM} знайдемо y_{CM} з виразу (6).

Також можна знайти величини

$$\varphi_{CM} = \arctg(y_{CM} / x_{CM}), \quad x_{CM} \neq 0,$$

$$R_{CM} = \sqrt{x_{CM}^2 + y_{CM}^2}.$$

Далі у зворотному порядку $\mathbf{R}_{MO} = \mathbf{R}_{CO} - \mathbf{R}_{CM}$, де шукана висота є довжиною вектора \mathbf{R}_{MO} :

$$h_{GD} = R_{MO} = |\mathbf{R}_{MO}|.$$

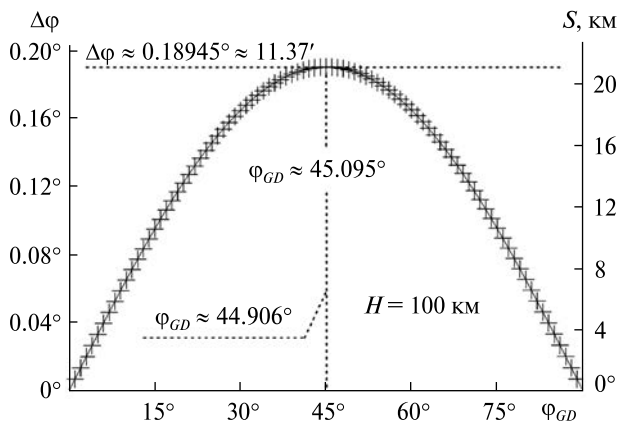


Рис. 2. Залежність різниці $\Delta\varphi$ геодезичної та геоцентричної широти для висоти 100 км та відповідної довжини S дуги меридіана від геодезичної широти φ_{GD}

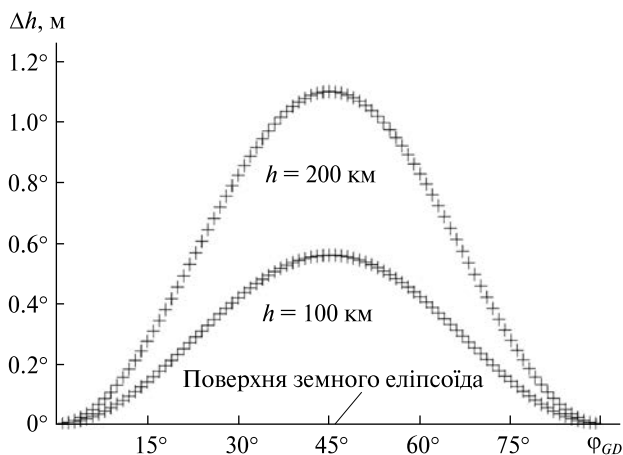


Рис. 3. Залежність різниці геодезичної та геоцентричної висоти від геодезичної широти для висот 100 км та 200 км

А геодезична широта знайдеться з виразу

$$\varphi_{GD} = \arctg A_N,$$

де A_N знаходиться з (4) після розв'язку рівняння (7).

АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Для остаточного аналізу розв'язку поставленої практичної задачі будемо розглядати такі величини: $\Delta\varphi = \varphi_{GD} - \varphi_{GC} \geq 0$, $\Delta h = h_{GC} - h_{GD} \geq 0$, S — відповідна довжина дуги меридіана на поверхні еліпсоїда, що відповідає зміщенню при нанесенні на карту замість геодезичної широти φ_{GD}

геоцентричної φ_{GC} . Остання визначається за наближеною формулою $S = M_{12}(\varphi_{GD1} - \varphi_{GD2})$, яка в нашому випадку має вигляд

$$S = M_{GDGC}(\varphi_{GD} - \varphi_{GC}),$$

де M_{GDGC} — значення радіуса меридіана для середньої широти $\varphi_{GDGC} = (\varphi_{GD} + \varphi_{GC})/2$, яке визначається за відомою з геодезії формулою

$$M_{GDGC} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_{GDGC})^{3/2}}.$$

Для розрахунків ми використали, як і раніше в роботі [6], параметри земного еліпсоїда GRS 80 [13], $a = 6378.137$ км, $e = 0.08181919$, хоча для даної задачі тип моделі не відіграє суттєвої ролі. Залежність $\Delta\varphi = f(\varphi_{GD})$, розраховану для висоти 100 км, приведено на рис. 2.

Там же вказано шкалу для довжини S дуги меридіана, яка пов'язана з $\Delta\varphi$ майже лінійною залежністю. Як видно з рис. 2, дана крива має форму, дуже схожу на косинусоїду з максимумом на 45° — суцільна лінія відображає $\cos(2\varphi_{GD} - \pi/2)$. Загалом видно, що величина $\Delta\varphi$, яка відповідає куту $\angle COD$ (або $\angle SOM$) на рис. 1, має зменшуватися, як і S , зі збільшенням висоти, тоді як різниця висот Δh , яка дорівнює нулеві на поверхні еліпсоїда, — має збільшуватися. При збільшенні висоти від 0 до 200 км різниця широт зменшується від 0.19242° (для $H = 0$, тобто для поверхні еліпсоїда дане значення за допомогою формули (1) можна перевірити) до 0.18656° (від $11.54'$ до $11.19'$) для $\varphi_{GD} = 45^\circ$, де відхилення максимальне; довжина дуги меридіана при цьому зменшується відповідно від 21.4 до 20.7 км). Для широти 30° (та близько 60°) різниця широт при аналогічному збільшенні висоти змінюється від 0.166° до 0.161° (від $9.98'$ до $9.68'$); дуга меридіана зменшується від 18.4 до 17.9 км відповідно. Звідси стає очевидним, що при нанесенні сліду метеора на карту обов'язково слід робити перехід від геоцентричних координат, розрахованих у відповідності до [6] та описаного в даній роботі підходу, до геодезичних. Аналогічно необхідно робити перехід від геодезичних координат, розрахованих, наприклад, при денних спостереженнях, до геоцентричних для подальшого розрахунку геліоцентричних координат метеороїда та елементів його орбіти.

На відміну від різниці широт, різниця між геодезичною та геоцентричною висотами є зовсім незначною (рис. 3) і становить на широті 45°, де вона максимальна, лише приблизно півметра на висоті 100 км, та 1.1 м на висоті 200 км. Даний результат не виглядає дивним, бо довжина дуги меридіана, що відповідає різниці широт (тобто куту $\angle SOM$ на рис. 1) в 0.19° дорівнює всього близько 350 м з висоти 100 км і 700 м з висоти 200 км. Очевидно, даною різницею в геодезичної і геоцентричної висот можна знехтувати як в метеорних дослідженнях, так і в більшості задач балістики.

Слід зауважити, що на відміну від прямого переходу від геодезичних координат до геоцентричних зворотний перехід використовує чисельний розв'язок рівняння (7), що займає певний час. Оскільки при обробці зображень метеора часто використовуються обчислення його кінематичних та фотометричних параметрів вздовж усього сліду — а це може складати декілька сотень точок у відповідності до роздільної здатності відеокамери — дана затримка у розрахунках може бути суттєвою. Особливо така затримка у перерахунку є негативним фактором при обчисленні кінематичних параметрів об'єктів в задачах балістики, які часто вимагають даних в режимі реального часу. Для того щоб уникнути подібної затримки, зважаючи на вигляд залежності $\Delta\varphi$ на рис. 2, можна вдатися до апроксимації елементарними функціями. Як уже згадувалося, дана залежність дуже близька до косинусоїди з максимумом на 45°, тобто можна скористатися апроксимацією виду

$$\Delta\varphi = A_H \cos\left(2\varphi_{GC} - \frac{\pi}{2}\right), \quad (8)$$

де амплітудний множник A_H загалом є функцією висоти (оскільки зараз йдеться про зворотний перехід від геоцентричних до геодезичних координат, у формулі використано значення φ_{GC} , тому що воно є вхідним параметром). Тут слід зауважити, що максимум величини $\Delta\varphi$ (рис. 2) не відповідає строго 45° для жодної з широт, а значенням $\varphi_{GC} \approx 44.906^\circ$ та $\varphi_{GD} \approx 45.095^\circ$. Близькість до 45° зумовлена невеликим значенням ексцентриситету земного еліпсоїда. Якщо для

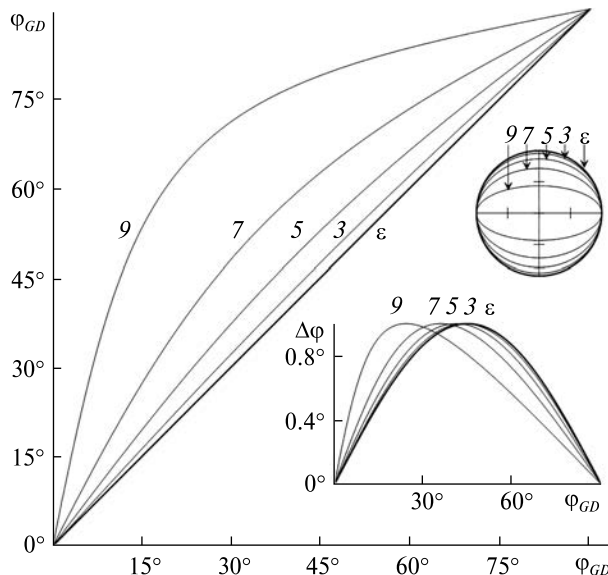


Рис. 4. Залежності геодезичної широти від геоцентричної для еліпсоїдів з різними значеннями ексцентриситету, та зміщення максимуму різниці широт (нормалізованих на одиницю) у бік зменшення геоцентричної широти, розраховані для висоти 100 км. Також приведені зображення відповідних еліпсів — числа відповідають десятим долям значень ексцентриситетів (наприклад, 7 відповідає значенню ексцентриситету 0.7), e — ексцентриситет земного еліпсоїда GRS 80

Таблиця 1. Значення досліджуваних параметрів у максимумах різниці геодезичної та геоцентричної широт для еліпсоїдів з різними ексцентриситетами для висоти 100 км у відповідності до рис. 4

Ексцентриситет	φ_{GD}	φ_{GC}	$\Delta\varphi_{MAX}$	ΔH , м	S , км
Земля, GRS 80	45.10°	44.91°	0.19°	0.56	21.1
0.3	46.34	43.68	2.66	109.4	288.5
0.5	49.07	40.99	8.08	1 019.1	824.2
0.7	54.39	35.78	18.66	5 616.7	1612.5
0.9	66.25	24.13	42.12	35 638.2	1954.2

порівняння розглянути залежність $\Delta\varphi = f(\varphi_{GC})$ для еліпсоїдів з більшими ексцентриситетами (рис. 4) то стає видно зміну залежності φ_{GD} від φ_{GC} , а також зміщення максимуму $\Delta\varphi$ у бік зменшення значень φ_{GC} (і аналогічне зміщення в бік збільшення значень φ_{GD}).

На рис. 4 для порівняння приведено нормалізовані значення параметрів $\Delta\varphi$ в їхніх максиму-

мах для $\Delta\varphi = f(\varphi_{GC})$, а абсолютні значення величин в максимумах приведено у табл. 1.

Тим не менш, апроксимація функцією (8) залежності $\Delta\varphi = f(\varphi_{GC})$ для земного еліпсоїда дає значення $A_H \approx 0.18945^\circ$ для висоти 100 км, та $A_H \approx 0.18658^\circ$ для висоти 200 км, а відповідні стандартні відхилення апроксимації 0.00022° та 0.00021° , або $0.79'$ та $0.76'$ (відповідні довжини дуг меридіана 25 та 23 м). Максимальне відхилення при цьому у діапазоні $0^\circ \dots 90^\circ$ становитиме 0.00031° ($1.12'$), що приблизно відповідатиме відстані 35 м на поверхні Землі. Загальний вигляд функції (8) при цьому буде мати вигляд

$$\Delta\varphi = (A_0 + A_1 H) \cos\left(2\varphi_{GC} - \frac{\pi}{2}\right),$$

де $A_0 \approx 0.19232^\circ$, $A_1 \approx -2.87 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ/\text{км}$, висота H — в кілометрах, а різниця широт $\Delta\varphi$ — у градусах. Очевидно, що для задач метеорної астрономії цього достатньо. Однак для задач балістики потрібна вища точність, а тому функцію апроксимації слід підбирати точніше, користуючись при цьому, наприклад, даними рис. 4.

ВИСНОВКИ

В результаті розгляду проблеми точності кінематичної обробки одночасних двосторонніх відеоспостережень метеорів та балістичних об'єктів у земній атмосфері було отримано такі результати. Використання геоцентричної СК у ролі основної дає ряд переваг в обчисленнях кінематичних параметрів швидких динамічних об'єктів у атмосфері, таких як висоти над рівнем земного еліпсоїда, швидкості об'єктів, напрямки руху, дальності до пунктів спостережень тощо. Її слід використовувати при нічних спостереженнях метеорів, коли кутові координати об'єктів розраховуються в екваторіальній СК, а також далі при перерахунку в геліоцентричні координати, що слугують для обчислення елементів орбіт метеороїдів. Однак при нанесенні проєкцій рухомих атмосферних об'єктів на карти слід робити попередньо обов'язковий перехід до геодезичних координат, особливо в задачах пошуку можливих залишків метеорів (метеоритів), оскільки різниця геоцентричної та геодезичної широт може сягати більше 20 км для середніх широт. При денних спостереженнях, коли базовими є

горизонтальні СК та відповідні їм геодезичні координати динамічних атмосферних об'єктів, слід робити перерахунок спочатку до топоцентричних прямокутних СК, а далі — до геоцентричної СК для подальшого обчислення елементів орбіт метеороїдів. При цьому слід використовувати геоцентричну СК для зв'язку віддалених горизонтальних СК при траєкторних вимірюваннях балістичних об'єктів. Різницею висот в геоцентричній та геодезичній СК можна знехтувати для більшості задач у діапазоні $0 \dots 200$ км, оскільки вона становить величину порядку одного метра. Також було виведено альтернативний метод чисельного розв'язку зворотної задачі переходу від геоцентричних координат до геодезичних. З урахуванням того, що чисельний розв'язок є відносно повільною процедурою, а на сліди метеора може налічуватися багато сотень точок, пропонується використовувати апроксимацію залежності $\Delta\varphi = f(\varphi_{GC})$ у вигляді функції косинуса з максимумом на широті 45° . Похибка через таку апроксимацію не перевищує 35 м ($1.12'$) у діапазоні висот $0 \dots 200$ км, чого достатньо при обробці спостережень метеорів, однак замало при розв'язку балістичних задач — у цьому випадку підбір апроксимаційних функцій має бути поглиблений та більш деталізований.

Роботу виконано в Астрономічній обсерваторії, на фізичному факультеті, на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в рамках фінансування Міністерства освіти і науки України:

- Держбюджетна тема № 22БФ023-02 «Діагностика пилу в активних малих тілах Сонячної системи та навколоземному космічному просторі»;
- Держбюджетна тема № 22БФ023-01 «Релятивістська гравітація, темна матерія і темна енергія в позагалактичних та космологічних об'єктах»;
- Держбюджетна тема № 22-БФ015-03 «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони»;
- В рамках виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напрямку «Математичні науки та природничі науки» Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

REFERENCES

1. Brown P. G., Assink J. D., Astiz L., and 30 more... (2013). A 500-kiloton airburst over Chelyabinsk and an enhanced hazard from small impactors. *Nature*, **503** (7475), 238–241.
2. Gural P. (2010). The California All-sky Meteor Surveillance (CAMS) System. *Proc. IMC*, Armagh, 28–31.
3. Jenniskens P., Gural P. S., Dynneson L., Grigsby B. J., Newman K. E., Borden M., Koop M., Holman D. (2011). CAMS: Cameras for Allsky Meteor Surveillance to establish minor meteor showers. *Icarus*, **216**, 40–61.
4. Kartashova A., Golubaev A., Mozgova A., Chuvashov I., Bolgova G., Glazachev D., Efremov V. (2020). Investigation of the Ozerki meteoroid parameters. *Planet. and Space Sci.*, **193**, ID. 105034.
5. Kozak P. M. (2002). Analysis of the methods and precision of determination of the equatorial coordinates in digital reducing of TV observations of meteors. *Kinematics and Phys. Celestial Bodies*, **18**(5), 471–480.
6. Kozak P. M. (2003). A vector method for the determination of trajectory parameters and heliocentric orbit elements of a meteor in TV observations. *Kinematics and Phys. Celestial Bodies*, **19** (1), 62–76.
7. Kozak P., Stariy S. (2021). Determination of equatorial coordinates of bolide from observations with stationary low-sensitive home guard video camera. *Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. Kyiv. Astron.*, **62** (2), 6–10.
8. Kozak P., Rozhilo O., Kruchynenko V., Kazantsev A., Taranukha A. (2007). Results of processing of Leonids-2002 meteor storm TV observations in Kyiv. *Adv. Space Res.*, **39** (4), 619–623.
9. Kozak P. M., Lapchuk V. P., Kozak L. V., Ivchenko V. M. (2018). Optimization of video camera disposition for the maximum calculation precision of coordinates of natural and artificial atmospheric objects in stereo observations. *Kinematics and Phys. Celestial Bodies*, **34** (6), 314–327.
10. Kozak P. M., Watanabe J. (2020). Meteors with extreme beginning heights from observations with high-sensitivity super-isocon TV systems. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, **497** (4), 5550–5559.
11. Kozak P.M., Watanabe J. (2017). Upward-moving low-light meteor. I. Observation results. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, **467** (1), 793–801.
12. Kozak P. M., Zlochevskiy Y. E., Kozak L. V., Stariy S. V. (2021). Problems of videorecords processing of bright bolides and falling space vehicle remnants detected with the low-sensitive home video cameras in bad observational conditions. *Space Sci. and Technol.*, **27** (6), 85–97.
13. Moritz H. (1979). Fundamental geodetic constant. *Proc. of the IAG XVII Gen. Assamb. IUGG/IAG.* — Canberra, 34 p.
14. Serapinas B. B. (2001). *Geodetic bases of maps: Tutorial*. Publ. Moscow State Univ. 133 p.

Стаття надійшла до редакції 26.11.2022

Після доопрацювання 02.08.2023

Прийнято до друку 15.08.2023

Received 26.11.2022

Revised 02.08.2023

Accepted 15.08.2023

*P. M. Kozak*¹, Senior Researcher, Ph.D. in Phys&Math
E-mail: kpm@knu.ua

*I. V. Luk'yanyk*¹, Senior Researcher, Ph.D. in Phys&Math
E-mail: iluk@knu.ua

*L. V. Kozak*², Associate Professor, Ph.D. in Phys&Math
kozakliudmyla@knu.ua

*O. B. Stelya*³, Senior Researcher, Ph.D. in Phys&Math
E-mail: oleg.stelya@gmail.com

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, Astronomical Observatory
3 Observatorna Str., Kyiv, 04053 Ukraine

² Taras Shevchenko National University of Kyiv, Faculty of Physics
4 Glushkova Ave., Kyiv, 03680 Ukraine

³ Taras Shevchenko National University of Kyiv, Faculty of Computer Sciences and Cybernetics
4d Glushkova Ave., Kyiv, 02000 Ukraine

IMPROVING THE USE OF GEODETIC, GEOCENTRIC, AND TOPOCENTRIC COORDINATE SYSTEMS IN METEOR ASTRONOMY AND RELATED TASKS

The problem of using the geodetic, geocentric, and topocentric coordinate systems in video observations' processing of meteors and other dynamical objects in Earth's atmosphere is considered. For meteor heights in a range of 0...200 km and arbitrary Earth's ellipsoid latitudes, the following values are calculated: the difference between geodetic and geocentric latitudes, the meridian arc length corresponding to this shift, and the difference between geocentric and geodetic altitudes above the Earth's ellipsoid. The carried-out calculations allowed us to conclude that the geocentric coordinate system is optimal for the calculation of kinematic parameters of meteors and trajectory measurements of ballistic objects at all-range altitudes and long distances between observation points without using horizontal coordinate systems as intermediate ones. This coordinate system is also used in the computation of heliocentric orbit elements of meteoroids.

It is noted that the transition from the geocentric to the geodetic coordinate system is necessary for mapping the projections of the meteor trajectory to search for their remnants — meteorites. The reason is related to the difference between them, which can reach 11 arcmin for objects located at an altitude of 100 km above the level of the Earth's ellipsoid, which corresponds to the shift of 21 km. The difference between geocentric and geodetic altitudes is inessential and amounts to half a meter at an altitude of 100 km and slightly more than one meter at 200 km and can be neglected in meteor calculations and most ballistic tasks. These considerations formed the basis for our proposed alternative vector method for the inverse transition from geocentric to geodetic coordinates and the numerical solution of the corresponding equation. In order to decrease the calculation time for mass processing, it is recommended to change the numerical processing of the inverse task by fitting it with elementary functions. An example of fitting is given. It brings to the maximal deviation in latitude near one arcmin, which corresponds to approximately 35 meters. It is noted that such precision is satisfactory for meteor measurements, but for ballistic problems, the accuracy of fitting must be improved.

Keywords: meteor, video observations of meteors, meteor height calculation, meteor trajectory projection onto the Earth map, geodetic coordinate system, geocentric coordinate system, calculation precision for kinematic parameters of meteors.