

<https://doi.org/10.15407/knit2023.04.012>

УДК 519.245: 539.196.3: 533.(17+5+72)

**Л. Л. ПЕЧЕРИЦЯ**, старш. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.

ORCID <https://orcid.org/0000-0001-5896-1531>

E-mail: [larisa.peche@gmail.com](mailto:larisa.peche@gmail.com)

**Т. Г. СМІЛА**, наук. співроб.

ORCID <https://orcid.org/0009-0002-9584-227X>

E-mail: [tsmila68@gmail.com](mailto:tsmila68@gmail.com)

Інститут технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України  
вул. Лешка-Попеля 15, Дніпро, Україна, 49005

## ЗАСТОСУВАННЯ СТАТИСТИЧНОГО МЕТОДУ ПРОБНИХ ЧАСТИНОК ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗРІДЖЕНИХ СТРУМИННИХ ТЕЧІЙ У ВАКУУМІ

*У статті обґрунтовано важливу роль проблеми витоку надзвукового струменя у вакуумі в задачах керування рухом центра мас, орієнтації та стабілізації положення космічних літальних апаратів в просторі. Розглянуто види двигунів малої тяги та мікроракетних двигунів, струмені з яких можуть проходити всі режими від суцільного до вільномолекулярного. В зонах, де рух описується на молекулярно-кінетичному рівні, найчастіше використовуються статистичні методи. Статистичний метод пробних частинок (МПЧ) досі застосовувався тільки у розріджених однорідних потоках. Метою даної роботи є розвиток МПЧ для чисельного моделювання струминних течій. Нижче наведено основні положення МПЧ та необхідні зміни його алгоритму.*

*Початковий розіграш траєкторій молекул здійснюється або зі зрізу сопла (при відсутності щільного ядра) або з початкової поверхні, яка є умовною межею зони суцільності. Визначення розподілів по поверхні розіграшу координат старту та масової швидкості струминного потоку є визначальними для отримання адекватних результатів. Серед розглянутих варіантів старту найбільш реалістичним є нерівномірний зі згупченням на осі струменя. Розрахунок масової швидкості струминного потоку на початковій поверхні може здійснюватися за допомогою чисельних методів континуальної аеродинаміки, або за допомогою наближених методів.*

*Тестування МПЧ у дальньому полі розрідженого азотного струменя здійснювалося шляхом порівняння розподілу відносно щільності з даними наближеного методу. Результати, отримані при наявності початкової сфери і при її відсутності, узгоджуються між собою. Тестування МПЧ у прилеглий до сопла зоні здійснювалося шляхом порівняння ізольованої відносно щільності та чисел Маха з результатами прямого моделювання Монте-Карло для умов експерименту витоку гелію з двигуна малої тяги у вакуум. Отримано задовільну відповідність даних чисельного моделювання МПЧ з порівнювальними даними.*

**Ключові слова:** рівняння Больцмана, динаміка розрідженого газу, струминна течія, статистичне моделювання, метод пробних частинок, чисельні розрахунки, вільномолекулярний та перехідний режими, газодинамічні параметри.

### РЕЖИМИ, ЩО РЕАЛІЗУЮТЬСЯ У ПОЛІ ТЕЧІЇ НАДЗВУКОВОГО ГАЗОВОГО СТРУМЕНЯ

Витікання надзвукового струменя у вакуум — це граничний випадок недорозширеного струминного потоку. Залежно від умов витікання у полі

течії можна виділити три області, плинні в яких підкоряються суттєво різним законам:

- осьову область (початкову ділянку струменя), обмежену зрізом сопла та першими характеристиками, яка є продовженням течії в соплі;

Цитування: Печериця Л. Л., Сміла Т. Г. Застосування статистичного методу пробних частинок для моделювання розріджених струминних течій у вакуумі. *Космічна наука і технологія*. 2023. **29**, № 4 (143). С. 12–23. <https://doi.org/10.15407/knit2023.04.012>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2023. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

- осьову область після перших характеристик, яка у першому наближенні носить характер розширення в надзвуковому джерелі;

- область над соплом між першими характеристиками і прямолінійною межею струменя, яка є течією розрідження і відповідає числу Маха  $M \rightarrow \infty$ .

Струмені, що витікають із надзвукових сопел у вакуум, утворюють досить чітко виражений клас струминних течій з низкою властивих цьому класу особливостей. Задача про встановлене надзвукове витікання струменя ідеального досконалого газу у порожнечу є задачею Коші для системи рівнянь Ейлера, які описують стаціонарний ізентропічний рух. Початковими умовами задачі є параметри на зрізі сопла. Течія у струмені однозначно визначається профілями числа Маха та куту нахилу вектора швидкості до осі симетрії, а також значенням показника адіабати на зрізі сопла. Аналітичного розв'язку такої задачі немає. Існуючі розв'язки були отримані чисельними методами, а експериментальні дослідження подібних течій досить складні.

При віддаленні від зрізу сопла внаслідок розширення газу й падіння щільності довжини вільного пробігу молекул стають сумірними з характерними розмірами течії, тобто відбувається порушення суцільності течії та істотний вплив починають проявляти ефекти розрідженості. У цих умовах методи та моделі суцільного середовища (рівняння Ейлера і Нав'є — Стокса) не можна використовувати для опису всього поля течії. В областях, що відповідають перехідному (за числом Кнудсена), а тим більше вільномолекулярному режимам течії, необхідно застосувати кінетичну теорію. У даний час кращими методами розв'язку задач подібного типу у молекулярній газовій динаміці визнано методи статистичного моделювання Монте-Карло.

Для характеристики ступеня розрідженості на початковій ділянці надзвукового струменя використовується число Кнудсена  $Kn_a = l_a/d_a$ , де  $l_a$  — середня довжина вільного пробігу на зрізі сопла,  $d_a$  — діаметр зрізу сопла [5].

При  $Kn_a < 10^{-2}$  реалізується витікання із сопла в континуальному режимі, а на початковій осьовій ділянці наявна яскраво виражена зона

континуальної течії. При  $10^{-2} < Kn_a < 10^{-1}$  має місце течія з ковзанням. У випадку  $10^{-1} < Kn_a < 1$  реалізується перехідний режим витікання, при  $1 < Kn_a < 10$  — майже вільномолекулярний, а при  $Kn_a > 10$  — вільномолекулярний. Такий поділ достатньо умовний, але дає можливість оцінки застосовності статистичних методів як до струминної течії в цілому, так і до її окремих ділянок.

Числам  $Kn_a > 1$  відповідають умови поширення молекулярних пучків у розрідженому середовищі, коли молекули навколишнього середовища вільно проникають у сопло. Зона розрідження починається безпосередньо від зрізу сопла, тому статистичне моделювання можна виконувати у всій області течії струминного потоку.

Найбільш затребуваними статистичними методами є пряме моделювання Монте-Карло (ПММК), розвинуте для однорідного і струминного потоків, і метод пробних частинок (МПЧ), який досі використовувався тільки у однорідному потоці. Як показала практика реалізації цих методів в інтервалі чисел Кнудсена  $10^{-1} < Kn_a < 1$ , струминну течію також можна моделювати статистично, чого не скажеш про течію з ковзанням. У інтервалі чисел Кнудсена  $10^{-2} < Kn_a < 10^{-1}$  методи розрідженої газової динаміки використовувати небажано, оскільки вони починають давати істотні похибки. При  $Kn_a < 10^{-2}$  за зрізом є щільне ядро струменя, на якому, як на газовій мішені, розсіюються частинки навколишнього середовища. Для чисельного моделювання в цьому разі застосовні методи суцільносередовищної аеродинаміки.

#### АКТУАЛЬНІСТЬ ДОСЛІДЖЕНЬ ГАЗОВИХ СТРУМЕНІВ ВІД БОРТОВИХ ДВИГУННИХ УСТАНОВОК ТА МЕТОДИ ЇХНЬОГО РОЗРАХУНКУ

Проблема витікання надзвукового струменя у вакуум відіграє важливу роль у задачах керування рухом центра мас космічних літальних апаратів, де для розгону та гальмування КА використовуються рухові системи. Такі системи можуть працювати на різних фізичних принципах, і їхня номенклатура дуже різноманітна. Для створення тяги можна використати енергію «сонячного вітрила», «ізотопного вітрила», стиснутого газу (звичайно азот або гелій), розкладання речови-

ни, горіння рідкого або твердого палива, електричну енергію (електричний ракетний двигун) тощо. Однак їхнє включення проводиться тільки після того, як КА буде орієнтовано відповідним чином у просторі та забезпечено його стабілізацію, щоб вектор тяги двигунної установки було спрямовано у потрібному напрямку.

На сучасних КА (дослідницьких, зв'язкових та навігаційних супутниках Землі, транспортних та пілотованих КА, довготривалих орбітальних станціях, багаторазових повітряно-космічних системах, міжорбітальних буксирах та ін.) для цілей орієнтації та стабілізації положення у просторі використовуються двигуни корекції та стабілізації системи керування, які здатні створювати керівні зусилля й у такий спосіб парировати практично будь-які збурення. Кількість двигунів системи керування може досягати декількох десятків, а їхня тяга залежно від призначення, розмірів і маси КА може змінюватися в широких межах. Для реалізації керування (головним чином корекції орбіти) застосовуються ракетні двигуни малої тяги (ДМТ) з тягою до 10 Н. Сумарний імпульс тяги двигунних установок може сягати рівня  $5 \cdot 10^4$  Н·с.

Актуальність досліджень газових струменів від двигунів керування пов'язана із проблемою оцінки впливу струменів бортових ракетних двигунів КА на елементи їхньої конструкції та бортову апаратуру. У загальному випадку вплив струменів бортових двигунних установок (ДУ) на КА зводиться до силового (локальні сили навантаження, сумарні збурювальні сили та моменти), теплового (локальні та сумарні теплові навантаження) і фізико-хімічного (зміна властивостей поверхонь, що омиваються струменями) впливу, а також впливу на роботу бортової апаратури (оптичної, радіотехнічної та ін.). У такій самій послідовності, як правило, зростає складність задачі розрахунків параметрів, що визначають вказані види впливу.

Останнім часом суттєво зростає інтерес до дослідження функціонування сопел газових ДМТ і мікроракетних двигунів (МРД), що пов'язано з розширенням застосування КА з малими та дуже малими масами. Відсутність в складі малих і надмалих КА активних систем керування сут-

тєво обмежує терміни функціонування апаратів на орбіті та їхні потенційні можливості. Розробка ефективних і надійних ДМТ і МРД для ОРКТ нового покоління, що працюють у безперервних та імпульсних режимах з високими динамічними та енергетичними параметрами, є перспективним, але досить складним науково-технічним завданням.

Для керування КА малої маси потрібні бортові ДУ малої та особливо малої тяги. Залежно від функціонального призначення КА та вимог до енергетичних характеристик реактивної системи керування (абсолютна тяга, повний імпульс, число включень) для МРД використовують різні види палива. Для реактивних систем з тягою менше 5 Н і повним імпульсом менше  $10^4$  Н·с ефективними є системи, що працюють на зрідженому газі. У системах на холодному газі застосовують водень, азот, аргон, аміак, що забезпечує питомий імпульс у межах від 500 до 700 м/с. При тому ж рівні тяги (до 5 Н), але суттєво більшому повному імпульсі вигідніше застосувати електрореактивні двигуни, зокрема газові електротермічні МРД. При тязі понад 5 Н перевага віддається системам на рідкому одно- та двокомпонентному паливі [2, 6, 7]. Докладний аналіз застосування ДУ та ракетних ДМТ на різних фізичних принципах у складі КА малого та надмалого класів приведено в роботі [10].

Слід зазначити, що важливість дослідження розглянутого класу струминних течій не обмежується зазначеною прикладною областю. Можна вказати цілий ряд інших важливих застосувань: струминні вакуумні технології, газодинамічні лазери, формування мішеней для молекулярних пучків і т. п.

Витікання струменів з ДУ в навколишнє розріджене середовище супроводжується інтенсивним розширенням, і в загальному випадку носить суттєво нерівноважний характер. Для КА на висотах понад 200 км при розв'язанні задачі витікання можна не враховувати вплив навколишнього середовища та вважати, що витікання відбувається у вакуум. Течія може проходити всі режими від суцільного (ламінарного) у камері сопла до вільномолекулярного у струмені на великій відстані від зрізу сопла.

Незважаючи на різноманітність використуваних систем керування ДУ та ДМТ, більша частина струминних потоків з них має щільне ядро поблизу зрізу сопла. Однак є й такі, зокрема МРД, струмені яких уже на початковій ділянці є розрідженими або ж витікання відбувається у перехідному режимі ( $Kn_a > 10^{-1}$ ).

Задачі витікання струменів у вакуум при наявності щільного ядра, як правило, вирішуються методом характеристик. Реалізація такого розв'язку досить трудомістка, тому в інженерній практиці нерідко використовуються наближені моделі, які по-різному відповідають чисельному або фізичному експериментам і тією чи іншою мірою враховують ефекти в'язкості [8, 15] тощо.

Основна маса газу й імпульс струменя зосереджені в центральному ядрі, де течія є ідеальною, а ефекти в'язкості проявляються у периферійній зоні. Областю застосовності наближених моделей є дальнє поле струменя вниз по потоку від границі суцільності [16], де швидкість течії збільшується та наближається до свого найбільшого значення  $V_{\max} = \sqrt{2\gamma R_{\text{газ}} T_0 / (\gamma - 1)}$  (тут  $\gamma$  — показник адиабати,  $R_{\text{газ}}$  — газова постійна,  $T_0$  — температура гальмування), а лінії струму прямолінійні. У зоні, де плин можливо моделювати точковим джерелом, розташованим у центрі зрізу сопла, відношення радіуса струменя  $r$  до радіуса зрізу сопла  $r_a$  повинно задовольняти умову  $r/r_a \geq 10$  [13].

За час розвитку комп'ютерних технологій одними з найбільш поширених стали статистичні методи розв'язання основного рівняння кінетичної теорії розріджених газів (інтегро-диференціального рівняння Больцмана [3]). Застосування статистичних методів коректне тільки у тих зонах, рух в яких можливо описати на молекулярно-кінетичному рівні. Тому у всій області течії струминного потоку статистичні методи можуть використовуватися у випадку відсутності щільного ядра. При наявності зони континуального плин указані методи застосовуються виключно в дальньому розрідженому полі течії. Зокрема, в роботі [12] наведено численні експериментальні та чисельні дослідження статистичним методом газодинаміки ПММК витікання гелію із сопла МРД у вакуум. Іншим статистичним методом

чисельного моделювання стаціонарного витoku однофазного розрідженого струминного потоку у вакуум може бути МПЧ [9], який було розроблено раніше для обтікання перешкод однорідним потоком розрідженого газу, і який тепер слід розвинути для чисельного розрахунку впливу струминних потоків на газодинамічні параметри навколо обтічного тіла та визначення аеродинамічних навантажень на перешкоду та її елементи.

Докладно алгоритм МПЧ у випадку обтікання однорідним потоком було описано в ряді робіт, перелік яких наведено в роботі [1]. Нижче наведено основні положення МПЧ та зміни алгоритму, необхідні для розрахунку струминних течій.

#### АЛГОРИТМ СТАТИСТИЧНОГО МЕТОДУ ПРОБНИХ ЧАСТИНОК ДЛЯ РОЗРАХУНКУ РОЗРІДЖЕНИХ СТРУМИННИХ ТЕЧІЙ

Метод пробних частинок використовує методику статистичного моделювання блукань пробних частинок на тлі польових. Визначення розподілу щільності, числа Маха та температури у полі течії розрідженого струминного потоку у МПЧ здійснюється через осереднення накопичених моментів функції розподілу молекул в розрахункових комірках у процесі стеження за траєкторіями молекул. Молекули газу у МПЧ можуть бути одно-, дво- або триатомними, що регулюється відповідними газовими характеристиками, а саме: молекулярною масою, діаметром ефективного перерізу молекул, показником адиабати і газовою постійною. Частинки (молекули), що моделюють рух газу, поділяються на два види: пробні і польові. Характеристики руху пробних частинок (ПЧ) розігруються в ході чисельного експерименту відповідно до статистичних законів, а характеристики польових частинок визначаються газодинамічними параметрами у полі течії струменя.

Моделювання струминного потоку і обтікання перешкоди складної геометричної форми здійснюється у тривимірній постановці. У обсязі фізичного простору, що моделюється, виділяється розрахункова область (РО), побудована таким чином, щоб вона охоплювала зріз сопла, з якого витікає струминний потік, обтічне тіло і зони збурення ГДП в його околиці. Форму РО

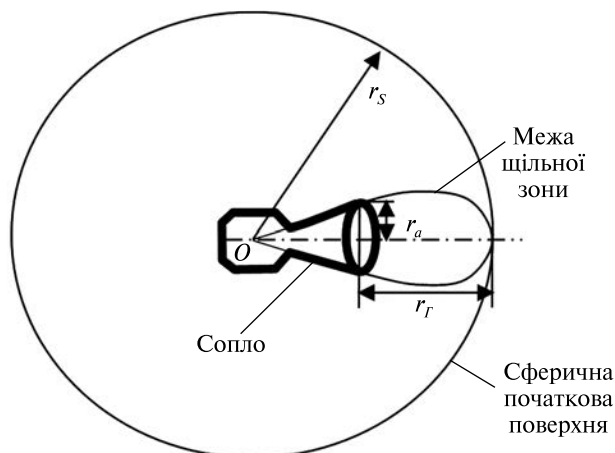


Рис. 1. Початкова поверхня сферичної форми

зручно задавати у вигляді прямокутного паралелепіпеда з осями, напрямленими вздовж його ребер. У системі координат паралелепіпеда задається розташування центру зрізу сопла та орієнтація осі струменя за допомогою кутів атаки і ковзання.

Початковий розіграш траєкторій ПЧ в залежності від наявності щільного ядра при витoku струминного потоку здійснюється або зі зрізу сопла (при відсутності щільного ядра) або з початкової поверхні (при наявності щільного ядра). За початкову поверхню зручно використовувати сферу (або півсферу) з центром  $O$  у точці перетину твірної конусної поверхні сопла та радіусом  $r_s$ , що дорівнює відстані від її центра до крайньої точки щільної зони вздовж осі струменя (рис. 1, де  $r_r$  — розмір щільного ядра вздовж осі струменя,  $r_a$  — радіус зрізу сопла).

Траєкторія кожної пробної частинки починається зі вльоту в РО та закінчується вильотом за її межі. Умови вльоту молекул в РО зі зрізу сопла повинні відповідати газодинамічним параметрам надзвукового витoku з ДУ. Умови старту молекул зі сферичної початкової поверхні розраховуються за допомогою чисельних методів аеродинаміки, що вирішують задачу витoku струминного потоку при малих числах Кнудсена, або за допомогою наближених методів визначення параметрів струминного потоку на достатній відстані від зрізу сопла.

Для стеження за траєкторіями ПЧ модельований обсяг фізичного простору розбивається на розрахункові комірки. Такими комірками є малі об'єми з заданими межами. Для коректного застосування МПЧ лінійні розміри комірок вибирають в залежності від режиму обтікання таким чином, щоб вони по можливості були сумірними з мінімальною місцевою довжиною вільного пробігу молекул. Розподіл ГДП по комірках РО визначається макропараметрами польових частинок, причому всередині кожної комірки розподіл ГДП вважається однорідним.

Процес випадкових блукань ПЧ в РО передбачає реалізацію таких подій: старт пробної частинки відповідно до початкової функції розподілу за швидкостями; вільний проліт комірки; зіткнення ПЧ з польовими частинками для обраного потенціалу взаємодії; потрапляння ПЧ на поверхню обтічного тіла і відбиття від нього відповідно до обраної функції взаємодії (нижче наведені формули для дифузної схеми відбиття); обрив траєкторії пробної частинки при досягненні меж РО.

Процес спостереження за ПЧ супроводжується накопиченням сумарних характеристик (відповідних моментів функції розподілу), необхідних для розрахунку ГДП в комірках області, а також сумарних характеристик силової дії струминного потоку на перешкоду, включно з розподіленими по її поверхні аеродинамічними навантаженнями. Накопичені в комірках сумарні моменти функції розподілу надалі усереднюються за кількістю розіграшів траєкторій (статистичних випробувань) та сумарним часом перебування частинок в комірках.

Траєкторії всіх пробних частинок починаються зі зрізу сопла або з початкової сферичної поверхні. Координати старту  $j$ -ї частинки зі зрізу сопла розігруються у полярній системі координат, пов'язаній зі зрізом. При старті пробної частинки розігрується модуль і напрямок початкової швидкості  $\xi$  її хаотичного руху, які залежать від розподілу масової швидкості  $\bar{V}_a$  струминного потоку по зрізу сопла. Можливі декілька розрахункових варіантів:

- масова швидкість у кожній  $j$ -й точці зрізу сопла є постійною та дорівнює швидкості струме-

ня на зрізі:  $\vec{V}_{a_j} = \vec{V}_a$ , що не враховує кут піврозхилю сопла та витягує струминний потік вздовж його осі;

- радіальний розподіл масової швидкості  $\vec{V}_{a_j}$  по зрізу сопла отримано в результаті попередніх розрахунків течії всередині сопла, що потребує залучення додаткових розрахунків, є найбільш реалістичним і враховує нерівномірність розподілу напрямку та модуля швидкості на виході з сопла;

- швидкість  $\vec{V}_{a_j}$  спрямована по радіусу-вектору  $\vec{r}_s$  (рис. 1), а її модуль дорівнює швидкості струменя на зрізі ( $V_{a_j} = V_a$ ). Цей підхід враховує геометрію сопла, нерівномірність розподілу напрямку швидкості і є наразі найбільш практичним варіантом.

При розіграші траєкторій з початкової поверхні координати старту для  $j$ -ї частинки у пов'язаній з поверхнею сферичній системі визначаються через радіальну відстань  $r_j = r_s$  та два кути: зенітний  $\alpha_j$  ( $0 \leq \alpha \leq \varphi_a$ , де  $\varphi_a$  — кут піврозхилю сопла у його кінцевій частині) і азимутальний  $\beta_j$  ( $0 \leq \beta \leq 360^\circ$ ). Умови старту молекул зі сферичної початкової поверхні розраховуються за допомогою методу характеристик або інших чисельних методів аеродинаміки, що вирішують задачу витоку струминного потоку при малих числах Кнудсена. Кут піврозхилю сопла витоку враховується автоматично через розподіл параметрів на початковій сфері.

Оскільки початкова поверхня розташована на достатньо великій відстані від зрізу сопла, то у ролі деякого наближення можна вважати, що масова швидкість молекул  $\vec{V}_{a_j}$  спрямована по радіусу-вектору  $\vec{R}_s$  розрахункової точки та дорівнює максимальній термодинамічній швидкості  $V_{\max}$ . В цьому випадку розіграш координат старту слід провадити по сферичному сегменту, який відтинає кут піврозхилю сопла від сферичної початкової поверхні. Таке спрощення дозволяє враховувати кут піврозхилю сопла, але не враховує нерівномірність розподілу швидкості на початковій сфері. Оскільки напрямки і значення швидкості при старті молекул є визначальними при чисельному моделюванні МПЧ, тому такий підхід може вносити похибки при подальшому визначенні газодинамічних параметрів у полі

течії струменя та силових навантажень на тіло, розташоване в ньому.

Швидкість старту  $\vec{\xi}$  пробної частинки обчислюється у місцевій швидкісній системі координат точки старту (вісь  $x$  якої напрямлена по масовій швидкості  $\vec{V}_{a_j}$ ) як реалізація випадкового вектора з щільністю та імовірністю пропорційними функції  $S_j f_a(\vec{\xi})$ . Безрозмірний швидкісний параметр  $\bar{S}_j$  для  $j$ -ї траєкторії в точці старту визначається зі співвідношення

$$\bar{S}_j = \frac{\vec{V}_a}{\sqrt{2R_{газ}T_a}},$$

де  $T_a$  — температура на виході сопла,  $f_a(\vec{\xi})$  — функція розподілу Максвелла.

Алгоритм чисельного моделювання траєкторій руху частинок та їхніх швидкостей після зіткнення та відбиття частинки від перешкоди, а також розрахунок газодинамічних параметрів у полі течії і аеродинамічних характеристик об'єкта у випадку струминного потоку є аналогічним алгоритму МПЧ, розробленому для задачі натікання на тіло однорідного потоку.

Для визначення довжини щільного ядра  $r_\Gamma$  можна використовувати формулу для кордонів суцільності течії у приосьовій зоні струменя [11]. Залежність осьового розміру щільного ядра струменя азоту від  $\rho_a$  для різних значень  $M_a$  при фіксованих  $r_a = 2.5$  см і  $\omega = 0.6$  продемонстровано на рис. 2. Як видно, збільшення щільності і числа Маха на зрізі сопла призводять до роз-

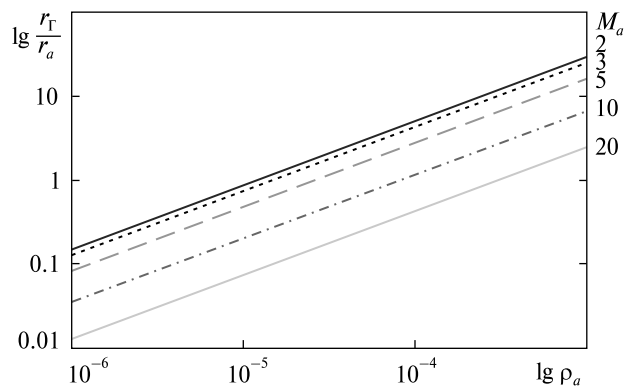


Рис. 2. Залежність довжини зони суцільності в струмені азоту від щільності  $\rho_a$  для різних значень числа Маха  $M_a$  на зрізі сопла

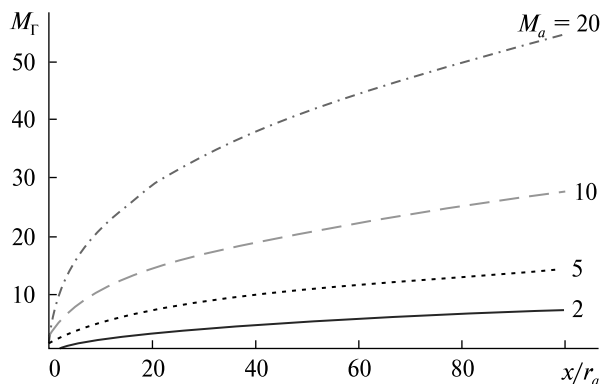


Рис. 3. Розподіл чисел Маха  $M_{\Gamma}$  вздовж осі струменя азоту для різних значень чисел Маха  $M_a$  на зрізі сопла

ширення континуальної зони вздовж потоку та необхідності відповідного збільшення розмірів початкової поверхні.

Оскільки статистичний МПЧ побудовано на розіграші старту та подальшому стеженні за траєкторіями пробних молекул, то розподіл масової швидкості струминного потоку по поверхні розіграшу є визначальним для розрахунку параметрів у полі течії струминного потоку. Від значення та напрямку вектора масової швидкості на початковій поверхні залежать результати розіграшу модуля та напрямків швидкостей хаотичного руху пробних молекул у момент їхнього старту. Розрахунок масової швидкості струминного потоку на початковій поверхні може здійснюватися за допомогою чисельних методів суцільносередовищної аеродинаміки, або за допомогою наближених методів.

Якщо струминний потік є розрідженим, і розіграш траєкторій молекул ведеться зі зрізу сопла, то модуль  $V_a$  масової швидкості в точці старту визначається умовами витoku:  $V_a = M_a \sqrt{\gamma R T_a}$ .

У випадку наявності щільного ядра розіграш ведеться з початкової поверхні, розташованої на відстані від зрізу сопла. Вплив полярного кута  $\theta$  на розподіл чисел Маха у полі струменя проявляється в основному біля зрізу сопла, а далі вздовж потоку він стає незначним. Тому на початковій поверхні можна вважати число Маха  $M_{\Gamma}$  постійним і рівним його значенню на осі струменя [11]. На рис. 3 наведено приклад залежності  $M_{\Gamma}$  струменя азоту від відстані до зрізу сопла  $x/r_a$  для різних значень  $M_a$ .

Модуль швидкості  $V_{\Gamma}$  на початковій поверхні є функцією  $\gamma$ ,  $M_a$ ,  $x/r_a$ ,  $R$ ,  $T_0$  та виражається через число Маха  $M_{\Gamma}$  наступним чином:

$$V_{\Gamma} = M_{\Gamma} \sqrt{\gamma R T_0} \cdot \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\Gamma}^2 \right)^{-1/2}.$$

При віддаленні від зрізу сопла величина  $V_{\Gamma}$  наближається до свого граничного значення  $V_{\max} = \sqrt{2\gamma R T_0 / (\gamma - 1)}$  — тобто до максимальної термодинамічної швидкості.

Напрямки масової швидкості в точках старту молекул залежать від кута піврозхилу сопла і формують геометрію отриманого струминного потоку. Для автоматичного врахування кута піврозхилу сопла логічно направити масову швидкість по радіусу-вектору, проведеному з вершини  $O$  твірної конусної поверхні сопла до точки старту (рис. 1). Такий підхід можливий при старті як зі зрізу сопла, так і зі сферичної початкової поверхні. В останньому випадку траєкторії розігруються тільки з сегмента початкової поверхні, який видно з точки  $O$  крізь отвір сопла.

Крім модуля та напрямку масової швидкості потоку значний вплив на результати розрахунку має визначення координат старту молекул. Вибір правильного розподілу координат старту по поверхні розіграшу є необхідною умовою для отримання задовільних результатів. Було розглянуто декілька можливих варіантів, серед яких найбільш реалістичним є нерівномірний розподіл точок старту зі зростанням на осі струменя. При старті молекул зі зрізу сопла він забезпечується рівномірним розподілом полярних координат: кутової координати  $\varphi$  в інтервалі  $[0; 2\pi]$  і радіальної  $r$  в інтервалі  $[0; r_a]$ :  $\varphi = 2\pi R_i$ ;  $r = r_a \cdot R_i$ . Тут і далі  $R_i$  — випадкові числа ( $0 < R_i < 1$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots$ ). У разі початку траєкторій з сегменту сферичної поверхні — рівномірним розіграшем у сферичній системі координат зенітного кута  $\alpha$  і азимутального кута  $\beta$  у діапазонах  $0 \leq \alpha \leq \varphi_a$  ( $\varphi_a$  — кут піврозхилу сопла) і  $0 \leq \beta \leq 360^\circ$  за формулами  $\alpha = \varphi_a R_i$  і  $\beta = 2\pi R_i$ .

#### ТЕСТОВІ РОЗРАХУНКИ МЕТОДОМ ПРОБНИХ ЧАСТИНОК

Тестування результатів МПЧ-розрахунку ГДП струминного потоку в дальньому полі течії мож-

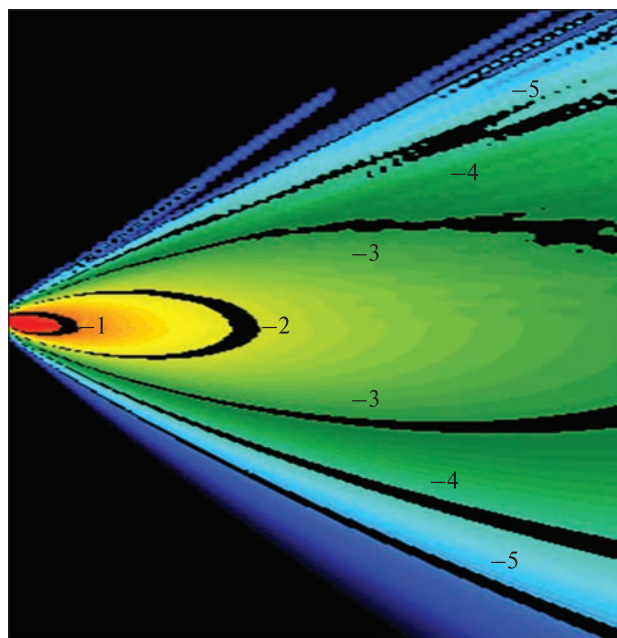


Рис. 4. Порівняння результатів МПЧ розподілу відносної щільності  $\lg \rho/\rho_a$  у дальньому полі азотного струменя з розрахунковими даними наближеного методу [14]: верхня півплощина — статистичний МПЧ; нижня півплощина — наближений метод

на здійснювати за допомогою порівняння з даними наближених методів, областю застосування яких є дальнє поле струменя при  $r/r_a > 10$ . Задовільний збіг розподілів відносної щільності  $\rho/\rho_a$ , отриманих у дальньому полі розрідженого азотного струменя за допомогою наближеного методу [14] у порівнянні з МПЧ (при старті молекул зі зрізу сопла), демонструє рис. 4.

Результати МПЧ, отримані при наявності початкової сфери, узгоджуються з даними, отриманими при її відсутності. На рис. 5 наведено розподіл щільності  $\rho/\rho_a$  у полі розрідженого струменя при старті молекул зі зрізу сопла та при старті молекул з початкової сфери різних радіусів. Шкалу значень  $\rho/\rho_a$  наведено зверху. Збільшення радіуса початкової поверхні погіршує цю відповідність. Причиною цього є те, що при розрахунках значення модуля масової швидкості на початковій поверхні дорівнювали швидкості на зрізі сопла, що не відповідає дійсності. Для отримання адекватних результатів у випадку використання початкової сфери великого раді-

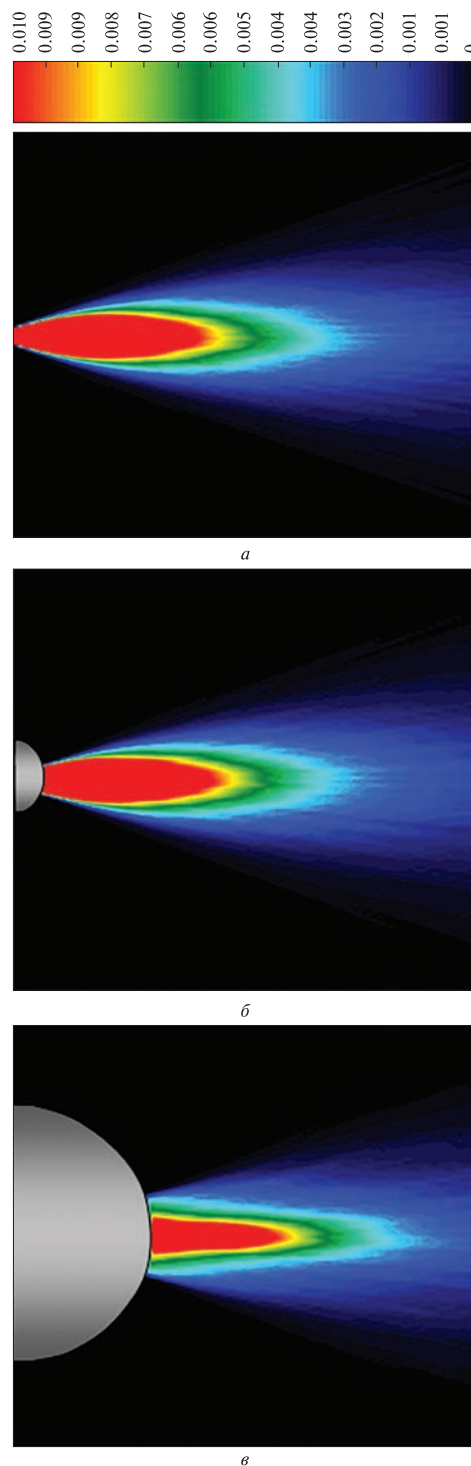
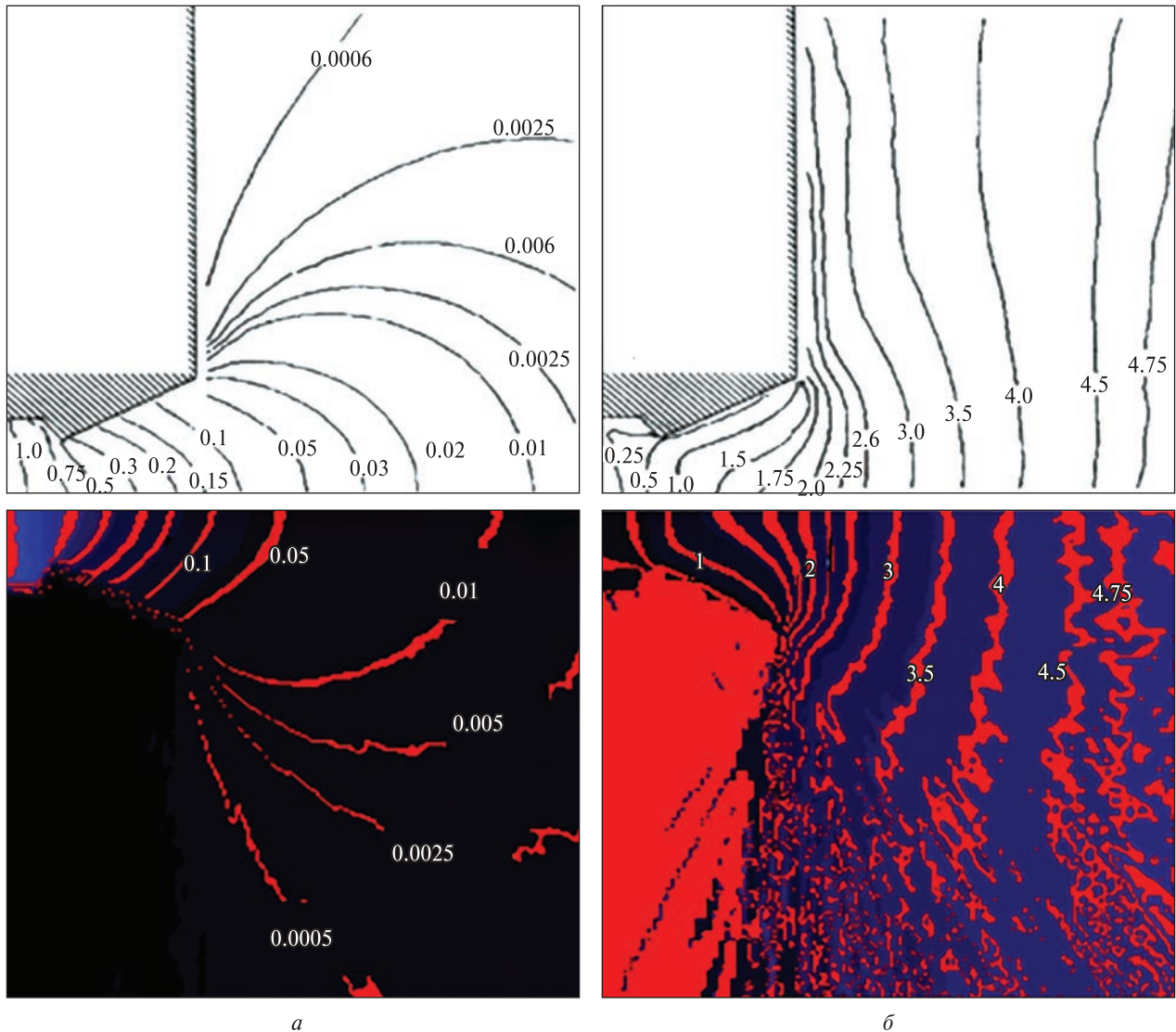


Рис. 5. Розподіл щільності  $\rho/\rho_a$  у полі розрідженого струменя: а — при старті молекул зі зрізу сопла, б і в — при старті молекул з початкової сфери різних радіусів  $r_s$  (б —  $r_s = 12r_a$ , в —  $r_s = 40r_a$ )





**Рис. 6.** Порівняння ізоліній розподілу газодинамічних параметрів при витоку струменя з двигуна малої тяги для МПЧ (нижня півплощина) і ПММК (верхня півплощина): *a* — відносної щільності  $\rho/\rho_\Gamma$ , *б* — чисел Маха  $M$

уса потрібно мати на ній точний (наскільки це можливо) розподіл вектора масової швидкості струминного потоку, який можна отримати за допомогою розв'язання рівнянь газової динаміки при малих числах Кнудсена. Тоді проблема визначення координат старту молекул вирішується автоматично: старт молекул з початкової півсфери здійснюється пропорційно розподілу потоку маси газу її поверхні.

Зауважимо, що шкали значень відносної щільності і умови розрахунків, дані яких наведено на

рис. 4 і 5, однакові: на зрізі сопла число Маха  $M_a = 9.5$ , щільність  $\rho_a = 10^{-6}$  кг/м<sup>3</sup>, температура  $T_a = 48$  К. Розміри РО у поздовжньому та поперечному напрямках становили  $120r_a$ , а кількість статистичних випробувань —  $5 \cdot 10^5$ .

Тестування роботи програми у прилеглий до сопла зоні здійснювалося на задачі витоку струменя одноатомного газу (гелію) із сопла двигуна малої тяги у вакуум. Умови розрахунку відповідали експерименту [12], в якому моделюється внутрішня течія у соплі Лавала з подальшим роз-

ширенням струменя в навколишній простір. Розіграш траєкторій здійснювався з умовної межі Г всередині сопла при температурі  $T_{\Gamma} = 286$  К, щільності  $\rho_{\Gamma} = 7.12 \cdot 10^{-2}$  кг/м<sup>3</sup> та числі Маха  $M_{\Gamma} = 0.1156$  (швидкість витоку  $V_{\Gamma} = 115.2$  м/с) при обсязі статистичних випробувань  $10^7$ . Результати розрахунків у ближньому до зрізу сопла полі у тривимірній постановці порівнювалися з даними, отриманими в роботі [4] у осесиметричній постановці нестационарним методом ПММК, що дає розв'язок методом Берда для встановленої течії.

На рис. 6 наведено порівняння ізоліній відносної щільності  $\rho/\rho_{\Gamma}$  та чисел Маха  $M$ , отриманих МПЧ (нижня півплощина), з відповідними результатами ПММК [4] (верхня півплощина). Ізолінії будувалися в РО, яка охоплює зону всередині сопла і зону витоку за його межі.

Порівняння результатів, отриманих вказаними методами, показує їхню задовільну відповідність. Відмінності ізоліній зумовлені специфікою реалізації алгоритмів розглянутих методів, різними кількостями випробувань, формами і розмірами розрахункових комірок. Оскільки у осесиметричній постановці РО задається у вигляді циліндричного сектора з розбивкою по радіальному та осьовому напрямках та дзеркальним відбиттям молекул від бокових прямокутних граней РО, то статистичне розв'язання в такому разі має значно більшу статистику у периферійній зоні при значно меншому числі випробувань.

## ВИСНОВКИ

Розглянуто умови застосування статистичних методів розрахунку газових струминних потоків в залежності від режимів їхнього витікання з двигунів систем керування КА. Розроблено алгоритм чисельної реалізації МПЧ для розрахун-

ку впливу надзвукових струминних потоків від двигунів керування на газодинамічні умови навколо КА та визначення аеродинамічних навантажень на КА.

Проведено тестування розробленого алгоритму МПЧ шляхом порівняння отриманих результатів розрахунку ГДП у полі струминної течії з наявними чисельними даними за умови відсутності обтічної перешкоди. У дальньому полі струменя тестування провадилося шляхом порівняння отриманого розподілу щільності з результатами по наближеній формулі. У прилеглий до сопла зоні тестування відбувалося на задачі витоку струменя одноатомного газу (гелію) із сопла двигуна малої тяги у вакуум. Отримані поля щільності і чисел Маха порівнювалися з розрахунковими даними прямого моделювання Монте-Карло.

Порівняння результатів МПЧ з наявними чисельними даними показало їхню задовільну відповідність і дало можливість здійснити одночасну перевірку взаємозв'язаної роботи усіх модулів розробленого програмного забезпечення.

Зроблено висновок, що при використанні початкової сфери великого радіуса потрібно мати на ній розподіл вектора масової швидкості струминного потоку, отримати який можна за допомогою розв'язування рівнянь струминної газової динаміки для малих чисел Кнудсена. Наявність цього розподілу вирішить проблему визначення координат старту молекул по початковій поверхні та визначення напрямку масової швидкості в точках старту, які мають істотний вплив на результати розрахунку.

Наступним етапом роботи буде розвиток МПЧ для розрахунку впливу розріджених струминних потоків на газодинамічні умови навколо обтічних тіл та визначення аеродинамічних навантажень на їхню поверхню.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Басс В. П., Печерица Л. Л. Верификация методов и алгоритмов решения задач аэродинамики переходной области. *Техн. мех.* 2007. № 1. С. 49–61.
2. Беляев Н. М., Уваров Е. И. *Расчет и проектирование реактивных систем управления космических летательных аппаратов*. М.: Машиностроение, 1974. 200 с.
3. Больцман Л. *Лекции по теории газов*. М.: Гостехиздат, 1956. 554 с.
4. Гришин И. А., Захаров В. В., Лукьянов Г. А. *Параллелизация по данным прямого моделирования Монте-Карло в молекулярной газовой динамике*. С.-Петербург, 1998. 32 с.
5. Дулов В. Г., Лукьянов Г. А. *Газодинамика процессов истечения*. Новосибирск: Наука, 1984. 223 с.
6. *Космические аппараты*. Под ред. К. П. Феоктистова. М.: Воениздат, 1983. 319 с.
7. *Космические двигатели: состояние и перспективы*. Под ред. Л. Кейви. М.: Мир, 1988. 454 с.
8. Мейер Э., Хермел Дж., Роджерс А. В. Потеря тяги за счет взаимодействия выхлопной струи с элементами конструкций орбитального летательного аппарата. *Вестн. Пермского нац. исслед. политехн. ун-та. Аэрокосмич. техн.* 1987. № 8. С. 118–126.
9. Печерица Л. Л., Палий А. С. Применение метода пробных частиц к аэродинамическому расчету КА. *Техн. мех.* 2017. № 3. С. 53–63. <https://doi.org/10.15407/itm2017.03.053>
10. Рыжков В. В., Сулинов А. В. Двигательные установки и ракетные двигатели малой тяги на различных физических принципах для систем управления малых и сверхмалых космических аппаратов. *Вестн. Самарского ун-та. Аэрокосмич. техника, технология и машиностр.* 2018. 17, № 4. С. 115–128. doi: 10.18287/2541-7533-2018-17-4-115-128
11. Шувалов В. А., Левкович О. А., Кочубей Г. С. Приближенные модели истечения сверхзвуковой струи газа в вакуум. *Приклад. мех. и техн. физика*. 2001. 42, № 2. С. 237–242. <https://doi.org/10.1023/A:1018867601095>
12. Boyd I. D., Jafry Y. R., Beukel J. V. Particle simulation of Helium micro thruster flows. *J. Spacecraft and Rockets*. 1994. 31, № 2. P. 271–277.
13. Dettleff G., Doetcher R. D., Dankert C., et al. Attitude control thruster plume flow modelling and experiments. *J. Spacecraft and Rockets*. 1986. 23, № 5. P. 477–481.
14. Kovtun Y. V., Ozerov A. N., Skibenko E. I., Yuferov V. B. Choice of conditions for gas outflow in vacuum and configurations of a forming unit feeding a working substance into the plasma volume. *East Eur. J. Phys.* 2015. 2, № 2. P. 81–89. <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2015-2-09>
15. Roberts L., South J. C. Comments on exhaust flow field and surface impingement. *AIAA J.* 1964. 2, № 5. P. 971–973. <https://doi.org/10.2514/3.2443>
16. Stasenko A. L. Criteria for the determination of the “limits” of continuous flow in a freely expanding jet. *J. Engineering Phys.* 1969. 16. P. 5–9. <https://doi.org/10.1007/BF00835349>

## REFERENCES

1. Bass V. P., Pecheritsa L. L. (2007). Verification of methods and algorithms for the solution of problems of transition aerodynamics. *Technical Mechanics*, № 1, 49–61 [in Russian].
2. Belyaev N. M., Uvarov E. I. (1974). *Calculation and design of rocket control systems for space vehicles*. Moscow: Mashinostroenie, 200 p. [in Russian].
3. Boltzmann L. (1956). *Lecture on the Theory of Gases*. Moscow: Gostekhizdat, 554 p. [in Russian].
4. Grishin I. A., Zakharov V. V., Lukyanov G. A. (1998). *Paralleling with data of direct Monte-Carlo simulation for molecular gas dynamics*. St. Petersburg, 32 p. [in Russian].
5. Dulov V. G., Lukyanov G. A. (1984). *Gas Dynamics of Outflow Processes*. Novosibirsk: Nauka, 223 p. [in Russian].
6. Feoktistov K. P. (Ed.) (1983). *Spacecraft*. Moscow: Voensizdat, 319 p. [in Russian].
7. Keivy L. (Ed.) (1988). *Space Engines: State and Prospects*. Moscow: Mir, 454 p. [in Russian].
8. Mejer E., Hermel J., Rodgers A. V. (1987). Loss of thrust due to the interaction of the exhaust jet with constructional elements of an orbital flying vehicle. *Bull. PNRPU. Aerospace Engineering*, № 8, 118–126 [in Russian].
9. Pecheritsa L. L., Paliy O. S. (2017). Application of the method of probe particles to the aerodynamic calculation of spacecraft. *Technical Mechanics*, № 3, 53–63 [in Russian]. <https://doi.org/10.15407/itm2017.03.053>
10. Rizhkov V. V., Sulinov A. V. (2018). Propulsion systems and low-thrust rocket engines based on various physical principles for control systems of small and micro-spacecraft. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 17, № 4, 115–128 [in Russian]. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-4-115-128
11. Shuvalov V. A., Levkovich O. A., Kochubei G. S. (2001). Approximate models of exhaustion of a supersonic gas jet into vacuum. *J. Appl. Mechanics and Technical Phys.*, 42, № 2, 237–242 [in Russian]. <https://doi.org/10.1023/A:1018867601095>
12. Boyd I. D., Jafry Y. R., Beukel J. V. (1994). Particle simulation of Helium micro thruster flows. *J. Spacecraft and Rockets*, 31, № 2, 271–277.

13. Dettleff G., Doetcher R. D., Dankert C., et al. (1986). Attitude control thruster plume flow modelling and experiments. *J. Spacecraft and Rockets*, **23**, № 5, 477—481.
14. Kovtun Y. V., Ozerov A. N., Skibenko E. I., Yuferov V. B. (2015). Choice of conditions for gas outflow in vacuum and configurations of a forming unit feeding a working substance into the plasma volume. *East Eur. J. Phys.*, **2**, № 2, 81—89. <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2015-2-09>
15. Roberts L., South J. C. (1964). Comments on exhaust flow field and surface impingement. *AIAA J.*, **2**, № 5, 971—973. <https://doi.org/10.2514/3.2443>
16. Stasenko A. L. (1969). Criteria for the determination of the “limits” of continuous flow in a freely expanding jet. *J. Engineering Phys.*, **16**, 5—9. <https://doi.org/10.1007/BF00835349>

Стаття надійшла до редакції 28.01.2023

Після доопрацювання 04.05.2023

Прийнято до друку 06.05.2023

Received 28.01.2023

Revised 04.05.2023

Accepted 06.05.2023

L. L. Pecheritsa, Senior researcher (staff), Ph.D. in Phys.& Math., Senior researcher

ORCID <https://orcid.org/0000-0001-5896-1531>

E-mail: [larisa.peche@gmail.com](mailto:larisa.peche@gmail.com)

T. G. Smila, Researcher (staff)

ORCID <https://orcid.org/0009-0002-9584-227X>

E-mail: [tsmila68@gmail.com](mailto:tsmila68@gmail.com)

Institute of Technical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine  
and the State Space Agency of Ukraine

15 Leshko-Popel St., Dnipro, 49005 Ukraine

#### APPLICATION OF THE TEST-PARTICLE STATISTICAL METHOD FOR THE SIMULATION OF RAREFIED PLUME FLOWS IN A VACUUM

The article substantiates the important role of the problem of the supersonic jet outflow into a vacuum to control the motion of the center of mass, orientation, and stabilization of the spacecraft's position in space. The types of low-thrust engines and microrocket engines viewed have plumes that can pass through all regimes from continuum to free-molecular. In zones where motion is described at the molecular-kinetic level, statistical methods are most often used. The statistical Test Particle Method (TPM) has so far been used only in rarefied homogeneous flows. The aim of this work is to develop the TPM for numerical modelling plume flows. Below are the basic tenets of the TPM and changes in its algorithm.

The initial drawing of the trajectories of molecules is carried out either from the nozzle exit (in the absence of a dense core) or from the initial surface, which is the virtual border of the continuity zone. Determining the distributions over the surface of the drawing of the coordinates of the start and the mass velocity of the plume flow is decisive for obtaining adequate results. Among the considered launch options, the most realistic one is uneven, with a concentration on the plume axis. The calculation of the mass velocity of the plume flow at the initial surface can be performed using numerical methods of continuum aerodynamics or using approximate methods.

The testing of TPM in the far field of a rarefied nitrogen plume was carried out by comparing the relative density distribution with the data of the approximate method. The results obtained in the presence of the initial sphere and in its absence agree with each other. The TPM testing in the area adjacent to the nozzle was carried out by comparing the isolines of relative density and Mach numbers with the results of direct Monte Carlo simulation for the experimental conditions of helium outflow from a low-thrust engine into a vacuum. Satisfactory agreement has been obtained between the numerical simulation data of the TPM and the compared data.

**Keywords:** Boltzmann equation, the rarefied gas dynamics, plume flow, statistical simulation, the Test-Particle Method, numerical calculations, free molecular and transitional regimes, gas dynamic parameters.