https://doi.org/10.15407/knit2023.02.078
УДК 528.2

М. М. ФИС, д-р техн. наук, доцент, проф. кафедри КГМ
ORCID ID: 0000-0001-8956-2293
E-mail: mykhailo.m.fys@lpnu.ua
А. М. БРИДУН, канд. фіз-мат. наук, доцент, доцент кафедри КГМ
ORCID ID: 0000-0001-5634-0512
E-mail: andrii.m.brydun@lpnu.ua
А. Р. СОГОР, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри КГМ
ORCID ID: 0000-0002-0084-9552
E-mail: andrii.r.sohor@lpnu.ua
В. А. ЛОЗИНСЬКИЙ, канд. техн. наук, інженер кафедри КГМ
ORCID ID: 0000-0002-1843-7986
E-mail: viktor.a.lozynskyi@lpnu.ua

Національний університет «Львівська Політехніка»
вул. С. Бандери 12, Львів, Україна,79013

ПОДАННЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ НЕБЕСНИХ ТІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОТЕНЦІАЛІВ ПЛОСКИХ ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ДИСКІВ

Запропоновано один з варіантів подання зовнішнього гравітаційного поля планети потенціалами плоских дисків, оснований на класичній теорії потенціалу. При цьому для опису використовуються потенціали простого та подвійного прошарку з розміщенням областей інтегрування в екваторіальній площині. Коефіцієнти розкладу в ряд за цими функціями є лінійними комбінаціями стоксових постійних гравітаційного поля та однозначно виражаються через них. Члени сум — це потенціали простого або подвійного прошарку, що дає можливість обчислювати їх із залученням результатів теорії потенціалу еліпсоїда. Збіжність такого розкладу, на відміну від традиційного за кульовими функціями, є значно ширшою та практично охоплює дію зовнішнього потенціалу, за виключенням області інтегрування, зокрема і у приповерхневих частинах поверхні. Це дозволяє повніше проводити інтерпретацію отриманих результатів, бо не виникають труднощі зі збіжністю отриманих розкладів. Побудова плоских розподілів щільності для потенціалів простого та подвійного прошарку є додатковим інструментом при дослідженнях внутрішньої структури небесного тіла, через те що по суті це проєкції об'ємної щільності надр планети на екваторіальну площину. Тому екстремуми цих функцій об'єднують особливості тривимірної функції розподілу надр планети.

Ключові слова: *гравітаційне поле, потенціал, еліпсоїд, стоксові постійні.*

Вступ. Дія гравітації небесного тіла визначається її потенціалом та здійснюється різними способами з урахуванням потреб його використання [4, 8, 14]. Традиційно найбільш уживаним на сьогодні є зображення потенціалу сили у вигляді розвинення у ряд по кульових функціях [17]:

Цитування: Фис М. М., Бридун А. М., Согор А. Р., Лозинський В. А. Подання гравітаційного поля небесних тіл за допомогою потенціалів плоских еліпсоїдальних дисків. *Космічна наука і технологія*. 2023. **29**, № 2 (141). С. 78—85. https://doi.org/10.15407/knit2023.02.078

$$V(P)=\frac{1}{R}\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n\left(C_{n,0}P_n(\cos\vartheta)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{n}P_n^r(\cos\vartheta)\left(C_{n,k}\cos k\lambda+S_{n,k}\sin\lambda\right)\right)\right),\quad (1)$$

де

$$C_{n,k},S_{n,k}\quad (2)$$

— коефіцієнти розвинення (стоксові постійні).

У науках про Землю приводяться дещо інші величини — так звані нормовані коефіцієнти $A_{n,k},B_{n,k}$, пов'язані з (2) таким чином:

$$C_{n,k}+iS_{n,k}=\sqrt{R\frac{(n-k)!(2n+1)}{(n+k)!}\left(A_{n,k}+iB_{n,k}\right)},\quad (3)$$

$$R=\begin{cases}1,k=0,\\2,k\neq 0.\end{cases}$$

При цьому у зв'язку поширенням GPS-технологій формула (2) подається у прямокутній системі координат [15, 16].

Величини (2) або (3) повністю описують зовнішнє гравітаційне поле планети в області збіжності ряду (1), яка визначається сферою охоплення всіх інтеграційних мас. Проте розкладом (1) на практиці користуються і для внутрішньої частини сфери, отримуючи при цьому повністю адекватні результати. Простіше кажучи, ряд (1) може збігатись і всередині сфери. У теоретичній геодезії [17] навіть вводиться спеціальний термін: «сфера Берхаммера» — мінімальна сфера, поза якою ряд збіжний.

Коефіцієнти розкладу (1) відображають внутрішню структуру планети, та для Землі є основним джерелом її дослідження. Проте не просто знайти можливу інтерпретацію формування стоксових постійних та пов'язати її з будовою Землі. Цими питаннями займались ряд дослідників (геофізиків, геодезистів, гравіметристів), серед яких можна відзначити Морітца [17], Пеллінена [11] та інших.

Слід зауважити, що є багато варіантів подання потенціалу *V,* причому дослідження в цьому напрямі продовжуються як в практичній [7], так і теоретичній площині [1,15]. Вибір способу подання зумовлений завданнями, що стоять перед дослідником. Наприклад, урахування гравітації при інтегруванні орбіт небесних тіл (зокрема штучних) найбільш економічним є подання гравітаційного поля точковими масами [10]. Дослідження областей, близьких до поверхні, раціонально здійснювати розкладом (1), хоча і з деякими застереженнями на можливу розбіжність ряду. Саме тому виникають проблеми зображення потенціалу в цих областях та необхідність пошуку таких представлень потенціалу, для яких проблема збіжності була б розв'язана хоча б частково, а носії, які їх генерують, були б наділені геофізичною інформацією [16]. В даній роботі ми пропонуємо один з варіантів вирішення задачі на основі реалізації запропонованої проф. Мещеряковим Г. О. концепції гравітаційних плоских дисків. Слід зауважити, що її було використано в роботах [5, 6, 19]. Проте повністю її реалізувати стало можливим з використанням біортогональних систем в еліпсоїдальних тілах [9].

Виклад основного матеріалу. В роботі [9] показано, що зовнішній потенціал планети можна представити сумою потенціалів двох плоских фігур *S*, розміщених у площині екватора (еліпсів, для простоти беремо їх як один) зі змінною щільністю:

$$V=V'+V'',\quad (4)$$

де

$$V'(P)=\iint_S\frac{\mu(\xi,\eta)}{r(Q,P)}dS_Q\quad (5)$$

— потенціал простого прошарку,

$$V''(P)=\iint_S\frac{\nu(\xi,\eta)z}{r^3(Q,P)}dS_Q\quad (6)$$

— потенціал подвійного прошарку *S*.

Співвідношення (5) та (6) для фіксованої області інтегрування *S* та відомих функцій $\mu(\xi,\eta)$, $\nu(\xi,\eta)$ дають значення зовнішнього потенціалу. Враховуючи, що зовнішнє гравітаційне поле планети ототожнюється відповідним на сьогодні набором стоксових постійних [9], постає питання зв'язку між ними та значеннями величин, залежних від функцій μ,ν.

Для встановлення відповідних співвідношень обернену відстань $1/r_{Q,P}$ двох точок $Q(r',\pi/2,\lambda')$ та $P(r,\vartheta,\lambda), Q\in S, P\in R^3$ подаємо таким чином:

$$\frac{1}{r_{Q,P}}=\frac{1}{R}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^{n+1}}P_n(\cos\psi)=$$

$$=\frac{1}{R}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^{n+1}}\Bigg[P_n(0)P_n(\cos\vartheta)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}P_n^k(0)P_n^r(\cos\vartheta)\cos m(\lambda-\lambda')\Bigg]. \qquad (7)$$

Значення приєднаних многочленів Лежандра в точці нуль [3, 13]:

$$P_n^k(0)=L_{n,k}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(n+k-1)!!(-1)^m}{m!2^m}, & 2m=n-k-\text{парні},\\ 0, & n-k-\text{непарні},\end{cases}$$

$$P_{2m}(0)=\begin{cases}\dfrac{(2m-1)!!(-1)^m}{m!2^m}, & n=2m,\\ 0, & n-\text{непарне}.\end{cases} \qquad (8)$$

Тому

$$\frac{1}{r_{Q,P}}=\frac{1}{R}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\Big(L_{n,0}P_n(\cos\vartheta)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n}L_{n,k}P_n^k(\cos\vartheta)(\cos m\lambda\cos m\lambda'+\sin m\lambda\sin m\lambda')\Big)\right). \qquad (9)$$

Підставивши вираз (8) у рівність (2), отримаємо

$$V'=\frac{GM'}{R}\left(a_{0,0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{R}\right)^n\Big(a_{n,0}P_n(\cos\vartheta)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{k=0\\ n-k-\text{парні}}}^{n}L_{n,k}P_n^k(\cos\vartheta)\big(a_{n,k}\cos k\lambda+b_{n,k}\sin k\lambda\big)\Big)\right), \qquad (10)$$

де

$$a_{n,k}=\frac{1}{R^nM}\iint_S\mu(\xi,\eta)(r)^n\cos k\lambda' dS, b_{n,k}=$$

$$=\frac{1}{R^nM}\iint_S\mu(\xi,\eta)(r)^n\sin k\lambda' dS$$

— параметри функції π (аналог стоксових постійних для плоского випадку).

Прирівнюючи традиційний запис потенціалу (1) з отриманим співвідношенням (10) при парному $n-k$, отримаємо зв'язок між коефіцієнтами:

$$C_{n,k}=L_{n,k}a_{n,k}, S_{n,k}=L_{n,k}b_{n,k}, \qquad (11)$$

$$n-k\text{ — парні}.$$

Таким чином, за відомими стоксовими постійними $C_{n,k}, S_{n,k}$ визначаємо коефіцієнти розкладу $a_{n,k}, b_{n,k}$, за допомогою яких знаходимо інші характеристики функції.

Для цього подаємо $a_{n,k}, b_{n,k}$ у плоскій прямокутній системі координат, враховуючи зв'язок з полярною системою:

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \cos k\lambda+i\sin k,$$

$$\lambda=(\cos\lambda+i\sin\lambda)^k=\frac{(x+iy)^k}{(x^2+y^2)^{k/2}}.$$

Тому маємо:

$$a_{n,k}+ib_{n,k}=\frac{1}{R^nM}\iint_S\mu(\xi,\eta)(\xi^2+\eta^2)^{(n-k)/2}(\xi+i\eta)^k dS=$$

$$=\sum_{p+q=n}\left(\alpha_{p,q}I_{p,q}+\beta_{p,q}I_{p,q}\right), \qquad (12)$$

$$I_{p,q}=\frac{1}{R^nM}\iint_S\mu(\xi,\eta)\xi^p\eta^q dS$$

— степеневі моменти функції μ.

Кількість рівнянь (11) та коефіцієнтів розкладу (12) є однаковою, а тому їх можна визначити однозначно. Значить, задача визначення функції розкладу μ (в математиці такий розв'язок носить назву проблеми моментів) також формально має розв'язок, і нижче подається за допомогою узагальнених многочленів Лежандра двох змінних [17].

Подання за сферичними функціями оберненого радіуса в третьому степені знайдемо, користуючись розкладом за многочленами Гегенбауера [9, 18]:

$$\left(r^2-2rR\cos\psi+R^2\right)^{-3/2}=\frac{1}{R^3}\sum_{l=0}^{\infty}\rho^l C_l^{3/2}(\cos\psi),$$

де $\rho=r/R$.

Нескладні, але громіздкі перетворення дають такі вирази:

$$V''=\frac{GM'}{R}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{R}\right)^{n+2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{\substack{k=0\\ n-k-\text{непарні}}}^{n}K_{n,k}P_{n+1}^k(\cos\vartheta)\big(c_{n,k}\cos k\lambda+d_{n,k}\sin k\lambda\big)\right)\right). \qquad (13)$$

де

$$K_{n,k}=(-1)^{(n-k)/2}\left(\left(\frac{n-k}{2}\right)!\right)^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)_k\left(\frac{3}{2}\right)_{(n-k)/2},$$

$$(x)_k=x(x+1)(x+k-1),\quad (x)_0=1. \qquad (14)$$

$$c_{n,k}+id_{n,k}=\frac{1}{R^nM}\iint_S \nu(\xi,\eta)\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{n-k}{2}}(\xi+i\eta)^k dS=$$
$$=\sum_{p+q=n}\left(\alpha_{p,q}J_{p,q}+\beta_{p,q}J_{p,q}\right). \qquad (15)$$

$$J_{p,q}=\frac{1}{R^nM}\iint_S \nu(\xi,\eta)\xi^p\eta^q dS \qquad (16)$$

— степеневі моменти функції μ.

Зауважимо, що системи (15) та (11) відрізняються лише правими частинами, а тому їхнє розв’язування виконується за однаковим алгоритмом.

Торкнемось визначення функцій $\mu(\xi,\eta)$, $\nu(\xi,\eta)$. В наших дослідженнях область інтегрування приймаємо у вигляді еліпса з півосями *a, b*.

Кожна з функцій μ,ν — кусково-неперервна, отже їх можна розкласти в ряд за біортогональними многочленами $W_{m,n}(\xi,\eta),\omega_{m,n}(\xi,\eta)$, які можна розглядати як спрощений відповідний варіант просторових біортогональних систем [9]. Детальні дослідження будуть виконані в окремій публікації. Тут використаємо лише необхідні для апроксимації властивості та формули:

$$\omega_{mn}=\frac{1}{a^mb^n}\sum_{l=0}^{N/2}(-1)^l\frac{(2N-2l+1)!!}{l!2^l}\times$$
$$\times\sum_{i+j=l}\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{m-2i}\left(\frac{y}{b}\right)^{n-2j}}{i!\,j!(m-2i)!(n-2j)!},$$

$$W_{mn}=\frac{1}{a^mb^n}\frac{1}{2^N m!n!k!}\sum_{l=0}^{N}\frac{(-1)^l2^l}{l!}\times$$
$$\times\sum_{t_1+t_2=l}^{N}\frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!}{(2t_1-m)!(2t_2-n)!}\left(\frac{x}{a}\right)^{2t_1-m}\left(\frac{y}{b}\right)^{2t_2-n}. \qquad (17)$$

$$W_{mn}=\frac{1}{2^N m!n!}\frac{\partial^n}{\partial x^m\partial y^n}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^N,$$

$$l_{mn}=\int_\tau W_{mn}\omega_{m_1n_1}d\tau=$$
$$=\begin{cases}0, & \text{якщо } m\neq m, \text{або } n\neq n,\\ \dfrac{S_e(2N+1)!!}{2^N(N+1)m!n!a^{2m}b^{2n}}, & \text{якщо } m=m_1, \quad n=n_1.\end{cases}$$

Можливість апроксимації функції можна сформулювати теоремою.

Теорема: *Будь-яку функцію* $\mu\in l_2$ *(інтегровану з квадратом) можна представити у вигляді ряду*

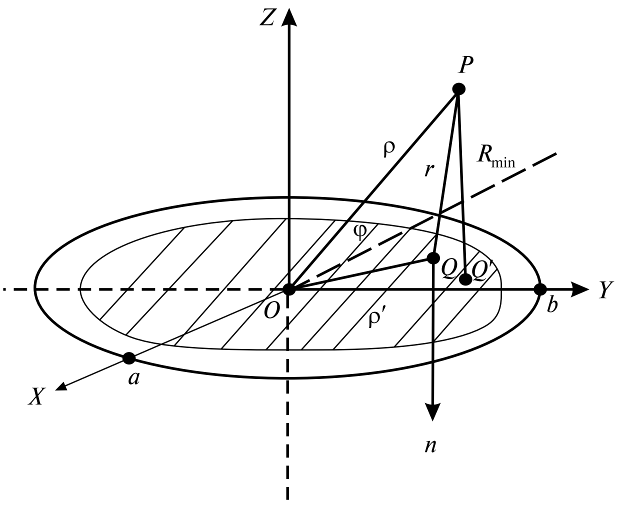

Рис. 1. Область інтегрування

$$\mu(\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}W_{mn}(\xi,\eta), \qquad (18)$$

де

$$a_{mn}=\frac{\iint_S \mu W_{mn}(\xi,\eta)dS}{\iint_S \omega_{mn}(\xi,\eta)W_{mn}(\xi,\eta)dS}$$

— коефіцієнти розкладу, ω_{mn},W_{mn} — біортогональні системи многочленів у еліпсі *S*, причому ряд (18) збігається в середньому, тобто

$$\lim_{N\to\infty}\iint_S\left(\mu-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{N}a_{mn}W_{mn}(\xi,\eta)\right)^2 dS=0. \qquad (19)$$

Доведення теореми практично повторює доведення для випадку трьох змінних (для еліпсоїда), наведеного в роботі [12]. Формальний його виклад потребує визначення та властивостей систем $W_{m,n},\omega_{m,n}$, а тому в подальшому воно буде наведене при їхньому дослідженні. Наслідком цієї теореми є рівномірна збіжність ряду, що представляє потенціал *V′*. Потенціал *V′* можна подати сумою

$$V'=G\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}\iint_S\frac{W_{mn}}{r}dS. \qquad (20)$$

Це випливає з нерівності Буняковського — Коші для (19) та оцінки інтегралу

$$\iint_S\frac{1}{r^2}dS\le\frac{S}{R_{msn}^2(P,Q)}\to 0\ (P\to\infty, P\notin S). \qquad (21)$$

Сукупність функцій

$$u_{mn}=\iint_S\frac{W_{mn}}{r}dS$$

— це набір гармонічних функцій, що повністю описують частину потенціалу (1) зі стоксовими постійними, з парними індексами $k+n$.

Для їхнього обчислення скористаємось методами класичної теорії потенціалу еліпсоїда та математичного аналізу. З використанням формули Стокса маємо

$$u_{mn} = \iint_S \frac{W_{mn}}{r} dS =$$

$$= \frac{1}{2^N m!n!} \iint_S \frac{\frac{\partial^N}{\partial \xi^m \partial \eta^n}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right)^N}{r} dS =$$

$$= \frac{(-1)^N}{2^N m!n!} \iint_S \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right)^N \frac{\partial^N}{\partial \xi^m \partial \eta^n}\left(\frac{1}{r}\right) dS =$$

$$= \frac{1}{2^N m!n!} \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^n} \iint_S \frac{\left(\rho^2 - 1\right)^N}{r} dS =$$

$$= \frac{1}{2^N m!n!} \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^n} U_N,$$

де

$$U_N = \iint_S \frac{\left(\rho^2 - 1\right)^N}{r} dS. \qquad (22)$$

Визначення виразу (22) здійснюємо за формулою для потенціалу еліптичного диска [15], коли $\alpha = N + 1/2$:

$$U_N = \sigma_0 \frac{2\pi ab}{(2N+1)} \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)} \int_\xi^\infty \frac{P_2^\alpha}{Q_1(u)} du,$$

$$P_2 = 1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{u},$$

де $\Gamma(\alpha + 1/2)$ — гамма-функція,

$$Q_1(u) = (a^2+u)(a^2+u)u, \qquad (23)$$

ξ — найбільший корінь рівняння

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{\xi} = 1.$$

Підставляючи відповідні формули, отримаємо

$$U_N = \sigma_0 \frac{2\pi ab}{(2N+1)} \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)} \int_\xi^\infty \frac{\left(1-\rho_1^2\right)^{(2N+1)/2}}{\sqrt{\left(a^2+u\right)\left(a^2+u\right)u}} du,$$

$$\rho_1^2 = \frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{u}. \qquad (24)$$

З виразу (23) видно, що безпосереднє диференціювання по змінних x, y, z практично не є можливим, на відміну від просторового випадку [2]. Тому попередньо розкладемо підінтегральну функцію в ряд:

$$P_2^{(2N+1)/2} = \left(\sum_{l=0}^N \frac{(2N-2l+1)!!}{(2N-1)!!\,2^l} \varepsilon(N-l) + \right.$$

$$\left. + (2N+1)!! \sum_{l=N}^\infty \frac{(2l-2N+1)!!\,\varepsilon(l-N)}{2^l\,!} \right) \rho_1^{2l} (-1)^l. \qquad (25)$$

Ряд (25) збігається для $u > \xi$ за ознакою Даламбера, а при $u = \xi$ вираз (25) має вигляд

$$\left\{ \sum_{l=0}^N \frac{(-1)^l (2N-2l+1)!!}{(2N-1)!!\,2^l} + \right.$$

$$\left. + (2N+1)!! \sum_{l=N}^\infty \frac{(-1)^l (2l-2N+1)!!}{2^l\,!} \right\}, \qquad (26)$$

і є також збіжним (умовно) за ознакою Лейбніца. Тому підстановкою (25) у (22) отримаємо

$$U_n = \sigma_0 \frac{2\pi ab}{(2N+1)} \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \int_\xi^\infty \frac{\left(1-\rho_1^2\right)^{(2N+1)/2}}{\sqrt{\left(a^2+u\right)\left(a^2+u\right)u}} du =$$

$$= \sigma_0 \frac{2\pi ab}{(2N+1)} \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(2N-1)!!} \sum_{l=0}^N \frac{(2N-2l+1)!!}{2^l l!} \varepsilon(N-l) + \right.$$

$$\left. + (2N+1)!! \sum_{l=N}^\infty \frac{(2l-2N+1)!!\,\varepsilon(l-N)}{2^l l!} \right] (-1)^l \nu_l.$$

де

$$\nu_l = \int_\xi^\infty \frac{\left(\rho_1^2\right)^l}{\sqrt{\left(a^2+u\right)\left(b^2+u\right)u}} du =$$

$$= l! \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{x^{2t_1} y^{2t_2} z^{2t_3}}{t_1!\,t_2!\,t_3!} M_{t_1,t_2,t_3},$$

$$M_{t_1,t_2,t_3} = \int_\xi^\infty \frac{du}{\left(a^2+u\right)^{t_1+1/2} \left(b^2+u\right)^{t_2+1/2} u^{t_3+1/2}},$$

тому

$$V_l = \frac{1}{2^{N-1} m!n!} \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^n} u_N = \frac{l!}{2^N m!n!} \times$$

$$\times \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!x^{2t_1-m}y^{2t_2-n}z^{2t_3}}{t_3!(2t_1-m)!(2t_2-n)!} M_{t_1,t_2,t_3} .$$

Остаточно можна записати:

$$u_{mn} = \iint_S \frac{W_{mn}}{r} dS =$$

$$= \frac{1}{2^N m!n!} \iint_S \frac{\dfrac{\partial^n}{\partial\xi^m \partial\eta^n}\left(\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}-1\right)^N}{r} dS =$$

$$= \frac{1}{2^N m!n!} \iint_S \left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1\right)^N \frac{\partial^n}{\partial\xi^m \partial\eta^n}\left(\frac{1}{r}\right) dS =$$

$$= \frac{1}{2^N m!n!} \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^n} \iint_S \frac{\left(\rho^2-1\right)^N}{r} dS =$$

$$= \frac{1}{2^N m!n!} \frac{\partial^n}{\partial x^m \partial y^n} u_N . \qquad (27)$$

Подібні викладки проведемо для непарної відносно координати z частини потенціалу, попередньо визначивши функцію $\nu(\xi,\eta)$. Для цього скористаємось формулами (11)—(13).

Нескладні, але громіздкі перетворення приводять до формул (11)

$$V'' = \frac{GM}{R}\left[\sum_{n=1}^{\infty} R^{-n-1} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{\substack{k=0 \\ n-k-\text{ непарні}}}^{n} K_{n,k} P_n^k(\cos\vartheta)(r_{n,k}\cos k\lambda + d_{n,k}\sin k\lambda \right], \quad (28)$$

де

$$K_{n,k} = (-1)^{(n-k)/2+1}\left(\left(\frac{n-k}{2}\right)!\right)^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)_k \left(\frac{3}{2}\right)_{(n-k)/2},$$

$$(x)_k = x(x+1)\ldots(x+k-1),\ (x)_0 = 1. \qquad (29)$$

Прирівнюючи праві частини співвідношення (11) та враховуючи, що

$$V'' = \frac{GM}{R}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{R}\right)^n \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{\substack{k=0 \\ n-k-\text{ непарні}}}^{n} P_n^k(\cos\vartheta)\left(c_{n,k}\cos k\lambda + s_{n,k}\sin k\lambda\right) \right), \qquad (30)$$

$$r_{n,k} + id_{n,k} = \frac{1}{R^n M}\iint_S \nu(\xi,\eta)\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{n-k}{2}}(\xi+i\eta)^k dS =$$

$$= \sum_{p+q=n}\left(\alpha_{p,q}J_{p,q} + \beta_{p,q}J_{p,q}\right).$$

Аналогічно, як для функції μ, отримуємо її розклад за многочленами W_{mn}:

$$\mu(\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} W_{mn}(\xi,\eta), \qquad (31)$$

що дає можливість подати потенціал V'' у вигляді:

$$V'' = G\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{mn}\iint_S W_{mn}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dS =$$

$$= G\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{mn} w_{m,n}, \qquad (32)$$

де

$$w_{m,n} = \iint_S W_{mn}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dS . \qquad (33)$$

Ряд (32) також рівномірно збіжний для точок $P \notin S$, бо

$$\iint_S \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 dS \le \frac{z^2 S}{R_{msn}^6(P,Q)} \to 0 \ (P\to\infty, P\notin S).$$

Формули для обчислення функцій $w_{m,n}$ практично такі ж, як для $u_{m,n}$ за винятком додаткового диференціювання за змінною z, тобто:

$$V_l = \frac{1}{2^{N-l} m!n!}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^m \partial y^n \partial z} u_N = \frac{l!}{2^N m!n!} \times$$

$$\times \sum_{t_1+t_2+t_3=l} \frac{2t_3(2t_1-1)!!(2t_2-1)!!x^{2t_1-m}y^{2t_2-n}z^{2t_3-1}}{t_3!(2t_1-m)!(2t_2-n)!} M_{t_1,t_2,t_3},$$

Отже, ми отримали подання потенціалу планети за допомогою потенціалів плоских дисків.

Висновки. Очевидно, що такий запис має свої позитивні та негативні сторони. До позитивних можна віднести насамперед гарантовану збіжність таких розкладів поза плоскими областями інтегрування. Отримання функцій, що породжують потенціал, може давати певну геофізичну інформацію про внутрішню будову планети. Негативним елементом можна вважати наявність коефіцієнтів розкладу в ряд за сферичними функціями нижчих порядків у коефіцієнтах розкладу функцій μ, ν що може впливати на швидкість збіжності рядів (20), (32). При використанні великої кількості членів розкладу в області спільної збіжності значення, знайдені двома способами, повинні збігатися. Коли ж враховується незначна кількість елементів, така розбіжність може бути суттєвою, а у проблемних областях збіжності взагалі значення можуть суттєво відрізнятись. Тобто, такий підхід дає інструмент дослідження збіжності рядів за кульовими функціями. Очевидно, в кожному конкретному випадку шляхом числових експериментів необхідно встановлювати область збіжності рядів за кульовими функціями та можливий діапазон їхнього використання.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н., Крейн М. *О некоторых вопросах теории моментов*. Харьков: ГНТИУ, 1938. 256с.
2. Бейтмен Г., Эрдейн А. *Высшие трансцедентные функции*. М.: Наука, 1974. Т. II. 294 с.
3. Гобсон Е. В. *Теория сферических и эллипсоидальных функций*. М.: Изд-во ин. лит., 1953. 476с.
4. Грушинский Н. П. *Основы гравиметрии*. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 352с.
5. Завізіон О. В. Самогравітуючі диски як засоби описання зовнішніх гравітаційних полів небесних тіл. *Кинематика и фізика небес. тел*. 2000. **16**, № 5. С. 477—480.
6. Завізіон О. В. Про визначення щільності еквігравітуючих стержнів, за допомогою яких описується зовнішнє гравітаційне поле планет-гигантів. *Кинематика и физика небес. тел*. 2001. **17**, № 1. С .89—92.
7. Кондратьев Б. П. *Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями*. М.: Мир, 2007. 512 с.
8. Ландкоф Н. С. *Основы современной теории потенциала*. М.: Наука, 1966. 515 с.
9. Мещеряков Г. А. *Задачи теории потенциала и обобщенная Земля*. М.: Наука, 1991. 216с.
10. Муратов Р. З. *Потенциалы эллипсоида*. М.: Атомиздат, 1976. 144 с.
11. Пеллинен Л. П. *Высшая геодезия (Теоретическая геодезия)*. М.: Недра, 1978. 264 с.
12. Фыс М. М. О сходимости в среднем биортогональных рядов внутри эллипсоида. *Дифференциальные уравнения и их приложения*. 1983. Вып. 172. С. 131—132.
13. Appell P., Kampé de Feriet J. *Fonctions hypergéometriques et hypersphériques*. Paris, Gauthier-Villars, 1926. 434 p.
14. Axler S., Bourdon P., Ramey W. *Harmonic Function Theory* (2nd edition). Springer-Verlag, 2001. 273 p. https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_18/HFT.pdf
15. Fys M. M., Brydun A. M., Yurkiv M. I. On representation of the internal spherical functions and their derivatives in the planetary coordinate system. *Mathematical modeling and computing*. 2019. **6**, № 2. P. 251—257.
16. Fys M. M., Brydun A. M., Yurkiv M. I. On approach to determine the internal potential and gravitational energy of ellipsoid. *Mathematical modeling and computing*. 2021. **8**, № 3. P. 359—367.
17. Hofmann-Wellenhof Dr. B., Moritz Dr. H. *Physical Geodesy*. New York: Springer, 2005. 403 p.
18. Marchenko A. N., Abrikosov O. A., Tsyupak I. M. Point mass models and their use in the orbital method of satellite geodesy. 2. Application of point mass models for differential refinement of the orbits of artificial Earth satellites (AES). *Kinematics and Phys. Celestial Bodies*. 1985. **1**, № 5. P. 72—80.
19. Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., et al. An Earth Gravitational Model to degree 2160: EGM2008. *EGU General Assembly. Geophys. Res. Abstracts*. 2008. **10**. P. 2 (EGU2008-A-018991).

REFERENCES

1. Akhyezer N., Krejn M. (1938). *On some questions of moment theories*. Khar'kov: HNTYU, 256 p. [in Russian].
2. Bejtmen H., Erdejn A. (1974). *Higher transcendental functions*. Moskov: Nauka. T. II. 294 p. [in Russian].
3. Hobson E. V. (1953). *Theory of spherical and ellipsoidal functions*. Moskov: Izd-vo yn. lyt. 476 p. [in Russian].
4. Hrushynskyj N. P. (1983). *Basics of gravimetry*. Moskov: Nauka. 352 p. [in Russian].
5. Zavizion O. V. (2000). Self-gravitating disks as a means of describing the external gravitational fields of celestial bodies. *Kinematics and Phys. Celestial Bodies,* **16**, № 5, 477—480 [in Russian].
6. Zavizion O. V. (2001). On determining the density of equigravitating rods, which are used to describe the outer gravitational poles of giant planets. *Kinematics and Phys. Celestial Bodies*, **17**, № 1, 89—92 [in Ukrainian].
7. Kondrat'ev B. P. (2007). *New methods and problems with solutions*. Moskov: Myr, 512 p. [in Russian].
8. Landkof N. S. (1966). *Basics of modern potential theory*. Moskov: Nauka, 515 p. [in Russian].
9. Mescheriakov H. A. (1991). *Problems of theories of potential and the general earth*. Moskov: Nauka, 216 p. [in Russian].
10. Muratov R. Z. (1976). *Ellipsoid potentials*. Moskva, Atomyzdat, 144 p. [in Russian].
11. Pellynen L. P. (1978). *Cherry geodesy* (*Theoretical geodesy*). Moskva: Nedra, 264 p. [in Russian].
12. Fys M. M. (1983). On convergence in the mean of biorthogonal series inside an ellipsoid. *Differencial'nye uravnenija i ih prilozhenija*, № 172, 131—132 [in Russian].
13. Appell P., Kampé de Feriet J. (1926). *Fonctions hypergéometriques et hypersphériques*. Paris, Gauthier-Villars, 434 p.
14. Axler S., Bourdon P., Ramey W. (2001). *Harmonic Function Theory.* 2nd edition. Springer-Verlag, 273 p. URL: https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_18/HFT.pdf

15. Fys M. M., Brydun A. M., Yurkiv M. I. (2019). On representation of the internal spherical functions and their derivatives in the planetary coordinate system. *Mathematical modeling and computing*, **6**, № 2, 251—257.
16. Fys M. M., Brydun A. M., Yurkiv M. I. (2021). On approach to determine the internal potential and gravitational energy of ellipsoid. *Mathematical modeling and computing*, **8**, № 3, 359—367.
17. Hofmann-Wellenhof Dr. B., Moritz Dr. H. (2005). *Physical Geodesy*. New York: Springer, 403 p.
18. Marchenko A. N., Abrikosov O. A., Tsyupak I. M. (1985). Point mass models and their use in the orbital method of satellite geodesy. 2. Application of point mass models for differential refinement of the orbits of artificial Earth satellites (AES). *Kinematics and Phys. Celestial Bodies*, **1**(5), 72—80.
19. Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., et al. (2008). An Earth Gravitational Model to degree 2160: EGM2008. *EGU General Assembly. Geophys. Res. Abstrs*, **10**, 2.

Стаття надійшла до редакції 02.11.2022 — *Received 02.11.2022*
Після доопрацювання 15.12.2022 — *Revised 15.12.2022*
Прийнято до друку 18.12.2022 — *Accepted 18.12.2022*

M. M. Fys, Dr. Sci. in Tech., Docent, Prof. at CGM Department
ORCID ID: 0000-0001-8956-2293
E-mail: mykhailo.m.fys@lpnu.ua
A. M. Brydun, Ph.D. in Phys&Math., Docent, Associate Prof. at CGM Department
ORCID ID: 0000-0001-5634-0512
E-mail: andrii.m.brydun@lpnu.ua
A. R. Sohor, Ph.D. in Tech., Docent, Associate Prof. at CGM Department
ORCID ID: 0000-0002-0084-9552
E-mail: andrii.r.sohor@lpnu.ua
V. A. Lozynskyy, Ph.D. in Tech., Engineer of CGM Department
ORCID ID: 0000-0002-1843-7986
E-mail: viktor.a.lozynskyi@lpnu.ua

Lviv Polytechnic National University
12, Bandery Str., Lviv, 79013 Ukraine

PRESENTATION OF THE GRAVITY FIELD OF CELESTIAL BODIES USING THE POTENTIALS OF FLAT ELLIPSOIDAL DISCS

One of the possible ways for representing the external gravitational field of the planet by the potentials of flat discs, based on the classical potential theory, is proposed. At the same time, the potentials of a single- and double-layer are used for the description with the placement of the integration regions in the equatorial plane. The coefficients of the series expansion of these functions are linear combinations of the Stokes constants of the gravitational field and are uniquely expressed in terms of them. Series terms are single- or double-layer potentials. This makes it possible to calculate these terms using the results of the ellipsoid potential theory. The convergence of such a series, in contrast to the traditional one for spherical functions, is much wider and practically covers the effect of the external potential excluding the region of integration, including in the superficial parts of the surface. Since there is no problem with the convergence of the obtained expansions, we can interpret the obtained results more fully. The construction of flat density distributions for the potentials of a single and double layer is an additional tool in the study of the internal structure of the celestial body, as it is essentially a projection of the volume density of the planet's interior onto the equatorial plane. Therefore, the extrema of these functions combine the features of the three-dimensional distribution function of the planet's interior.

Keywords: gravitational field, potential, ellipsoid, Stokes constants.