

<https://doi.org/10.15407/knit2023.02.045>  
УДК 551.51; 551.511.31

**А. К. ФЕДОРЕНКО**, старш. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук

ORCID: 0000-0002-2327-9556

E-mail: fedorenkoak@gmail.com

**Ю. О. КЛИМЕНКО**, старш. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук

ORCID: 0000-0003-3507-93

E-mail: yurklim@gmail.com

**О. К. ЧЕРЕМНИХ**, зав. відділу, чл.-кор. НАН України

ORCID: 0000-0001-6789-3382

E-mail: oleg.cheremnykh@gmail.com

**Є. І. КРЮЧКОВ**, старш. наук. співроб., канд. техн. наук

ORCID: 0000-0002-9131-3277

E-mail: kryuchkov.ye@gmail.com

**І. Т. ЖУК**, старш. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук

E-mail: zhukigor@gmail.com

Інститут космічних досліджень Національної академії наук України та Державного космічного агентства України  
Проспект Академіка Глушкова 40, к. 4/1, Київ-187, Україна, 03187

## ОСОБЛИВІ АКУСТИКО-ГРАВІТАЦІЙНІ ХВИЛЬОВІ МОДИ В ІЗОТЕРМІЧНІЙ АТМОСФЕРІ

*Показано, що спектр акустико-гравітаційних хвиль в ізотермічній атмосфері включає чотири особливих еванесцентних моди. Ці моди є розв'язками системи гідродинамічних рівнянь для малих атмосферних збурень у припущенні, що одна з величин (горизонтальна або вертикальна складові швидкості частинок, флуктуації щільності чи температури) дорівнює нулю. Три з чотирьох вказаних мод (хвиля Лемба, коливання Брента — Вайсяля та  $f$ -мода) є добре відомими, однак раніше вони отримувались з інших міркувань і розглядалися як окремі розв'язки. Нещодавнє виявлення авторами роботи еванесцентної  $\gamma$ -моди дозволило показати, що всі чотири вказані моди утворюють певне сімейство особливих мод ізотермічної атмосфери. На спектральній діаграмі частота — хвильовий вектор є чотири дисперсійні криві особливих мод, на яких одна зі збурених величин дорівнює нулеві. Ці криві лежать в еванесцентній області спектру акустико-гравітаційних хвиль. Вони перетинаються одна з одною у п'яти точках. Показано, що у точках перетину особливі моди не можуть взаємодіяти. Поляризаційні співвідношення між двома збуреними величинами мають різний знак по обидва боки від особливої кривої, якщо одна з величин на цій кривій дорівнює нулю. Ці властивості можна використовувати як індикатори особливих мод при експериментальному вивченні еванесцентного спектру АГХ. Проаналізовано можливість спостереження цих мод в атмосфері Землі та на Сонці за поляризаційними співвідношеннями.*

**Ключові слова:** акустико-гравітаційна хвиля, специфічні еванесцентні хвильові моди, ізотермічна атмосфера.

Цитування: Федоренко А. К., Клименко Ю. О., Черемних О. К., Крючков Є. І., Жук І. Т. Особливі акустико-гравітаційні хвильові моди в ізотермічній атмосфері. *Космічна наука і технологія*. 2023. **29**, № 2 (141). С. 45—53. <https://doi.org/10.15407/knit2023.02.045>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2023. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

## ВСТУП

Теорія акустико-гравітаційних хвиль (АГХ) допускає існування в ізотермічній атмосфері неперервного спектру вільно поширюваних хвиль та горизонтальних (еванесцентних) хвиль. У фізиці планетних атмосфер основна увага зосереджується на вивченні вільно поширюваних під кутом до горизонтальної площини АГХ, які ефективно перерозподіляють енергію між різними висотними рівнями [8, 13, 14, 16]. Вільно поширювані АГХ спостерігаються на різних висотах атмосфери з використанням переважно дистанційних методів, а у верхній атмосфері — також за допомогою контактних супутникових вимірювань. Еванесцентні хвильові моди досліджено значно менше, переважно ці дослідження стосуються  $f$ -моди на Сонці [4, 10, 12, 15].

На відміну від вільно поширюваних акустико-гравітаційних хвиль, у еванесцентних збурень вертикальна складова хвильового вектора є чисто уявною величиною, яка визначає експоненційну зміну їхніх амплітуд з висотою [5]. Щоб уникнути збільшення енергії еванесцентних хвиль з висотою, для їхньої реалізації в атмосфері мають бути різкі висотні градієнти параметрів, наприклад, температури і щільності. В цьому випадку можна виконати умову зменшення енергії від висотного рівня поширення хвиль при певних обмеженнях на їхні спектральні властивості [3, 4].

В даній роботі показано можливість генерування в ізотермічній атмосфері чотирьох особливих мод в еванесцентній області спектра АГХ. Кожна з цих мод отримується у припущенні, що одна зі збурених величин дорівнює нулю: горизонтальна або вертикальна складові швидкості частинок, флуктуації температури чи щільності. Три з цих чотирьох мод — коливання Брента — Вайсяля, хвиля Лемба і  $f$ -мода є добре відомими [7, 10, 11, 15]. Нещодавно було виявлено нову еванесцентну  $\gamma$ -моду [4]. Це дозволило розглянути вказані чотири моди з точки зору їхніх спільних властивостей і показати, що вони формують певне сімейство особливих мод ізотермічної атмосфери.

## ДИСПЕРСІЙНЕ РІВНЯННЯ АКУСТИКО-ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ

В ізотермічній атмосфері лінійні хвильові збурення описуються відомою системою гідродинамічних рівнянь. Для малих збурень горизонтальної ( $V_x$ ) і вертикальної ( $V_z$ ) складових швидкості частинок, відносних флуктуацій щільності ( $\rho'/\rho_0$ ) і температури ( $T'/T_0$ ) ця система має вигляд [3, 8]

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + gH \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + gH \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0} \right) - g \frac{T'}{T_0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + \text{div} \mathbf{V} - \frac{V_z}{H} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{T'}{T_0} \right) + (\gamma - 1) \text{div} \mathbf{V} = 0.$$

Система (1) включає рівняння руху, теплового балансу та неперервності. Для спрощення розглянуто двовимірний випадок, де вісь  $z$  напрямлено вертикально вгору, а горизонтальна вісь  $x$  напрямлена вздовж горизонтальної швидкості частинок. Рівняння (1) отримано для ізотермічної атмосфери, в якій фонові температура  $T_0 = \text{const}$ , а щільність  $\rho_0$  змінюється з висотою за барометричним законом

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = -\frac{1}{H}.$$

Тут  $H = kT_0/mg$  — висота однорідної атмосфери,  $k$  — стала Больцмана,  $m$  — маса частинки атмосферного газу,  $g$  — прискорення вільного падіння,  $\gamma$  — показник адіабати.

Будемо шукати розв'язок системи (1) у вигляді:

$$T'/T_0, \rho'/\rho_0, V_x, V_z \sim \exp(az) \exp[i(\omega t - k_x x)]. \quad (2)$$

Тут  $\omega$  — частота хвилі,  $k_x$  — горизонтальна складова хвильового вектора,  $a$  — стала величина, яка визначає зміну амплітуди збурень з висотою.

Після підстановки розв'язку (2) у систему (1) отримуємо таку систему рівнянь:

$$i\omega V_x - ik_x gH \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + (T'/T) = 0,$$

$$i\omega V_z + agH \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + (aH - 1)g \left( \frac{T'}{T_0} \right) = 0,$$

$$i\omega \left( \frac{T'}{T_0} \right) + (\gamma - 1)aV_z - ik_x (\gamma - 1)V_x = 0, \quad (3)$$

$$i\omega \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) - ik_x V_x + [a - (1/H)]V_z = 0.$$

З умови рівності нулю визначника системи (3) випливає дисперсійне рівняння АГХ:

$$a^2 - \frac{a}{H} + k_x^2 \left( \frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) + \frac{\omega^2}{c_s^2} = 0. \quad (4)$$

Звідси для величини  $a$  отримаємо

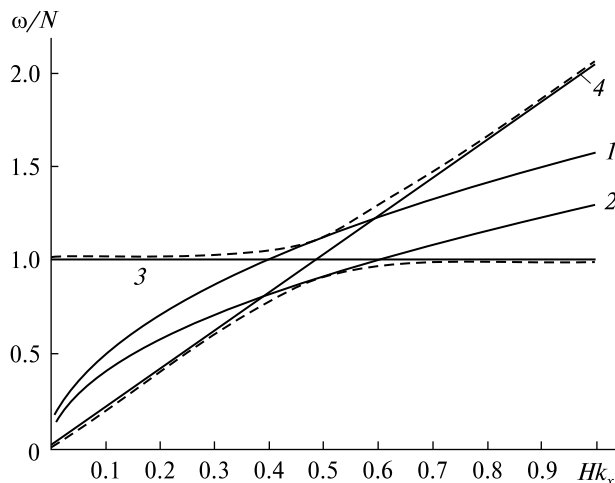
$$a = \frac{1}{2H} \pm \left[ \frac{1}{4H^2} + k_x^2 \left( 1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Тут  $N^2 = g(\gamma - 1) / \gamma H$  — квадрат частоти Брента — Вайсяля (БВ),  $c_s^2 = \gamma g H$  — квадрат швидкості звуку.

Система (1) описує два типи збурень, які відрізняються характером поширення в атмосфері. Перший тип — це вільно поширювані під кутом до горизонтальної площини акустичні та гравітаційні хвилі. Другий тип — горизонтально поширювані (еванесцентні) акустико-гравітаційні хвилі. Характер поширення хвиль визначається знаком підкореневого виразу в рівнянні (5). Якщо підкореневий вираз у (5) від'ємний, тоді  $a$  є комплексною величиною:  $a = (1/2H) \pm ik_z$ , де  $k_z$  — вертикальна складова хвильового вектора. Тут дійсна частина  $a$  визначає зміну амплітуди з висотою. Різні знаки перед  $k_z$  вказують на напрямок поширення хвиль по вертикалі (вгору або вниз). Підстановка цього значення  $a$  в дисперсійне рівняння (4) дає відоме дисперсійне рівняння для вільно поширюваних АГХ, спектр яких включає акустичні хвилі з частотами  $\omega > c_s / 2H$  і гравітаційні хвилі з  $\omega < N$  [8]. Для додатних значень підкореневого виразу у (5)  $a = (1/2H) \pm \kappa$ , де  $\kappa$  є дійсною величиною. В цьому випадку немає хвильового розв'язку по вертикальній координаті, тобто хвиля поширюється горизонтально. Відмітимо, що одній і тій же дисперсії відповідають два еванесцентних розв'язки, які відрізняються різними знаками перед  $\kappa$ . Один з них є еванесцентною «моду», а інший — «псевдомоду» [4].

### ОСОБЛИВІ ЕВАНЕСЦЕНТНІ ХВИЛЬОВІ МОДИ

Розв'язки у вигляді особливих мод впливають із системи гідродинамічних рівнянь при накладанні певних умов на властивості збурень [4, 5]. Покажемо, що система (1) містить чотири особливих розв'язки, які отримуються шляхом при-



**Рис. 1.** Дисперсійні залежності  $\omega(k_x)$  еванесцентних хвильових мод: крива 1 — залежність  $\omega = \sqrt{k_x g}$ , крива 2 —  $\omega = \sqrt{k_x g(\gamma - 1)}$ , пряма 3 —  $\omega = N$ , крива 4 —  $\omega = k_x c_s$ . Штрихові криві — границі акустичної та гравітаційної областей вільно поширюваних АГХ [4]

рівнювання до нуля однієї зі збурених величин:  $T'$ ,  $\rho'$ ,  $V_x$  або  $V_z$ . Ця умова одразу призводить до еванесцентних рішень і виключає можливість вільного поширення АГХ. Процедура отримання вказаних мод описано нижче у Додатку. Поклавши  $V_x = 0$ , ми отримуємо розв'язок у вигляді коливань Брента — Вайсяля:  $\omega^2 = N^2$ ,  $a = 1 / \gamma H$  [7]. Якщо  $V_z = 0$ , тоді ми отримуємо хвилю Лемба:  $\omega^2 = k_x^2 c_s^2$ ,  $a = (\gamma - 1) / \gamma H$  [11]. Умова  $T' = 0$  призводить до  $f$ -моди з  $\omega^2 = k_x g$ ,  $a = k_x$ . Для  $\rho' = 0$  із системи (1) впливає  $\gamma$ -мода:  $\omega^2 = k_x g(\gamma - 1)$ ,  $a = (1/H) - k_x$ .

Дисперсійні криві особливих еванесцентних мод показано на спектральній діаграмі рис. 1 [4], а їхні основні властивості узагальнено в табл. 1. Як впливає з (3) і Додатка, прирівнювання до нуля однієї зі збурених величин ( $T'$ ,  $\rho'$ ,  $V_x$ ,  $V_z$ ) одразу дає однозначний зв'язок між парою інших збурень. Якщо покласти рівною нулевій одну з термодинамічних флуктуацій, отримаємо зв'язок певного виду між складовими швидкості. Так, при  $T' = 0$  отримуємо  $V_z = iV_x$ , а при  $\rho' = 0$  маємо  $V_x = iV_z$ . Поклавши рівною нулевій одну з кінематичних величин ( $V_x = 0$  або  $V_z = 0$ ), одразу фіксуємо зв'язок певного виду для термодинамічних флуктуацій. При  $V_x = 0$  маємо  $(\rho' / \rho_0) = -(T' / T_0)$ , при  $V_z = 0$  отримуємо

$(T'/T_0) = (\gamma - 1)(\rho'/\rho_0)$ . Відмітимо, що вказані зв'язки не залежать від спектральних властивостей хвиль.

Згідно з рис. 1, дисперсійні криві особливих мод мають п'ять точок перетину одна з одною. Крім того, дві з цих кривих дотикаються до областей вільного поширення АГХ:  $f$ -мода торкається в одній точці до акустичної області, а  $\gamma$ -мода торкається гравітаційної області неперервного спектру АГХ. У зв'язку з цим виникає логічне запитання щодо можливої взаємодії особливих мод в точках перетину. В роботі [13] зроблено висновок, що  $f$ -мода не взаємодіє з хвилею Лемба в точці перетину їхніх дисперсійних кривих через різну поляризацію. Як впливає з табл. 1, всі чотири розглянуті особливі моди мають різні поляризації, а також різні залежності амплітуд від висоти. Тому вони не можуть взаємодіяти в точках перетину. Є й інше пояснення неможливості такої взаємодії, яке безпосередньо впливає із системи (1). Оскільки одна зі збурених величин ( $T'$ ,  $\rho'$ ,  $V_x$  або  $V_z$ ) дорівнює нулю на одній із чотирьох дисперсійних кривих, тоді в точці їхнього перетину одразу дві збурені величини повинні бути одночасно нульовими. При цьому кожне рівняння системи (1) містить тільки три величини. Тому вимога одночасної рівності нулю двох збурених величин автоматично означає, що і решта збурених величин дорівнюють нулю.

У теорії АГХ частіше використовується система рівнянь виду (1), в якій замість рівняння для флуктуацій температури  $T'/T_0$  використовується рівняння для збурень тиску  $p'/p_0$ . Оскільки для ідеального атмосферного газу  $p'/p_0 = (T'/T_0) + (\rho'/\rho_0)$ , рівняння для флуктуацій тиску легко отримати, додавши третє і четверте рівняння системи (1). Для ідеального газу з першого рівняння системи (1) також впливає  $p' = \rho_0(\omega/k_x)V_x$ . Тобто умова  $V_x = 0$  автоматично означає і  $p' = 0$ . Якщо використовувати в системі (1) рівняння для збурень тиску, тоді отримання рішень у вигляді  $f$ -моди ( $T' = 0$ ) є не таким наочним. Використання в системі (1) разом з двома кінематичними величинами  $V_z$  і  $V_x$  саме термодинамічних флуктуацій  $\rho'$  і  $T'$  дозволяє отримати чотири особливих еванесцентних моди у найбільш зручний спосіб.

Поляризаційні співвідношення особливих еванесцентних мод наведено в табл. 1. Загальні особливості поляризації цих хвиль можна зрозуміти з простих енергетичних міркувань. Оскільки еванесцентні хвилі поширюються горизонтально, передачі енергії у вертикальному напрямку не відбувається. Як наслідок, середній за період вертикальний потік хвильової енергії  $\bar{P}_z = \langle p' \cdot \mathbf{V} \rangle_z = 0$ , а також середній потік вертикального імпульсу  $\bar{P}_z = \langle \rho' \cdot \mathbf{V} \rangle_z = 0$ . Із цих енергетичних умов випливають обмеження на поляриза-

Таблиця 1. Характеристики особливих еванесцентних мод в ізотермічній атмосфері

Властивості	Бездивергентна ( $f$ -мода)	Непружна ( $\gamma$ -мода)	Коливання Брента – Вьясяля	Хвиля Лемба
Умова отримання	$T' = 0$ $\text{div} \mathbf{V} = 0$	$\rho' = 0$ $\text{div}(\rho_0 \mathbf{V}) = 0$	$V_x = 0$	$V_z = 0$
Дисперсія	$\omega^2 = k_x g$	$\omega^2 = k_x g(\gamma - 1)$	$\omega^2 = g(\gamma - 1) / \gamma H = N^2$	$\omega^2 = k_x^2 c_s^2$
Вертикальний профіль амплітуди	$a = k_x$	$a = \frac{1}{H} - k_x$	$a = \frac{1}{\gamma H}$	$a = \frac{1}{H} - \frac{1}{\gamma H}$
Поляризація	$V_x = \frac{k_x}{\omega} g H \frac{\rho'}{\rho_0}$ $V_z = i \omega H \frac{\rho'}{\rho_0}$ $V_z = i V_x$	$V_x = \frac{k_x}{\omega} g H \frac{T'}{T_0}$ $V_z = -i \frac{\omega H}{(\gamma - 1)} \frac{T'}{T_0}$ $V_x = i V_z$	$\frac{\rho'}{\rho_0} = -i \frac{\gamma - 1}{\gamma H} \frac{V_z}{\omega}$ $V_z = -i \frac{g}{\omega} \frac{T'}{T_0}$ $\frac{\rho'}{\rho_0} = -\frac{T'}{T_0}$	$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{k_x}{\omega} V_x$ $\frac{T'}{T_0} = \frac{k_x}{\omega} (\gamma - 1) V_x$ $\frac{T'}{T_0} = (\gamma - 1) \frac{\rho'}{\rho_0}$

ційні співвідношення еванесцентних хвиль. Оскільки  $p' = \rho_0(\omega/k_x)V_x$ , то умова  $\bar{F}_z = 0$  означає, що коливання вертикальної і горизонтальної складових швидкості мають зсув фаз  $\pm\pi/2$  в еванесцентних хвилях. Відхилення від цього зсуву фаз означає наявність переносу енергії у вертикальному напрямку.

Для вільно поширюваних АГХ зсув фаз між коливаннями вертикальної та горизонтальної складових швидкості залежить від спектральних властивостей хвиль і може змінюватись в інтервалі  $(0, \pm\pi/2)$  [8]. Такі АГХ вільно поширюються під кутом до горизонтальної площини, переносячи енергію у вертикальному напрямку. Слід відмітити, що вертикальний потік хвильової енергії має виражений максимум при деяких спектральних параметрах [1]. Тобто, є АГХ з певними спектральними властивостями, які переносять енергію між різними висотними рівнями атмосфери найбільш ефективно.

Оскільки коливання  $V_x$  і  $V_z$  для еванесцентних хвиль зміщені по фазі на  $\pm\pi/2$ , то величина  $\text{div}\mathbf{V} = (\partial V_x / \partial x) + (\partial V_z / \partial z) = -ik_x V_x + aV_z \sim V_z$  для дійсного значення  $a$ . Тоді з третього і четвертого рівнянь системи (1) випливає, що флуктуації  $T'$  і  $\rho'$  також зміщені по фазі на  $\pm\pi/2$  відносно  $V_z$ . Це узгоджується з умовою  $\bar{P}_z = 0$ . Згідно з даними супутникових спостережень, для АГХ у полярних областях на висотах термосфери коливання між флуктуаціями  $\rho'$  і  $V_z$  відбувається приблизно у фазі [2]. Це одразу виключає горизонтальне поширення хвиль, оскільки вказує на ефективне перенесення імпульсу у вертикальному напрямку.

### СПОСТЕРЕЖУВАНІ ОСОБЛИВОСТІ ЕВАНЕСЦЕНТНИХ МОД

При аналізі спостережень хвильових флуктуацій атмосфери важливо ідентифікувати тип збурення. Відрізнити вільно поширювані АГХ від еванесцентних хвиль можна на основі аналізу поляризації збурених величин. Поляризаційні співвідношення АГХ загального виду безпосередньо впливають із системи (3):

$$V_x = iV_z k_x c_s^2 (a - 1/\gamma H) / (\omega^2 - k_x^2 c_s^2), \quad (6)$$

$$p' / \rho_0 = iV_z \gamma \omega (a - 1/\gamma H) / (\omega^2 - k_x^2 c_s^2), \quad (7)$$

$$T' / T_0 = iV_z (\gamma - 1) (a\omega^2 - k_x^2 g) / \omega (\omega^2 - k_x^2 c_s^2), \quad (8)$$

$$\rho' / \rho_0 = iV_z (k_x^2 g (\gamma - 1) + \omega^2 (a - 1/H)) / \omega (\omega^2 - k_x^2 c_s^2). \quad (9)$$

Тут всі збурені величини для зручності виражено через складову вертикальної швидкості  $V_z$ . Як впливає з виразів (6)–(9), в еванесцентних хвилях з дійсним значенням величини  $a$  зсуви фаз між окремими збуреними величинами не залежать від спектральних властивостей. Для вільно поширюваних АГХ фазові зсуви між різними флуктуаціями змінюються монотонно на всій спектральній площині  $\omega(k_x)$ . Водночас в еванесцентному спектрі наявні розриви фаз на дисперсійних кривих особливих мод, що можна використовувати для їхньої експериментальної діагностики. Дисперсійні співвідношення загального виду (6)–(9) мають невизначеності. Для співвідношень, записаних відносно складової  $V_z$ , ця невизначеність проявляється на дисперсійній кривій Лемба, на якій  $V_z = 0$ . Виражаючи поляризаційні співвідношення через будь-яку зі збурених величин, отримаємо невизначеність на тій дисперсійній кривій, яка відповідає нульовому значенню цієї величини. Щоб визначити поляризацію особливих мод, спочатку слід прирівняти до нуля відповідну складову збурення в системі (3). Тоді отримані поляризаційні співвідношення не містять невизначеностей (див. табл. 1 і Додаток).

Той факт, що на дисперсійних кривих особливих еванесцентних мод одна зі збурених величин ( $T'$ ,  $\rho'$ ,  $V_x$ ,  $V_z$ ) дорівнює нулю, є важливим для інтерпретації еванесцентного спектру АГХ. На чотирьох дисперсійних кривих особливих мод:  $\omega^2 = N^2$  (коливання БВ),  $\omega^2 = k_x^2 c_s^2$  (хвиля Лемба),  $\omega^2 = k_x g$  ( $f$ -мода) і  $\omega^2 = k_x g (\gamma - 1)$  ( $\gamma$ -мода) має спостерігатися зміна знаку у поляризаційних співвідношеннях, або стрибок різниці фаз на  $\pm\pi$  між парою збурених величин, якщо одна з них дорівнює нулю на кривій. Для моди Лемба повинен спостерігатися стрибок фази від  $+\pi/2$  до  $-\pi/2$  (або навпаки) між парами збурених величин  $V_x - V_z$ ,  $p' - V_z$ ,  $T' - V_z$ ,  $\rho' - V_z$  при перетині прямої  $\omega = k_x c_s$ . Фактично хвиля Лемба з  $V_z = 0$  «невидима» у спектрі вертикальної швидкості,  $f$ -мода не спостерігається у спектрі  $T' = 0$  і т. д.

У зв'язку з цим при експериментальних дослідженнях різних типів еванесцентних хвиль важливим є вибір спостережуваних параметрів. В еванесцентному спектрі АГХ на Сонці зазвичай аналізуються фазові зсуви між флуктуаціями інтенсивності окремих спектральних ліній і вертикальної швидкості  $I - V_z$  [6, 9]. Якщо припустити, що флуктуації інтенсивності спектральних ліній пропорційні змінам температури, тоді зсув фази  $T' - V_z$  буде змінюватися стрибком по обидва боки від дисперсійної кривої  $f$ -моди  $\omega^2 = k_x g$  ( $T' = 0$ ), а також при перетині моди Лемба  $\omega = k_x c_s$  ( $V_z = 0$ ). Однак спостереження хвильових флуктуацій на Сонці вказують на деяку неузгодженість з цими теоретичними уявленнями, особливо в низькочастотній ділянці еванесцентного спектру [6]. Ці розбіжності не вдалося пояснити врахуванням ефектів переносу в сонячній атмосфері [6, 9]. Можливо, що в цих спостереженнях слід врахувати залежність інтенсивності спектральних ліній не тільки від температури, а й від концентрації випромінюючих частинок. У такому випадку стрибок фази  $T' - V_z$  буде спостерігатися при перетині дисперсійної кривої  $f$ -моди  $\omega^2 = k_x g$ , а стрибок фази  $\rho' - V_z$  — при перетині кривої  $\gamma$ -моди  $\omega^2 = k_x g(\gamma - 1)$ . Тобто, обидві ці особливості можуть відобразитися у фазових зсувах  $I - V_z$ , що ускладнює аналіз діагностичної діаграми  $\omega(k_x)$ .

Можливість спостереження  $\gamma$ -моди в еванесцентному спектрі Сонця становить особливий інтерес, оскільки цю моду було виявлено тільки нещодавно [4]. За експериментальний індикатор  $\gamma$ -моди можна вважати умову  $\rho' = 0$ , що виконується на її дисперсійній кривій  $\omega^2 = k_x g(\gamma - 1)$ . Проте є деякі обмеження, які можуть ускладнити спостереження  $\gamma$ -моди на Сонці. Для еванесцентних мод на Сонці потрібно забезпечити падіння хвильової енергії в напрямку вгору:

$$E \sim \rho_0(z)(V_x^2 + V_z^2) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty.$$

Для  $f$ -моди з вертикальною залежністю амплітуди  $a = k_x$ , щільність енергії

$$E_f \sim \exp\left(2k_x - \frac{1}{H}\right)z \rightarrow 0$$

при  $z \rightarrow +\infty$ , якщо  $k_x < 1/2H$ .

Для  $\gamma$ -моди з  $a = (1/H) - k_x$  щільність енергії

$$E_\gamma \sim \exp\left(2\left(\frac{1}{H} - k_x\right) - \frac{1}{H}\right)z = \exp\left(\frac{1}{H} - 2k_x\right)z \rightarrow 0$$

при  $z \rightarrow +\infty$ , якщо  $k_x > 1/2H$ . Прийнемо на рівні фотосфери  $H_0 \approx 150$  км. Тоді просторовий масштаб  $k_x = 1/2H_0$ , який відділяє зростаючі по енергії розв'язки від спадних, для  $f$ - та  $\gamma$ -мод становить близько 1900 км. Цей масштаб є близьким до розмірів фотосферних гранул (~1500...2000 км). Тому спостереження спадних по енергії розв'язків для  $\gamma$ -моди ускладнюються грануляцією сонячної поверхні. Водночас спадні по енергії вгору розв'язки у вигляді  $f$ -моди припадають на масштаб  $k_x < 1/2H_0$ , і тому реєструються у сонячній фотосфері на фоні грануляції.

#### ДОДАТОК. ОТРИМАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ У ВИГЛЯДІ ОСОБЛИВИХ ЕВАНЕСЦЕНТНИХ МОД

**Коливання Брента — Ваясяля.** Покладемо в системі (3)  $V_x = 0$ :

$$i\omega V_z - g(T'/T_0) = 0,$$

$$i\omega(T'/T_0) + (\gamma - 1)aV_z = 0, \quad (D1)$$

$$i\omega(\rho'/\rho_0) + [a - (1/H)]V_z = 0.$$

Як видно з першого рівняння системи (3), умова  $V_x = 0$  еквівалентна наявності зв'язку між флуктуаціями щільності і температури виду  $(\rho'/\rho_0) = -(T'/T_0)$ . Використовуючи цей зв'язок, у третьому рівнянні (D1) можна виключити  $\rho'/\rho_0$ . Потім додавши друге і третє рівняння, визначити величину  $a = 1/\gamma H$ . Також після деяких нескладних перетворень отримаємо дисперсію коливань БВ  $\omega^2 = N^2$ , а також поляризаційні співвідношення, показані в табл. 1. Відмітимо, що протифазність флуктуацій щільності і температури означає, що в коливаннях Брента — Ваясяля відсутні хвильові збурення тиску  $p' = 0$ .

**Хвиля Лемба.** Поклавши в (3)  $V_z = 0$ , отримаємо:

$$i\omega V_x - ik_x gH[(\rho'/\rho_0) + (T'/T_0)] = 0,$$

$$i\omega(T'/T_0) - ik_x(\gamma - 1)V_x = 0, \quad (D2)$$

$$i\omega(\rho'/\rho_0) - ik_x V_x = 0.$$

З умови рівності нулю визначника системи (D2) одразу впливає дисперсійне рівняння для моди Лемба  $\omega^2 = k_x^2 c_s^2$ . З другого рівняння системи (3) видно, що умова  $V_z = 0$  одразу дає зв'язок

між флуктуаціями термодинамічних параметрів виду  $(\rho'/\rho_0) + (T'/T_0) = (1/aH)(T'/T_0)$ . Враховуючи цей зв'язок, можна виключити  $\rho'/\rho_0$  в рівняннях (Д2). Потім після нескладних перетворень отримаємо для хвилі Лемба вертикальну залежність амплітуди  $a = (\gamma - 1)/(\gamma H)$  та поляризаційні зв'язки, показані в табл. 1.

***f*-мода.** При  $T' = 0$  із системи (3) випливає:

$$\begin{aligned} i\omega V_x - ik_x g H (\rho'/\rho_0) &= 0, \\ i\omega V_z + agH(\rho'/\rho_0) &= 0, \\ i\omega(\rho'/\rho_0) - ik_x V_x + [a - (1/H)]V_z &= 0. \end{aligned} \quad (Д3)$$

Умова  $T' = 0$  означає одночасно і  $\text{div}\mathbf{V} = 0$ , як це видно з (1). Відмітимо, що *f*-моду раніше отримали саме з умови  $\text{div}\mathbf{V} = 0$ , тому її також називають бездивергентною модою [4, 10]. Для *f*-моди зв'язок між складовими швидкості випливає з умови  $\text{div}\mathbf{V} = -ik_x V_x + aV_z = 0$ . Виключивши з системи (Д3) складову  $V_x$ , легко отримати дисперсію  $\omega^2 = k_x g$ , висотну залежність амплітуди  $a = k_x$  та поляризаційні співвідношення для *f*-моди.

***γ*-мода.** З умови  $\rho' = 0$  із системи (3) отримаємо

$$\begin{aligned} i\omega V_x - ik_x g H (T'/T_0) &= 0, \\ i\omega V_z + (aH - 1)g(T'/T_0) &= 0, \\ i\omega(T'/T_0) + (\gamma - 1)aV_z - ik_x(\gamma - 1)V_x &= 0. \end{aligned} \quad (Д4)$$

Як видно із системи рівнянь (1), умова  $\rho'/\rho_0 = 0$  означає і одночасне виконання іншої умови  $\text{div}(\rho_0 \mathbf{V}) = 0$ . Звідси випливає одразу зв'язок між складовими швидкості  $ik_x V_x = [a - (1/H)]V_z$ . За допомогою цього зв'язку виключимо з системи (Д4) складову  $V_x$ , після чого знайдемо для  $\gamma$ -моди:  $a = (1/H) - k_x$ ,  $\omega^2 = (\gamma - 1)k_x g$ . Цю моду можна також отримати з умови  $\text{div}(\rho_0 \mathbf{V}) = 0$ , тому вона ще називається непружною модою [4].

## ВИСНОВКИ

Показано, що в ізотермічній атмосфері можуть реалізуватися чотири особливі акустико-гравітаційних хвильових моди. Ці моди можна отримати як розв'язки системи гідродинамічних рівнянь (1) за умови, що одна зі збурених величин:  $V_x$ ,  $V_z$ ,  $\rho'$  або  $T'$  дорівнює нулю. Кожна з цих умов одразу призводить до еванесцентних хвильових рішень, виключаючи можливість вільно-

го поширення АГХ. Три з цих мод були відомі давно. Вони були отримані у припущенні різних обмежень на складові збурень швидкості частинок: коливання БВ ( $V_x = 0$ )  $\omega^2 = N^2$ , хвилі Лемба ( $V_z = 0$ )  $\omega^2 = k_x^2 c_s^2$ , *f*-мода ( $\text{div}\mathbf{V} = 0$ )  $\omega^2 = k_x g$ . Нещодавно виявлену  $\gamma$ -моду  $\omega^2 = k_x g(\gamma - 1)$  можна отримати або з умови на складові швидкості  $\text{div}(\rho_0 \mathbf{V}) = 0$ , або з умови  $\rho' = 0$ . Відкриття цієї моди дозволило об'єднати всі названі чотири моди у сімейство особливих мод за однотипним способом отримання і рядом властивостей.

Властивості особливих мод зручно аналізувати за допомогою діагностичної діаграми  $\omega(k_x)$ . В еванесцентній області спектру АГХ є чотири особливі дисперсійні криві, на яких одна зі збурених величин,  $T'$ ,  $\rho'$ ,  $V_x$  чи  $V_z$  дорівнює нулю. Дисперсійні криві особливих мод перетинаються одна з одною у п'яти точках. Показано, що ці моди не можуть взаємодіяти в точках перетину. Неможливість цієї взаємодії обумовлена різною поляризацією мод, а також впливає безпосередньо із системи рівнянь.

При експериментальних дослідженнях різних типів мод важливим є вибір спостережуваних величин. Фактично  $\gamma$ -мода  $\omega^2 = k_x g(\gamma - 1)$  є «невидимою» у флуктуаціях  $\rho'$ , *f*-мода  $\omega^2 = k_x g$  — у змінах  $T'$ , коливання БВ  $\omega^2 = N^2$  — у горизонтальній швидкості  $V_x$ , а хвиля Лемба  $\omega^2 = k_x^2 c_s^2$  — у вертикальній швидкості  $V_z$ . Для різних комбінацій пар збурених величин фазові зсуви змінюються стрибком на величину  $\pi$  на особливих дисперсійних кривих, якщо одна з величин на цій кривій дорівнює нулю. Фактично поляризаційні співвідношення між двома збуреними величинами мають різний знак по обидва боки від особливої кривої. Цю властивість особливих мод можна використовувати для їхньої ідентифікації у спостереженнях, зокрема при аналізі еванесцентного спектру АГХ на Сонці.

*Роботу виконано за підтримки Національного фонду досліджень України, проєкт 2020.02/0015 «Теоретичні та експериментальні дослідження глобальних збурень природного і техногенного походження в системі Земля — атмосфера — іоносфера» та часткової підтримки Цільової комплексної програми НАН України з наукових космічних досліджень на 2018–2022 роки.*

## ЛІТЕРАТУРА

1. Крючков Е. И., Федоренко А. К. Особенности переноса энергии в атмосфере акустико-гравитационными волнами. *Геомагнетизм и аэрономия*. 2012. **52**, № 2. С. 251—257.
2. Федоренко А. К., Захаров І. В. Специфічний коливальний режим у полярній термосфері. *Космічна наука і технологія*. 2012. **18**, № 2. С. 26—32. doi.org/10.15407/knit2012.02.026
3. Федоренко А. К., Крючков Є. І., Черемних О. К., Мельничук С. В., Жук І. Т. Властивості акустико-гравітаційних хвиль на межі двох ізотермічних середовищ. *Кінематика і фізика небес. тіл*. 2022. **38**, № 6. С. 79—95. https://doi.org/10.15407/kfnt2020.04.015.
4. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Selivanov Y. A. Evanescent acoustic-gravity modes in the isothermal atmosphere: systematization, applications to the Earth's and Solar atmospheres. *Ann. Geophys.* 2019. **37**, № 3. P. 405—415.
5. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Selivanov Y. A., Cheremnykh S. O. Continuous spectrum of evanescent acoustic-gravity waves in an isothermal atmosphere. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2021. **503**, № 4. P. 5545—5553. DOI:10.1093/mnras/st.ab845.
6. Deubner F.-L., Fleck D., Marmolino C., Severino G. Dynamics of the solar atmosphere. IV. Evanescent waves of small amplitude. *Astron. and Astrophys.* 1990. **236**. P. 509—514.
7. Gossard E., Hooke W. *Waves in the Atmosphere: Atmospheric Infrasound and Gravity Waves: Their Generation and Propagation*. Elsevier Scientific Publishing Company, 1975. 456 p.
8. Hines C. O. Internal gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.* 1960. **38**. P. 1441—1481.
9. Ichimoto K., Hamana S., Kumagai K., Sakurai T., Hiei E. *Phase relation between velocities and temperature fluctuations of the solar 5-minute oscillation*. Progress of Seismology of the Sun and Stars. Lecture Notes in Physics. Eds Y. Osaki, H. Shibahashi. Berlin, Heidelberg: Springer, 1990. 367. doi.org/10.1007/3-540-53091-6\_82.
10. Jones W. L. Non-divergent oscillations in the Solar atmosphere. *Solar Phys.* 1969. **7**. P. 204—209.
11. Lamb H. *Hydrodynamics*. New York: Dover, 1932. 362 p.
12. Roy A., Roy S., Misra A. P. Dynamical properties of acoustic-gravity waves in the atmosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.* 2019. **186**. P. 78—81.
13. Tolstoy I. The theory of waves in stratified fluids including the effects of gravity and rotation. *Rev. Modern Phys.* 1963. **35**, № 1. P. 207 — 230.
14. Vadas S. L., Fritts M. J. Thermospheric responses to gravity waves: Influences of increasing viscosity and thermal diffusivity. *J. Geophys. Res.* 2005. **110**. D15103. doi:10.1029/2004JD005574.
15. Waltercheid R. L., Hecht J. H. A reexamination of evanescent acoustic-gravity waves: Special properties and aeronomical significance. *J. Geophys. Res.* 2003. **108**, D11. 4340. doi:10.1029/2002JD002421.
16. Zhang S. D., Yi F. A numerical study of propagation characteristics of gravity wave packets propagating in a dissipative atmosphere. *J. Geophys. Res.* 2002. **107**, D14. P. 1—9.

## REFERENCES

1. Kryuchkov E. I., Fedorenko A. K. (2012). Peculiarities of energy transport in the atmosphere by acoustic gravity waves. *Geomagn. Aeron.*, **52**, 251—257. doi.org/10.1134/S0016793212010057.
2. Fedorenko A. K., Zakharov I. V. (2012). Specific oscillatory mode in the polar thermosphere. *Kosm. nauka tehnol.*, **18**, № 2, 26—32. doi.org/10.15407/knit2012.02.026.
3. Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Cheremnykh O. K., Melnychuk S. V., Zhuk I. T. (2022). Properties of acoustic-gravity waves at the boundary of two isothermal media. *Kinematika i Fizika Nebes. Tel*, **38**, № 6, 79—95. https://doi.org/10.15407/kfnt2020.04.015.
4. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Kryuchkov E. I., Selivanov Y. A. (2019). Evanescent acoustic-gravity modes in the isothermal atmosphere: systematization, applications to the Earth's and Solar atmospheres. *Ann. Geophys.*, **37**, № 3, 405—415.
5. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Selivanov Y. A., Cheremnykh S. O. (2021). Continuous spectrum of evanescent acoustic-gravity waves in an isothermal atmosphere. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*, **503**, № 4, 5545—5553. DOI:10.1093/mnras/st.ab845.
6. Deubner F.-L., Fleck D., Marmolino C., Severino G. (1990). Dynamics of the solar atmosphere. IV. Evanescent waves of small amplitude. *Astron. and Astrophys.*, **236**, 509—514.
7. Gossard E., Hooke W. (1975). *Waves in the Atmosphere: Atmospheric Infrasound and Gravity Waves: Their Generation and Propagation*. Elsevier Scientific Publishing Company, 456 p.
8. Hines C. O. (1960). Internal gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.*, **38**, 1441—1481.
9. Ichimoto K., Hamana S., Kumagai K., Sakurai T., Hiei E. (1990). *Phase relation between velocities and temperature fluctuations of the solar 5-minute oscillation*. Progress of Seismology of the Sun and Stars. Lecture Notes in Physics. Eds Y. Osaki, H. Shibahashi. 367. Berlin, Heidelberg, Springer. doi.org/10.1007/3-540-53091-6\_82.



10. Jones W. L. (1969). Non-divergent oscillations in the Solar Atmosphere. *Solar Phys.*, **7**, 204–209.
11. Lamb H. (1932). *Hydrodynamics*. Dover, New York, 362 p.
12. Roy A., Roy S., Misra A. P. (2019). Dynamical properties of acoustic-gravity waves in the atmosphere. *J. Atmos. and Solar-Terr. Phys.*, **186**, 78–81.
13. Tolstoy I. (1963). The theory of waves in stratified fluids including the effects on gravity and rotation. *Rev. Modern Phys.*, **35**, № 1, 207–230.
14. Vadas S. L., Fritts M. J. (2005). Thermospheric responses to gravity waves: Influences of increasing viscosity and thermal diffusivity. *J. Geophys. Res.*, **110**, D15103. doi:10.1029/2004JD005574.
15. Waltercheid R. L., Hecht J. H. (2003). A reexamination of evanescent acoustic-gravity waves: Special properties and aeronomical significance. *J. Geophys. Res.*, **108**, D11. 4340. doi:10.1029/2002JD002421.
16. Zhang S. D., Yi F. (2002). A numerical study of propagation characteristics of gravity wave packets propagating in a dissipative atmosphere. *J. Geophys. Res.*, **107**, D14, 1–9.

Стаття надійшла до редакції 31.10.2022

Після доопрацювання 14.11.2022

Прийнято до друку 25.11.2022

Received 31.10.2022

Revised 14.11.2022

Accepted 25.11.2022

A. K. Fedorenko, Senior Researcher, Ph.D. in Phys.&Math.

ORCID: 0000-0002-2327-9556

E-mail: fedorenkoak@gmail.com

Yu. O. Klymenko, Senior Researcher, Ph.D. in Phys.&Math.

ORCID: 0000-0003-3507-9372

E-mail: yurklim@gmail.com

O. K. Cheremnykh, Head of Department, Dr. Sci., Correspondent Member of the NAS of Ukraine

ORCID: 0000-0001-6789-3382

E-mail: oleg.cheremnykh@gmail.com

Ye. I. Kryuchkov, Senior Researcher, Ph.D. in Tech.

ORCID: 0000-0002-9131-3277

E-mail: kryuchkov.ye@gmail.com

I. T. Zhuk, Senior Researcher, Ph.D. in Phys.&Math.

E-mail: zhukigor@gmail.com

Space Research Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine and State Space Agency of Ukraine

40, Glushkov Ave., build. 4/1, Kyiv, 03187 Ukraine

#### SPECIFIC ACOUSTIC-GRAVITY WAVE MODES IN ISOTHERMAL ATMOSPHERE

In the paper, we show that the spectrum of acoustic-gravity waves in an isothermal atmosphere includes four specific evanescent modes. These modes are the solutions of the system of hydrodynamic equations for small atmospheric disturbances under the assumption that one of the quantities (horizontal or vertical components of particle velocity, density fluctuations, or temperature) is equal to zero. Three of the four specific modes (the Lamb wave, the Brunt-Väisälä oscillation, and the  $f$ -mode) are well known, but they were previously obtained as independent solutions. The recent discovery by the authors of the evanescent  $\gamma$ -mode made it possible to show that all four specified modes form a certain family of special modes of the isothermal atmosphere. On the spectral diagram of the frequency and the wave vector, there are four dispersion curves of these special modes in which one of the perturbed quantities is equal to zero. These curves belong to the evanescent region of the acoustic-gravity wave spectrum. They intersect each other at five points. It is shown that the specific modes cannot interact at the intersection points. The polarization ratios between two perturbed quantities have a different sign on either side of a particular curve if one of the quantities on this curve is zero. These properties can be used as indicators of the specific modes in experimental studies of the evanescent spectrum of AGWs. By using polarization relations, the possibility of observing these modes in the Earth's atmosphere and on the Sun is also analyzed.

**Keywords:** acoustic-gravity wave, specific evanescent wave modes, isothermal atmosphere.