

<https://doi.org/10.15407/knit2022.04.071>

**М. М. ФИС**, д-р техн. наук, доцент, проф.

**П. М. ЗАЗУЛЯК**, д-р фіз.-мат. наук, проф., проф. кафедри

**А. Р. СОГОР**, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри

Національний університет «Львівська Політехніка»

вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, 79013

## ПОТЕНЦІАЛ СИЛИ ТЯЖІННЯ ТА ПОТЕНЦІАЛ ВІДЦЕНТРОВОЇ СИЛИ ВСЕРЕДИНИ ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ПЛАНЕТИ

*Запропонована методика визначення потенціалу притягання небесного тіла, поверхня якого є сферою чи еліпсоїдом зі стрибкоподібною функцією розподілу мас. Для цих випадків отримано формули для визначення внутрішнього потенціалу та сили тяжіння. Виконані за цими формулами обчислення дають змогу зробити аналіз вкладу еліптичності планети в значення її внутрішнього потенціалу та порівняти його з величиною відцентрової сили для планет земної групи (Земля, Марс, Венера) та Місяця.*

**Ключові слова:** еліпсоїд, потенціал, відцентрова сила, сила тяжіння, концепція гравітаційних дисків.

**Постановка проблеми.** Загальновідомо [2], що потенціал сили тяжіння зменшується при віддаленні від точки тяжіння, а потенціал відцентрової сили, навпаки, збільшується. Тому очевидно, що сумарний ефект потенціалу сили тяжіння набуває свого значення всередині планети. Значення потенціалу сили тяжіння всередині планети не можна отримати безпосередніми вимірюваннями, хоч можна подати його рядом внутрішніх сферичних функцій [1]. Характер його поведінки відіграє важливу роль при дослідженні Землі та планет та їхньому трактуванні як небесних тіл. Важливим фактором постає питання формування потенціалу сили тяжіння, який включає два компоненти: потенціал сили притягання та потенціал сили обертання. Визначальним чинником у вирішенні цього питання є встановлення формул для обчислення потенціалу еліпсоїдальної планети.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Вивченню потенціалу сили тяжіння всередині планети на сьогодні надається недостатньо уваги, хоча ця проблема становить теоретичний та практичний інтерес. Тому окремі дослідження з цієї тематики заслуговують уваги для їхнього розгляду та застосування. Зокрема, в роботі [5] виконано обчислення потенціалу для однієї з відомих радіальних моделей густини PREM. Отримання формул для визначення потенціалів сферичної планети розглянуто в роботі [6]. На їхній основі у роботі [9] знайдено потенціали для окремих важливих для задач геофізики розподілів мас всередині планети. Запропонований в даній роботі підхід доповнює класичні дослідження з іншого боку та може використовуватися як в геодезичних, так і в геофізичних та астрономічних дослідженнях [10].

Цитування: Фис М. М., Зазуляк П. М., Согор А. Р. Потенціал сили тяжіння та його складова відцентрової сили всередині еліпсоїдальної планети. *Космічна наука і технологія*. 2022. **28**, № 4 (137). С. 71–77. <https://doi.org/10.15407/knit2022.04.071>

**Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми.** Потенціал всередині еліпсоїдальної планети визначено для постійного розподілу мас, причому на поверхні рівневого еліпсоїда подається замкнутою формулою [11]. Логічно постає завдання узагальнення цих виразів для потенціалу з постійною щільністю на випадок кускового неперервного радіального розподілу мас надр планети, фігура якої — еліпсоїд. На відміну від сферично-симетричного небесного тіла, для якого відомі класичні формули визначення потенціалу, їхнє отримання для еліпсоїдальних тіл пов'язане із застосуванням результатів класичної теорії потенціалу еліпсоїда. Слід зауважити, що отримані таким чином значення характеризуються тривимірним розподілом для однорідної еліпсоїдальної планети. Отримання виразів потенціалу дозволяє надалі використати їх для обчислення енергії гравітаційного поля як кульового, так і еліпсоїдального небесного тіла [3]. На їхній основі також в даних дослідженнях виконано обчислення потенціалу сили тяжіння для планет земної групи та проаналізовано вклад кожного з компонентів у значення сили тяжіння.

**Мета статті.** Отримати вирази для знаходження потенціалу еліпсоїдальної планети та застосувати їх для порівняння потенціалу відцентрової сили з потенціалом сили тяжіння еліпсоїдальних планет земної групи.

**Виклад основного матеріалу.** Значення потенціалів сили притягання сферичної та еліпсоїдальної планет, рівновеликих за об'ємом, однорідного розподілу мас відрізняються між собою. Наприклад, у центрі мас вони подаються різними формулами:

$$V = \frac{GM}{R},$$

$$V = \frac{GM}{a} \left( 1 + \frac{1}{6}e^2 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}(e^2)^n + \dots \right),$$

де  $e^2 = 1 - (c/a)^2$ ,  $a$ ,  $c$  — півосі еліпсоїда  $\tau$  відповідно для кулі та двовісного еліпсоїда.

Потенціал сили тяжіння планет  $U$  формується з двох складових: потенціалу сили притягання  $V$  та потенціалу відцентрової сили  $W$ . Для довільного тіла ці компоненти по-різному впливають на величину  $U$ , а саме вклад першої зменшується

зі збільшенням віддалі  $r$  від точки притягання (зменшення глибини), другої, навпаки, — зростає. Дослідження їхнього взаємовпливу на величину  $U$  здійснимо на моделі щільності мас надр небесного тіла, представленій функцією трьох стрибків (ядро, мантія та кора). За фігуру планети беремо тривісний еліпсоїд  $\tau = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1\}$ . Така модель щільності притаманна всім планетам та описує основний вклад у величину потенціалу притягання. Для еліпсоїдальної планети вона змінюється з глибиною, по широті та довготі, що підтверджується дослідженнями для Землі [7].

Наведемо основні робочі формули, необхідні для подальших досліджень [9, 10]. Потенціал притягання однорідного тривісного еліпсоїда  $\tau$  визначається формулою

$$V = \frac{3}{4}GV_{\tau} \delta \int_{0, \xi}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} \right) \frac{du}{Q(u)},$$

де  $V_{\tau}$  — об'єм еліпсоїда  $\tau$ ,  $\delta$  — щільність розподілу мас ( $\delta = \text{const}$ ),

$$Q(u) = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)},$$

$\xi$  — еліпсоїдальна координата (найбільший корінь кубічного рівняння):

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1,$$

розв'язок якого в замкнутому вигляді громіздкий.

Оскільки фігура небесних тіл апроксимується в основному двовісним еліпсоїдом:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

то еліпсоїдальна координата  $\xi$  визначається з виразу

$$\frac{\xi}{a^2} = \frac{1}{2}(\sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \theta) - \frac{1}{2}(1 + \gamma^2) + \frac{1}{2}[(\rho^2(\sin^2 \theta + \gamma^2 \cos^2 \theta) - (1 + \gamma^2))^2 - 4\gamma^2(1 - \rho^2)]^{1/2}.$$

Потенціал постійної щільності в такому випадку дорівнює

$$V = \frac{3}{4}GV_{\tau} \delta \int_{0, \xi}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} \right) Q(u) du = \frac{3}{4}GV_{\tau} \delta [M_{00}(\xi) + \rho^2 M_{10}(\xi) \sin^2 \theta + M_{01}(\xi) \cos^2 \theta],$$

де

$$M_{kt} = a^{2k} c^{2t} \int_{0, \xi}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u)^{k+1} (c^2 + u)^{t+1/2}}. \quad (1)$$

Значення (8) знаходимо за алгоритмом, описаним у роботі [4]. Відомо, що функція радіального розподілу мас планети (сферичної та еліпсоїдальної) кусково-неперервна:

$$\delta = \begin{cases} \delta_1 & P \in \tau_0 \quad (0 = \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1), \\ \delta_2 & P \in G_1 \quad (\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2), \\ \delta_3 & P \in G_2 \quad (\rho_2 \leq \rho \leq \rho_3 = 1). \end{cases}$$

Тоді потенціал дорівнюватиме

— для  $P \in \tau_0$ :

$$V = \frac{3}{2}GV_{\tau} \left\{ \frac{\delta_1}{2} [\rho_1^2 M_{00}(0) - \rho^2 M_{10}(0) \sin^2 \theta - \rho^2 M_{01}(0) \cos^2 \theta] + \sum_{i=2}^3 \delta_i (\rho_i^2 - \rho_{i-1}^2) \right\}, \quad (2)$$

— для  $P \in G_1$ :

$$V = \frac{3}{2}GV_{\tau} \left\{ \frac{(\delta_1 - \delta_2) \rho_1^3}{2} \left[ M_{00} \left( \frac{\xi}{\rho_1^2} \right) - \rho^2 M_{10} \left( \frac{\xi}{\rho_1^2} \right) \sin^2 \theta - \rho^2 M_{01} \left( \frac{\xi}{\rho_1^2} \right) \cos^2 \theta \right] + \frac{\delta_2}{2} [\rho_1^2 M_{00}(0) - \rho^2 M_{10}(0) \sin^2 \theta - \rho^2 M_{01}(0) \cos^2 \theta] + \delta_3 (\rho_3^2 - \rho_2^2) \right\}, \quad (3)$$

— для  $P \in G_2$ :

$$V = \frac{3}{2}GV_{\tau} \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{(\delta_i - \delta_{i+1}) \rho_i^3}{2} \left[ M_{00} \left( \frac{\xi}{\rho_i^2} \right) - \rho^2 M_{10} \left( \frac{\xi}{\rho_i^2} \right) \sin^2 \theta - \rho^2 M_{01} \left( \frac{\xi}{\rho_i^2} \right) \cos^2 \theta \right] + \frac{\delta_3}{2} [\rho_3^2 M_{00}(\xi) - \rho^2 M_{10}(\xi) \sin^2 \theta - \rho^2 M_{01}(\xi) \cos^2 \theta] \right\}, \quad (4)$$

а його похідна по радіусу

— для  $P \in \tau_0$ :

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{3}{2}GV_{\tau} \rho \delta_1 [M_{00}(0) \sin^2 \theta + M_{01}(0) \cos^2 \theta],$$

— для  $P \in G_1$ :

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{3}{2}GV_{\tau} \left\{ \rho_1^3 (\delta_1 - \delta_2) \rho \times \left[ M_{10} \left( \frac{\xi}{\rho_1^2} \right) \sin^2 \theta + \rho^2 M_{01} \left( \frac{\xi}{\rho_1^2} \right) \cos^2 \theta \right] - \rho \delta_2 [M_{00}(0) \sin^2 \theta + M_{01}(0) \cos^2 \theta] \right\},$$

— для  $P \in G_2$ :

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{3}{2}GV_{\tau} \left\{ \sum_{i=1}^2 (\delta_i - \delta_{i+1}) \rho_i^3 \rho [M_{10}(\xi)] + \rho \delta_3 [M_{10}(\xi) \sin^2 \theta + M_{01}(\xi) \cos^2 \theta] \right\}.$$

Визначимо величину  $\partial \xi / \partial \rho$ :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\rho}{a^2} \left\{ (\sin^2 \theta + \gamma^2 \cos \theta) + \{ (\sin^2 \theta + \gamma^2 \cos \theta) [\rho^2 (\sin^2 \theta + \gamma^2 \cos \theta) - (1 + \gamma^2)] + 2\gamma^2 \} / [ (\rho^2 (\sin^2 \theta + \gamma^2 \cos \theta) - (1 + \gamma^2))^2 - 4\gamma^2 (1 + \rho^2) ]^{1/2} \right\}.$$

Тоді друга похідна потенціалу має вигляд

— для  $P \in \tau_0$ :

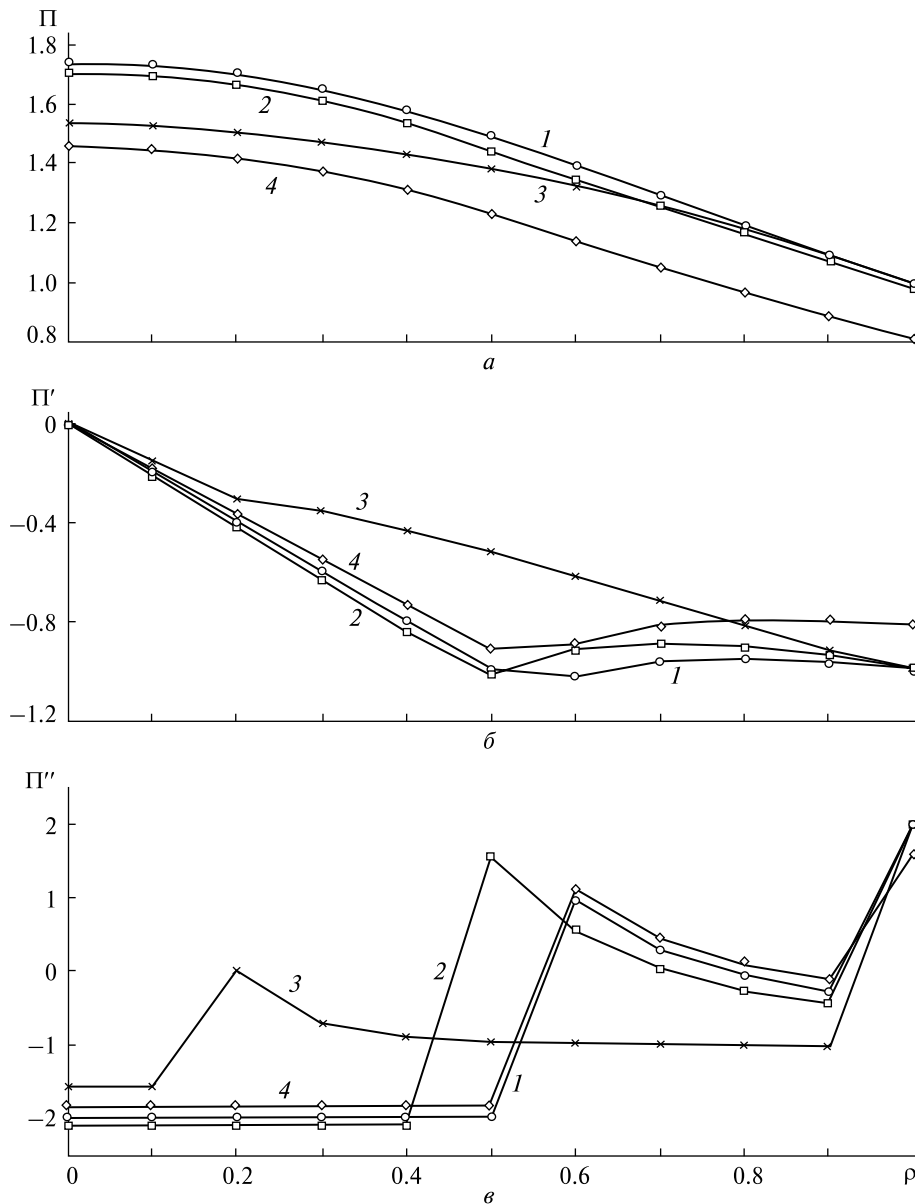
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = -\frac{3}{2}GV_{\tau} \delta_1 [M_{00}(0) \sin^2 \theta + M_{01}(0) \cos^2 \theta],$$

— для  $P \in G_1$ :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = \frac{3}{2}GV_{\tau} \left\{ -(\delta_1 - \delta_2) \rho_1^3 \left[ M_{10} \left( \frac{\xi}{\rho_1^2} \right) \sin^2 \theta + M_{01} \left( \frac{\xi}{\rho_1^2} \right) \cos^2 \theta \right] - \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \frac{\rho}{(1 + \xi/a^2)(\gamma^2 + \xi/a^2)} \right\},$$

— для  $P \in G_2$ :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = \frac{3}{2}GV_{\tau} \left\{ -\rho_1^3 (\delta_1 - \delta_2) \rho \times \left[ M_{10} \left( \frac{\xi}{\rho_1^2} \right) \sin^2 \theta + M_{01} \left( \frac{\xi}{\rho_1^2} \right) \cos^2 \theta \right] - \rho \delta_2 [M_{00}(0) \sin^2 \theta + M_{01}(0) \cos^2 \theta] - \rho_1^3 (\delta_1 - \delta_2) \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \frac{1}{(1 + \xi/a^2)(\gamma^2 + \xi/a^2)} \right\}.$$



**Рис. 1.** Потенціали притягання  $\Pi = V_k GM/R$  (а), перші похідні по радіусу  $\Pi' = (\partial V_k / \partial \rho) GM/R$  потенціалів притягання (б) та другі похідні по радіусу  $\Pi'' = (\partial^2 V_k / \partial \rho^2) GM/R$  потенціалів притягання Землі (крива 1), Марса (2), Місяця (3), Венери (4), що відповідають тришаровим розподілам мас надр сферичних тіл ( $\rho$  — відносний радіус планети)

Виписані формули дають можливість визначити потенціал та його похідні всередині кускової неперервної тришарової моделі щільності як для сферичної, так і для еліпсоїдальної планети.

**Вибір та обговорення вихідної інформації.** У табл. 1 та 2 приведено значення щільностей тришарових планет  $\delta_{cp}$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  (середнє, у ядрі, у

мантії, у корі), а також геодезичні та астрономічні характеристики планет за даними [1, 7, 8].

**Отримання та інтерпретація результатів.** На основі наведених вище формул та відсортованої інформації виконано обчислення, проілюстровані таблицями та графіками. На рис. 1, а зображено графіки потенціалів притягання  $V_k$

всередині Землі, Марса, Венери, Місяця, що відповідають тришаровим розподілам мас надр сферичних тіл. При цьому поведінка  $U$  не змінюється, тобто зростання  $W$  не впливає суттєво на спадання  $U$ . Також зберігаються основні властивості потенціалу, зокрема регулярність на нескінченності. Це ж стосується перших (рис. 1, б) та других похідних (рис. 1, в) величини  $V$ .

Представлення фігури планети у формі еліпсоїда визначає значення  $V_e$ , яке залежить від широти та довготи, що відображається у формулах (2)–(4). За цим виразом обчислено величину потенціалу еліпсоїдальних планет. Значення потенціалів сили притягання рівновеликих за об'ємом сферичної та еліпсоїдальної планети є різними. Також на значення  $U$  впливає обертання

небесного тіла навколо власної осі (потенціал відцентрової сили  $W$ ). Оцінимо вклад кожної з цих величин у  $U$ , для чого обчислимо різниці потенціалів  $\Delta V = V_k - V_e$  кульових та еліпсоїдальних планет і наведемо їх для Землі.

В табл. 3 наведемо суму цих різниць та потенціалу відцентрової сили  $W$  для Землі. Для інших небесних тіл (Марса, Місяця, Венери) вони незначні, а тому не наводяться в роботі.

В табл. 3 подано різниці потенціалів притягання сферичної  $V_k$  та еліпсоїдальної  $V_e$  Землі. Видно, що еліптичність значною мірою впливає на потенціал всередині та на поверхні планети. Відповідно по цих даних приведемо одновимірні графіки (для широти  $\varphi = 0^\circ$ ) на рис. 2. Залежність цих значень від широти для досліджуваних не-

Таблиця 1. Значення щільностей тришарових планет (середнє, у ядрі, у мантиї, у корі)

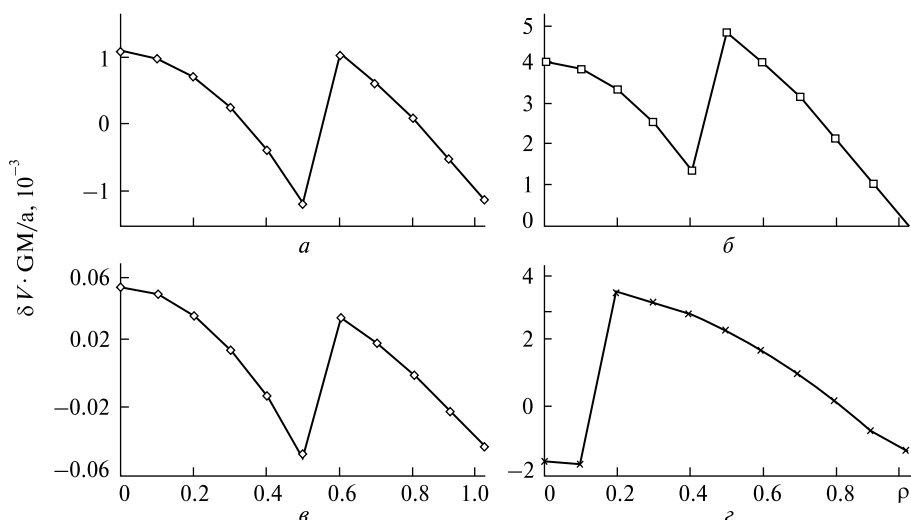
Планета	$R$ , км	$r_{я}$ , км	$r_{м}$ , км	$\delta_{ср}$ , г/см <sup>3</sup>	$\delta_1$ , г/см <sup>3</sup>	$\delta_2$ , г/см <sup>3</sup>	$\delta_3$ , г/см <sup>3</sup>
Земля	6371	3480	6346.6	5.514	10.998	4.4754	2.52
Венера	6050	3250	5990.8	5.25	9.6	3.29	2.8
Марс	3390	1662	3340	3.94	8.28	3.29	3.0
Місяць	1738	340	1678	3.3464	5.22	3.38	2.92

Таблиця 2. Геодезичні та астрономічні характеристики планет

Планета	Гравітаційна стала, $GM$ , $10^{-14}$ м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	Екваторіальний радіус, $a_e$ , км	Стиснення $\alpha = \frac{a-c}{a}$	Швидкість обертання, $\omega$ , $10^{-5}$ рад/с
Земля	3.9860044	6378	1:298.256	7.29211515
Марс	0.4282837	3399.1	1:191.19	7.08270
Венера	0.32485859	6051.54	0.0001652	0.0299
Місяць	0.0490280	1738	0.00039	0.26611

Таблиця 3. Сума обертової складової  $W$  і різниці потенціалів  $\Delta V$  кульової та еліпсоїдальної Землі для широт  $0^\circ \leq \varphi \leq 150^\circ$  на різних глибинах ( $0 \leq \rho \leq 1$ )

$\rho$	$\varphi$					
	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$
0.000	66515.25	66515.25	66515.25	66515.25	66515.25	66515.25
0.200	43994.09	45058.60	47187.61	48252.11	47187.61	45058.60
0.400	-23569.37	-19311.35	-10795.31	-6537.29	-10795.31	-19311.35
0.600	65041.50	74684.80	93968.05	103607.99	93968.05	74684.80
0.800	6512.18	23745.95	58186.33	75392.93	58186.33	23745.95
1.000	-70608.34	-43686.69	10118.73	37002.56	10118.73	-43686.69



**Рис. 2.** Різниці потенціалів кульової та еліпсоїдальної фігури Землі (а), Марса (б), Місяця (в) та Венери (г) для широти  $\varphi = 60^\circ$  на відносних радіусах  $0 \leq \rho \leq 1$  (різних глибинах)

бесних тіл, за винятком Землі, не проявляється, а тому не наводиться.

Аналіз приведених ілюстрацій дає можливість зробити висновок про наявність екстремальних різниць значень потенціалу у внутрішніх точках Землі, при цьому для модельного розподілу мінімуми та максимуми породжуються різкими змінами значень щільності (лежать в області стрибків). Для планет земної групи одне з максимальних відхилень лежить у центрі небесного тіла (виняток — Місяць). Для планети Земля та частково Марса обертова частина є визначальним фактором для зовнішнього потенціалу, а для Місяця і Венери її вклад незначний навіть для великих значень віддалей.

#### ВИСНОВКИ З ДАНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ПЕРСПЕКТИВИ

- Еліптичність планет земної групи є головним фактором відхилення їх потенціалу від сферичної симетрії.
- Екстремальні різниця потенціалів сферичних і еліпсоїдальних небесних тіл можливі при різкій зміні щільності розподілу мас всередині планет (на глибинах залягання стрибків).
- Вплив сили обертання на потенціал Землі та Марса проявляється для точок простору, розміщених зовні планет.
- На потенціал сили тяжіння для супутника Місяць і планети Венера практично не впливає їхнє обертання навколо власної осі.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Каменский К. К. *Исследование глобальных особенностей урвеной и гипсометрической поверхностей Венеры*. Изучение Земли как планеты методами астрономии, геодезии и геофизики: Тр. II Орловской конф. Киев: Наук. думка, 1982. С. 80—83.
2. Мориц Г. *Фигура Земли: Теоретическая геодезия и внутреннее строение Земли*. Киев. 1994. 240 с.
3. Фис М. М., Голубінка Ю. І., Юрків М. І. Порівняльний аналіз формул для потенціалу та його радіальних похідних тришарових кульових та еліпсоїдальних планет. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*. 2014. Вип. 1 (27). С. 46—52.
4. Фис М. М., Заяць О. С., Фоца Р. С., Волос В. О. Про один метод визначення потенціалу неоднорідної еліпсоїдальної планети. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*. 2005. С. 236—239.
5. Фис М. М., Нікулішин В. І. Аналіз впливу еліпсоїдальності фігури Землі на її внутрішню структуру на прикладі моделі PREM. *Геодинаміка*. 2011. № 1 (10). С. 17—21.



6. Фис М. М., Согор А. Р., Нікулішин В. І. Потенціал та його радіальні похідні тришарових кульових планет. Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GNSS- і GIS-технології: 36. матер. Міжнар. наук.-техн. симпозиуму. Алушта. 2013. С. 229—233.
7. Церклевич А. Л., Заяць О. С., Фис М. М. Гравітаційні моделі тривимірного розподілу густини планет земної групи. *Геодинаміка*. 2012. № 1(12). С. 25—34.
8. Dolifus A. New optical measurements of planetary diameters. P. 4. Planet Mars. *Icarus*. 1972. **17**, № 3. P. 525—539.
9. Fys M. M., Brydun A. M., Yurkiv M. I. On representation of the internal spherical functions and their derivatives in the planetary coordinate system. *Mathematical modeling and computing*. 2019. **6**, № 2. P. 251—257.
10. Fys M. M., Brydun A. M., Yurkiv M. I. On approach to determine the internal potential and gravitational energy of ellipsoid. *Mathematical modeling and computing*. 2021. **8**, № 3. P. 359—367.
11. Marchenko A. N., Zayats A. S. Estimation of the potential gravitational energy of the Earth based on reference density models. *Geodynamics*. 2008. № 1(7). P. 5—24.

## REFERENCES

1. Kamensky K. K. (1982). *Study of the global features of the level and hypsometric surfaces of Venus*. Study of the Earth as a planet by methods of astronomy, geodesy and geophysics: Tr. II Orlov Conf. Kyiv: Naukova Dumka, 80—83.
2. Moritz H. (1994). *The Figure of the Earth: Theoretical Geodesy and the Internal Structure of the Earth*. Kyiv, 240 p.
3. Fys M. M., Holubinka Y. I., Yurkiv M. I. (2014). Comparative analysis of formulas for the potential and its radial derivatives of three-layer spherical and ellipsoidal planets. *Modern achievements of geodetic science and production*, **I** (27), 46—52.
4. Fys M. M., Zayats O. S., Foca R. S., Volos V. O. (2005). On a method for determining the potential of an inhomogeneous ellipsoidal planet. *Modern achievements of geodetic science and production*, 236—239.
5. Fys M. M., Nikulishyn V. I. (2011). Analysis of the influence of the ellipsoidality of the Earth's figure on its internal structure on the example of the PREM model. *Geodynamics*, № 1 (10), 17—21.
6. Fys M. M., Sohor A. R., Nikulishyn V. I. (2013). *Potential and its radial derivatives of three-layered spherical planets*. Geo-information Monitoring of the Environment: GNSS and GIS — Technologies: Proc. Int. Sci. and Tech. Symp. Alushta, 229—233.
7. Tserklevych A. L., Zayats O. S., Fys M. M. (2012). Gravitational models of three-dimensional distribution of the density of the planets of the terrestrial group. *Geodynamics*, № 1 (12), 25—34.
8. Dolifus A. (1972). New optical measurements of planetary diameters. P. 4. Planet Mars. *Icarus*, **17**, № 3, 525—539.
9. Fys M. M., Brydun A. M., Yurkiv M. I. (2019). On representation of the internal spherical functions and their derivatives in the planetary coordinate system. *Mathematical modeling and computing*, **6**, № 2, 251—257.
10. Fys M. M., Brydun A. M., Yurkiv M. I. (2021) On approach to determine the internal potential and gravitational energy of ellipsoid. *Mathematical modeling and computing*, **8**, № 3, 359—367.
11. Marchenko A. N., Zayats A. S. (2008) Estimation of the potential gravitational energy of the Earth based on reference density models. *Geodynamics*, № 1 (7), 5—24.

Стаття надійшла до редакції 10.06.2022  
 Після доопрацювання 10.06.2022  
 Прийнято до друку 20.07.2022

Received 10.06.2022  
 Revised 10.06.2022  
 Accepted 20.07.2022

Fys M. M., Dr. Sci. in Tech., Docent, Prof. at CGM Department  
 Zazuliak P. M., Dr. Sci. in Phys&Math., Prof., Prof. at CGM Department  
 Sohor A. R., Ph. D. in Tech., Docent, Associate Prof. at CGM Department  
 Lviv Polytechnic National University  
 12, Bandery Str., Lviv, 79013 Ukraine

## GRAVITY POTENTIAL AND ITS COMPONENT OF CENTRIFUGAL FORCE INSIDE THE ELLIPSOIDAL PLANET

A method for determining the gravitational potential of a celestial body whose surface is a sphere or ellipsoid with an abrupt mass distribution function is proposed. For these cases, the formulas for determining the internal potential and gravity are obtained. The calculations performed according to these formulas make it possible to analyze the contribution of the ellipticity of the planet to the value of its internal potential and compare it with the magnitude of the centrifugal force for the planets of the Earth group (Earth, Mars, Venus) and the Moon.

**Keywords:** ellipsoid, potential, centrifugal force, gravity, the concept of gravitational disks.