

<https://doi.org/10.15407/knit2021.04.021>  
УДК 629.7

**О. А. СТЕНІН<sup>1</sup>**, проф., д-р техн. наук

E-mail: alexander.stenin@yandex.ua

**В. П. ПАСЬКО<sup>1</sup>**, доцент кафедри, канд. техн. наук

E-mail: vppasko@gmail.com

**І. Г. ДРОЗДОВИЧ<sup>2</sup>**, старш. наук. співроб., канд. техн. наук

E-mail: irina.drozdowicz@gmail.com

**М. О. СОЛДАТОВА<sup>1</sup>**, старша викладачка, канд. техн. наук

E-mail: benten1093@gmail.com

<sup>1</sup> Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Проспект Перемоги 37, Київ, Україна, 03056

<sup>2</sup> Інститут телекомунікацій та глобального інформаційного простору  
Національної академії наук України  
Чоколівський бульвар, 13, Київ, 03186

## ОПТИМАЛЬНЕ ДЕМПФУВАННЯ ВІДХИЛЕНЬ КУТОВИХ ШВИДКОСТЕЙ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО КОСМІЧНОГО ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА

*Розглядається задача оптимального за витратами палива демпфування раптових відхилень кутових швидкостей осесиметричного космічного літального апарата (КЛА) з постійною швидкістю обертання навколо головної осі симетрії. Таке припущення має певне практичне значення і може бути зумовлене створенням на КЛА штучної гравітації. Ідея штучної гравітації за рахунок обертання осесиметричного циліндричного КЛА ґрунтується на принципі еквівалентності сили гравітації і сили інерції. Актуальність задачі оптимізації витрат палива зумовлена наявністю обмеженого його запасу на КЛА. Поставлену задачу оптимізації розв'язано на основі принципу максимуму і методу фазової площини. Визначено структуру оптимальних за витратами палива процесів з трьома рівнями керування, причому кількість перемикачів залежить від початкових умов. Синтезовані на фазовій площині оптимальні криві перемикачів розбивають фазову площину на вісім криволінійних квадрантів, які однозначно визначають значення оптимальних керівних впливів по поточних значеннях відхилень кутових швидкостей КЛА. Проблема можливої наявності запізнення в контурі керування пропонується вирішувати на основі методу компенсації Бесса. Для цього в роботі отримано відповідні оптимальні криві перемикачів і відключення керувань компенсованої оптимальної системи як геометричне місце точок, віддалених на час запізнення від знайдених кривих перемикачів і початку координат відповідно. Це дозволяє уникнути появи в контурі керування стійких автоколивань і забезпечити умову, щоб КЛА після закінчення процесу стабілізації залишався в заданому кінцевому стані. Залежно від технічного оснащення КЛА пропонується два варіанти реалізації алгоритму оптимального демпфування, а саме: автономний пристрій у бортовій системі керування КЛА при відсутності достатньо потужного бортового обчислювача, або оптимальний алгоритм демпфування, реалізований повністю у бортовому обчислювачі КЛА при достатній для цього потужності.*

**Ключові слова:** осесиметричний КЛА, кутова стабілізація КЛА, оптимізація витрат палива, принцип максимуму, фазова площина, оптимальні криві перемикачів, метод Бесса, прогнозні моделі.

Цитування: Стенін О. А., Пасько В. П., Дроздович І. Г., Солдатова М. О. Оптимальне демпфування відхилень кутових швидкостей осесиметричного космічного літального апарата. *Космічна наука і технологія*. 2021. 27, № 4 (131). С. 21—31. <https://doi.org/10.15407/knit2021.04.021>

## ВСТУП

Керування кутовим положенням космічного літального апарата (КЛА), як правило, передбачає керування як величиною тяги (витратою палива), так і кутами Ейлера (кути крену, тангажу, рискання). Сила тяги входить в рівняння руху лінійним чином, а кути Ейлера у вигляді тригонометричних функцій. Оптимальні значення тяги у більшості оптимізаційних задач керування кутовим положенням КЛА (мінімізація часу, мінімізація витрати палива), як правило, представляються розривними функціями (bang-bang control), тоді як оптимальні значення кутів — неперервними (диференційованими достатню кількість разів) функціями. Слід зауважити, що, на відміну від задачі максимальної швидкодії, задача оптимізації витрати палива реалізується трьома рівняннями керування, тобто bang-bang control із зоною нульового значення керування [8, 10, 11]. Численні літературні джерела розглядають зазвичай такі основні задачі оптимального керування кутовим положенням КЛА [1, 2, 4–6, 13, 14, 16]:

1. Стабілізація кутового положення КЛА, тобто керування кутовим рухом КЛА навколо центра мас, у процесі якого усуваються кутові відхилення осей, зв'язаних з КЛА, від відповідних осей опорної системи відліку.

2. Кутова орієнтація КЛА, тобто керування кутовим рухом КЛА для додання певного кутового положення відносно обраних напрямків, які є опорними або базовими системами відліку. Система керування, що приводить кутове положення КЛА до заданого, називається системою орієнтації (СО). Вона здійснює побудову на борту КЛА базової системи відліку, «запам'ятовує» її і виробляє сигнали для повороту КЛА за заданою програмою навколо однієї або декількох осей.

Практично немає робіт, в яких розглядається демпфування раптових початкових відхилень кутових швидкостей КЛА, тобто стабілізація кутового положення КЛА при раптових відхиленнях кутових швидкостей від їхніх нульових значень.

Для реалізації задач керування КЛА найбільш ефективною системою керування, яка найчастіше використовується на практиці, є активна

система керування реактивними соплами [13, 14, 16, 19]. Керівний момент в цій системі виникає при викиді маси робочого тіла із сопла невеликого реактивного двигуна, вісь якого не проходить через центр мас КЛА. Керівний момент залежить від швидкості витікання і масової витрати робочого тіла, а також від розміру плеча, на яке прикладено силу тяги двигуна [6, 10, 13].

Задане положення апарата визначається у певній системі координат, напрямком осей якої у просторі заздалегідь відомий. Така система координат називається базовою системою відліку, її осі повинні задаватися на борту КЛА за допомогою спеціальних пристроїв та приладів. Для складання рівнянь руху центра мас КЛА використовується другий закон Ньютона:

$$m \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{K}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

де  $K$  — гравітаційний параметр Землі,  $\mathbf{r}$  — радіус-вектор центра мас КЛА,  $\mathbf{F}$  — сума зовнішніх сил.

Наша робота присвячена розв'язуванню задачі оптимального по витраті палива демпфування раптових відхилень кутових швидкостей одного класу КЛА, тобто усунування раптових початкових відхилень кутових швидкостей від їхніх нульових значень (задача 3). Актуальність такої постановки задачі очевидна, через те що КЛА мають обмежений запас палива [4–6].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Відомо, що динаміка КЛА відповідає рівнянням обертання твердого тіла навколо центра мас, тобто рівняння обертального руху КЛА описуються отриманими з (1) динамічними рівняннями Ейлера [5, 6]:

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z &= \sum M_x, \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z &= \sum M_y, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y &= \sum M_z. \end{aligned} \quad (2)$$

де  $I_x, I_y, I_z$  — головні центральні моменти інерції КЛА в головних пов'язаних осях,  $\omega_i$  і  $\sum M_i$  ( $i = x, y, z$ ) — проекції кутових швидкостей обертання КЛА і діючих на нього моментів на осі головної

пов'язаної системи координат,  $\psi, \phi, \theta$  — кути Ейлера (відповідно ривкання, тангажу, крену), визначені відносно пов'язаної системи координат,  $\sum M_i = M_i + M_{i3}$  ( $i = x, y, z$ ) — суми проєкцій керівних моментів  $M_i$  і моментів збурень  $M_{i3}$ . Наведені системи рівнянь достатні для опису кутових рухів КЛА, якщо впливом внутрішніх моментів, що діють на нього, можна знехтувати [4–6, 10, 13, 16].

Зробимо такі припущення для розв'язування зазначених вище задач кутової орієнтації і стабілізації кутового положення КЛА [4]:

- КЛА симетричний відносно осі  $Ox$  ( $I_z = I_y = I, M_y = M_z = M$ ) (рис. 1);
- моментами збурень  $M_{i3}$  порівняно з керівними моментами можна знехтувати  $M_{i3} = 0$  ( $i = x, y, z$ );
- кутова швидкість обертання КЛА навколо осі симетрії  $Ox$  стала ( $\omega_x(t) = \omega_{x0} = \text{const}$ );

Слід зауважити, що вказані вище припущення можуть бути зумовлені створенням на КЛА штучної гравітації.

Керівні моменти  $M_i$  ( $i = x, y, z$ ) створюються трьома реактивними двигунами, укріпленими на КЛА так, як це показано на рис. 1. При цьому необхідно ввести запізнювання  $\theta$  в контурі керування, пов'язане із запізнюючою реакцією реактивного двигуна на командний імпульс (рис. 2). З достатнім ступенем точності наведена на рис. 2 залежність можна апроксимувати елементом чистим часовим запізнюванням  $\theta$ . Неврахування запізнювання  $\theta$  може призвести до виникнення в системі стабілізації небажаних ефектів, зокрема незатухаючих автоколивань.

Введемо в розгляд такі позначення:

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega_y, \quad x_2 = \omega_z, \quad a = \omega_{x0}(I - I_x) / I, \\ \beta &= M / I, \quad u_1 = M_y / M, \quad u_2 = M_z / M. \end{aligned} \quad (3)$$

З урахуванням (3) система (2) набуде вигляду

$$dx_1(t) / dt = ax_1(t) + \beta u_1(t - \theta), \quad (4)$$

$$dx_2(t) / dt = -ax_2(t) + \beta u_2(t - \theta), \quad (5)$$

Приймемо такі крайові умови:

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0, \quad (6)$$

де  $T$  — часовий інтервал процесу стабілізації.

Нарешті, як це прийнято в багатьох роботах з оптимального керування, будемо для зручності

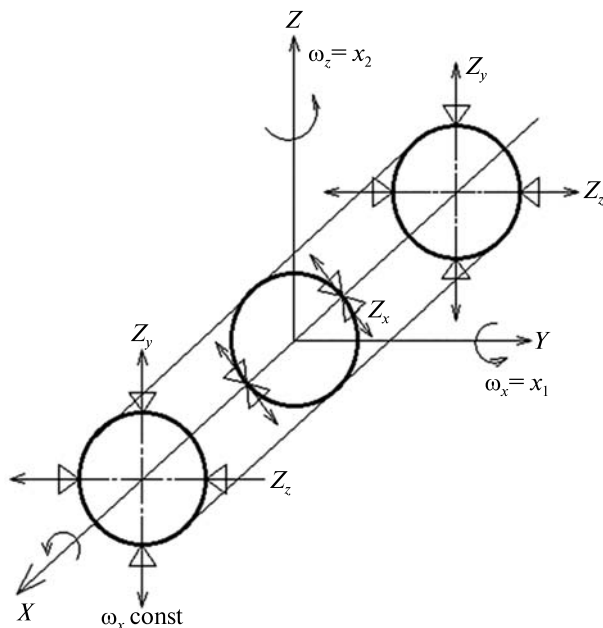


Рис. 1. Розташування реактивних двигунів на симетричному відносно осі  $Ox$  КЛА

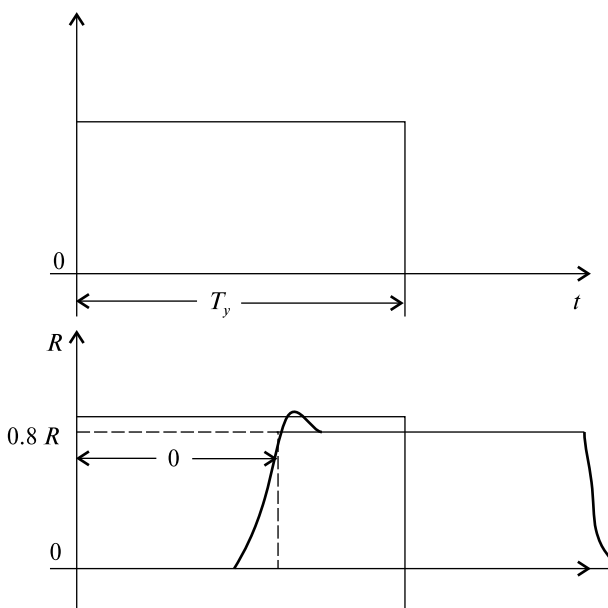


Рис. 2. Реакція реактивних двигунів

аналізу отриманих результатів розглядати нормовані керування

$$|u_1(t)| \leq 1, \quad u_2(t) \leq 1, \quad (7)$$

При цьому керування на відріжку часу  $-\theta \leq t < 0$  приймемо рівними нулю, що цілком очевидно для розглянутого класу КЛА.

Таким чином, задача оптимального по витраті палива демпфування раптових відхилень кутових швидкостей КЛА полягає у визначенні з допустимої області (7) керівних впливів  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  і граничних умов (6), що забезпечують перехід системи (4), (5) на інтервалі часу стабілізації  $0 \leq t \leq T$  з довільного початкового стану  $x_1^0, x_2^0$  в заданий кінцевий стан  $x_1(T) = x_2(T) = 0$  і мінімізують комбінований функціонал якості  $I_k$  виду

$$I_k = \int_{t_0}^T \left[ k + \sum_{i=1}^2 |u_i(t)| \right] dt, \quad (8)$$

де  $0 \leq k \leq \infty$ , величина  $T$  не фіксована.

Поставлена в такому формулюванні задача оптимального демпфування має неоднозначний розв'язок на відріжку часу  $T - \theta \leq t \leq T$ , бо кінцевий стан КЛА при  $t = T$  не залежить від значень керувань на цьому інтервалі. Якщо зазадати, щоб КЛА як завгодно довго залишався в заданому кінцевому стані  $x_1(T) = x_2(T) = 0$ , то тим самим однозначно визначаються керування:

$$u_1(t) = u_2(t) = 0, \quad T - \theta \leq t \leq T. \quad (9)$$

Вибір функціоналу (8) має наукову привабливість в тому сенсі, що при  $k = 0$  маємо задачу чистої витрати палива, а при  $k \rightarrow \infty$  маємо задачу максимальної швидкодії.

Слід зауважити, що у випадку чистої витрати палива, коли  $k = 0$  у функціоналі (8), умовою існування оптимального керування є умова  $T > T_{\min}$ , де  $T_{\min}$  — час демпфування раптових відхилень кутових швидкостей в системі, оптимальної за швидкодією, тобто коли  $k \rightarrow \infty$  у функціоналі (8).

Для розв'язування сформульованої вище задачі використовуємо математичний апарат принципу максимуму (у нашому випадку принципу мінімуму) [4, 9, 11, 17, 18] і метод фазового простору (в нашому випадку фазової площини) [7, 8, 10].

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Припустимо спочатку, що запізнювання в контурі керування КЛА немає, тобто  $\theta = 0$ . Тоді згідно з принципом мінімуму [11] гамільтоніан даної задачі має вигляд

$$H = k + \beta |u_1| + \beta |u_2| + \psi_1(\alpha x_1 + \beta u_1) + \psi_2(-\alpha x_2 + \beta u_2), \quad (10)$$

де  $\psi_1(t), \psi_2(t)$  — пов'язані змінні, які визначаються розв'язком пов'язаної з рівняннями (4), (5) системи сполучених рівнянь.

З аналізу гамільтоніана (10) випливає, що керування, які його мінімізують, задовольняють такі умови:

$$u_i(t) = 0, \quad \text{якщо } |\psi_i(t)| < 1, \quad (11)$$

$$u_i(t) = -\text{sign} \psi_i(t), \quad \text{якщо } |\psi_i(t)| > 1, \quad (12)$$

$$0 \leq u_i(t) \leq 1, \quad \text{якщо } |\psi_i(t)| = -1, \quad (13)$$

$$-1 \leq u_i(t) \leq 0, \quad \text{якщо } |\psi_i(t)| = 1. \quad (14)$$

Використовуючи дані робіт [4, 10, 11], легко показати, що дана задача не вироджена, тому умови (13) і (14) з розгляду виключаються. Легко переконатися, що оптимальними є такі послідовності керувань  $u_1(t), u_2(t)$  з (11), (12):

$$\dots -1, -1 \rightarrow -1, 0 \rightarrow -1, 1 \rightarrow 0, 1 \rightarrow -1, \\ 1 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 1, 0 \rightarrow \dots \quad (15)$$

Слід зауважити, що в роботах [10, 13, 16] визначалась структура оптимальних по витраті палива процесів з трьома рівнями керування, причому, як в нашому випадку, при наявності комплексних коренів кількість перемикачів залежить від початкових умов. Вводячи зворотний час  $z = T - t$ , інтегруємо систему при  $u_1 = \pm 1, u_2 = \pm 1$  і, виключаючи в отриманих розв'язках  $z$ , отримуємо на фазовій площині  $(\alpha x_1, \alpha x_2)$  кола, які описуються рівняннями виду

$$[\alpha x_1 - (2i - 1)\beta u_2]^2 + (\alpha x_2 + \beta u_1)^2 = 2\beta^2, \quad (16)$$

$$(\alpha x_1 - \beta u_2)^2 + [(\alpha x_2 + (2i - 1)\beta u_1)]^2 = 2\beta^2, \quad (17)$$

$$u_1 = -u_2 = \pm 1,$$

де значення керувань  $u_1(t), u_2(t)$  відповідають послідовності (15).

Дуги кіл (16), (17), які примикають до відповідних осей фазової площини  $(\alpha x_1, \alpha x_2)$ , утворюють оптимальні криві перемикачів системи (4),

(5), оптимальної за швидкодією. На рис. 3 вони позначені як ...L<sub>3</sub>K<sub>3</sub>OK<sub>1</sub>L<sub>1</sub>..., ...L<sub>4</sub>K<sub>4</sub>OK<sub>2</sub>L<sub>2</sub>... і відповідають в функціоналі (8). Область відключення одного з керувань в послідовності (15) можна знайти як геометричне місце точок відображення оптимальних за швидкодією кривих перемикання фазовими траєкторіями системи (4), (5) при керуваннях, показаних на рис. 3. Опускаючи проміжні математичні викладки, оптимальні криві відключення одного з керувань у послідовності (15) в системі координат ( $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ ) можна отримати із співвідношень

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \alpha x_1 \cos \phi + \alpha x_2 \sin \phi, \\ \tilde{x}_2 &= \alpha x_2 \cos \phi - \alpha x_1 \sin \phi, \\ \phi &= \arctg \beta / (k + \beta). \end{aligned}$$

Тобто, вони описуються як дуги кіл

$$(\tilde{x}_2 + a_j^i u_j^i)^2 + (\tilde{x}_1 + b_j^i u_j^i)^2 = (R_j^i)^2,$$

де  $a_j^i, b_j^i, R_j^i$  — коефіцієнти, які залежатимуть від номера  $i$  квадранта ( $i = 1, \dots, 4$ ) і номера  $j$  дуги кола ( $j = 1, 2, \dots$ ). На рис. 3 криві відключення одного з керувань позначені як  $OQ_i^i K_i^i L_i^i \dots$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Тут же наведені значення оптимальних керувань для кожної з областей фазової площини ( $\alpha x_1, \alpha x_2$ ). Вибір значення коефіцієнта  $k$  у функціоналі (8) здійснюється відповідно до практичних вимог до витрати палива і часу стабілізації.

На рис. 3 приведено також оптимальну фазову траєкторію, що має форму спіралі, яка закручується з точки  $A(\alpha x_{20}, \alpha x_{10})$  до початку координат і складається з дуг кіл з центром і радіусом, певні значення яких визначаються значеннями оптимальних керувань для областей фазової площини, в якій лежить поточна точка стану КЛА. Як вже зазначалося вище, неврахування запізнювання  $\theta$  може призвести до виникнення в системі стабілізації небажаних ефектів. Зокрема, на рис. 4 показано механізм виникнення незатухаючих автоколиваний отриманого оптимального алгоритму демпфування раптових відхилень куткових швидкостей КЛА без урахування часу запізнювання  $\theta$  в контурі керування.

Для компенсації запізнювання використовуємо метод Бесса [12], геометрична інтерпретація якого представлена на рис. 5.

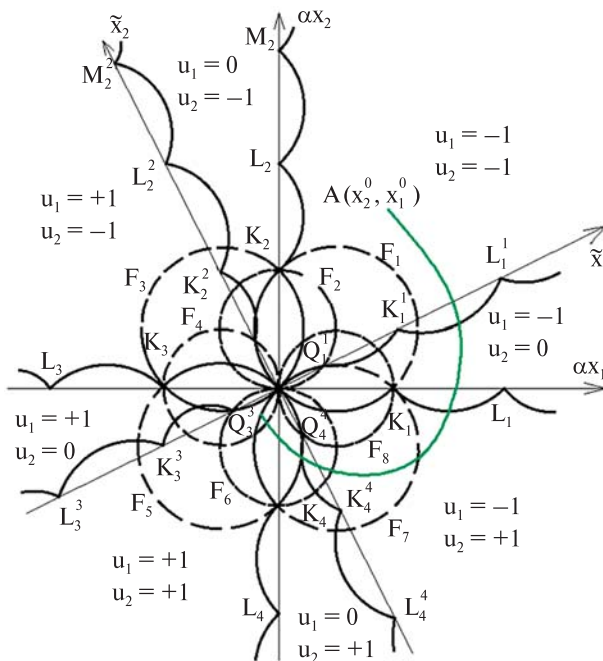


Рис. 3. Фазовий портрет некомпенсованої оптимальної системи

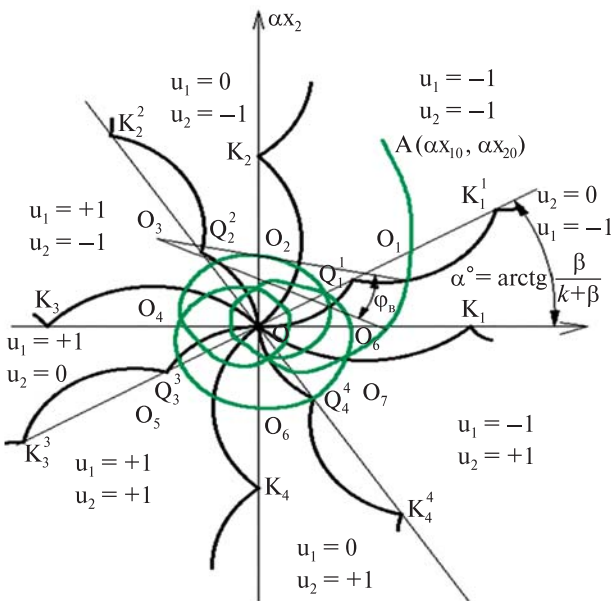


Рис. 4. Сталій режим автоколиваний в оптимальній системі

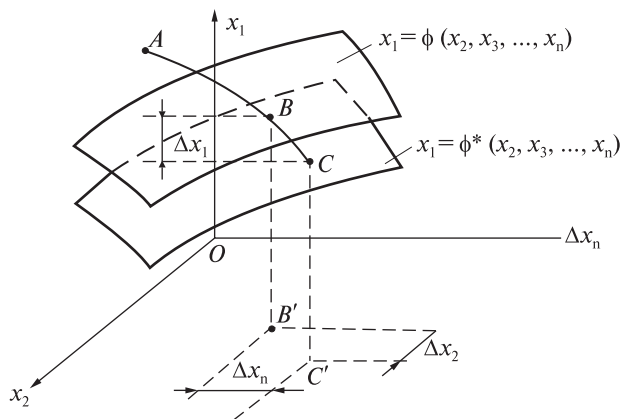


Рис. 5. Геометрична інтерпретація методу Бесса

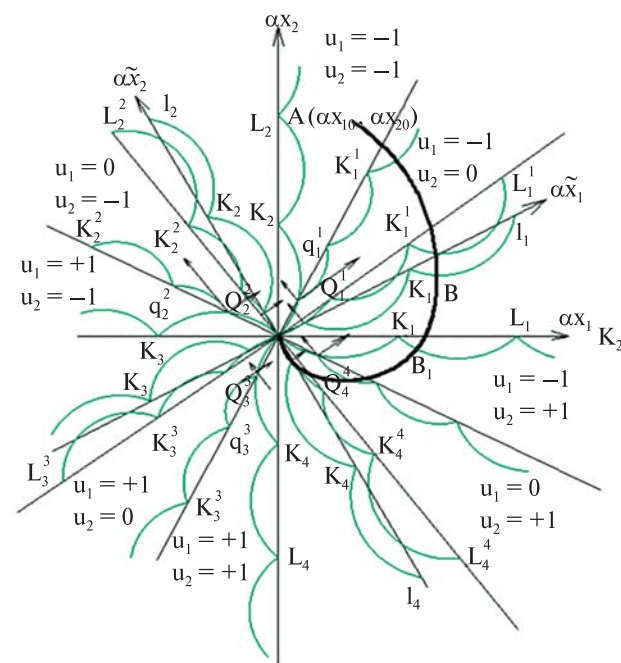


Рис. 6. Фазовий портрет компенсованої оптимальної системи керування кутовою швидкістю

Нехай поверхня перемикання при відсутності запізнювання відома і має вигляд

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \bar{x} \subset X^n.$$

або, якщо функція  $\Phi$  вирішувана відносно будь-якого аргументу, наприклад  $x_1$ , це запишеться як

$$x_1 + \phi(x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \quad \bar{x} \subset X^n. \quad (18)$$

Поверхня перемикання (18) і деяка оптимальна траєкторія ABC вимушеного руху системи показані на рис. 5, де B — точка, що лежить на поверхні, віддаленій від поверхні (18) на час запізнювання  $\theta$ . Якщо функція  $\Phi$  вирішувана відносно  $x_1$ , то рівняння цієї оптимальної поверхні перемикання компенсованої системи має вигляд

$$x_1 + \phi^*(x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \quad \bar{x} \subset X^n, \quad (19)$$

або

$$\Phi^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \bar{x} \subset X^n.$$

Позначимо відстань між проєкціями точок B і C на осях  $Ox_1, \dots, Ox_n$  через  $\Delta_{x_1}, \dots, \Delta_{x_n}$  відповідно. Очевидно, що  $\Delta_{x_i}$  ( $i = 1, n$ ) є функціями часу запізнювання  $\theta$ , а величини  $x_i = x_i + \Delta_{x_i}$  ( $i = 1, n$ ) — поточні значення координат, що представляють значення координат системи через час запізнювання  $\theta$ .

З геометричних міркувань (19) можна записати у вигляді

$$x_1 + \phi^*(x_2, \dots, x_n, \theta) = \Delta_{x_1} - \phi(x_2 + \Delta_{x_2}, \dots, x_n + \Delta_{x_n}), \quad (20)$$

або

$$\Phi^*(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_1 + \Delta_{x_1}, \dots, x_n + \Delta_{x_n}). \quad (21)$$

Рівняння (20) є загальним рівнянням для визначення функції  $\Phi^*$  по заданій функції  $\Phi$ . Для цього, згідно з методом Бесса, досить визначити величини  $\Delta_{x_i}(\theta)$  ( $i = 1, n$ ), а потім підставити майбутні значення координат системи  $x_i + \Delta_{x_i}$  у рівняння поверхні перемикання системи без запізнювання.

Застосування методу Бесса в нашому випадку відповідає повороту кривих  $K_1L_1 \dots i OQ_i^i K_i^i L_i^i \dots$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) навколо центрів початкових кіл  $O_1 \dots O_8$  (рис. 3) на кут  $\gamma = \theta\alpha$ . Отримані в результаті зазначеного перетворення оптимальні криві перемикання компенсованої оптимальної системи стабілізації  $O_p q_i^i k_i^i \dots$  і  $O_d k_i^i l_i^i \dots$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) розбивають площину  $(\alpha\tilde{x}_1, \alpha\tilde{x}_2)$  на вісім криволінійних квадрантів, значення оптимальних керувань в яких відповідають наведеним на рис. 6.

Тут же наведено оптимальну фазову траєкторію з початкової точки A, побудовану з урахуванням умови (9), щоб КЛА після закінчення

процесу оптимального демпфування як завгодно довго залишався в заданому кінцевому положенні  $x_1(T) = x_2(T) = 0$ . Це досягається в системі демпфування раптових відхилень кутових швидкостей побудовою кривих відключення одразу двох керувань у момент часу  $T - \theta$ .

Криві відключення на фазовій площині  $(\alpha x_1, \alpha x_2)$  знайдені як геометричне місце точок, що переводяться в початок координат за час  $\theta$ . Ці криві по суті є не чим іншим, як мінімальною ізохроною. Оскільки в компенсованій системі останнім виявиться рух по першій дузі, яка примикає до початку координат оптимальної системи без запізнювання (рис. 3), то в залежності від того, буде час запізнювання  $\theta$  меншим (рівним) від часу руху по першій дузі (випадок 1) чи більшим (випадок 2), будуть отримані дві ізохрони відключення, які наведені на рис. 7 і 8 відповідно.

Таким чином, застосування отриманих кривих перемикання і відключення дозволяє однозначно визначати значення оптимальних керувань в залежності від поточного стану КЛА, яке відображається відповідною точкою на фазовій площині.

### ПРАКТИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Фактично алгоритм оптимального демпфування раптових відхилень кутових швидкостей КЛА визначається знаходженням точки  $(x_1, x_2)$ , де  $x_1$  і  $x_2$  — поточні значення кутових швидкостей КЛА, на фазовій площині  $(\alpha x_1, \alpha x_2)$  відносно областей, визначених отриманими оптимальними кривими перемикання і відключення.

В залежності від технічного оснащення КЛА пропонуються два варіанти реалізації алгоритму оптимальної стабілізації:

1. Автономний пристрій у бортовій системі керування КЛА при відсутності досить потужного бортового обчислювача (рис. 9).

2. Оптимальний алгоритм демпфування раптових відхилень кутових швидкостей, реалізований повністю в бортовому обчислювачі КЛА при достатній для цього потужності.

У першому варіанті в автономному пристрої для реалізації оптимального алгоритму демпфування раптових відхилень кутових швидкостей

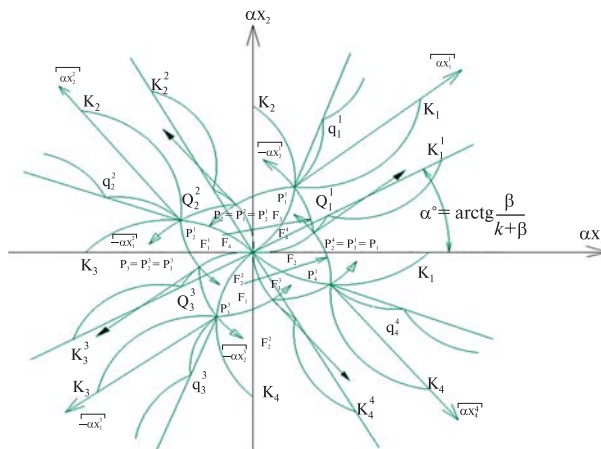


Рис. 7. Ізохрона відключення (випадок 1)

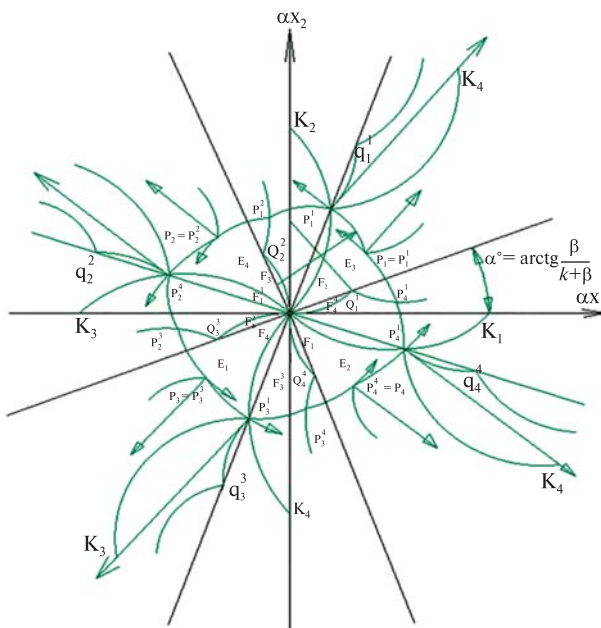


Рис. 8. Ізохрона відключення (випадок 2)

КЛА пропонується використовувати метод прогнозування на основі аналогових швидкодіючих моделей динаміки об'єктів керування (в нашому випадку КЛА), що працюють у зворотному прискореному масштабі часу [15, 18]. Даний метод передбачає конструювання швидкодіючих регуляторів на основі аналізу перетину траєкторії руху точки, яка відображає поточний стан

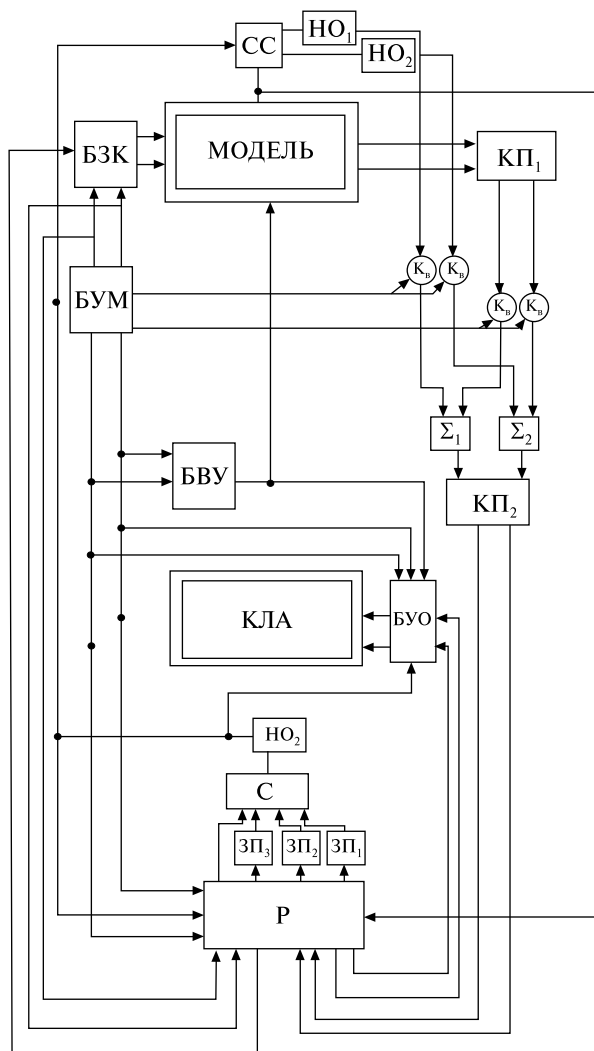


Рис. 9. Блок-схема оптимального керівного пристрою

об'єкта керування у фазовому просторі, з оптимальними поверхнями перемикання.

Пропонований автономний пристрій демпфування раптових відхилень кутових швидкостей працює в автоматичному режимі наступним чином.

Швидкодіюча модель в залежності від положення точки поточного стану КЛА на фазовій площині  $(\alpha x_1, \alpha x_2)$  за сигналами з блоку керування моделлю БКМ, розподільника Р, блоку змінних коефіцієнтів БЗК будує відповідні дуги кіл або безпосередньо в координатах  $(\alpha x_1, \alpha x_2)$  при відкритих ключах  $K_1, K_2$ , або через координат-

ний перетворювач КП в координатах,  $\tilde{x}_2$ ) при відкритих ключах  $K_3, K_4$ . Постійне відтворення цих дуг забезпечується нуль-органами  $НО_1, НО_2$  і схемою скидання СС кінцевих координат для встановлення відповідних початкових умов. При цьому вибір відповідних дуг кіл здійснюється за допомогою запам'ятовувальних пристроїв ЗП<sub>і</sub> і суматора С. Якщо сигнал з суматора С дорівнює нулеві, що свідчить про збіг поточних значень кутових швидкостей КЛА і координат оптимальної кривої перемикання, то нуль-орган  $НО_3$  дає сигнал на БУМ для визначення оптимальних значень керувань  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$ . Одночасно цей же сигнал надходить у блоки Р і БЗК, які обирають відповідним чином коефіцієнти для відтворення потрібних дуг кіл. Далі повторно реалізується зазначений вище процес до наступного збігу координат точки поточного стану КЛА і координат відповідної оптимальної кривої перемикання. Виконання умови (9) забезпечується блоком відключення керувань БВК.

У другому варіанті оптимальний алгоритм демпфування раптових відхилень кутових швидкостей КЛА реалізується відповідною програмою з відтворенням на моніторі повного фазового портрета компенсованої оптимальної системи. В цьому варіанті можлива реалізація оптимального програмного оптимального демпфування раптових відхилень кутових швидкостей в автоматичному режимі при виконанні умови (9) і вимоги до тривалості процесу стабілізації, яка повинна бути більшою за тривалість оптимального процесу демпфування раптових відхилень кутових швидкостей в задачі максимальної швидкодії, тобто при  $k \rightarrow \infty$  у функціоналі (8). Крім того, на відміну від першого варіанту при необхідності в цьому варіанті можливе також ручне керування з використанням повного фазового портрета компенсованої оптимальної системи на екрані монітора.

## ВИСНОВКИ

На основі принципу максимуму і методу фазової площини розв'язано задачу синтезу оптимального по витраті палива закону демпфування кутових швидкостей КЛА. Проблему наявності запізнювання в контурі керування пропонується



розв'язувати на основі методу компенсації Бесса [12]. Для цього в роботі отримано оптимальні криві перемикання і відключення керувань у компенсованій оптимальній системі демпфування раптових відхилень кутових швидкостей КЛА. Залежно від технічного оснащення КЛА пропонуються два варіанти реалізації алгоритму оптимального демпфування, а саме:

— автономний пристрій у бортовій системі керування КЛА при відсутності достатньо потужного бортового обчислювача;

— оптимальний алгоритм демпфування, реалізований повністю у бортовому обчислювачі КЛА при достатній для цього потужності.

Отримані криві перемикання і використання прогнозних моделей, які працюють періодично у зворотному прискореному масштабі часу, можуть служити основою і для розв'язування задачі оптимальної орієнтації (задача 2). Для цього необхідно до системи рівнянь (2) додати рівняння кутового положення КЛА, які пов'язують кутові швидкості з кутами Ейлера.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Анучин О. Н., Комарова И. Э., Порфирьев Л. Ф. *Бортовые системы навигации и ориентации искусственных спутников Земли*. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2004. 326 с.
2. Бровкин А. Г., Бурдыгов Б. Г., Гордийко С. В. и др. *Бортовые системы управления космическими аппаратами*. Под ред. А. С. Сырова. Москва: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 304 с.
3. Зеленський К. Х., Ігнатенко В. М., Стенін О. А. Структурна властивість оптимальних за витратами палива процесів управління в динамічних системах. *Адаптивні системи автомат. упр.* 2017. № 2 (31). С. 12—16.
4. Игнатенко Н. М., Кобелев Н. С., Громков А. С. *Тенденции развития корректирующих ракетных двигателей космических аппаратов*. Фундаментальные и прикладные исследования в области высоких космических технологий России и зарубежных стран. Под ред. С. Н. Фролов. Курск, 2015. С. 34—46.
5. Кравчук С. В., Шатский М. А., Коваль А. Ю. Принципы построения системы управления движением космического аппарата. *Космическая техника и технология*. 2010. № 38. С. 1—5.
6. Кулик А. С., Лученко О. А., Гавриленко О. И. Решение задачи прецизионной ориентации космического летательного аппарата. *Радиоэлектроника, информатика, управление*. Запорожье, 2005. С. 69—78.
7. Ловчаков В. И., Соловьев В. Э., Дорохов Ю. Ю. Модифицированный метод фазового пространства в решении задач быстрогодействия. *Изв. ТулГУ. Сер. Техн. науки*. 2013. Вып. 2. С. 217—224.
8. Пикина Г. А., Кочаровский Д. Н. Исследование системы с прогностическим алгоритмом максимального быстрогодействия. *Теплоэнергетика*. 2006. № 10. С. 49—52.
9. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. 4-е изд. Москва: Наука, 1989. 392 с.
10. Стенин А. А., Бурлаков В. М., Страхова Н. В. Оптимальное по расходу топлива управление угловым положением космического летательного аппарата. *Пробл. упр. и информ.* 1996. № 5. С. 109—118.
11. Athans M., Falb P. L. *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*. Courier Corporation, 2006. 879 p.
12. Bass R. W. Improved on-off Missile Stabilization. *Jet Propulsion*. 1956. 26. P. 415—417.
13. Beard R. W., Hadaegh F. Y. Fuel Optimization for Unconstrained Rotation of Spacecraft Formations. *J. Astronautical Sci.* 47(3). DOI: 10.1007/BF03546203.
14. Fagerholt K., Laporte G., Norstad I. Reducing fuel emissions by optimizing speed on shipping routes. *J. Oper. Res. Soc. Jap.* 2010. 61, № 3. P. 523—529.
15. Gulko F. B., Kogan B. Y., Lerner A. Y., Mikhailov N. N., Novoseltseva Z. A. Predictive control methods using high speed analog computers and its applications. *Automat. and Telemekhanika*. 1964. 25. P. 896—908.
16. Kim J.-G., Kim H.-J., Lee P. T.-W. Optimizing ship speed to minimize fuel consumption. *Transportation Letter*. 2014. 6, № 3. P. 109—117.
17. Kostyuk V. I., Stenin A. A., Ignatenko V. N. Optimal fuel control of systems with delay. *System Sci. Poland*. 1977. 3, № 2. P. 159—169.
18. Mikhalyov A. I., Stenin A. A., Ignatenko V. N., Soldatova M. A., Stenin A. S. Synthesis of optimal consumption fuels one class of linear nonstationary systems (the method of predicted control). System technologies. *Regional interuniversity collection*. 2018. № 6 (119). P. 64—72.
19. Polyak B., Shably L. Minimum fuel-consumption stabilization of a spacecraft at the Lagrangian points. *Automat. and Remote Contr.* 2019. 80(12). P. 2217—2228.

Стаття надійшла до редакції 11.08.2020; після доопрацювання 25.04.2021

## REFERENCES

1. Anuchin O. N., Komarova I. E., Porfiriev L. F. (2004). *Onboard navigation and orientation systems of artificial earth satellites*. Saint Petersburg: Central research Institute «Electropribor».
2. Brovkin A. G., Burdygov B. G., Gordiyko S. V., et al. (2010). *Onboard control systems for space vehicles*: Textbook. Moscow: MAI-PRINT Publishing house.
3. Zelenskiy K. H., Ignatenko V. M., Stenin O. A. (2017). Structural power of optimal vitrate control processes in dynamic systems. *Adaptive automatic control systems*, № 2 (31), 12–16.
4. Ignatenko N. M., Kobelev N. S., Gromkov A. S. (2015). *Trends in the development of correcting rocket engines of spacecraft*. Fundamental and applied research in the field of high space technologies of Russia and foreign countries. Eds S. N. Frolov et al. Kursk, 34–46.
5. Kravchuk S. V., Shatsky M. A., Koval A. Yu. (2010). Principles of construction of the spacecraft motion control system. *Kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya*, № 38, 1–5.
6. Kulik A. S., Luchenko O. A., Gavrilenko O. I. (2005). Solution of the problem of precession orientation of a space aircraft. *Radio electronics, computer science, control*. Zaporozhye, 69–78.
7. Lovchakov V. I., Solovyov V. E., Yu. Yu. (2013). Dorokhov Modified method of phase space in solving speed problems. *Izvestiya of Tula state University, series Technical Sci.*, 2, 217–224.
8. Pikina G. A., Kocharovskiy D. N. (2006). Investigation of a system with a predictive algorithm of maximum speed. *Teploenergetika*, № 10, 49–52.
9. Pontryagin L. S., Boltyansky V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. (1989). *Mathematical theory of optimal processes*: 4th edition. Moscow: Nauka.
10. Stenin A. A., Burlakov V. M., Strakhova N. V. (1996). Optimal fuel consumption control of the angular position of the spacecraft. *Probl. management and Inform.*, № 5, 109–118.
11. Athans M., Peter L. *Falv Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*. Courier Corporation, 2006.
12. Bass R. W. (1956). Improved on-off Missile Stabilization. *Jet Propulsion*, 26, 415–417.
13. Beard R. W., Hadaegh F. Y. Fuel Optimization for Unconstrained Rotation of Spacecraft Formations. *J. Astronautical Sci.*, 47(3). DOI: 10.1007/BF03546203
14. Fagerholt K., Laporte G., Norstad I. (2010). Reducing fuel emissions by optimizing speed on shipping routes. *J. Operational Res. Soc.*, 61, № 3, 523–529.
15. Gulko F. B., Kogan B. Y., Lerner A. Y., Mikhailov N. N., Novoseltseva Z. A. (1964). Predictive control methods using high speed analog computers and its applications. *Automatica and Telemekhanica*, 25, 896–908.
16. Kim J.-G., Kim H.-J., Lee P. T.-W. (2014). Optimizing ship speed to minimize fuel consumption. *Transportation Letters*, 6 (3), 109–117.
17. Kostyuk V. I., Stenin A. A., Ignatenko V. N. (1977). Optimal fuel control of systems with delay. *System Sci.*, 3 (2), 159–169.
18. Mikhalyov A. I., Stenin A. A., Ignatenko V. N., Soldatova M. A., Stenin A. S. (2018). Synthesis of optimal consumption fuels one class of linear nonstationary systems (the method of predicted control). *System technologies. Regional interuniversity collection*, № 6 (119), 64–72.
19. Polyak B., Shably L. (2019). Minimum fuel-consumption stabilization of a spacecraft at the Lagrangian points. *Automat. and Remote Contr.*, 80(12), 2217–2228.

Received 11.08.2020

Revised 25.04.2021

*A. A. Stenin*<sup>1</sup>, Professor of the Department of Technical Cybernetics, Dr.Sci. in Tech.

E-mail: alexander.stenin@yandex.ua

*V. P. Pasko*<sup>1</sup>, Associate Professor of Technical Cybernetics, Ph.D. in Tech.,

E-mail: vppasko@gmail.com

*I. G. Drozdovych*<sup>2</sup>, Senior Researcher, Ph.D. in Tech.,

E-mail: irina.drozdowicz@gmail.com

*M. O. Soldatova*<sup>1</sup>, Senior Lecturer, Department of Technical Cybernetics, Ph.D. in Tech.

E-mail: benten1093@gmail.com

<sup>1</sup> National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute named after Igor Sikorsky”

37 Peremohy Ave., Kyiv, 03056 Ukraine

<sup>2</sup> Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine

13 Chokolivsky Blvd, Kyiv, 03186 Ukraine

#### OPTIMAL DAMPING OF DEVIATIONS OF ANGULAR SPEEDS OF AN AXISYMMETRIC SPACE AIRCRAFT

This paper considers the problem of optimal fuel consumption damping of sudden deviations of angular velocities of an axisymmetric spacecraft with a constant speed of rotation around the main axis of symmetry. This assumption has some practical significance and may be due to the creation of artificial gravity on the spacecraft.

The idea of artificial gravity due to the rotation of an axisymmetric cylindrical spacecraft is based on the principle of equivalence of the force of gravity and the force of inertia. The urgency of the fuel consumption optimization problem is due to the presence of its limited stock onboard the spacecraft.

The optimization problem is solved based on the maximum principle and the phase plane method. The authors of the article determine the structure of optimal fuel consumption processes with three levels of control, and the number of their switches depends on the initial conditions.

Synthesized on the phase plane, the optimal switching curves divide the phase plane into eight curvilinear quadrants, which uniquely determine the values of the optimal control effects by the current values of the deviations of the angular velocities of the spacecraft. The problem of the possible presence of a delay in the control loop is proposed to be solved based on the Bess compensation method. To do this, the corresponding optimal curves of switching and disabling the controls are built as geometric locations of points removed for the time of delay from the found curves of switching and the beginning of coordinates accordingly. It allows us to avoid the emergence of steady self-oscillations in a control contour and to provide a condition of keeping the spacecraft in a given final state after the completion of the stabilization process. Depending on the technical equipment of the spacecraft, two variants of the optimal damping algorithm are offered, namely: an autonomous device in the onboard control system of the spacecraft in the absence of a sufficiently powerful onboard computer, or the optimal damping algorithm, implemented entirely in the onboard computer of the spacecraft in case of its sufficient power.

**Keywords:** axisymmetric spacecraft, angular stabilization of spacecraft, fuel consumption optimization, maximum principle, phase plane, optimal switching curves, Bess method, the predictive models.