

<https://doi.org/10.15407/knit2020.05.028>
УДК 539.3

А. П. ДЗЮБА^{1,2}, проф. кафедри теор. та комп'ютерної механіки, д-р техн. наук, голов. наук. співроб., Заслужений діяч науки і техніки України, Відмінник освіти України, нагороджений медалями: «За заслуги перед містом Дніпро», «За заслуги» ДП КБ «Південне», «За заслуги» Ін-ту технічної механіки НАНУ і ДКАУ, «Академік Володимир Моссаковський», орденом «За підтримку науки» Міжнар. фонду «Планета Альфреда Нобеля», Золотою медаллю «За досягнення» Укр. акад. соціального прогресу і творчості
E-mail: dzb@ua.fm

В. М. СІРЕНКО², заст. голов. конструктора, нач. комплексу з питань балістики, динаміки, аеродинаміки, газодинаміки, навантажень і міцності, канд. техн. наук. Лауреат Державної премії України, Лауреат премії Ленінського комсомолу, Заслужений працівник промисловості України, акад. Міжнародної академії астронавтики
E-mail: V.N.SIRENKO@i.ua

Д. В. КЛИМЕНКО², нач. відділу міцності, навантажень і динамічних характеристик, канд. техн. наук. Лауреат Державної премії України
E-mail: KLYMENKO_DV@hotmail.com

Л. Д. ЛЕВИТІНА¹, зав. навчальної лабораторії Обчислювальної механіки і міцності конструкцій кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки. Нагороджена медалями: «Академік Володимир Моссаковський», «За вірну службу ДНУ»
E-mail: LDLora@i.ua

Д. А. ЧЕРЕНКОВ², інж. відділу міцності, навантажень і динамічних характеристик
E-mail: cherenkovd@gmail.com

¹ Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Проспект Гагаріна 72, Дніпро, Україна, 49010

² Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля
вул. Криворізька 3, Дніпро, Україна, 49008

ОПТИМІЗАЦІЯ КОМПОЗИТНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

Розглянуто задачу вагової оптимізації параметрів виготовленої методом неперервної перехресної намотки багатощарової композитної оболонки обертання при осесиметричному навантаженні. Шари оболонки розташовані симетрично відносно серединної поверхні. Як параметри прийнято змінні уздовж меридіана кути намотування армувального матеріалу і товщина шарів. Запропоновано алгоритм автоматизованого визначення пружних постійних композитного матеріалу змінної уздовж меридіана оболонки анізотропії. Враховано зв'язок структури композитного матеріалу з технологічним процесом виготовлення оболонки шляхом її намотування армувальною стрічкою під різними кутами до осі обертання. Як вихідні використовуються значення чотирьох пружних постійних, отриманих в результаті експериментального випробування зразків-свідків композитного матеріалу уздовж і ортогонально армуванню. Отримано рівняння стану моментної теорії оболонок змінної уздовж меридіана ортотропії і товщини стінки як крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Застосування необхідних умов оптимальності у формі принципу максимуму Понтрягіна при наявності довільних фазових обмежень дозволило звести багатопараметричну задачу до послідовності

Цитування: Дзюба А. П., Сіренко В. М., Клименко Д. В., Левитіна Л. Д., Черенков Д. А. Оптимізація композитних оболонок обертання методами теорії оптимальних процесів. *Космічна наука і технологія*. 2020. **26**, № 5 (126). С. 28—37.
<https://doi.org/10.15407/knit2020.05.028>

екстремальних задач суттєво меншої розмірності. Такий підхід суттєво спрощує врахування умов міцнісної надійності та технологічних і конструктивних вимог реального проектування і процес відшукування оптимального проекту у цілому. Приведено результати оптимізації двошарової склопластикової оболонки обертання у вигляді зміни розподілу товщини шарів та кута намотки скловолокна. Матеріали дослідження можна використати для зниження матеріаломісткості елементів конструкцій ракетно-космічної техніки та в інших галузях.

Ключові слова: композитна оболонка обертання, кути намотування, товщина шарів, усереднені механічні характеристики, вагова оптимізація, принцип максимуму Понтрягіна.

ВСТУП

Високі експлуатаційні характеристики тонкостінних конструкцій з композитних матеріалів, а також можливості сучасних технологій виготовлення композитних оболонок досить складної форми зі змінними параметрами і, зокрема, зі змінною товщиною шарів (методом безперервного намотування з включеннями), а також можливості реалізації фактично довільних схем армування зумовлюють все більш широке їхнє використання в різних галузях сучасного машинобудування [4, 9—13, 17]. Наявність досить ефективних алгоритмів прямого розрахунку таких конструкцій дозволяють не тільки широко використовувати математичні методи відшукування їхніх оптимальних параметрів, а й реалізовувати такі проекти у практиці проектування і виготовлення реальних конструктивних елементів з композитних матеріалів.

МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ

Розглядається довільна оболонка обертання, виготовлена з односпрямованих армувальних ниток методом безперервного перехресного намотування. Приймається, що стінка оболонки зібрана з n шарів, симетрично розташованих відносно її серединної поверхні, а кожен шар складається з ниток, розташованих почергово під кутами $\pm \phi_i$ ($i = 1, \dots, n$) до осі оболонки. Таким чином, структура матеріалу оболонки обертання безпосередньо пов'язана з технологічним процесом виготовлення конструкції (шляхом її намотування армувальною стрічкою (ниткою), попередньо просоченою сполучною речовиною з подальшою полімеризацією), і визначається змінними вздовж меридіана оболонки кутами армування $\phi_i = \phi_i(s)$ і відповідними товщинами шарів $h_i = h_i(s)$.

При цьому

$$\begin{aligned} \phi_i^H(s) &\leq \phi_i(s) \leq \phi_i^B(s), \\ h_i^H(s) &\leq h(s) \leq h_i^B(s), \\ \sum_i^n h_i(s) &= h, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\phi_i^H(s)$, $\phi_i^B(s)$ — деякі граничні значення кутів намотування, які визначаються формою поверхні оболонки, натягом стрічки та іншими параметрами технологічного процесу виготовлення оболонки, $h_i^H(s)$, $h_i^B(s)$, $h(s)$ — граничні значення товщини i -х шарів і всього пакета з n шарів відповідно.

Вибір критерію міцності виготовленого таким чином композитного матеріалу оболонки — окрема досить складна проблема. Справа в тому, що відомими критеріями міцності реальний процес руйнування композитного матеріалу описується все ще недостатньо достовірно. Це пов'язано з тим, що руйнування композитів визначається безліччю факторів: розривом волокон в зонах розтягування, втратою їхньої стійкості при стисканні, розшаруванням між сполучним і армувальним матеріалом або окремими шарами, розтріскуванням наповнювача, утворенням і розвитком тріщин, а також появою інших пошкоджень різної природи і в різній послідовності. Тому при оцінці міцності неоднорідних композитних конструкцій їхній матеріал часто наділяється деякими усередненими механічними характеристиками і відповідними властивостями міцності. Одним з таких критеріїв є енергетичний критерій Хілла [11, 16]:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1^*}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^{*2}} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2^*}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{12}^*}\right)^2 \leq 1, \quad (2)$$

де $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ — розрахункові значення напруж, $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \tau_{12}^*$ — межі міцності матеріалу при розтягуванні-стисненні уздовж армувальних елемен-

тів, уперек них і при випробуваннях на зсув. При цьому міцність матеріалу при розтягуванні і стисненні вважається однаковою. У ряді випадків з метою зменшення обчислювальної витратності пошукового алгоритму, що важливо в задачах пошуку оптимального розташування ниток по траєкторіях максимальних головних напружень, як окремий випадок (2) використовується ще простіша перша теорія міцності:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_1^* \leq [\sigma], \\ \sigma_2 &= \sigma_2^* \leq [\sigma].\end{aligned}$$

Визначення пружних сталей композитного матеріалу часто здійснюється шляхом заміни вихідного гетерогенного матеріалу деяким умовним однорідним анізотропним (ортотропним) середовищем. Різні варіанти підходу до усереднення механічних характеристик такого анізотропного матеріалу ґрунтуються, як правило, на розрахунково-експериментальних методиках [1, 5–7, 14–16, 18].

У поданій роботі за досліджуваний елемент приймається смужка, виділена з окремого шару, що перебуває в умовах плоского напруженого стану та наділяється певними властивостями жорсткості при розтягуванні-стисненні у двох ортогональних напрямках і зсуві.

В однонапрявленому (армованому в одному напрямку) шарі матеріалу напруги σ_1^i сприймаються волокнами, а σ_2^i, τ_{12}^i — наповнювачем.

Основні фізичні співвідношення для i -го шару в системі координат, пов'язаній з напрямком армування, можуть бути подані співвідношеннями узагальненого закону Гука [1, 11]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^i &= \sigma_1^i / E_1^i - \mu_{12}^i \sigma_2^i / E_2^i, \\ \varepsilon_2^i &= \sigma_2^i / E_2^i - \mu_{21}^i \sigma_1^i / E_1^i, \\ \varepsilon_{12}^i &= \tau_{12}^i / G_{12}^i.\end{aligned}\quad (3)$$

Ці ж співвідношення для напруг мають вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_1^i &= \bar{E}_1^i (\varepsilon_1^i + \mu_{12}^i \varepsilon_2^i), \\ \sigma_2^i &= \bar{E}_2^i (\varepsilon_2^i + \mu_{21}^i \varepsilon_1^i), \\ \tau_{12}^i &= G_{12}^i \varepsilon_{12}^i, \\ \bar{E}_j^i &= E_j^i / (1 - \mu_{12}^i \mu_{21}^i), \quad j=1, 2.\end{aligned}\quad (4)$$

При цьому чотири пружні постійні для кожного шару (E_1^i, E_2^i — модулі пружності при навантаженні в напрямку армування і в ортогональному напрямку відповідно, G_{12}^i — модуль зсуву, μ_{12}^i — коефіцієнт Пуассона) визначаються експериментально, а інший коефіцієнт Пуассона μ_{21}^i можна знайти із умови симетрії

$$E_1^i \mu_{12}^i = E_2^i \mu_{21}^i.$$

Розглянемо тепер елемент, складений з n шарів, кожен з яких визначається своєю товщиною h_i і кутом армування ϕ_i у системі координат (α, β) . Складові $\sigma_\alpha^i, \sigma_\beta^i, \tau_{\alpha\beta}^i$ напружень для окремих шарів можна виразити через напруження вздовж і уперек волокон кожного i -го шару з умов рівноваги елемента, розташованого на похилій площині в осях (α, β) під кутом ϕ_i , у такий спосіб:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^i &= \sigma_1^i \cos^2 \phi_i + \sigma_2^i \sin^2 \phi_i + \tau_{12}^i \sin 2\phi_i, \\ \sigma_\beta^i &= \sigma_1^i \sin^2 \phi_i + \sigma_2^i \cos^2 \phi_i + \tau_{12}^i \sin 2\phi_i, \\ \tau_{\alpha\beta}^i &= (\sigma_1^i - \sigma_2^i) \sin \phi_i \cos \phi_i.\end{aligned}\quad (5)$$

Аналогічним чином можна подати і зв'язок деформацій $\varepsilon_1^i, \varepsilon_2^i, \varepsilon_{12}^i$ волокон і наповнювача на майданчиках, розташованих під кутом ϕ_i , через деформації $\varepsilon_\alpha^i, \varepsilon_\beta^i, \varepsilon_{\alpha\beta}^i$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^i &= \varepsilon_\alpha^i \cos^2 \phi_i + \varepsilon_\beta^i \sin^2 \phi_i + \varepsilon_{\alpha\beta}^i \sin \phi_i \cos \phi_i, \\ \varepsilon_2^i &= \varepsilon_\alpha^i \sin^2 \phi_i + \varepsilon_\beta^i \cos^2 \phi_i - \varepsilon_{\alpha\beta}^i \sin \phi_i \cos \phi_i, \\ \varepsilon_{12}^i &= (\varepsilon_\beta^i - \varepsilon_\alpha^i) \sin 2\phi_i + \varepsilon_{\alpha\beta}^i \cos 2\phi_i.\end{aligned}\quad (6)$$

Приймається також, що в умовах плоского напруженого стану напруження по товщині кожного шару будуть постійними, тобто деформації окремих шарів будуть однаковими.

У цих умовах зусилля $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$ в серединній поверхні в глобальних координатах (α, β) дорівнюють

$$\begin{aligned}N_\alpha &= \sum_{i=1}^n \sigma_\alpha^i h_i, \quad N_\beta = \sum_{i=1}^n \sigma_\beta^i h_i, \\ N_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^n \tau_{\alpha\beta}^i h_i.\end{aligned}\quad (7)$$

При цьому зусилля $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}$ пов'язані через узагальнені жорсткості $B_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) з відповідними рівними для всіх шарів деформаціями $\varepsilon_\alpha^i, \varepsilon_\beta^i, \varepsilon_{\alpha\beta}^i$ елемента в координатах (α, β) спів-

відношеннями

$$\begin{aligned} N_\alpha &= B_{11}\varepsilon_\alpha + B_{12}\varepsilon_\beta + B_{13}\varepsilon_{\alpha\beta}, \\ N_\beta &= B_{21}\varepsilon_\alpha + B_{22}\varepsilon_\beta + B_{23}\varepsilon_{\alpha\beta}, \\ N_{\alpha\beta} &= B_{31}\varepsilon_\alpha + B_{32}\varepsilon_\beta + B_{33}\varepsilon_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Підставляючи $\varepsilon_1^i, \varepsilon_2^i, \varepsilon_{12}^i$, з (6) у вирази (4), а обчислені у (4) величини $\sigma_1^i, \sigma_2^i, \tau_{12}^i$ — у (5), і далі $\sigma_\alpha^i, \sigma_\beta^i, \tau_{\alpha\beta}^i$ — у (7), з урахуванням (8) можна отримати вирази для узагальнених жорсткостей у вигляді [1, 11]

$$\begin{aligned} B_{11} &= \sum_{i=1}^n h_i (\bar{E}_1^i \cos^4 \phi_i + 2\bar{E}_1^i \mu_{12}^i \sin^2 \phi_i \cos^2 \phi_i + \\ &\quad + \bar{E}_2^i \sin^4 \phi_i + G_{12}^i \sin^2 2\phi_i), \\ B_{12} &= B_{21} = \sum_{i=1}^n h_i [(\bar{E}_1^i + \bar{E}_2^i) \sin^2 \phi_i \cos^2 \phi_i + \\ &\quad + \bar{E}_1^i \mu_{12}^i (\cos^4 \phi_i + \sin^4 \phi_i) - G_{12}^i \sin^2 2\phi_i], \\ B_{22} &= \sum_{i=1}^n h_i (\bar{E}_1^i \sin^4 \phi_i + \bar{E}_2^i \cos^4 \phi_i + \\ &\quad + 2\bar{E}_1^i \mu_{12}^i \sin^2 \phi_i \cos^2 \phi_i + G_{12}^i \sin^2 2\phi_i), \\ B_{13} &= B_{31} = \sum_{i=1}^n h_i \sin \phi_i \cos \phi_i \times \\ &\quad \times [\bar{E}_1^i (1 - \mu_{12}^i) \cos^2 \phi_i - \\ &\quad - \bar{E}_2^i (1 - \mu_{21}^i) \sin^2 \phi_i - 2G_{12}^i \cos 2\phi_i], \\ B_{23} &= B_{32} = \sum_{i=1}^n h_i \sin \phi_i \cos \phi_i \times \\ &\quad \times [\bar{E}_1^i (1 - \mu_{12}^i) \sin^2 \phi_i - \\ &\quad - \bar{E}_2^i (1 - \mu_{21}^i) \cos^2 \phi_i + 2G_{12}^i \cos 2\phi_i], \\ B_{33} &= \sum_{i=1}^n h_i [(\bar{E}_1^i + \bar{E}_2^i - 2\bar{E}_1^i \mu_{12}^i) \times \\ &\quad \times \sin^2 \phi_i \cos^2 \phi_i + G_{12}^i \cos^2 2\phi_i]. \end{aligned} \quad (9)$$

Якщо ввести середні напруження для пакета з n шарів при плоскому напруженому стані

$$\sigma_\alpha = N_\alpha / h, \quad \sigma_\beta = N_\beta / h, \quad \tau_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta} / h, \quad (10)$$

де h — сумарна товщина пакета (див. вираз (1)), та розв'язуючи далі (8) відносно деформацій $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{\alpha\beta}$ з урахуванням (9) і прирівнюючи їх деформаціям, виписаним за законом Гука у вигляді, аналогічному (3), в координатах (α, β) для пакета з n шарів, можна отримати середні модулі пружності для довільної схеми армування [11]:

$$\begin{aligned} E_\alpha &= B / (B_{22}B_{33} - B_{23}^2), \\ E_\beta &= B / (B_{11}B_{33} - B_{13}^2), \\ G_{\alpha\beta} &= B / (B_{11}B_{22} - B_{12}^2), \\ \mu_{\alpha\beta} &= (B_{12}B_{33} - B_{13}B_{23}) / (B_{11}B_{33} - B_{13}^2), \\ \mu_{\beta\alpha} &= (B_{12}B_{33} - B_{13}B_{23}) / (B_{22}B_{33} - B_{23}^2), \\ B &= [(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)B_{33} + 2B_{12}B_{13}B_{23} - \\ &\quad - B_{11}B_{23}^2 - B_{22}B_{13}^2] / h. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким чином, підставляючи значення фізико-механічних характеристик матеріалу шару вздовж і впоперек волокон $E_1^i, E_2^i, G_{12}^i, \mu_{12}^i, \mu_{21}^i$, які попередньо визначаються експериментально, а також товщини шарів h_i та реальних кутів намотки волокна ϕ_i в (9), і далі — в (11), отримуємо фізико-механічні характеристики матеріалу напрямках координат (α, β) .

Для розглянутого в роботі випадку симетричного армування, при якому структура матеріалу утворюється парами однакових шарів, розташованих під кутами $\pm \phi_i$, рівності (8) набувають вигляду

$$\begin{aligned} N_\alpha &= B_{11}\varepsilon_\alpha + B_{12}\varepsilon_\beta, \\ N_\beta &= B_{21}\varepsilon_\alpha + B_{22}\varepsilon_\beta, \\ N_{\alpha\beta} &= B_{33}\varepsilon_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (12)$$

а закон Гука —

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \mu_{\alpha\beta} \frac{\sigma_\beta}{E_\beta}, \\ \varepsilon_\beta &= \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} - \mu_{\beta\alpha} \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha}, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Середні пружні постійні матеріалу в цьому випадку можуть бути обчислені у вигляді

$$\begin{aligned} E_\alpha &= (B_{11} - B_{12}^2 / B_{22}) / h, \\ E_\beta &= (B_{22} - B_{12}^2 / B_{11}) / h, \\ G_{\alpha\beta} &= B_{33} / h, \\ \mu_{\alpha\beta} &= B_{12} / B_{11}, \\ \mu_{\beta\alpha} &= B_{12} / B_{22}. \end{aligned} \quad (14)$$

Виписані вище пружні постійні $E_\alpha, E_\beta, G_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}, \mu_{\beta\alpha}, B_{ij}$ є функціями товщини $h_i = h_i(s)$ і кутів намотування $\phi_i = \phi_i(s)$, тобто керованими проектними параметрами реального технологічного процесу виготовлення відповідного оболонкового елемента, раціональні значення яких можуть бути обрані відповідно до прийнятих критеріїв якості при виконанні умов міцності.

ЗАДАЧА РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ

Задача розрахунку виготовленої методом безперервного намотування анізотропної оболонки обертання, що перебуває під дією довільного осесиметричного навантаження, вирішується у припущенні лінійної залежності між компонентами напруженого стану і пружних деформацій, а також справедливості співвідношень Коші зв'язку деформацій з переміщеннями.

При виведенні рівнянь стану оболонка вважається тонкою, пружною, має сумарну товщину h симетрично розташованих відносно середньої поверхні шарів, її шари деформуються без проковзування, а значення фізико-механічних характеристик матеріалу приймаються у меридіональному і навкружному напрямках (головних кривизн) поверхні оболонки, яким відповідають індекси (α, β) . У цьому випадку з урахуванням гіпотез Кірхгофа напруження пов'язані з деформаціями і змінами кривизн так:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^i &= b_{11}^i \varepsilon_\alpha + b_{12}^i \varepsilon_\beta + z(b_{11}^i \chi_\alpha + b_{12}^i \chi_\beta), \\ \sigma_\beta^i &= b_{12}^i \varepsilon_\alpha + b_{22}^i \varepsilon_\beta + z(b_{12}^i \chi_\alpha + b_{22}^i \chi_\beta), \end{aligned} \quad (15)$$

де із порівняння (8), (9), (15) для b_{jk}^i мають місце співвідношення

$$B_{jk} = \sum_{i=1}^n b_{jk}^i h_i.$$

Вирази для зусиль записуються далі у вигляді (7), а для моментів будуть такими [1]:

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \sum_{i=1}^n \sigma_\alpha^i h_i^3 / 12, \\ M_\beta &= \sum_{i=1}^n \sigma_\beta^i h_i^3 / 12. \end{aligned} \quad (16)$$

Вирази для зусиль через деформації середньої поверхні оболонки запишуться у вигляді (8), де для розглянутого випадку $B_{13} = B_{23} = 0$, а для моментів будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} M_\alpha &= D_{11} \chi_\alpha + D_{12} \chi_\beta, \\ M_\beta &= D_{12} \chi_\alpha + D_{22} \chi_\beta, \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$D_{jk} = \sum_{i=1}^{2n} b_{jk}^i h_i^3 / 12.$$

Рівняння рівноваги і геометричні співвідношення (у припущенні, що впливом зміни кутів намотування уздовж меридіана можна знехтувати) у даному випадку залишаються такими ж, як і для ізотропної оболонки [2].

Виключаючи змінні N_β, M_β за допомогою (12), (17) та підстановки

$$\begin{aligned} N_\beta &= \frac{B_{12}}{B_{11}} N_\alpha + \frac{\Delta}{B_{11}} \varepsilon_\beta, \\ M_\beta &= \frac{D_{12}}{D_{11}} M_\alpha + \frac{\Omega}{D_{11}} \chi_\beta, \end{aligned}$$

де $\Delta = B_{11} B_{22} - B_{12}^2$; $\Omega = D_{11} D_{22} - D_{12}^2$, рівняння стану анізотропної багат шарової оболонки можуть бути отримані через компоненти вектора основних змінних:

$$\bar{u} = (\xi, \vartheta, N_r, M_\alpha r, \zeta), \quad (18)$$

де ξ, ζ, ϑ — радіальне і осьове переміщення та кут повороту нормалі меридіана оболонки, N_r — розпірна сила, M_α — вигинальний момент у напрямку меридіана, $r(s), \theta(s)$ — радіус паралельного кола і кут між нормаллю до меридіана оболонки і її віссю відповідно. Ці параметри пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{ds} &= \varepsilon_\alpha \cos \theta - \vartheta \sin \theta, \\ \frac{d\zeta}{ds} &= \varepsilon_\alpha \sin \theta + \vartheta \cos \theta, \\ N &= N_\alpha \cos \theta + Q \sin \theta, \end{aligned}$$

де Q — інтенсивність поперечної сили в нормальному до меридіана перетині.

У цих умовах, вибираючи за зміну інтегрування довжину меридіана s ($s_0 \leq s \leq s_L$), аналогічно [2] отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{ds} &= -\frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\cos\theta}{r} \xi - \vartheta \sin\theta + \\ &+ \frac{\cos^2\theta}{c_{11}r} Nr + \frac{F(s)}{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2B_{11}r}, \\ \frac{d\vartheta}{ds} &= -\frac{D_{12}}{D_{11}} \frac{\cos\theta}{r} \vartheta + \frac{1}{D_{11}r} M_\alpha r, \\ \frac{d(Nr)}{ds} &= \frac{\Delta}{B_{11}} \xi + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\cos\theta}{r} Nr + \\ &+ \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\sin\theta}{r} \frac{F(s)}{2\pi} - r q_r, \\ \frac{d(M_\alpha r)}{ds} &= \frac{\Omega}{D_{11}} \frac{\cos^2\theta}{r} \vartheta + \sin\theta Nr + \\ &+ \frac{D_{12}}{D_{11}} \frac{\cos\theta}{r} (M_\alpha r) - \cos\theta \frac{F(s)}{2\pi}, \\ \frac{d\zeta}{ds} &= -\frac{B_{12}}{B_{11}} \sin\theta \cdot \frac{\xi}{r} + \vartheta \cos\theta + \\ &+ \frac{1}{B_{11}} \frac{\sin 2\theta}{2r} Nr + \frac{\sin^2\theta}{B_{11}} \frac{F(s)}{2\pi}. \end{aligned} \quad (19)$$

Тут $q_r = q_\alpha \cos\theta + q_\beta \sin\theta$ — радіальна складова зовнішнього навантаження, $F(s)$ — сумарне осьове навантаження на виділену частину оболонки.

Система (19) доповнюється крайовими умовами, що відповідають умовам закріплення торців оболонки:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\bar{u}(s_0)) &= 0, \quad \bar{u}(s_0) \in U_0, \\ \bar{\Psi}(\bar{u}(s_L)) &= 0, \quad \bar{u}(s_L) \in U_L. \end{aligned} \quad (20)$$

У поданому вигляді система рівнянь (19) збігається з системою рівнянь для ізотропної оболонки [2] з точністю до коефіцієнтів.

НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ

Задача оптимального проектування виготовленої перехресною намоткою багатощарової ком-

позитної оболонки обертання інтерпретується як задача оптимального управління і полягає у знаходженні змінних уздовж меридіана товщини $h_i(s)$ і (або) кутів $\phi_i(s)$ намотування волокон.

Завдання [3, 8, 9] полягає у знаходженні компонентів вектора оптимального керування $\bar{\delta}(h(s), \phi(s), s) \in D_\delta$ із умови мінімуму функціонала

$$\int_{s_0}^{s_L} f_0(\bar{u}, \bar{\delta}, s) ds \quad (21)$$

для процесів, що описуються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{du_i}{ds} = f_i(\bar{u}, \bar{\delta}, s), \quad i = 1, \dots, m, \quad (22)$$

з крайовими умовами (20) при наявності обмежень на керування та фазові змінні (зокрема) у вигляді

$$\bar{F}(\bar{u}, \bar{\delta}, s) \leq 0. \quad (23)$$

У задачах оптимізації параметрів конструкцій машинобудування рівняння (22) описують їхній стан, зокрема оболонкових елементів (19), і є лінійними по фазових змінних (або зводяться до них) і нелінійними по керуванню $\bar{\delta}(s)$; крайові умови (20) — це умови закріплення або взаємодії підконструкцій, де $\bar{\Psi}(u(s_e))$ — функції крайових умов на лівому $s_0 (e=0)$ і правому $s_L (e=L)$ кінцях траєкторії; p_e — кількість крайових умов при s_0 або s_L .

За обмеження приймаються умови міцності (див. (2)), жорсткості, стійкості, конструктивні і технологічні вимоги, більшість з яких можуть бути представлені у вигляді (23).

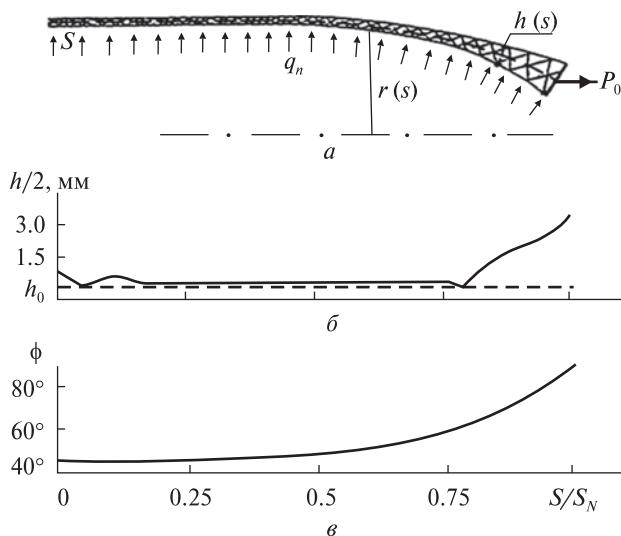
Необхідні умови оптимальності формулюються у формі принципу максимуму Понтрягіна при наявності фазових обмежень [3]. Розширений гамільтоніан і система для спряжених функцій з крайовими умовами трансверсальності мають вигляд

$$H^* = H + \bar{v} \cdot \bar{F}, \quad (24)$$

$$\frac{d\bar{\lambda}_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial u_i} - \sum_{j=1}^m v_j(x) \cdot \frac{\partial F_j}{\partial u_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (25)$$

$$\bar{\lambda}(s_e) = \sum_{j=1}^{p_e} c_j \text{grad} \Psi_j(\bar{u}(s_e)), \quad (26)$$

де $H = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i$, $\bar{\lambda}(s)$ — спряжені функції, які задовольняють рівняння (25) з крайовими умовами



Двошарова оболонка обертання (а), оптимальні зміни товщини стінки (б) і кута намотування (в) склострічки композитної оболонки

трансверсальності (26), компонентами векторастовпця \bar{F} є складові m узагальнених обмежень (20), c , $v(s)$ — множники і функції Лагранжа; а оптимальне керування $\bar{\delta}^*(s)$ ($s \in [s_0, s_L]$) відшукується із умови максимуму гамільтоніана

$$H^*(\bar{u}(s), \bar{\lambda}^*(s), \bar{\delta}^*(s), s) = \sup_{\bar{\delta} \in D_\delta} H^*(\bar{u}(s), \bar{\lambda}^*(s), \bar{\delta}(s), s), \quad (27)$$

що у принципі встановлює залежність $\bar{\delta}^*(s) = \bar{\delta}^*(\bar{u}^*(s), \bar{\lambda}^*(s), s)$, і в ході ітераційного процесу дозволяє визначити $\bar{u}^*(s)$, $\bar{\lambda}^*(s)$, і далі — оптимальне управління $\bar{\delta}^*(s)$ для всіх $s_0 \leq s \leq s_L$.

Таким чином, застосування підходу дозволяє звести традиційну багатовимірну задачу нелінійного програмування визначення дискретних змінних параметрів (кількість яких дорівнює добутку кількості вузлових точок інтегрування вихідної системи (22), (20) на кількість $2n$ змінних параметрів в цих точках, що для багатошарових оболонок обертання при традиційному підході вирішення скінченно-вимірної задачі оптимізації виявляється, як правило, занадто великим) до наступних етапів ітераційного процесу:

$$\bar{\delta}^{k-1} \rightarrow \bar{u}^k \rightarrow \bar{\lambda}^k \rightarrow \sup_{\bar{\delta}} H \rightarrow \bar{\delta}^k \quad (28)$$

які полягають у послідовному розв'язанні крайових задач для основної (22), (20) і спряженої (25), (26) систем з метою відшукування $\bar{u}^*(s)$, $\bar{\lambda}^*(s)$ і послідовності допоміжних задач нелінійного програмування розмірності $2n$ шляхом максимізації гамільтоніана (27) за варійованими змінними $\bar{\delta}(s)$ у фіксованих (вузлових) точках проміжку інтегрування на кожному кроці ітераційного процесу (28).

Це дозволяє не тільки більш коректно сформулювати вихідну задачу оптимального проектування, але і спростити процес відшукування параметрів оптимізації шляхом фрагментації задач на прості складові, можливості застосування на окремих етапах аналітичних та аналітико-числових методів досліджень і, таким чином, істотно зменшити обчислювальні витрати на пошук оптимального проекту в цілому [8, 9].

ЗАДАЧА ВАГОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ КОМПОЗИТНОЇ ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ

При осесиметричному навантаженні задача полягає у знаходженні змінної вздовж меридіана товщини стінки $h(s)$ і кута намотування $\pm \phi(s)$ з умови мінімуму обсягу матеріалу

$$V = \min \int_{s_0}^{s_L} 2\pi r(s)h(s) ds$$

при виконанні рівнянь стану оболонки у вигляді крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами (19) з крайовими умовами закріплення (20) (рисунком, а), наявності обмежень міцності (2) і конструктивних вимог (1).

Як приклад, розглядається задача оптимального розподілу матеріалу виготовленої перехресною намоткою склострічки двошарової оболонки обертання (рисунком, а), яка перебуває під рівномірним внутрішнім тиском q_n при наявності обмежень $\sigma_1 \leq [\sigma_1]$; $\sigma_2 \leq [\sigma_2]$; $h \geq h_0$, $\pi/2 \geq \phi(s) \geq \phi_0$.

Параметри оболонки такі:

$$q_n = 9.8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2,$$

$$P_0 = \pi q_n r^2(s_L),$$

$$E_\alpha = 0.52 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2,$$

$$E_\beta = 0.15 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2,$$

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= 0.242, \mu_\beta = 0.165, \\ G_{\alpha\beta} &= 0.6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ [\sigma_1] &= 11.7 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \\ [\sigma_2] &= 3.1 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2, \\ s_0 &= 0, s_L = 1.08 \text{ м}, \\ r_0 &= 0.788 \text{ м}, r_L = 0.57 \text{ м}, \\ h_0 &= 4 \text{ мм}, \varphi_0 = 45^\circ. \end{aligned}$$

На рисунку *б* наведено оптимальний розподіл товщини $h(s)$, а на рисунку *в* — кута намотування склострічки $j(s)$ склопластикової оболонки (рисунки, *а*), знайдених із умов мінімуму обсягу її матеріалу. З отриманих результатів випливає, що застосування підходу дозволило зменшити вагу композитної оболонки з оптимальними параметрами на 24.3 % у порівнянні з оболонкою постійної товщини при їхній однаковій несучій здатності.

Слід зазначити, що при такому підході досить просто можна розглянути цілий ряд інших задач визначення $h_i(s)$, $\phi_i(s)$, наприклад у таких постановках:

а — мінімуму обсягу матеріалу, необхідного для виготовлення оболонки при наявності обмежень міцності і жорсткості;

б — мінімуму максимального напруження при заданій вазі матеріалу оболонки і обмеженнях на максимальні переміщення;

в — мінімуму переміщень або кутів повороту нормалі на вільному кінці оболонки, виготовленої з заданої кількості матеріалу при обмеженнях міцності тощо.

Переваги підходу, пов'язаного з використанням необхідних умов оптимальності у формі принципу максимуму Понтрягіна для вирішення зазначених вище задач, обумовлена як наявністю неперервно змінних уздовж меридіана оболонки варійованих параметрів $h_i(s)$, $\phi_i(s)$, так і характером обмежень, які повинні виконуватися для всіх точок $s_0 \leq s \leq s_L$.

В цілому застосування запропонованого підходу дозволяє звести багатовимірну задачу нелінійного програмування до послідовності задач значно меншої розмірності, що істотно спрощує процес відшукування оптимального проекту.

ЛІТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. *Общая теория анизотропных оболочек*. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Бидерман В. Л. *Механика тонкостенных конструкций*. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
3. Брайсон, Хо Ю-ши. *Прикладная теория оптимального управления*. М.: Мир, 1972. 544 с.
4. Голушко С. К., Немировский Ю. В. *Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения*. М.: Физматлит, 2008. 432 с.
5. Гребенюк С. Н. Упругие характеристики композитного материала с транслопной матрицей и волокном. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*: зб. наук. праць. 2011. Вип. 12. С. 62—68.
6. Гребенюк С. Н. Определение предельного модуля упругости на основе энергетического условия согласования. *Вестн. Херсонского НТУ*. 2012. Вып. 2 (45). С. 106—112.
7. Гребенюк С. М., Клименко М. І. Визначення ефективного модуля пружності композита при нормальному розподілі модулів пружності волокна та матриці. *Вестн. Херсонского НТУ*. 2014. Вып. 3 (50). С. 254—258.
8. Дзюба А. П. Метод послідовних набліжень розв'язування задач оптимального керування з обмеженими фазовими координатами для оптимізації силових елементів конструкцій. *Пробл. обчислювальної механіки і міцності конструкцій*: зб. наук. праць. 1999. Вип. 5. С. 61—85.
9. Дзюба А. П., Сіренко В. М., Дзюба П. А., Сафронова І. А. Моделі та алгоритми оптимізації елементів неоднорідних оболоноквих конструкцій. Актуальні проблеми механіки: монографія. Під. ред. М. В. Полякова. Дніпро: Ліра, 2018. С. 225—243.
10. Механика композитов: монография в 12 т. Под общ. Ред. А. Н. Гузя. К.: Наукова думка, 1993—2003 гг. Т. 8. Статика элементов конструкций. Под ред. Я. М. Григоренко. 1999. 379 с.
11. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. *Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов*. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
12. Победра Б. Е. *Механика композиционных материалов*: Монография. М.: Наука, 1984. 400 с.
13. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андришин В. А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматгиз, 2013. 406 с.

14. Уитни Д. М. Упругие свойства оболочек, армированных волокнами. *Ракетная техника и космонавтика*. 1967. № 5. С. 170—173.
15. Хашин З., Розен Б. Упругие модули материалов, армированных волокнами. *Прикладная механика* (Trans ASME). 1964. № 2. С. 71—82.
16. Хилл Р. Теория механических свойств волокнистых композитных материалов. *Мех. ИЛ*. 1966. № 2. С. 131—149.
17. Шваб'юк В. І., Ротко С. В. *Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини*: Монографія. Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2015. 254 с.
18. Grebenyuk S. N. The shear modules of composite material with isotropic matrix and a fibre. *J. Appl. Math. and Mech.* 2014. **78**, No. 2. P. 270—276.

Стаття надійшла до редакції 10.10.2019

REFERENCES

1. Ambartsumjan S. A. (1974). *General theory of anisotropic shells*. Moscow: Nauka, 446 p.
2. Biderman V. L. (1977). *Mechanics of the thin-walled constructions*. Moscow: Mashinostroenie, 488 p.
3. Brajson Ho Yu-shy. (1972). *Applied theory of optimal management*. Moscow: Mir, 544 p.
4. Golushko S. K., Nemirovsky Yu. V. (2008). *Direct and reverse tasks of mechanics of resilient composite plastins and shells of rotation*. Moscow: Fizmatlit, 432 p.
5. Grebenyuk S. N. (2011). Resilient descriptions of composite material with a transtropna matrix and fibre. *Methods of decision of the applied tasks of mechanics of the deformed solid: col. of sci. art*. Dnepropetrovsk: Lira. Iss. 12, 62—68.
6. Grebenyuk S. N. (2012). Determination of the maximum module of resiliency on the basis of power condition of concordance. *Bull. Kherson NTU*, Iss. 2(45), 106—112.
7. Grebenyuk S. N., Klimenko M. I. (2014). Determination of the effective module of resiliency of composite at normal distribution of the modules of resiliency of fibre and matrix. *Bull. Kherson NTU*, Iss. 3(50), 254—258.
8. Dzyuba A. P. (1999). A method of the successive approximations untiing of tasks of optimal management is with limit phase coordinates for optimization of power elements of constructions. *Problems of computational mechanics and strength of syrcutures*. Dnepropetrovsk: Navchalyna kniga. Iss. 5, 61—85.
9. Dzyuba A. P., Sirenko V. N., Dzyuba P. A., Safronova I. A. (2018). Models and algorithms of optimization of elements of heterogeneous shell constructions. *Actual problems of mechanics: monograph. Und. ed. N. V. Poljakov*. Dnipro: Lira, 452 p.
10. Mechanics of compos: monograph in 12 vol. Und. the ed. A. N. Guzja. Kiev: Naukova Dumka, 1993—2003 rr. Vol. 8. Statics of elements of constructions. Und. the ed. Ja. M. Grigorenko. 1999. 379 p.
11. Obrazstov I. F., Vasilyev V. V., Bunakov V. A. (1977). *Optimal re-enforcement of shells of rotation from composition materials*. Moscow: Mashinostroenie, 144 p.
12. Pobedrya B. E. (1984). *Mechanics of composition materials*: Monograph. Moscow: Nauka, 400 p.
13. Solomonov Yu. S., Georgievsky V. P., Nedbay A. Ya., Andryushin V. A. (2013). *Applied tasks of mechanics of composite cylindrical shells*. Moscow: Fizmatlit, 406 p.
14. Uitni D. M. (1967). Resilient properties of the shells reinforced by fibres. *Misselry and cosmonautics*. No. 5, 170—173.
15. Hashin Z., Rozen B. (1964). Resilient modules of the materials reinforced by fibres. *Appl. mech.* (Trans ASME), No. 2, 71—82.
16. Hill R. (1966). Theory of mechanical properties of fibred composite materials. *Mechanics IL*, No. 2, 131—149.
17. Shvabyuk D. I., Rotko C. V. (2015). *Linear deformation, durability and firmness of composite shells of middle thickness*: Monograph. Lutsk: LNTU, 254 p.
18. Grebenyuk S. N. (2014). The shear modules of composite material with isotropic matrix and a fibre. *J. Appl. Math. and Mech.*, **78**, No. 2, 270—276.

Received 10.10.2019

A. P. Dzyuba^{1,2}, Professor of the Department of Theoretical and Computer Mechanics, Dr. Sci. in Tech., Principal Researcher, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine, Honored Educator of Ukraine, awarded with medals: «For services to the city of Dnipro», «For Merit» of Yuzhnoye state design office, «For Merit» of the Institute of Technical Mechanics NAS of Ukraine and SSA of Ukraine, «Academician Volodymyr Mossakovsky», the Golden medal «For Achievements» of the Ukrainian Academy of Social Progress and Creativity, awarded with the order «For the Support of Science» ICF «Alfred Nobel Planet» and other rewards.

E-mail: dzb@ua.fm

*V. N. Sirenko*², Deputy Chief Designer of Rocket & Space Launch Systems System Engineering – Head of Ballistics, Aerodynamics & Heat/Mass Transfer, Ph. Dr. in Tech., the Laureate of State Awards in Science and Technique of Ukraine, Honored Worker of industry of Ukraine, Acad. of IAA.

E-mail: V.N.SIRENKO@i.ua

*D. V. Klymenko*², Head of the Division of Strength, Loads, and Dynamic Characteristics, Ph. Dr. in Tech., the Laureate of State Award in Science and Technique of Ukraine

E-mail: KLYMENKO_DV@hotmail.com

*L. D. Levytina*¹, Head of Training Laboratory for Computational Mechanics and Strength of Structures, awarded with medals «Academician Volodymyr Mossakovsky», «For Faithful Service to DNU» and others.

E-mail: LDLora@i.ua

*D. A. Cherenkov*², Engineer of the Division of Strength, Loads, and Dynamic Characteristics

E-mail: cherenkovd@gmail.com

¹Oles Gonchar Dnipro National University
72 Gagarina Ave., Dnipro, 49010 Ukraine

²Yuzhnoye State Design Office
3 Kryvorizka Str., Dnipro, 49008 Ukraine

OPTIMIZATION OF COMPOSITE REVOLUTION SHELL BY METHODS OF THEORY OF THE OPTIMAL PROCESSES

We considered the problem of weight optimization of parameters of multi-layer composite shell produced by the method of continuous cross-winding under axisymmetric loading. Shell layers are placed symmetrically relative to the middle surface. The angles of the reinforcing material winding variable along the meridian and the thickness of layers are taken as the variation parameters. We propose an algorithm of the automated determination of the elastic constants of a composite material variable along the shell meridian anisotropy. The connection of the composite structure with the technological process of shell manufacturing by winding with a reinforcing tape under different angles to the axis of rotation is taken into account. The values of four elastic constants obtained as a result of experimental testing of witness specimens of the composite material along and orthogonal to the reinforcement are used as output. The equations of state of the moment theory of shells of the variable along the meridian orthotropy and wall thickness are obtained as a boundary value problem for a system of ordinary differential equations with variable coefficients. The use of the necessary optimality conditions in the form of the principle maximum of Pontryagin in the presence of arbitrary phrasal restraints made it possible to reduce the emerging multiparameter problem to a sequence of extremal problems of a significantly smaller dimension. This approach greatly simplifies taking into account the conditions of strength reliability, and technological and structural requirements of real design, and the process of finding an optimal project as a whole. The results of the optimization of a two-layer fiberglass shell of rotation are presented in the form of a change in the distribution of layers' thickness and the glass fiber winding angle. Materials of research can be used to reduce the material consumption of structural elements in rocket and space technology and other branches.

Keywords: composite revolution shell, angles of winding, thickness of layers, medalling of mechanical characteristics, weight optimization, principle maximum of Pontryagin.