

<https://doi.org/10.15407/knit2020.01.079>

УДК 536.24

Ю. М. МАЦЕВИТЫЙ¹,

акад. НАН України, д-р техн. наук, проф., зав. отд.

В. Н. СИРЕНКО²

зам. глав. констр., нач. комплекса, член-корр. МАА, канд. техн. наук

А. О. КОСТИКОВ¹

член-корр. НАН України, д-р техн. наук, зам. дир.

Н. А. САФОНОВ¹,

старш. науч. сотруд., канд. физ.-мат. наук,

E-mail: nicksaf@meta.ua

В. В. ГАНЧИН¹, вед. инж.

¹ Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,

ул. Дм. Пожарского 2/10, Харьков, Украина, 61046

² ГП «Конструкторское бюро «Южное» им. М. К. Янгеля»,

ул. Криворожская 3, Днепро, Украина, 49008

МЕТОДИКА ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

В статье для получения устойчивого решения обратной задачи теплопроводности применяется метод А. Н. Тихонова с эффективным алгоритмом поиска регуляризирующего параметра. Рассматриваются три обратные задачи. В первых двух определяются тепловые потоки в составном теле с идеальным и реальным тепловым контактом. В третьей обратной задаче теплопроводности при реальном тепловом контакте определяется термическое контактное сопротивление.

Искомые тепловые потоки в многослойных телах представляются в виде линейных комбинаций сплайнов Шенберга третьей степени с неизвестными коэффициентами, которые вычисляются путём решения системы линейных алгебраических уравнений. Эта система является следствием необходимого условия минимума функционала, в основу которого положен принцип наименьших квадратов отклонения моделируемой температуры от температуры, полученной в результате теплофизического эксперимента. Для регуляризации решений обратной задачи теплопроводности в этом функционале в качестве слагаемого к сумме квадратов используется стабилизирующий функционал с параметром регуляризации в качестве мультипликативного множителя. Он представляет собой сумму квадратов тепловых потоков, их первых и вторых производных с соответствующими множителями. Поиск регуляризирующего параметра осуществляется с помощью алгоритма, аналогичного алгоритму поиска корня нелинейного уравнения.

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности, тепловой поток, термическое контактное сопротивление, метод регуляризации А. Н. Тихонова, функционал, стабилизатор, параметр регуляризации, идентификация, аппроксимация, сплайн Шенберга третьей степени.

Цитування: Мацевитый Ю. М., Сиренко В. Н., Костиков А. О., Сафонов Н. А., Ганчин В. В. Методика идентификации нестационарных тепловых процессов в многослойных конструкциях. *Космічна наука і технологія*. 2020. **26**, № 1 (122). С. 79—89. <https://doi.org/10.15407/knit2020.01.079>

ВВЕДЕНИЕ

Решение обратных задач теплопроводности для идентификации тепловых процессов, происходящих в различном оборудовании, имеет особое значение как важный этап обеспечения адекватности математических моделей и проведения косвенных измерений параметров, которые невозможно или довольно сложно измерять непосредственно. В качестве объекта исследования в статье рассматриваются многослойные пластины или оболочки, к которым можно отнести и корпуса твердотопливных ракетных двигателей.

В первом приближении задача рассматривается в одномерной нестационарной линейной постановке. Соотношение толщины оболочки к её радиусу будем считать таким, что в уравнении теплопроводности кривизной оболочки можно пренебречь и рассматривать её как плоскую пластину. Такое допущение выбрано для упрощения изложения материала и не ограничивает применимость излагаемой методики в случае осевой симметрии оболочки, а также при переводе математической модели из прямоугольной в цилиндрическую систему координат.

Осуществляется одновременная идентификация нестационарного теплового потока, проходящего через пластину (оболочку) и термического контактного сопротивления между её слоями по результатам измерения температуры в одной или нескольких точках.

В предлагаемой методике решения совместно применяются:

- аппроксимация искомых величин по временной координате сплайнами Шенберга;
- метод функций влияния;
- метод регуляризации А. Н. Тихонова с эффективным алгоритмом поиска регуляризирующего параметра.

Обратная задача теплопроводности (ОЗТ) может быть формализована следующим образом:

$$A[f(T, M, \tau)] = T^{\text{экс}},$$

где $f(T, M, \tau)$ — искомая или искомые зависимости, которые в общем случае могут зависеть от температуры T , пространственных ко-

ординат точки M и временной координаты τ , $T^{\text{экс}}$ — заданная температура, которая имеет вид $T^{\text{экс}} = T(M, \tau)$ и в большинстве случаев известна из эксперимента (исходные данные), A — оператор, который связывает искомые зависимости с исходными данными $T^{\text{экс}}$. Такая задача, как и любая ОЗТ, ввиду нарушения причинно-следственной связи является некорректной по Адамару, что может служить причиной неустойчивости получаемого решения.

Для решения такой некорректной задачи ее либо сводят к условно-корректной, и регуляризация не проводится, либо оставляют некорректной, но применяют один из методов регуляризации [1—4, 6, 8]. Если нет теплофизического эксперимента, то $T^{\text{экс}}$ получают из решения соответствующей прямой задачи с добавлением некоторой случайной величины.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Тепловой процесс в двухслойной пластине с реальным контактом между слоями описывается следующей системой уравнений:

$$C_1 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L_1,$$

$$C_2 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad L_1 < x < L, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} = Q(\tau), \quad x = L, \quad \tau > 0, \quad (2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_1-0} = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_1+0},$$

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{R(\tau)} T \right) \Big|_{x=L_1-0} = \frac{1}{R(\tau)} T \Big|_{x=L_1+0}, \quad \tau > 0, \quad (3)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad (4)$$

$$T(x_j, \tau_k) = T_{j,k}^{\text{экс}}, \quad (5)$$

$$\tau_k = k\Delta\tau, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m},$$

где $Q(\tau)$ — искомый тепловой поток, x — пространственная координата, τ — время, $\lambda_i, C_i, i = 1, 2$ — теплопроводность и массовая теплоёмкость для каждого слоя соответственно, L —

толщина двухслойной пластины, L_1 — толщина первого слоя, T — температура, T_0 — начальная температура, $x_j, j = \overline{1, n}$ — пространственные координаты точек термометрирования, $R(\tau) > 0$ — термическое контактное сопротивление (при идеальном тепловом контакте $R = 0$), $\Delta\tau$ — интервал времени между измерениями, m — количество измерений, n — количество точек измерений, $T_{j,k}^{\text{экс}}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$ — температуры, полученные в результате теплофизического эксперимента с погрешностью, которая характеризуется случайной величиной, распределённой по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 .

В связи с отсутствием теплофизического эксперимента данные (5) были получены из решения модельной прямой задачи (1)–(4) при известном тепловом потоке $Q(t)$.

РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И МЕТОД ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ

Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова [8] для решения линейной обратной задачи (1)–(5) сводится к минимизации функционала

$$J = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m [T(x_i, \tau_k) - T_{i,k}^{\text{экс}}]^2 + \alpha \Omega[Q], \quad (6)$$

где α — параметр регуляризации, $\Omega[Q]$ — стабилизирующий функционал, $T(x_i, \tau_k)$ и $T_{i,k}^{\text{экс}}$ — моделируемая температура и температура из теплофизического эксперимента в точках термометрирования x_j в моменты времени τ_k .

Если искомую функцию $Q(\tau)$ представить в виде

$$Q(\tau) = \sum_{j=1}^{n_Q} q_{Q,j} \phi_{Q,j}(\tau), \quad (7)$$

где $\phi_{Q,j}(\tau)$, $j = \overline{1, n_Q}$ — некоторый финитный базис на всем интервале измерения температур, $q_{Q,j}$ — искомые коэффициенты, то тогда, используя принцип суперпозиции, решение $T(x, \tau)$ можно представить в следующем виде

$$T(x, \tau) = \overline{T}(x, \tau) + \sum_{j=1}^{n_Q} q_{Q,j} T_j(x, \tau), \quad (8)$$

где $\overline{T}(x, \tau)$ — решение краевой задачи (1)–(4) с неоднородным начальным условием (4) и одно-

родными граничными условиями (2), $T_j(x, \tau)$ — решение краевой задачи (1)–(4) с однородным начальным условием и граничными условиями вида

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial T_j}{\partial x} &= 0, \quad x = 0, \\ \lambda_2 \frac{\partial T_j}{\partial x} &= \phi_{Q,j}(\tau), \quad x = L, \quad \tau > 0. \end{aligned}$$

Подставляя выражение (8) в функционал (6) и взяв в качестве стабилизирующего функционала выражение

$$\begin{aligned} \Omega[Q] &= \omega_{Q,0} \int_0^{\tau_0} \left[\sum_{j=1}^{n_Q} q_{Q,j} \phi_{Q,j}(\tau) \right]^2 d\tau + \\ &+ \omega_{Q,1} \int_0^{\tau_0} \left[\sum_{j=1}^{n_Q} q_{Q,j} \phi'_{Q,j}(\tau) \right]^2 d\tau + \\ &+ \omega_{Q,2} \int_0^{\tau_0} \left[\sum_{j=1}^{n_Q} q_{Q,j} \phi''_{Q,j}(\tau) \right]^2 d\tau, \quad (9) \end{aligned}$$

можно, продифференцировав (9) по искомым коэффициентам $q_{Q,j}$, получить систему линейных уравнений

$$(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}) \mathbf{q} = \mathbf{C}, \quad (10)$$

где

\mathbf{A} — симметричная матрица с элементами

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m T_l(x_l, \tau_k) T_j(x_l, \tau_k), \quad (11)$$

\mathbf{B} — симметричная матрица с элементами

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \omega_{Q,0} \int_0^{\tau_0} \phi_{Q,i}(\tau) \phi_{Q,j}(\tau) d\tau + \\ &+ \omega_{Q,1} \int_0^{\tau_0} \phi'_{Q,i}(\tau) \phi'_{Q,j}(\tau) d\tau + \\ &+ \omega_{Q,2} \int_0^{\tau_0} \phi''_{Q,i}(\tau) \phi''_{Q,j}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

\mathbf{C} — вектор правой части системы линейных уравнений (10)

$$c_i = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m T_l(x_l, \tau_k) (T_{l,k}^{\text{экс}} - \overline{T}(x_l, \tau_k)). \quad (12)$$

В качестве $\phi_{Q,j}(\tau)$, $j = \overline{1, n_Q}$ берутся сплайны Шенберга третьей степени $B_3(\tau)$.

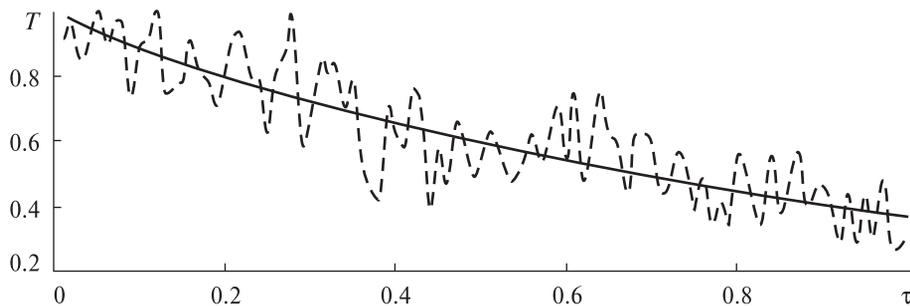


Рис. 1. Температура в точке идеального теплового контакта: сплошная линия — полученная из решения модельной задачи, пунктирная линия — полученная в результате теплофизического эксперимента с зашумлением

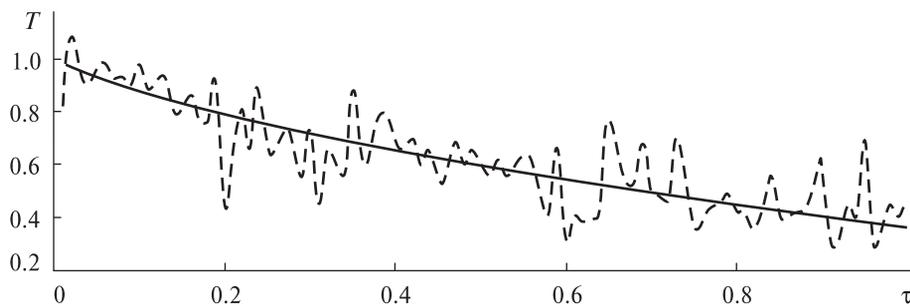


Рис. 2. Температура на границе пластины с искомым тепловым потоком: сплошная линия — полученная из решения модельной задачи, пунктирная линия — полученная в результате теплофизического эксперимента с зашумлением

В систему линейных уравнений (10) входит параметр регуляризации α , который определяется так же, как и в работах [2, 5, 7, 9, 10]. Считается, что параметр регуляризации выбран правильно, если для полученного решения по предложенной выше итерационной схеме выполняется такое двухстороннее неравенство:

$$(1 - \sqrt{2/N}) \sigma^2 \leq \delta^2 \leq (1 + \sqrt{2/N}) \sigma^2, \quad (13)$$

где N — общее количество термометрических измерений, δ^2 — среднее квадратичное отклонение модельного решения от точного решения. Алгоритм поиска параметра регуляризации α основан на каком-либо итерационном процессе поиска корня нелинейного уравнения.

На рис. 1 и 2 представлены графики температур в точке L_1 (контакт слоёв пластины) и на границе L при идеальном тепловом контакте между слоями, а на рис. 3 — идентифицированный тепловой поток на границе L . Приведенные результаты получены для следующих значений безразмерных параметров задачи: $m = 100$, $\Delta\tau = 0.01$, $n = 2$, $x_1 = L_1$, $x_2 = L$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $\lambda_1 = 1$,

$\lambda_2 = 50$, $L = 1$, $L_1 = 0.5$, $T_0 = 1$, $n_Q = 23$, $\sigma = 0.1$, $\omega_{Q,0} = 1$, $\omega_{Q,1} = 0$, $\omega_{Q,2} = 10$.

Для теплового процесса с реальным тепловым контактом графики температур в точке реального контакта и на границе пластины представлены на рис. 4 и 5, а идентифицированный тепловой поток, полученный по вышеизложенному подходу, на границе L — на рис. 6. Графики, представленные на рис. 6, получены при тех же безразмерных параметрах, что и для идеального контакта. При этом термометрирование производилось в точках пространства $x_1 = L_1$ (точка в первом слое) и $x_2 = L$.

В качестве третьей ОЗТ рассматривалась обратная нестационарная краевая задача теплопроводности (1)–(5), в которой по данным теплофизического эксперимента необходимо было определить тепловой поток $Q(\tau)$ и термическое контактное сопротивление $R(\tau)$. Поскольку точки термометрирования расположены в обоих слоях, задача была разбита на две связанные внешние обратные краевые задачи для первого и второго слоёв.

Рис. 3. Графики теплового потока в задаче с идеальным тепловым контактом: сплошная линия — заданный при решении модельной задачи, точечная линия — идентифицированный

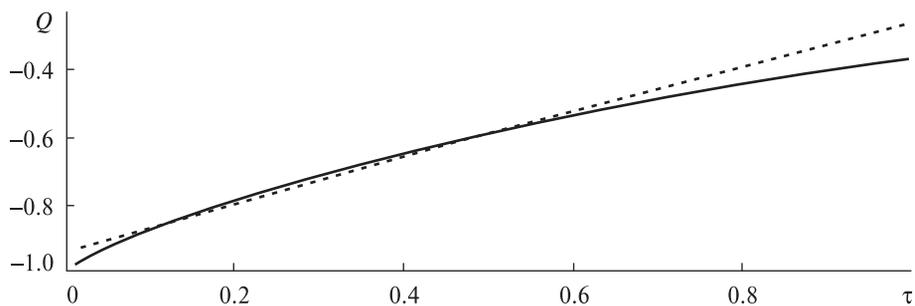


Рис. 4. Температура в точке реального теплового контакта: сплошная линия — полученная из решения модельной задачи, пунктирная линия — полученная в результате теплофизического эксперимента с зашумлением

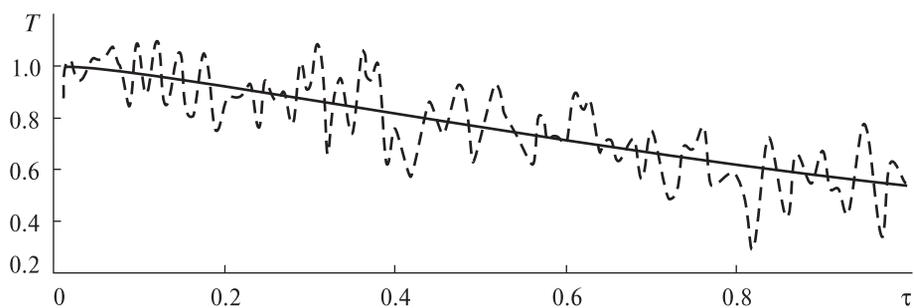


Рис. 5. Температура на границе пластины с искомым тепловым потоком в задаче с реальным тепловым контактом: сплошная линия — полученная из решения модельной задачи, пунктирная линия — полученная в результате теплофизического эксперимента с зашумлением

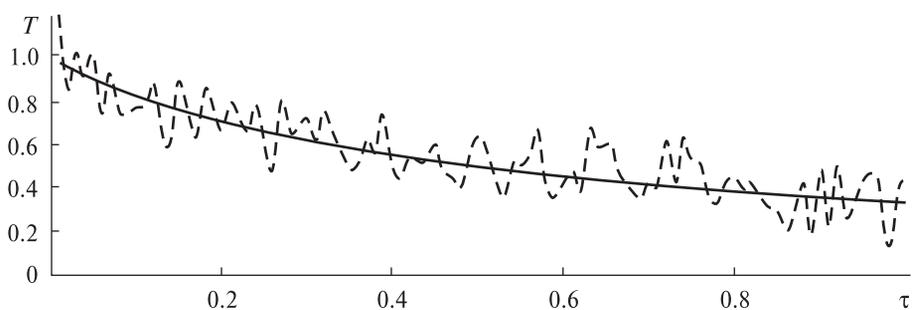
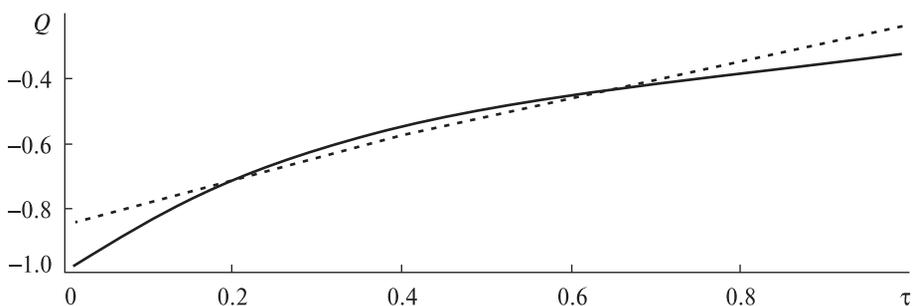


Рис. 6. Графики теплового потока на границе пластины в задаче с реальным тепловым контактом: сплошная линия — заданный при решении модельной задачи, точечная линия — идентифицированный



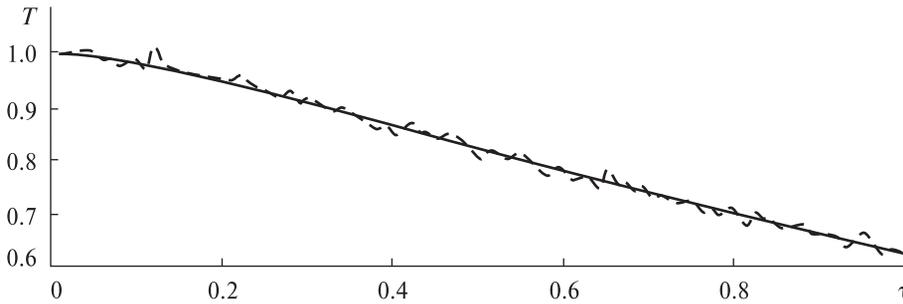


Рис. 7. Температура на границе контакта в первой среде: сплошная линия — полученная из решения модельной задачи, пунктирная линия — полученная в результате теплофизического эксперимента с зашумлением, точечная линия — идентифицированная

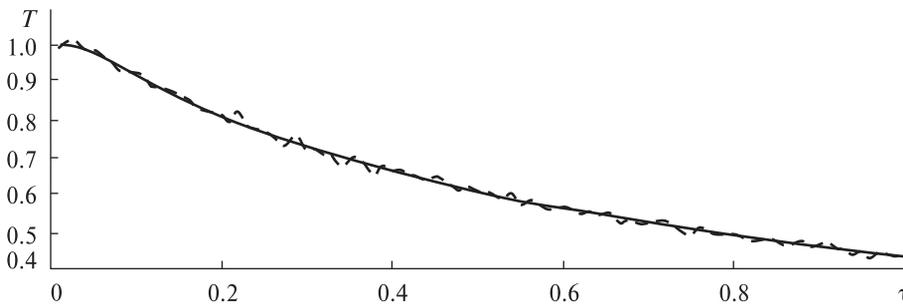


Рис. 8. Температура на границе контакта во второй среде: сплошная линия — полученная из решения модельной задачи, пунктирная линия — полученная в результате теплофизического эксперимента с зашумлением, точечная линия — идентифицированная

Тепловой поток на внешней границе $x = L$ представлен в виде (7), а тепловой поток на границе контакта $Q_R(\tau)$ — в виде

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} = Q_R(\tau) = \sum_{j=1}^{n_R} q_{R,j} \phi_{R,j}(\tau), \quad x = L_1,$$

где $\phi_{R,j}(\tau)$, $j = \overline{1, n_R}$ — некоторый финитный базис на всем интервале измерения температур, $q_{R,j}$, $j = \overline{1, n_R}$ — искомые коэффициенты.

Если вектор \mathbf{q} размерности $n_Q + n_R$ записать в виде $\mathbf{q} = q_{Q,1}, \dots, q_{Q,n_Q}, q_{R,1}, \dots, q_{R,n_R}$, то в силу линейности задачи, используя принцип суперпозиции, температурное поле для первого слоя можно представить в виде

$$T(x, \tau) = \bar{T}(x, \tau) + \sum_{j=n_Q+1}^{n_Q+n_R} q_j T_j(x, \tau),$$

где $\bar{T}(x, \tau)$ — решение краевой задачи (1)–(4) с неоднородным начальным условием (4) и однородными граничными условиями, а

$$\{T_j(x, \tau)\}_{j=n_Q+1}^{j=n_Q+n_R} —$$

решение краевой задачи (1)–(4) с однородным начальным условием и неоднородным граничным условием второго рода

$$\lambda_1 \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=L_1-0} = \phi_{R,j-n_Q}(\tau), \quad \lambda_1 \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0,$$

$$j = \overline{n_Q+1, n_Q+n_R}, \quad \tau > 0.$$

Температурное поле для второго слоя можно представить в виде

$$T(x, \tau) = \bar{T}(x, \tau) + \sum_{j=1}^{n_Q+n_R} q_j T_j(x, \tau),$$

где $\bar{T}(x, \tau)$ — то же решение краевой задачи (1)–(4), что и для первого слоя, а $T_j(x, \tau)$, $j = \overline{1, n_Q+n_R}$ — решение краевой задачи (1)–(4) с однородным начальным условием и неоднородными граничными условиями второго рода

$$\lambda_2 \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=L_1+0} = \phi_{R,j-n_Q}(\tau), \quad \lambda_2 \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0,$$

Рис. 9. Температура на границе пластины с искомым тепловым потоком: сплошная линия — полученная из решения модельной задачи, пунктирная линия — полученная в результате теплофизического эксперимента с зашумлением, точечная линия — идентифицированная

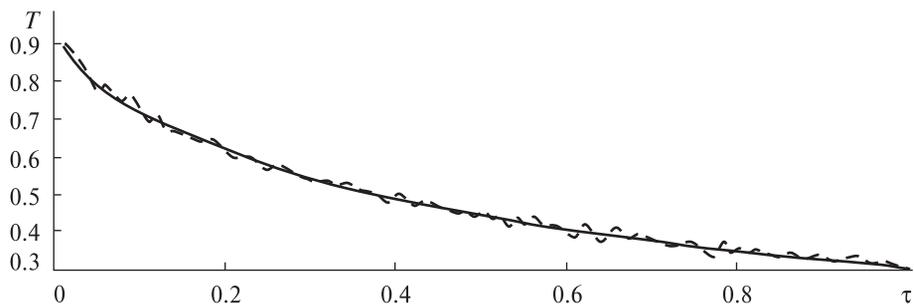


Рис. 10. Графики теплового потока на границе пластины: сплошная линия — заданный при решении модельной задачи, точечная линия — идентифицированный

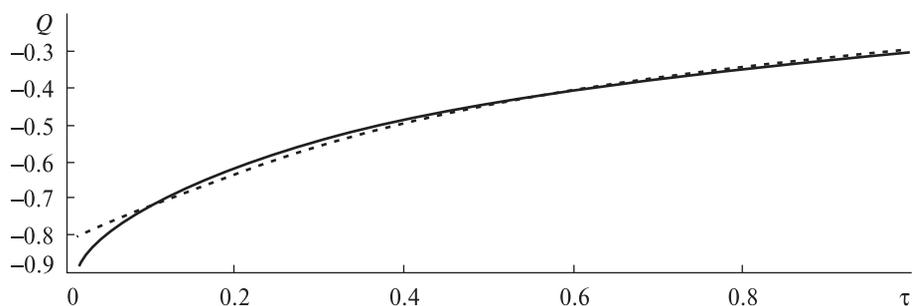


Рис. 11. Графики теплового потока на границе контакта: сплошная линия — заданный при решении модельной задачи, точечная линия — идентифицированный

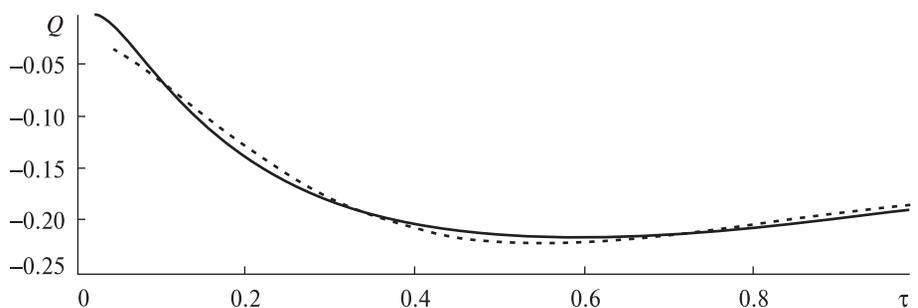
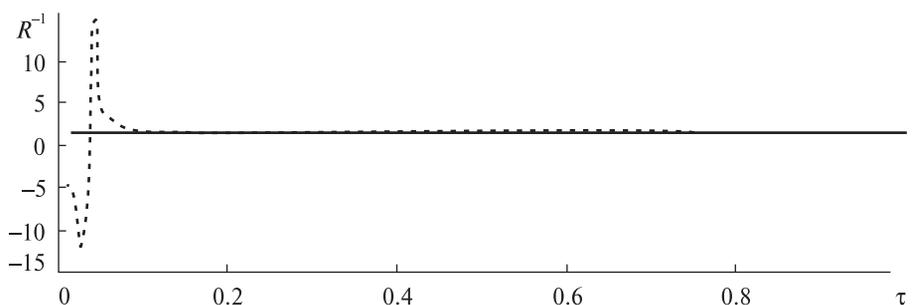


Рис. 12. Графики обратной величины термического контактного сопротивления: сплошная линия — заданное при решении модельной задачи, точечная линия — идентифицированное



$$j = \overline{n_Q + 1, n_Q + n_R}, \quad \tau > 0.$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=L} = \phi_{Q,j}(\tau), \quad \lambda_2 \frac{\partial T_j}{\partial x} \Big|_{x=L_1+0} = 0,$$

$$j = \overline{1, n_Q}, \quad \tau > 0.$$

Тогда, следуя рассуждениям, приведенным выше, можно получить систему линейных уравнений (10) с элементами матрицы **A** в виде (11), с элементами вектора **C** в виде (12) и с элементами матрицы **B** в виде

$$b_{ij} = \omega_{Q,0} \int_0^{\tau_0} \phi_{Q,i}(\tau) \phi_{Q,j}(\tau) d\tau +$$

$$+ \omega_{Q,1} \int_0^{\tau_0} \phi'_{Q,i}(\tau) \phi'_{Q,j}(\tau) d\tau +$$

$$+ \omega_{Q,2} \int_0^{\tau_0} \phi''_{Q,i}(\tau) \phi''_{Q,j}(\tau) d\tau,$$

$$i, j = \overline{1, n_Q};$$

$$b_{ij} = \omega_{R,0} \int_0^{\tau_0} \phi_{R,i}(\tau) \phi_{R,j}(\tau) d\tau +$$

$$+ \omega_{R,1} \int_0^{\tau_0} \phi'_{R,i}(\tau) \phi'_{R,j}(\tau) d\tau +$$

$$+ \omega_{R,2} \int_0^{\tau_0} \phi''_{R,i}(\tau) \phi''_{R,j}(\tau) d\tau,$$

$$i, j = \overline{n_Q + 1, n_Q + n_R}.$$

Подбирая параметр регуляризации таким образом, чтобы в результате решения системы линейных уравнений (10) удовлетворялось условие (13), можно по восстановленным тепловому потоку и температурам на границе контакта (рис. 7) определить термическое контактное сопротивление на этой границе. На рис. 7—9 представлены графики температур слева и справа от границы контакта и на внешней границе пластины.

Идентифицированные тепловые потоки поданы на внешней границе пластины (рис. 10) и

на границе теплового контакта (рис. 11), а обратная величина термического контактного сопротивления — на рис. 12. Приведенные результаты получены для следующих значений безразмерных параметров: $n = 3$, $x_1 = L_1 - 0$, $x_2 = L_1 + 0$, $x_3 = L$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $L = 1$, $L_1 = 0.5$, $T_0 = 1$, $n_Q = 23$, $n_R = 23$, $m = 100$, $\sigma = 0.01$, $\omega_{Q,0} = 1$, $\omega_{Q,1} = 0$, $\omega_{Q,2} = 10$, $\omega_{R,0} = 1$, $\omega_{R,1} = 0$, $\omega_{R,2} = 10$, $\Delta\tau = 0.01$, $R = 1$.

ВЫВОДЫ

Описанный подход совместного применения регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова с методом функций влияния позволяет идентифицировать сложные зависимости тепловых потоков при определённой погрешности результатов теплофизического эксперимента. К его достоинствам следует отнести: слабую чувствительность к погрешностям измерений; возможность использования экспериментальной информации как от одного, так и от нескольких датчиков; применимость для неоднородных сред; возможность одновременного восстановления теплового потока на разных частях поверхности конструктивного элемента; простоту программирования и возможность распараллеливания вычислительного процесса, что отвечает современным требованиям, предъявляемым к методам и алгоритмам решения прямых и обратных задач.

Приведенные в статье графики демонстрируют устойчивые решения обратных задач теплопроводности для разнородных слоев как с идеальными, так и с реальными тепловыми контактами. Сплошные линии на рис. 1, 2, 4, 5, 7—9 представляют одновременно температуру, полученную в результате решения модельной прямой задачи, и температуру, идентифицированную путём решения обратной задачи, так как на графиках эти две кривые практически совпадают.

Анализируя отклонение идентифицированной температуры от температуры, полученной путём решения прямой задачи, можно сделать заключение о хорошем их согласии. Что касается тепловых потоков, то заметна погрешность их идентификации, причём более существенная на концах временного интервала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. *Экстремальные методы решения некорректных задач*. Москва: Наука, 1988. 288 с.
2. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч (мл.) *Некорректные обратные задачи теплопроводности*. Москва: Мир, 1989. 312 с.
3. Коздоба Л. А., Круковский П. Г. *Методы решения обратных задач теплопереноса*. Киев: Наук. думка, 1982. 360 с.
4. Мацевитый Ю. М. *Обратные задачи теплопроводности: В 2-х т.* Киев: Наук. думка, 2002—2003. Т. 1: Методология. 408 с.
5. Мацевитый Ю. М., Сафонов Н. А., Ганчин В. В. К решению нелинейных обратных граничных задач теплопроводности. *Проблемы машиностроения*. 2016. **19**, № 1. С. 28—36.
6. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П. *Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляризация их решений*. Киев: Наук. думка, 2014. 292 с.
7. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П., Ганчин В. В. Регионально-аналитическое моделирование и идентификация тепловых потоков с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова. *Проблемы машиностроения*. 1999. **2**, № 1-2. С. 34—42.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва: Наука, 1979. 288 с.
9. Graham N. Y. Smoothing with Periodic Cubic Splines. *Bell System Tech. J.* 1983. **62**. P. 101—110.
10. Reinsch C. H. J. Smoothing by Spline Function. *Numerische Mathematik*. 1967. **10**. P. 177—183.

Стаття надійшла до редакції 09.09.2019

REFERENCES

1. Alifanov O. M., Artuhin E. A., Rummyantsev S. V. (1988). *Ekstremalnye metody resheniya nekorrektnykh zadach*. Moscow: Nauka [in Russian].
2. Beck J., Blakuell B., Sent-Kler Ch (ml.) (1989). *Nekotorye obratnye zadachi teploprovodnosti*. Moscow: Mir [in Russian].
3. Kozdoba L. A., Krukovskiy P. G. (1982). *Metody resheniya obratnykh zadach teploperenosa*. Kyev: Naukova dumka [in Russian].
4. Matsevityy Yu. M. (2002—2003). *Inverse problems of heat conduction: in 2 vols. Vol. 1. Appendices: Metodologiya*. Kyev: Naukova dumka [in Russian].
5. Matsevityy Yu. M., Safonov N. A., Ganchin V. V. (2016). To the solution of nonlinear inverse boundary value problems of heat conduction. *J. Mechanical Engineering*, **19**, № 1, 28—36 [in Russian]. URL: <https://doi.org/10.15407/pmach2016.01.028> (Last accessed 09/09/2019).
6. Matsevityy Yu. M., Slesarenko A. P. (2014). *Nekorrektnye mnogoparametricheskie zadachi teploprovodnosti i regionalno-strukturnaya regulyaryzatsiya ikh resheniy*. Kyev: Naukova dumka [in Russian].
7. Matsevityy Yu. M., Slesarenko A. P., Ganchin V. V. (1999). Regional analytical modeling and identification of heat fluxes using the regularization method A. N. Tikhonova. *J. Mechanical Engineering*, **2**, № 1-2, 34—42 [in Russian].
8. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. (1975). *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*. Moscow: Nauka [in Russian].
9. Graham N. Y. (1983). Smoothing with Periodic Cubic Splines. *Bell System Tech. J.*, **62**, 101—110.
10. Reinsch C. H. J. (1967). Smoothing by Spline Function. *Numerische Mathematik*, **10**, 177—183.

Received 09.09.2019

Ю. М. Мацевитий¹

акад. НАН України, д-р техн. наук, проф., зав. відд.

В. М. Сиренко²

заст. голов. констр., нач. комплексу, член-кор. МАА, канд. техн. наук

А. О. Костиков¹

член-кор. НАН України, д-р техн. наук, заст. дир.

М. О. Сафонов¹

старш. наук. співроб., канд. фіз.-мат. наук,

E-mail: nicksaf@meta.ua

В. В. Ганчин¹, провід. інж.

¹ Інститут проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАН України,
вул. Дм. Пожарського 2/10, Харків, Україна, 61046

² ДП «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля»,
вул. Криворізька 3, Дніпро, Україна, 49008

МЕТОДИКА ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ В БАГАТОШАРОВИХ КОНСТРУКЦІЯХ

У статті для отримання стійкого розв'язання оберненої задачі теплопровідності застосовується метод регуляризації А. М. Тихонова з ефективним алгоритмом пошуку регуляризаційного параметра. Розглядаються три обернені задачі. У перших двох визначаються теплові потоки у складеному тілі з ідеальним і реальним тепловим контактом. У третій оберненої задачі теплопровідності при реальному тепловому контакті визначається термічний контактний опір.

Шукані теплові потоки у багатошарових тілах розглядаються у вигляді лінійних комбінацій сплайнів Шенберга третього ступеня з невідомими коефіцієнтами, які обчислюються шляхом рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Ця система є наслідком необхідної умови мінімуму функціонала, в основу якого покладено принцип найменших квадратів відхилення модельованої температури від температури, отриманої в результаті теплофізичного експерименту. Для регуляризації рішень оберненої задачі теплопровідності використовується стабілізуючий функціонал з параметром регуляризації як мультиплікативним множником. Він є сумою квадратів теплових потоків, їхніх перших і других похідних з відповідними множниками. Пошук регуляризаційного параметра здійснюється за допомогою алгоритму, аналогічного алгоритму пошуку кореня нелінійного рівняння.

Ключові слова: обернена задача теплопровідності, тепловий потік, термічний контактний опір, метод регуляризації А. М. Тихонова, функціонал, стабілізатор, параметр регуляризації, ідентифікація, апроксимація, сплайн Шенберга третього ступеня.

*Yu. M. Matsevity*¹

Academician, Dr. Sci. in Tech., Professor, Head of department

*V. N. Sirenko*²

Deputy Chief Designer, Head of complex, Corresponding member IAA, Cand. Sci. in Tech.,

E-mail: info@yuzhnoye.com

*A. O. Kostikov*¹

Corresponding member NASU, Dr. Sci. in Tech., Deputy Director

*N. A. Safonov*¹,

Senior researcher, Cand. Sci. in Phys. & Math.,

E-mail: nicksaf@meta.ua

*V. V. Ganchin*¹, Leading engineer

¹ A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the NASU,

Dm. Pozharsky str., 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046

² Yuzhnoye State Design Office

3, Krivorizka Str., Dnipro, Ukraine 49008

METHOD OF IDENTIFICATION OF NON-STATIONARY THERMAL PROCESSES IN MULTILAYER STRUCTURES

In the article, the method of A. N. Tikhonov with an effective algorithm for finding a regularization parameter is used to obtain a stable solution of the inverse problem of heat conduction (IPHC). Three inverse problems are considered. The first two determine the heat fluxes in the composite body with ideal and real thermal contact. In the third IPHC, the thermal contact resistance is determined with real thermal contact.

The desired heat fluxes in multilayer bodies are represented as linear combinations of third-degree Schönberg splines with unknown coefficients, which are calculated by solving a system of linear algebraic equations. This system is a consequence of the necessary condition for the minimum of the functional based on the principle of least squares of the deviation of the simulated temperature from the temperature obtained as a result of a thermophysical experiment. To regularize IPHC solutions, a stabilizing functional with a regularization parameter as a multiplicative factor is used. It is the sum of the squares of the heat fluxes, their first and second derivatives with the corresponding multipliers. The regularization parameter search is performed using an algorithm similar to the non-linear equation root search algorithm.

Keywords: inverse heat conduction problem, heat flow, thermal contact resistance, A. N. Tikhonov's regularization method, functional, stabilizer, regularization parameter, identification, approximation, Schönberg spline of the third degree.