

<https://doi.org/10.15407/knit2020.01.048>
УДК 519.245:533.6.011.8

Л. Л. ПЕЧЕРИЦА, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотруд.
Т. Г. СМЕЛАЯ, науч. сотруд.
E-mail: smelaya.t.g@nas.gov.ua

Институт технической механики НАН Украины и ГКА Украины,
ул. Лешко-Попеля 15, Днепро, Украина, 49005

ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТОЧНОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ В ЗАДАЧАХ РАЗРЕЖЕННОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Невозможность получения аналитического решения интегродифференциального уравнения Больцмана в общей постановке стимулирует как постоянное развитие и совершенствование традиционно применяемых подходов, так и поиск новых возможностей решения этого уравнения. В области разреженной газовой динамики наиболее распространенным статистическим методом решения уравнения Больцмана является метод прямого статистического моделирования. Данная статья посвящена альтернативному ему статистическому методу пробных частиц (МПЧ).

Целью статьи является обзор ранее полученных результатов работы Института технической механики Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины по развитию МПЧ посредством перехода к расчетам на двухуровневых иерархических адаптивных сетках (ДИАС). В статье кратко изложены основные положения МПЧ и сделан обзор работ, в которых осуществлялись: выбор оптимальной расчетной сетки для МПЧ и алгоритма ее генерации; построение новых численных алгоритмов слежения за траекториями молекул при дискретизации расчетной области с помощью ДИАС; тестирование алгоритма МПЧ на выбранных сетках в двумерной постановке. Результаты расчетов газодинамических параметров в окрестности преград и коэффициентов лобового сопротивления сравнивались с другими результатами, полученными как численно, так и экспериментально. Высокое качество тестируемого расчетного алгоритма подтверждено хорошим соответствием сравниваемых результатов.

Использование усовершенствованных сеток дает существенные преимущества в применении МПЧ, значительно сокращая ресурсоёмкость алгоритма, что позволяет охватить более широкий диапазон расчетных режимов обтекания и перейти к решению качественно новых задач.

Разработанные алгоритмы могут использоваться при практических расчетах параметров воздействия внешней среды на космические аппараты сложной формы (в том числе на их отдельные элементы) в интервалах режимов от свободно-молекулярного до близкого к континуальному.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, динамика разреженного газа, газодинамические параметры, метод пробных частиц, адаптивная иерархическая сетка, свободномолекулярный и переходный режимы.

Интегродифференциальное уравнение Больцмана [10] описывает статистическое распределение частиц в газе или жидкости и не имеет аналитического решения. Оно применимо для разреженных систем, где время взаимодействия

между частицами мало. Функция распределения, связывающая пространственные координаты, компоненты скорости и время, фактически зависит от интеграла столкновений, стоящего в правой части уравнения

Цитування: Печерица Л. Л., Смелая Т. Г. Оптимізація сіткової структури при використанні статистичного методу пробних частиць в задачах разреженної газової динаміки. *Космічна наука і технологія*. 2020. **26**, № 1 (122). С. 48—58. <https://doi.org/10.15407/knit2020.01.048>

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{\xi} \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} (f' f'_1 - f f_1) g b \cdot db \cdot d\varepsilon \cdot d\xi_{x1} \cdot d\xi_{y1} \cdot d\xi_{z1}, \quad (1)$$

где t — время, \bar{r} — радиус-вектор положения молекулы; $f = f(t, \bar{r}, \bar{\xi})$ и $f_1 = f(t, \bar{r}, \bar{\xi}_1)$ — функции распределения молекул со скоростями хаотического движения $\bar{\xi}$ и $\bar{\xi}_1$ до столкновения; $f' = f(t, \bar{r}, \bar{\xi}')$ и $f'_1 = f(t, \bar{r}, \bar{\xi}'_1)$ — функции распределения молекул со скоростями $\bar{\xi}'$ и $\bar{\xi}'_1$ после столкновения; $\bar{g} = \bar{\xi} - \bar{\xi}_1$; b и ε — прицельные параметры.

В интеграле столкновений интегрирование ведется по всем возможным значениям и направлениям относительных скоростей сталкивающихся молекул. Он определяет скорость изменения функции плотности распределения частиц вследствие столкновений между ними. Наиболее развитыми методами для вычисления интеграла столкновений являются статистические методы Монте-Карло [8, 9], поэтому именно на их основе зачастую строятся численные методы решения уравнения Больцмана, где искомое решение получается путем усреднения большого числа случайных событий. Методы Монте-Карло могут обеспечить любую желаемую степень точности решения уравнения (1), поскольку погрешность моделирования обратно пропорциональна корню квадратному из числа проводимых испытаний. Эти методы базируются на специальном численном статистическом итерационном процессе для нелинейного уравнения Больцмана [20, 21]. Сходимость применяемой в них итерационной схемы нельзя доказать, но можно продемонстрировать численно.

Поскольку количество проводимых испытаний зависит от требуемой точности результатов, важнейшими проблемными вопросами для методов Монте-Карло являются достижение хорошей статистики в ячейках расчетной сетки, необходимость большого количества вычислений и, как следствие, — большие временные затраты. При решении большинства задач газовой динамики при малых значениях числа Кнудсена к этим проблемам необходимо добавить скудность сравнительной базы, вызванной отсутствием

точного решения и затратностью получения экспериментальных данных для тел заданной геометрической формы.

В приложении к молекулярной газовой динамике есть несколько разновидностей методов Монте-Карло. Одна из них — метод пробных частиц (МПЧ), который получил обоснование в рамках общей теории методов Монте-Карло [7] и реализован в задачах аэродинамики [5, 6]. Дальнейшее развитие этого метода продолжили сотрудники Института технической механики Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины, разработавшие соответствующие расчетные алгоритмы для решения стационарных задач динамики разреженного газа на равномерных прямоугольных структурированных расчетных сетках (РС) [2, 3, 12] для тел простой и сложной пространственной геометрической формы.

С помощью МПЧ можно успешно решать достаточно сложные задачи аэродинамического обтекания преград в широком диапазоне параметров. Данный метод заключается в моделировании хаотического движения пробных молекул, попадающих извне в расчетную область, заполненную полевыми молекулами. Моделирование движения пробных молекул по ячейкам РС является наиболее трудоемкой частью алгоритма МПЧ. Кроме многократных перелетов частиц по ячейкам расчетной области, происходят столкновения пробных молекул с полевыми частицами и с непроницаемыми поверхностями. Столкновения молекул моделируются по закону твердых упругих сфер, а отражение от преград — по диффузному закону. Алгоритм слежения за траекториями усложняется тем, что при каждом из вышеуказанных событий возникает необходимость определения порядкового номера ячейки перелета молекулы (в сквозном списке нумерации ячеек) по координатам месторасположения молекулы и направлению ее вектора скорости и наоборот.

Для сохранения структуры сетки вместо адаптации РС к границе расчетной области применяется методика полного погружения в сетку границ обтекаемой преграды. При этом определенная доля ячеек РС полностью или частично

попадают внутрь обтекаемого тела (или за пределы внешних границ). Поскольку форма расчетной области в задачах обтекания не является принципиальной, она задается удобной для аппроксимации внешних контуров прямоугольной формы, а её размер выбирается таким образом, чтобы полностью включить обтекаемую преграду и зону возмущения расчетных параметров задачи. Обеспечить отражение движущихся частиц газа от поверхности преграды можно, введя условие её непроницаемости [18].

При проведении большого количества испытаний столкновения и отражения молекул приводят к возмущению начального распределения газодинамических параметров (ГДП) в окрестности обтекаемой преграды, постепенному его изменению, и в конечном итоге — к стабилизации. Газодинамические параметры установившегося течения определяются путем осреднения по времени соответствующих моментов максвелловской функции распределения [2]. В процессе моделирования блужданий пробных молекул накапливается и запоминается общее время

$$\sum_{l=1}^K \Delta t_l$$

их пребывания в ячейке $N_{i,j,k}$ (K — количество всех пробных молекул, побывавших в ячейке $N_{i,j,k}$), а также их скорость $\xi_{i,j,k}$, изменение которой в течение времени обусловлено межмолекулярными столкновениями и взаимодействием с границами физического пространства. Для достаточно большого времени слежения за пробной молекулой с точностью до малых случайных ошибок можно полагать, что средняя плотность и скорость в ячейке $N_{i,j,k}$ равны

$$\langle n \rangle = \frac{\sum_{l=1}^K (\Delta t)_l \sum_{m=1}^6 P_m}{N \cdot \omega_{i,j,k}}, \quad \langle \xi \rangle = \frac{\sum_{l=1}^K (\xi \Delta t)_l}{\sum_{l=1}^K \Delta t_l},$$

где суммирование ведется только при попадании молекулы в рассматриваемую ячейку $N_{i,j,k}$, N — количество испытаний, $\omega_{i,j,k}$ — объем пространственной ячейки, $\sum_{m=1}^6 P_m$ — суммарный по-

ток молекул в расчетную область Ω со всех ее граней.

Для полного описания течения в окрестности преграды, кроме концентрации и скорости в ячейках расчетной области, определяется и температура потока. Необходимость определения температуры в ячейке обусловлена зависимостью диаметра эффективного сечения рассеяния сталкивающихся молекул от местной температуры T :

$$\sigma^2 = \frac{5}{16} \sqrt{\frac{RT}{\pi}} \frac{m_0}{\mu(T)},$$

где m_0 — масса молекулы, μ — вязкость, R — газовая постоянная.

Для одноатомного газа температура T в ячейке определяется из соотношения

$$\frac{3}{2} RT = \langle E_{tr} \rangle,$$

как функция средней кинетической энергии $\langle E_{tr} \rangle$ — поступательного движения в расчетной ячейке. Определение $\langle E_{tr} \rangle$ осуществляется путем осреднения кинетических энергий молекул по времени их пребывания в ячейке:

$$\langle E_{tr} \rangle = \frac{\sum_{l=1}^K (E_{tr} \Delta t)_l}{\sum_{l=1}^K \Delta t_l},$$

где

$$E_{tr} = \frac{1}{2} m_0 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2);$$

v_x , v_y , v_z — компоненты тепловой скорости пробной молекулы.

Основное требование к РС в МПЧ заключается в том, чтобы линейные размеры расчетных ячеек не превосходили местную длину свободного пробега λ . Несмотря на то что зоны повышенной концентрации (зоны больших градиентов и скачков уплотнения), как правило, занимают незначительную часть расчетной области, выполнение этого требования на равномерных РС приводит к большому числу ячеек РС.

Анализ разных типов РС, широко используемых для численного моделирования различных физических процессов, подробно изложен в работах [18, 19]. После изучения их особенностей,

достоинств и недостатков был сделан вывод, что для решения современных задач молекулярной газовой динамики МПЧ предпочтительными являются сетки иерархического типа, имеющие минимальное количество вложений. При этом на всех иерархических уровнях сетка должна быть структурированной и равномерной.

При одном уровне вложения (двухуровневая сетка) и фиксированном числе корневых ячеек конечный размер рабочих (вложенных) ячеек регулируется плотностью разбиения корневых ячеек РС. Кратность разбиения корневых ячеек удобнее всего поставить в зависимость от местных длин свободного пробега молекул λ , определяющих локальный режим течения. В этом случае размер вложенных ячеек будет скачкообразно изменяться от одной корневой ячейки к другой в зависимости от местных градиентов физических параметров полей течений.

Как было показано ранее [18, 19], сетка такого типа сохраняет структурированность и равномерность как на уровне разбиения расчетной области (на корневые ячейки), так и на локальном уровне (в пределах каждой корневой ячейки РС). Следует отметить, что на глобальном уровне эти свойства нарушаются, и сетка является неструктурированной. Двухуровневые иерархические неструктурированные сетки (ДИНС) сочетают в себе полезные качества двух противоположных типов сеток, что позволяет компенсировать недостатки каждой из них достоинствами другой и максимально удовлетворить основному требованию — возможности сгущать сетку в нужных зонах расчетной области, сохраняя при этом высокоэффективный доступ к соседним ячейкам РС. Неоспоримым преимуществом ДИНС является компактность хранения геометрических и физических данных задачи, простота и высокая скорость их построения, а также быстрота работы алгоритмов на их основе.

Использование ДИНС дает возможность сократить общее количество ячеек РС, сохраняя при этом требуемые размеры ячеек в зонах с малыми длинами свободного пробега λ . При этом уменьшается время моделирования блужданий пробных молекул на фоне полевых, которое составляет существенную часть общего расчетного

времени. В итоге ДИНС позволяют экономить машинную память и время счета без снижения точности получаемых результатов. Поэтому дальнейшее развитие МПЧ осуществлялось посредством реализации метода на неравномерных адаптивных сетках [4, 13—19].

Наглядным примером апробации алгоритма МПЧ при использовании неструктурированных двухуровневых сеток является задача осесимметричного обтекания сферы единичного радиуса [15]. Обтекание сферы является одной из наиболее изученных модельных задач, имеет аналитическое свободномолекулярное решение, для нее построены аппроксимационные зависимости и имеется достаточное количество экспериментальных данных в широком диапазоне режимов течения. Начальное поле параметров задавалось моноскоростным, соответствующим параметрам набегающего потока. Розыгрыш траекторий молекул осуществлялся со всех граней контрольного объема (взятого в виде цилиндрического сектора, соосного вектору скорости набегающего потока) и соответствовал максвелловскому.

При расчетах сеточная сходимость достигалась в результате проведения нескольких итераций, каждая из которых использовала результирующие поля ГДП предыдущей. Расчетная область разбивалась в продольном и радиальном направлениях. На первой итерации осуществлялось дополнительное трехкратное дробление базовых ячеек по каждому из направлений. На последующих итерациях количество шагов дробления базовых ячеек корректировалось в сторону увеличения.

Для данной задачи были проведены численные расчеты распределенных и интегральных газодинамических характеристик для разных режимов обтекания. При свободномолекулярном режиме линейные размеры ячеек начальной сетки не превышали локальных длин свободного пробега, поэтому в процессе счета сетка не корректировалась и совпадала с исходной равномерной сеткой. В переходном режиме обтекания ($Re_0 \approx 40$) формирование двухуровневой сетки в процессе проведения итераций показано на рис. 1, где контур сферы показан сплошной чер-

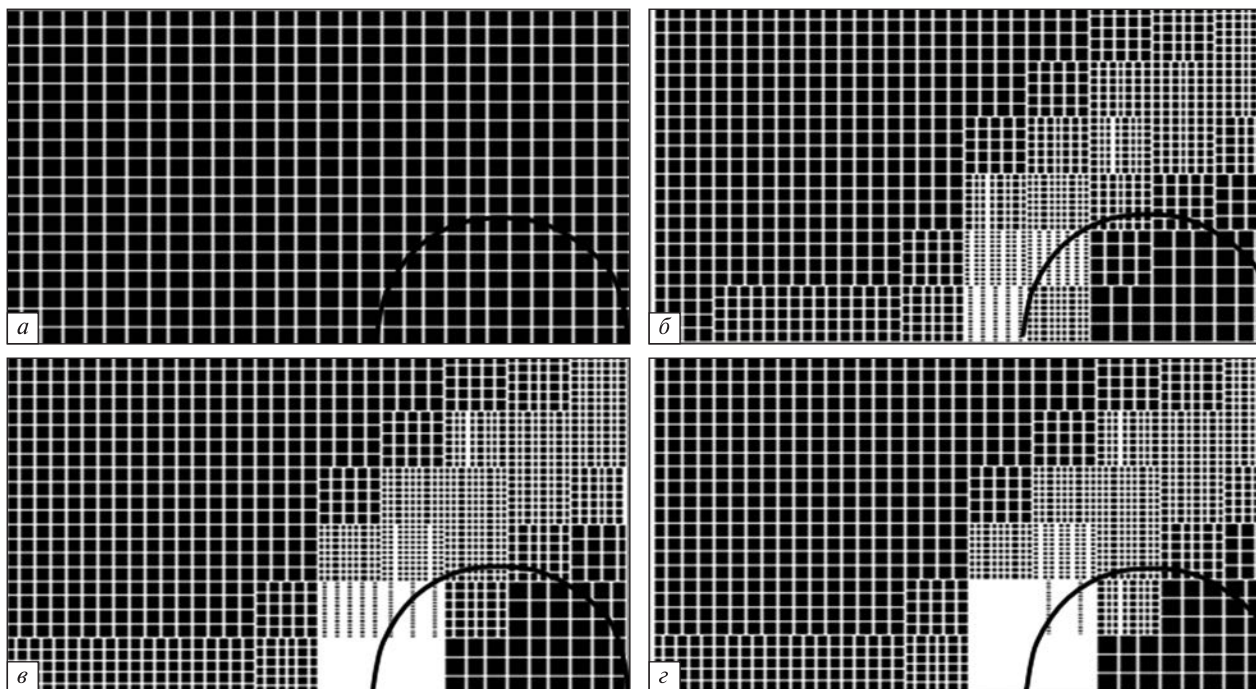


Рис. 1. Формирование сеточной структуры в окрестности сферы при проведении трех итераций ($Re_0 \approx 40$): *a* — исходная расчетная сетка, *б–г* — расчетная сетка после 1-й, 2-й и 3-й итераций соответственно

ной линией. На рис. 1, *a* приведена исходная РС, на рис. 1, *б–г* — РС, полученные в результате последовательного проведения трех итераций. Сеточная сходимость достигается на четвертой итерации (сетка аналогична сетке третьей итерации). Количество расчетных ячеек при этом увеличивается от 540 для начальной сетки до 4200 для двухуровневой сетки. Видно, что построенная двухуровневая сетка имеет неравномерное распределение густоты разбивки базовых ячеек. Как и ожидалось, наибольшему дроблению подвергаются базовые ячейки, находящиеся в зоне формирования ударной волны, и ячейки, приближенные к точке торможения.

Результирующие поля плотности ρ/ρ_∞ и скорости V/V_∞ , полученные МПЧ в результате четырех итераций на двухуровневой сетке, приведены на рис. 2: ρ/ρ_∞ — в верхней полуплоскости, V/V_∞ — в нижней полуплоскости.

Достоверность результатов МПЧ на ДИНС подтверждается хорошим соответствием интегральных характеристик. Задача по определению коэффициента лобового сопротивления C_x

покоящейся сферы в переходном режиме обтекания в методическом плане является одной из наиболее освещенных. В работе [10] опубликованы результаты экспериментальных измерений коэффициента лобового сопротивления сферы C_x в промежуточной области течения $10 \leq Re_0 \leq 10^4$ ($10^{-3} \leq Kn_\infty \leq 10$) для широкого диапазона чисел Маха ($5 \leq Ma_\infty \leq 12.5$) при гиперзвуковом обтекании двухатомным газом (воздух, азот). Сравнение результатов расчетов МПЧ с экспериментальными данными показано на рис. 3. Значения C_x , полученные на двухуровневой сетке с помощью МПЧ, обозначены квадратиками, а обобщающий экспериментальные данные доверительный интервал [10] — черными кривыми. Расчетные данные, соответствующие теории локального взаимодействия [1], применяемой для оценки аэродинамических характеристик на стадии эскизного проектирования, показаны черным маркером; штрихпунктирной линией обозначены предельные значения C_x . Как видно, расчетные значения C_x МПЧ на ДИНС ложатся в доверительный ин-

тервал диапазона разброса экспериментальных данных и удовлетворительно согласуются с данными теории локальности.

Переход к адаптивным сеткам открывает перспективу дальнейшего развития МПЧ и является не только актуальным, но и уникальным, поскольку дает возможность использования метода слежения за траекториями молекул в свободномолекулярном, переходном режиме и режимах, близких к континуальным. Эта возможность открывается при достаточном измельчении областей с физическими особенностями (имеющих большие градиенты газодинамических параметров), что обеспечивает в них выполнение необходимого условия применения разрабатываемого метода.

Переход к адаптивным сеткам включает в себя следующие этапы работы: выбор оптимальной РС при статистическом решении МПЧ основного кинетического уравнения Больцмана; выбор алгоритма генерации РС; построение новых численных алгоритмов слежения за траекториями молекул при дискретизации расчетной области с помощью адаптивной иерархической сетки; проведение численных экспериментов МПЧ в широком диапазоне расчетных параметров на неравномерной сетке в статистических задачах молекулярной газовой динамики; внедрение разработанных алгоритмов и программ при аэродинамическом сопровождении управляемых и спускаемых космических аппаратов.

Все теоретические результаты данной работы и соответствующие расчетные модели МПЧ [4, 13–19] являются новыми, не имеют аналогов и сравниваются с результатами, которые получены другими численными методами, с данными экспериментов и результатами МПЧ на равномерной прямоугольной сетке.

Перечислим основные полученные результаты:

- определены наиболее перспективные виды сеток для решения задач газовой динамики статистическим МПЧ – декартовы прямоугольные адаптивные регулярные сетки с применением для их организации иерархически-блочных структур [4, 18]. Такие сетки являются локально-структурированными, и в то же время имеют большую гибкость при дискретизации физической облас-

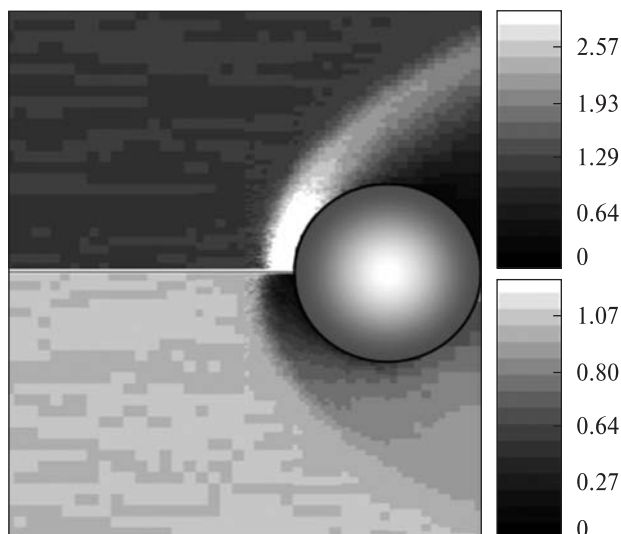


Рис. 2. Результирующие поля плотности ρ/ρ_∞ (вверху) и скорости V/V_∞ (внизу) на двухуровневой сетке ($Re_0 \approx 40$) после четырех итераций

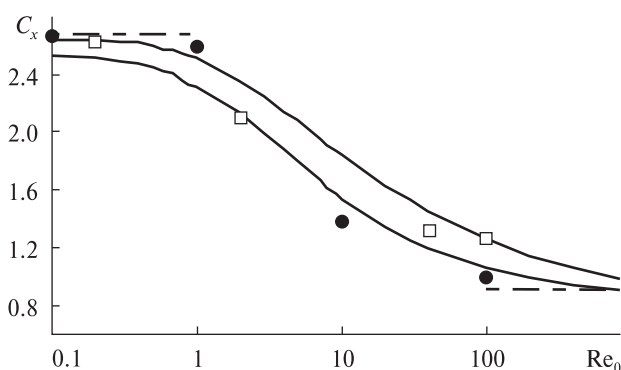


Рис. 3. Значения коэффициента C_x лобового сопротивления сферы, полученные с помощью метода пробных частиц (квадратики), сплошные линии – доверительный интервал [10], точки – расчет [1]

ти течения сложной формы. Они наиболее выигрышны как с точки зрения простоты алгоритма, так и по затратам машинного времени;

- разработан алгоритм дискретизации расчетной области с помощью иерархически-блочной двухуровневой сетки. Низкий уровень иерархической глубины РС позволяет достаточно быстро строить такие сетки, максимально сохраняя простоту их обхода. Компактная организация расчетной области обеспечивает высокоэффек-

тивный доступ к соседним ячейкам и быструю обработку данных [18];

- разработан алгоритм итерационного построения адаптивной иерархически-блочной двухуровневой сетки, заключающийся в поэтапном перестроении результирующей РС (корректировки дробления базовых ячеек) вплоть до стабилизации полученных сеточных разбиений и расчетных полей газодинамических параметров [13, 16, 19]. Контроль над сходимостью результатов может осуществляться как численно, так и визуально на основании их графических отображений. Получены изображения, наглядно демонстрирующие поэтапное формирование двухуровневой неструктурированной сетки [14, 15];

- разработан алгоритм моделирования траекторий движения молекул МПЧ в расчетном поле, дискретизированном при помощи адаптивных блочно-структурированных сеток [19];

- показано, что альтернативой адаптации любых сеток к твердым границам расчетной области является ввод условия непроницаемости на границе с поверхностью [17, 18]. Преимуществом такого подхода является сохранение структуры сетки и возможность задания удобной формы расчетной области. При данном подходе сетка накладывается на геометрию преграды, а параметры отраженных молекул не зависят от формы приграничных ячеек;

- проверена работоспособность алгоритма итерационного построения двухуровневых блочно-структурированных сеток и алгоритма моделирования траекторий пробных частиц на таких сетках путем тестирования на задачах внешнего осесимметричного обтекания простых тел (сферы, конуса при нулевом угле атаки, перпендикулярной к набегающему потоку круглой пластины) для различных режимов обтекания [15]. Установлено соответствие полученных результатов имеющимся расчетным данным для равномерной прямоугольной сетки, имеющей ячейки аналогичного размера и формы, с результатами, полученными другими численными методами и данными экспериментов;

- с помощью разработанных рабочих алгоритмов численно смоделирован поставленный ранее натурный эксперимент гиперзвукового

обтекания сложного осесимметричного тела [14]. Полученные результаты полностью совпадают с имеющимися данными для равномерной РС и согласуются с опубликованными экспериментальными данными, что свидетельствует о высоком качестве тестируемого расчетного алгоритма;

- показаны существенные преимущества использования адаптивной двухуровневой блочно-структурированной РС по сравнению с использовавшейся ранее равномерной прямоугольной РС, позволяющие экономить машинные ресурсы (оперативную память и расчетное время) и при этом сохранять высокое качество полученных результатов [14, 15].

Проведенная работа носит как теоретический, так и прикладной характер. Разработанные методики и алгоритмы реализованы в программном обеспечении. Полученные результаты являются новыми и могут быть использованы в расчетах параметров собственной внешней атмосферы, а также силового и теплового воздействия на космические аппараты сложной формы и элементы их поверхностей, как при свободномолекулярном режиме обтекания, так и в режимах, близких к континуальному. Применение разработанной методики использования адаптивных сеток в МПЧ позволяет существенно экономить необходимые машинные ресурсы при разработке и эксплуатации объектов ракетно-космической техники.

Выводы. Объектом исследования является решение интегродифференциального уравнения Больцмана статистическим методом пробных частиц. Предметом исследования являются новые численные алгоритмы, обеспечивающие реализацию МПЧ на неравномерных сетках и их применение для решения проблем динамики разреженного газа и молекулярной газовой динамики.

Оптимальными для моделирования течений разреженного газа МПЧ являются адаптивные иерархические сетки, максимально сохраняющие свойства упорядоченности во всей расчетной области. В статье сделан обзор работ, в которых осуществлялись: выбор оптимальной расчетной сетки для МПЧ; разработка алго-

ритма ее генерации; адаптация к геометрии непроницаемых поверхностей; моделирование траекторий движения молекул на выбранной сеточной структуре; апробация разработанных алгоритмов и сравнение полученных результа-

тов с имеющимися экспериментальными и расчетными данными. Реализация МПЧ на неравномерных адаптивных сетках дает возможность существенного расширения диапазона решаемых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Е. В., Баранцев Р. Г. *Локальный метод аэродинамического расчета в разреженном газе*. Ленинград : ЛГУ, 1976.
2. Басс В. П., Печерица Л. Л. Аэрогазодинамические характеристики КА «Сич-2» на этапе входа в плотные слои атмосферы Земли. *Техническая механика*. 2010. № 3. С. 3—10.
3. Басс В. П., Печерица Л. Л. Численное решение трехмерных задач динамики разреженного газа. *Техническая механика*. 2010. № 2. С. 38—51.
4. Басс В. П., Печерица Л. Л., Смелая Т. Г. Использование неструктурированных сеток для моделирования течений разреженного газа. *Модели и методы аэродинамики: Матер. докл. 12 междунар. школы-семинара (Москва, 2012)*. М., 2012. С. 22—23.
5. Власов В. И. Улучшение метода статистических испытаний (Монте-Карло) для расчета течений разреженных газов. *Докл. АН СССР*. 1966. 167(5). С. 1016—1018.
6. Власов В. И. Консервативный вариант метода пробных молекул (Монте-Карло). *Численные и аналитические методы в динамике разреженных газов: Тр. VIII Всесоюз. конф. Москва, 1986*. С. 81—85.
7. Григорьев Ю. Н. Численные методы механики сплошной среды. *ВЦ СО АН СССР*. 1971. 2(4). С. 101—107.
8. Гусев В. Н., Егоров И. В., Ерофеев А. И., Провоторов В. П. Верификация моделей и методов в динамике разреженных газов. *Изв. РАН. Мех. жидкости и газа*. 1999. № 2. С. 129—134.
9. Егоров И. В., Ерофеев А. И. Сопоставление моделирования гиперзвукового обтекания плоской пластины на основе метода Монте-Карло и уравнений Навье-Стокса. *Изв. РАН. Мех. жидкости и газа*. 1997. № 1. С. 133—145.
10. Коган М. Н. *Динамика разреженного газа. Кинетическая теория*. М.: Наука, 1967.
11. Кошмаров Ю. А., Рыжов Ю. А. *Прикладная динамика разреженного газа*. М.: Машиностроение, 1977.
12. Палий А. С., Печерица Л. Л. Применение метода пробных частиц к аэродинамическому расчету КА. *Техническая механика*. 2017. № 3. С. 64—70.
13. Печерица Л. Л. Моделирование течений разреженного газа методом пробных частиц на двухуровневой локально-структурированной сетке. *Тези доп. 15-ї Укр. конф. з космічних досліджень (24—28 серпня 2015)*. Київ, 2015. С. 114.
14. Печерица Л. Л., Смелая Т. Г. Численное моделирование осесимметричного обтекания протяженного составного тела методом пробных частиц с использованием иерархических сеток. *Техническая механика*. 2016. № 2. С. 64—70.
15. Печерица Л. Л., Смелая Т. Г. Численное моделирование осесимметричного обтекания тел простой формы с использованием иерархических сеток. *Техническая механика*. 2016. № 1. С. 95—102.
16. Печерица Л. Л., Смелая Т. Г., Петрушенко Н. В. Построение оптимальных алгоритмов реализации метода пробных частиц в динамике разреженных газов. *Современные проблемы динамики разреженных газов: Матер. IV-й Всероссийской конф. (26—29 июля 2013)*. Новосибирск, 2013. С. 164—166.
17. Смелая Т. Г. Адаптация расчетных сеток к геометрии обтекаемых преград. *Тези доп. 14-ї Укр. конф. з космічних досліджень (8—12 вересня 2014)*. Київ, 2014. С. 99.
18. Смелая Т. Г. Выбор расчетной сетки при моделировании течений разреженного газа методом пробных частиц. *Техническая механика*. 2013. № 1. С. 45—60.
19. Смелая Т. Г. Неструктурированные сетки и их применение при численном моделировании методом пробных частиц. *Техническая механика*. 2015. № 4. С. 155—168.
20. Хэвиленд Дж. К. Решение двух задач о молекулярном течении методом Монте-Карло. *Вычислительные методы в динамике разреженных газов*. М.: Мир, 1969. С. 7—115.
21. Naviland I. K., Lavin M. L. Application of the Monte-Carlo method to heat transfer in a rarefied gas. *Phys. Fluids*. 1962. 5(11). P. 1399—1405.

Стаття надійшла до редакції 29.03.2019

REFERENCES

1. Alexeeva E. V., Barantsev R. G. (1976). *Local method of aerodynamic calculation in rarefied gas*. Leningrad: LSU [in Russian].
2. Bass V. P., Pecheritsa L. L. (2010). Aerogasdynamic characteristics of “Sich-2” satellite while entering Earth’s atmosphere. *Technical Mechanics*, **3**, 3–10 [in Russian].
3. Bass V. P., Pecheritsa L. L. (2010). Numerical solution of three-dimensional tasks of the rarefied gas dynamics. *Technical Mechanics*, **2**, 38–51 [in Russian].
4. Bass V. P., Pecheritsa L. L., Smila T. G. (2012). Application of the unstructured grids for the simulation of the rarefied gas flows. *The Models and Methods of the Aerodynamics: Proc. 12th International School-Seminar*. Moscow, 2012. P. 22–23 [in Russian].
5. Vlasov V. I. (1966). Improvement of statistical tests method (Monte-Carlo) for the calculation of the rarefied gases flows. *Paper of the Academy of Sciences of USSR*, **167**(5), 1016–1018 [in Russian].
6. Vlasov V. I. (1986). Conservative variant of test particle method (Monte-Carlo). *Numerical and Analytical Methods in the Rarefied Gas Dynamics: Proc. from 8th All-Union Conference on Rarefied Gas Dynamics (1986)*. Moscow, 81–85 [in Russian].
7. Hryhoriev Yu. N., Ivanov M. S., Haritonova N. M. (1971). The Numeral methods of continuum mechanics. *Computing Center of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences*, **2**(4), 101–107 [in Russian].
8. Gusev V. N., Yehorov I. V., Yerofeev A. I., Provotorov V. P. (1999). Verification of models and methods in the rarefied gas dynamics. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Fluid mechanics*, **2**, 129–134 [in Russian].
9. Yehorov I. V., Yerofeev A. I. (1997). Comparison of numerical simulation of hypersonic flow around the flat plate on the basis of the Monte-Carlo method and Navier-Stokes equations. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Fluid mechanics*, **1**, 133–145 [in Russian].
10. Kogan M. N. (1967). *Rarefied gas dynamics. Kinetic theory*. Moscow: Nauka [in Russian].
11. Koshmarov Yu. A., Ryzhov Yu. A. (1977). *Applied dynamics of rarefied gas*. Moscow: Mashinostroenie [in Russian].
12. Paliy O. S., Pecheritsa L. L. (2017). Application of the test particles method to the SV aerodynamics computation. *Technical Mechanics*, **3**, 64–70 [in Russian].
13. Pecheritsa L. L. (2015). Simulation of the rarefied gas flows by the test particles method on the two-tier locally-structured grid. *Abstracts of 15th Ukrainian conference on Space Research*. (Kyiv, 2015). Kyiv. P. 114 [in Russian].
14. Pecheritsa L. L., Smila T. G. (2016). The numeral simulation of the axisymmetrical flow around extended compound body by test particles method with the use of hierarchical grids. *Technical Mechanics*, **2**, 64–70 [in Russian].
15. Pecheritsa L. L., Smila T. G. (2016). The numeral simulation of the axisymmetrical flow around simply-shaped bodies with the use of hierarchical grids. *Technical Mechanics*, **1**, 95–102 [in Russian].
16. Pecheritsa L. L., Smila T. G., Petrusenko N. V. (2013). Optimal algorithms construction of the test particles method realization in the rarefied gas dynamics. *Modern Problems of the Rarefied Gas Dynamics: Proc. from the 4th All-Russian Conf. (Novosibirsk, 2013)*. Novosibirsk, 164–166 [in Russian].
17. Smila T. G. (2014). Adaptation of calculating grids to geometry of the streamlined obstacles. *Abstracts of 15th Ukrainian conference on Space Research (Kyiv, 2014)*. Kyiv, 99 [in Russian].
18. Smila T. G. (2013). Choice of calculation grid at the simulation of the rarefied gas flows by the test particles method. *Technical Mechanics*, **1**, 45–60 [in Russian].
19. Smila T. G. (2015). Unstructured grids and their application at the numeral simulation by the test particles method. *Technical Mechanics*, **4**, 155–168 [in Russian].
20. Haviland J. K. (1969). Solution of two tasks on a molecular flow by the Monte-Carlo method. *The computing methods in the rarefied gases dynamics*. Moscow: Mir, 7–115 [in Russian].
21. Haviland J. K. (1962). Application of the Monte-Carlo method to heat transfer in a rarefied gas. *Phys. Fluid*, **5**(11), 1399–1405.

Received 29.03.2019

Л. Л. Печериця, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.

Т. Г. Сміла, наук. співроб.,

E-mail: smelaya.t.g@nas.gov.ua

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України,

вул. Лешко-Попеля 15, Дніпро, Україна, 49005

ОПТИМІЗАЦІЯ СІТКОВОЇ СТРУКТУРИ ПРИ ВИКОРИСТАННІ СТАТИСТИЧНОГО МЕТОДУ ПРОБНИХ ЧАСТОК У ЗАДАЧАХ РОЗРІДЖЕНОЇ ГАЗОВОЇ ДИНАМІКИ

Неможливість отримання аналітичного рішення інтегродиференційного рівняння Больцмана в загальній постановці стимулює як постійний розвиток і вдосконалювання традиційно вживаних підходів, так і пошук нових можливостей розв'язку цього рівняння. В області розрідженої газовой динаміки найбільш поширеним статистичним методом розв'язування рівняння Больцмана є метод прямого статистичного моделювання. Ця робота присвячена альтернативному йому статистичному методу пробних часток (МПЧ).

Метою статті є огляд раніше отриманих результатів роботи Інституту технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України з розвитку МПЧ через перехід до розрахунків на дворівневих ієрархічних адаптивних сітках (ДІАС). У статті стисло викладено основні положення МПЧ і зроблено огляд робіт, у яких здійснювалися: вибір оптимальної розрахункової сітки для МПЧ та алгоритму її генерації; побудова нових чисельних алгоритмів стеження за траєкторіями молекул, якщо дискретизація розрахункової області здійснюється за допомогою ДІАС; тестування алгоритму МПЧ на вибраних сітках у двовимірній постановці. Результати розрахунків газодинамічних параметрів навколо перешкод і коефіцієнтів лобового опору порівнювалися з іншими результатами, отриманими як чисельно, так і експериментально. Висока якість тестованого розрахункового алгоритму підтверджена хорошою відповідністю порівнюваних результатів.

Використання вдосконалених сіток дає істотні переваги в застосуванні МПЧ, значно скорочуючи ресурсомісткість алгоритму, що дозволяє охопити ширший діапазон розрахункових режимів обтікання й перейти до розв'язування якісно нових завдань.

Розроблені алгоритми можуть використовуватися при практичних розрахунках параметрів дії зовнішнього середовища на космічні апарати складної форми в інтервалах режимів (у тому числі на їхні окремі елементи) від вільномолекулярного до близького до континуального.

Ключові слова: рівняння Больцмана, динаміка розрідженого газу, газодинамічні параметри, метод пробних часток, адаптивна ієрархічна сітка, вільномолекулярний і перехідний режими.

L. L. Pecheritsa, Cand. Sci. in Phys. & Math., Senior researcher

T. G. Smelaya, Researcher,

E-mail: smelaya.t.g@nas.gov.ua

Institute of technical mechanics of NASU and SSAU,

15, Leshko-Popel Str., Dnipro, Ukraine, 49005

GRID STRUCTURE OPTIMIZATION BY THE TEST PARTICLE METHOD IN THE TASKS OF RAREFIED GAS DYNAMICS

The inability to obtain the analytical solution of the integro-differential Boltzmann equation in general formulation stimulates both the continuous development and improvement of the traditionally used approaches and the search for new possibilities of the solution of this equation. In rarefied gas dynamics, the most widespread statistical method of the Boltzmann equation solution is the method of the direct Monte Carlo simulation. This article is devoted to the alternative statistical method of test-particle simulations (MTPS).

The paper aims to review previously obtained results of the Institute of Technical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the State Space Agency of Ukraine on MTPS development applying two-tier hierarchical adaptive grids. The article summarizes the main features of MTPS and gives the overview of works, which included the choice of the optimal computational grid for MTPS and its generation algorithm, the creation of new numeric algorithms for the tracking of molecule paths during the computational domain discretization using two-tier hierarchical adaptive grids, testing the MTPS algorithm with chosen grids at the 2D setting. Calculation results of the gas dynamic parameters in the vicinity of obstacles and

drag coefficients were compared with other results obtained both numerically and experimentally. The high quality of the tested computational algorithm is confirmed by the good accordance with the compared results.

The use of the improved grids brings undeniable benefits in the application of MTPS, significantly reducing algorithm requirements to the resource. That allows you to cover a wider range of calculated flow regime and move on to solving new problems.

The developed algorithms can be used in practical calculations of parameters of the environmental impact on spacecraft with complex shapes (including their parts) in the intervals of regimes from free molecular to near to transitional.

Keywords: Boltzmann equation, the rarefied gas dynamics, gas-dynamic parameters, the test particles method, adaptive hierarchical grids, free molecular and transitional regimes.