

<https://doi.org/10.15407/knit2019.06.003>

УДК 539.3

П. Г. Дегтяренко¹, В. З. Грищак², Д. Д. Грищак³, Н. Н. Дьяченко²

¹ Государственное космическое агентство Украины, Киев, Украина

² Запорожский национальный университет, Запорожье, Украина

³ Центральный научно-исследовательский институт вооружения и военной техники Вооруженных Сил Украины, Киев, Украина

К ПРОБЛЕМЕ РАВНОУСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОБОЛОЧЕЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

Устойчивость оболочечной конструкции ракеты-носителя типа «цилиндр — конус» изучается при комбинированном нагружении внешним давлением, осевым сжатием и крутящим моментом. Разрешающие уравнения задачи решаются аналитически с использованием асимптотического подхода. В случае конического отсека используются два аналитических метода, таких как метод ВКБ и гибридный ВКБ-Галеркин-метод. Для анализа устойчивости подкрепленных оболочек используется матричный метод, позволяющий определить изменение напряженно-деформированного состояния оболочки при переходе через шпангоут. Характеристическое уравнение для определения критических нагрузок получено на основе матричного метода и уравнений сопряжения. Особое внимание уделено выбору коэффициентов жесткости шпангоута для конической и цилиндрической частей, обеспечивающих равные критические давления. Получено, что значения критического давления для равноустойчивой конструкции ниже, чем у ее отдельных частей. Изучена устойчивость подкрепленной конической конструкции при комбинированной нагрузке. Обсуждаются результаты численных расчетов для различных типов подкрепленных конструкций. Показано, что в предельных случаях для цилиндрических или конических оболочек численные результаты находятся в хорошей корреляции с известными публикациями.

Ключевые слова: оболочечная конструкция типа «цилиндр — конус», устойчивость оболочки, равноустойчивость оболочки, жесткость шпангоута, комбинированное нагружение.

ВВЕДЕНИЕ

Расчет подкрепленной цилиндрической оболочки ракеты-носителя проводился в работах [1, 3, 5, 8, 24], конической — в работах [6, 9] с помощью аналитических и численных методов. Исследования [11, 12, 17—22, 25], посвящены проблеме устойчивости отдельных элементов оболочечной конструкции сложной геометрической конфигурации. В данной работе применяется метод начального параметра в матричной

форме для исследования устойчивости с изменением напряженно-деформируемого состояния при переходе через шпангоут, изложенный в работах [5, 9]. При этом учитывается как жесткость шпангоута в плоскости начальной кривизны, так и жесткость из плоскости.

Для исследования устойчивости конической оболочки используется разрешающее обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, полученное для некоторых случаев нагружения в работах [3, 10], а для комбинации трех нагрузок — в работе [4]. Приближенное аналитическое решение этого уравне-

© П. Г. ДЕГТЯРЕНКО, В. З. ГРИЩАК,
Д. Д. ГРИЩАК, Н. Н. ДЬЯЧЕНКО, 2019

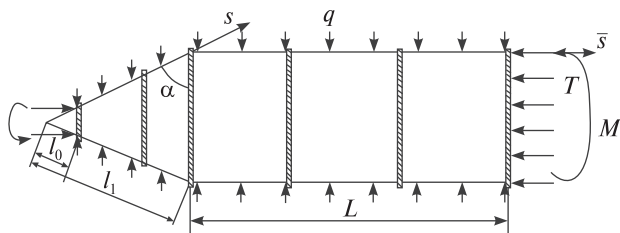


Рис. 1. Схема нагружения подкрепленной оболочечной конструкции

ния ВКБ-методом, а также использование решения для применения матричного метода решения задачи устойчивости подкрепленной конической оболочки получено в работе [9] для некоторых типов нагружения. Эффективность гибридного метода ВКБ — Галеркина для решения различных задач математической физики показана в работах [13, 15, 16], а задач устойчивости конических оболочек — в работах [4, 14]. В данной работе применяются оба указанных метода.

Расчет составных подкрепленных оболочечных конструкций типа «цилиндр — конус» в настоящее время проводится численными методами [2, 6, 23, 24]. При этом не учитывается ранустойчивость пролетов оболочки или отдельных ее частей. В монографии [9] с помощью аналитического ВКБ-решения изучена устойчивость подкрепленной конической оболочки, имеющей равноустойчивые пролеты.

В данной работе предложен подход для поиска равноустойчивых составных подкрепленных конструкций типа «цилиндр — конус» на основе аналитических подходов.

Предложенный аналитико-численный подход к исследованию локальных и общих форм выпучивания подкрепленных оболочечных конструкций не является альтернативой для прямого численного расчета, в частности на базе метода конечных элементов, а лишь первым этапом анализа основных механических эффектов с дальнейшим уточняющим расчетом с использованием известных в практике проектирования численных алгоритмов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается упругая оболочечная конструкция кругового сечения постоянной толщины h ,

подкрепленная шпангоутами (рис. 1). Решается задача устойчивости такой конструкции, подверженной внешнему давлению q , осевому сжатию силой T при одновременном воздействии крутящего момента M . При этом предполагается, что каждое кольцо подкрепляющего шпангоута имеет жесткость на изгиб как в плоскости начальной кривизны, так и из нее. Предполагается также, что волнообразование по длине оболочки выражено намного слабее, чем в окружном. При этом для оболочек средней длины число волн n в окружном направлении таково, что $n^2 \gg 1$, а в продольном направлении образуется одна полу-волна.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Цилиндрический пролет оболочки. Пусть $C = Eh$, $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$ — жесткости обшивки на растяжение-сжатие и изгиб, E — модуль упругости и ν — коэффициент Пуассона материала оболочки, \bar{s} и y — координаты вдоль образующей и дуги цилиндрической оболочки соответственно, R — радиус кривизны срединной поверхности оболочки. Уравнение относительно функции радиальных перемещений $w_{cyl}(\bar{s}, y)$ точек пролета цилиндрической оболочки при условии $\sqrt{h/R} < L/R < \sqrt{R/h}$ имеет вид [3]:

$$\frac{D}{h} \nabla^8 w_{cyl} + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w_{cyl}}{\partial \bar{s}^4} + p_x \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial \bar{s}^2} \right) + p_y \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial y^2} \right) + 2p_{xy} \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial \bar{s} \partial y} \right) = 0. \quad (1)$$

Напряжения в (1) представляются в виде $p_x = T / (Rh)$, $p_y = qR / h$, $p_{xy} = -M / (2\pi h R^2)$, вводятся безразмерные координаты $\bar{x} = \bar{s} / L$, $\bar{\varphi} = y / R$, безразмерные усилия

$$\eta_{cyl} = \frac{T}{Eh^2}, \quad \chi_{cyl} = \frac{qR^2}{Eh^2}, \quad \lambda_{cyl} = \frac{M}{2\pi ERh^2}, \quad (2)$$

и функция радиальных перемещений

$$w_{cyl}(\bar{x}, \bar{\varphi}) = W_{cyl}(\bar{x}) \cdot \cos(\gamma_{cyl}(1 - \bar{x}) + n\bar{\varphi}), \quad (3)$$

где $\gamma_{cyl} = \gamma_1 n L / R$, γ_1 — тангенс угла наклона гребня волны к образующей. Затем преобразованное уравнение (1) с учетом (2) и (3) интегрируется по

координате $\bar{\varphi}$ методом Бубнова — Галеркина от 0 до 2π . В результате для тонких оболочек средней длины со значениями $K^2 > 1$, $n^2 \gg 1$, $\varepsilon_1 \ll 1$ получается дифференциальное уравнение основного напряженного состояния относительно функции прогиба цилиндрической оболочки:

$$aW_{cyl}^{(4)}(\bar{x}) + bW_{cyl}''(\bar{x}) + cW_{cyl}(\bar{x}) = 0, \quad (4)$$

где

$$a = K^4 [-10\gamma_1\lambda_{cyl} - (15\gamma_1^2 + 2)\eta_{cyl} - \chi_{cyl} + 2n^2\varepsilon_1\omega^{-1}(35\gamma_1^4 + 30\gamma_1^2 + 3) + \varepsilon_1^{-1}n^{-2}],$$

$$b = n^2 K^{-2} [4\gamma_1(5\gamma_1^3 + 3)\lambda_{cyl} + (12\gamma_1^2 + 15\gamma_1^4 + 1)\eta_{cyl} + 2(3\gamma_1^2 + 1)\chi_{cyl} - 4\varepsilon_1 n^2 \omega^{-1} (7\gamma_1^6 + 15\gamma_1^4 + 9\gamma_1^2 + 1) - 6\gamma_1^2 \varepsilon_1^{-1} n^{-2}],$$

$$c = -n^4 (\gamma_1^2 + 1)^2 [2\gamma_1 \lambda_{cyl} + \gamma_1^2 \eta_{cyl} + \chi_{cyl} - n^6 \omega^{-1} \varepsilon_1 (\gamma_1^2 + 1)^2] + n^2 \gamma_1^4 \varepsilon_1^{-1},$$

$$K = L/R, \quad \varepsilon_1 = h/R, \quad \omega = 12(1 - \nu^2).$$

Уравнение (4) является разрешающим для исследования на устойчивость цилиндрического пролета оболочки. Общим решением уравнения (4) является функция

$$W_{cyl}(\bar{x}) = W_{cyl}(\bar{x}_k)\psi_{cyl,1}(\bar{x}) + W'_{cyl}(\bar{x}_k)\psi_{cyl,2}(\bar{x}) + W''_{cyl}(\bar{x}_k)\psi_{cyl,3}(\bar{x}) + W'''_{cyl}(\bar{x}_k)\psi_{cyl,4}(\bar{x}),$$

где

$$\psi_{cyl,1}(\bar{x}) = \frac{\beta_2^2 \operatorname{ch} \beta_1(\bar{x} - \bar{x}_k) + \beta_1^2 \cos \beta_2(\bar{x} - \bar{x}_k)}{\beta_2^2 + \beta_1^2},$$

$$\psi_{cyl,2}(\bar{x}) = \frac{\beta_2^3 \operatorname{sh} \beta_1(\bar{x} - \bar{x}_k) + \beta_1^3 \sin \beta_2(\bar{x} - \bar{x}_k)}{(\beta_2^2 + \beta_1^2)\beta_1\beta_2},$$

$$\psi_{cyl,3}(\bar{x}) = \frac{\operatorname{ch} \beta_1(\bar{x} - \bar{x}_k) - \cos \beta_2(\bar{x} - \bar{x}_k)}{\beta_2^2 + \beta_1^2},$$

$$\psi_{cyl,4}(\bar{x}) = \frac{\beta_2 \operatorname{sh} \beta_1(\bar{x} - \bar{x}_k) - \beta_1 \sin \beta_2(\bar{x} - \bar{x}_k)}{(\beta_2^2 + \beta_1^2)\beta_1\beta_2},$$

$$\beta_{1,2} = \sqrt{\frac{\mp b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Матричное уравнение пролета цилиндрической оболочки в точках $\bar{x} \in [\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \dots, m_{cyl}\}$ представляется в виде

$$\begin{pmatrix} W_{cyl}(\bar{x}) \\ W'_{cyl}(\bar{x}) \\ W''_{cyl}(\bar{x}) \\ W'''_{cyl}(\bar{x}) \end{pmatrix} = A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}) \cdot \begin{pmatrix} W_{cyl}(\bar{x}_k) \\ W'_{cyl}(\bar{x}_k) \\ W''_{cyl}(\bar{x}_k) \\ W'''_{cyl}(\bar{x}_k) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_{cyl,1} & \Psi_{cyl,2} & \Psi_{cyl,3} & \Psi_{cyl,4} \\ \Psi'_{cyl,1} & \Psi'_{cyl,2} & \Psi'_{cyl,3} & \Psi'_{cyl,4} \\ \Psi''_{cyl,1} & \Psi''_{cyl,2} & \Psi''_{cyl,3} & \Psi''_{cyl,4} \\ \Psi'''_{cyl,1} & \Psi'''_{cyl,2} & \Psi'''_{cyl,3} & \Psi'''_{cyl,4} \end{pmatrix}.$$

Матрица $A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x})$ — нормальная фундаментальная со свойством $A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}_k) = \Xi$, где Ξ — единичная матрица. Заметим, что если цилиндрическая оболочка имеет фиксированное значение ε_1 , то матрицы $A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1})$ равны для пролетов одинаковой длины. Для такой матрицы используется обозначение $A_{cyl}(\bar{L}_k) = A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1})$, где $\bar{L}_k = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k$.

Конический пролет оболочки. Вводятся следующие обозначения (рис. 1): α — угол при основании конуса, s — расстояние по образующей конуса с отсчетом от его вершины, $x = s/l_1$, φ — угловая координата в плоскости параллели.

В работе [3] приведена полная система дифференциальных уравнений в частных производных, характеризующая равновесие конической оболочки. После введения безразмерных параметров

$$\delta = n^2 / \cos^2 \alpha, \quad p = \varepsilon \delta, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{h \operatorname{ctg} \alpha}{l_1 \sqrt{12(1 - \nu^2)}}},$$

$$\gamma_{cone} = \frac{n}{\cos \alpha} \gamma_1, \quad \text{безразмерных усилий}$$

$$\chi_{cone} = \frac{q^* l_1}{Eh \varepsilon^3 \operatorname{tg}^3 \alpha},$$

$$\eta_{cone} = \frac{T \cos \alpha}{2\pi E h \varepsilon^2 l_1 \sin^3 \alpha},$$

$$\lambda = \frac{M}{2\pi l_1^2 E h \varepsilon^{5/2} \sin^2 \alpha},$$

где $q^* = q \cdot \sin \alpha$, и представления функции радиальных перемещений и функции усилий в виде

$$w_{cone}(x, \varphi) = W_{cone}(x) \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos(\gamma_{cone}(1-x) + n\varphi),$$

$$f_{cone}(x, \varphi) = \Phi_{cone}(x) \varepsilon^2 l_1 E h \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos(\gamma_{cone}(1-x) + n\varphi)$$

в работе [4] получено разрешающее обыкновенное дифференциальное уравнение исследования на устойчивость конической оболочки относительно функции прогиба $W_{cone}(x)$:

$$W_{cone}^{IV} + \frac{6}{x} W_{cone}''' + \left(\frac{6}{x^2} - 2\gamma_{cone}^2 + \frac{\eta_{cone} p^2}{x^3} \right) W_{cone}'' - \frac{6\gamma_{cone}^2}{x} W_{cone}' - Q_0(x) W_{cone} = 0, \quad (6)$$

где

$$Q_0(x) = \frac{\eta_{cone} p^2 \gamma_{cone}^2}{x^3} + \frac{\chi_{cone} p^3}{x^3} + \frac{\lambda_{cone} \gamma_{cone} p^{5/2}}{x^5} - \frac{p^4}{x^6} + 6 \frac{\gamma_{cone}^2}{x^2} - \gamma_{cone}^4.$$

Пусть $x \in [x_i; x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, m_{cone}$). Решение (6) ВКБ-методом имеет вид [4]

$$W_{cone}(x) = \sum_{j=1}^4 C_j^{WKB} \psi_{cone,j}^{WKB}(x), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{cone,1}^{WKB}(x) &= \operatorname{sh} S_1(x), \\ \psi_{cone,2}^{WKB}(x) &= \operatorname{ch} S_1(x), \\ \psi_{cone,3}^{WKB}(x) &= \sin S_2(x), \\ \psi_{cone,4}^{WKB}(x) &= \cos S_4(x), \end{aligned} \quad (8)$$

$$F_{1,2}(x) = \frac{\sqrt{\mp 2K(x) \delta^2 + 2\sqrt{K^2(x) \delta^4 + 4Q_0(x)}}}{2\delta},$$

$$K(x) = \eta_{cone} \varepsilon^2 / x^3, \quad S_j(x) = \delta \int_{x_i}^x F_j(t) dt, \quad j = 1, 2.$$

Решение уравнения (6) гибридным ВКБ-Галеркин-методом имеет вид [4]:

$$W_{cone}(x) = \sum_{j=1}^4 C_j^{Hybr} \psi_{cone,j}^{Hybr}(x), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{cone,1}^{Hybr}(x) &= e^{\Lambda_1 S_1(x)}, \quad \psi_{cone,2}^{Hybr}(x) = e^{\Lambda_2 S_1(x)}, \\ \psi_{cone,3}^{Hybr}(x) &= e^{\xi S_1(x)} \sin \zeta S_1(x), \\ \psi_{cone,4}^{Hybr}(x) &= e^{\xi S_1(x)} \cos \zeta S_1(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Тут Λ_1, Λ_2 — вещественные, а $\Lambda_{3,4} = \xi \pm i\zeta$ — комплексно-сопряженные корни уравнения

$$\Lambda^4 a_4 + \Lambda^3 a_3 + \Lambda^2 a_2 + \Lambda a_1 - a_0 = 0,$$

в котором

$$a_j = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_0(x) Y_j(x) dx \quad (j = \overline{0;4}),$$

$$Y_4(x) = (\varphi_0(x))^4,$$

$$Y_3(x) = \frac{6}{x} (\varphi_0(x))^3 + 6\varphi_0(x)(\varphi_0(x))^2,$$

$$Y_2(x) = \left(\frac{\eta_{cone} \varepsilon^2 \delta^2}{x^3} + \frac{6}{x^2} - 2\gamma_{cone}^2 \right) (\varphi_0(x))^2 + \frac{18}{x} \varphi_0'(x) \varphi_0(x) + 4\varphi_0''(x) \varphi_0(x) + 3(\varphi_0'(x))^2,$$

$$Y_1(x) = \varphi_0'''(x) + \frac{6}{x} \varphi_0''(x) +$$

$$+ \left(\frac{\eta_{cone} \varepsilon^2 \delta^2}{x^3} + \frac{6}{x^2} - 2\gamma_{cone}^2 \right) \varphi_0'(x) - \frac{6\gamma_{cone}^2 \varphi_0(x)}{x},$$

$$Y_0(x) = Q_0(x).$$

Решение указанными методами может быть найдено для нагрузок, которые для всех $x \in [x_i; x_{i+1}]$ удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} \chi_{cone} &> \frac{p}{x^3} - \frac{\eta_{cone} \gamma^2}{p} - \frac{\lambda_{cone} \gamma_{cone}}{x^2 \sqrt{p}} - \\ &- 6 \frac{\gamma_{cone}^2 x}{p^3} + \frac{\gamma_{cone}^4 x^3}{p^3}. \end{aligned}$$

В каждом из представлений (7) или (9) матричное уравнение пролета конической оболочки можно записать аналогично (5) на базе фундаментальных функций (8) или (10) и их производных. Однако полученная таким образом фундаментальная матрица $A_{cone}(x_i, x)$ не является нормальной.

Напряженно-деформированное состояние конструкции при переходе через шпангоут. В работах [5, 8] получены матрицы, характеризующие преобразование напряженно-деформированного состояния цилиндрической и конической оболочки при переходе через промежуточный, k -й и i -й, шпангоут соответственно:

$$B_{cyl,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & G_{cyl,2}^k & 1 & 0 \\ -G_{cyl,1}^k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_{cone,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & G_{cone,2}^i & 1 & 0 \\ -G_{cone,1}^i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$G_{cyl,1}^k = \frac{n^4(n^2-1)^2(EJ)_{xk}}{CR^3},$$

$$G_{cyl,2}^k = \frac{n^2(n^2-1)^2(EJ)_{zk}}{C(n^2+1)R^3},$$

$$G_{cone,1}^i = \frac{n^4(n^2-1)^2(EJ)_{xi}r_0}{Cr_i^4 \cos^3 \alpha},$$

$$G_{cone,2}^i = \frac{n^2(n^2-1)^2(EJ)_{zi}r_0}{C(n^2+1)r_i^4}$$

— безразмерные жесткости шпангоутов, подкрепляющих цилиндрическую и коническую оболочку соответственно; r_i — радиус шпангоута на конической оболочке, r_0 — радиус меньшего основания усеченного конуса; J_{xk} , J_{zk} — моменты инерции соответственно при изгибе шпангоута в плоскости начальной кривизны и из плоскости.

Рассмотрим j -й пролет цилиндрической или конической оболочки $[x_j, x_{j+1}]$ ($j \in \{0, 1, \dots, m\}$) с матрицей A_j и $(j+1)$ -й шпангоут, соответствующий координате x_{j+1} , с матрицей B_{j+1} . Имеет место [5, 7, 8] связь между векторами перемещений и их производными справа и слева от $(j+1)$ -го шпангоута:

$$B_{j+1} \cdot A_j \cdot \begin{pmatrix} W(x_j) \\ W'(x_j) \\ W''(x_j) \\ W'''(x_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_-(x_{j+1}) \\ W'_-(x_{j+1}) \\ G_2 W'_-(x_{j+1}) + W''_-(x_{j+1}) \\ -G_1 W_-(x_{j+1}) + W'''_-(x_{j+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_+(x_{j+1}) \\ W'_+(x_{j+1}) \\ W''_+(x_{j+1}) \\ W'''_+(x_{j+1}) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Нормальная фундаментальная матрица обладает свойством сдвига. Поэтому с учетом (11) матрица-произведение

$$H = A_{m_{cyl}} \cdot B_{m_{cyl}} \cdot A_{m_{cyl}-1} \cdot B_{m_{cyl}-1} \cdot \dots \cdot B_2 \cdot A_1 \cdot B_1 \cdot A_0 \quad (12)$$

задает изменение напряженно-деформированного состояния цилиндрической части конструкции, содержащей m шпангоутов [5]. В соотношении (12) $A_i = A_{cyl}(\bar{L}_i)$ ($i = 0, \dots, m_{cyl}$) — матрица пролета цилиндрической оболочки.

В случае, когда шпангоут находится на торце, соответствующую матрицу, предшествующую или последующую за шпангоутом, необходимо выбирать для оболочки нулевой длины [5] с соответствующим краевым условием свободного торца.

Поскольку фундаментальная матрица конической оболочки не обладает свойством нормальности, то для сопряжения ее пролетов или сопряжения конического пролета с цилиндрической частью конструкции необходимо составить уравнения сопряжения, задающие равенства нормальных перемещений и их производных в смежных точках пролетов.

Сопряжение конической и цилиндрической части конструкции для исследования общей потери устойчивости. Для примера рассмотрим конструкцию, на конической части которой расположено по одному шпангоуту на основаниях и один — промежуточный, а на цилиндрической части — некоторое конечное число шпангоутов. Характеристическое уравнение для определения критических нагрузок оболочечной конструкции записывается через определитель блочной матрицы:

$$\det \begin{pmatrix} A_{1,1}^{(2)} & \Theta^{(2)} & \Theta^{(2)} & \Theta^{(2)} \\ \Theta^{(2)} & \Theta^{(2)} & \Theta^{(2)} & A_{2,4}^{(2)} \\ A_{3,1}^{(4)} & A_{3,2}^{(4)} & \Theta^{(4)} & \Theta^{(4)} \\ \Theta^{(4)} & A_{4,2}^{(4)} & A_{4,3}^{(4)} & \Theta^{(4)} \\ \Theta^{(4)} & \Theta^{(4)} & A_{5,3}^{(4)} & A_{5,4}^{(4)} \end{pmatrix} = 0, \quad (13)$$

где

$$A_{1,1}^{(2)} = H_{cone}^{(2)}(x_0, x_0), \quad A_{2,4}^{(2)} = H_{cyl}^{(2)}(1),$$

$$A_{3,1}^{(4)} = H_{cone}^{(4)}(x_0, x_1), \quad A_{3,2}^{(4)} = H_{cone}^{(4)}(x_1, x_1),$$

$$A_{4,2}^{(4)} = H_{cone}^{(4)}(x_1, x_2), \quad A_{4,3}^{(4)} = H_{cone}^{(4)}(x_2, x_2),$$

$$A_{5,3}^{(4)} = H_{cone}^{(4)}(x_2, 1), \quad A_{5,4}^{(4)} = H_{cyl}^{(4)}(0),$$

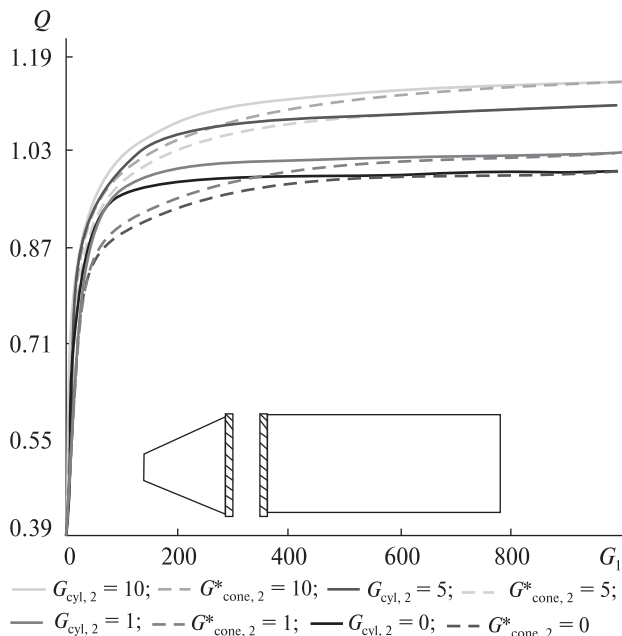


Рис. 2. Анализ локальной потери устойчивости конического пролета оболочки с одним шпангоутом справа и цилиндрической — с одним шпангоутом слева ($L = 2.5R_{cyl}$)

причем Θ — нулевая матрица, $H_{cone}(x_0, x)$ и $H_{cyl}(\bar{x})$ — матрицы конической и цилиндрической части соответственно. Верхний индекс «(4)» обозначает, что матрицу в соответствующей точке следует брать полной, размерности 4×4 , а индекс «(2)» предполагает выделение из полной матрицы двух ее строк, соответствующих граничным условиям на торце. Кроме того, в уравнении (13) необходимо полагать $x_1 = x_0$ при использовании ВКБ-метода или $x_1 = x_0 + \xi$, где $\xi < 1$, для гибридного ВКБ-Галеркин-метода. Матрицы $H_{cone}(x_0, x_0)$, $H_{cyl}(0)$ определяются формулами

$$H_{cone}(x_0, x_0) = A_{cone}(x_0, x_0),$$

$$H_{cyl}(0) = A_{cyl}(0) = \Xi,$$

$H_{cyl}(1)$ — формулой (12), а в силу (11)

$$H_{cone}(x_i, x_s) = B_{cone,s} A_{cone}(x_i, x_s),$$

$$i = 0, 1, 2, s = 1, 2, 3, i \leq s, x_3 = 1.$$

Характеристические уравнения устойчивости конической и цилиндрической секций оболочечной конструкции. Для определения критического давления подкрепленной или неподкрепленной ци-

линдрической оболочки необходимо решить характеристическое уравнение

$$\det \begin{pmatrix} H_{cyl}^{(2)}(0) \\ H_{cyl}^{(2)}(1) \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку $H_{cyl}(0) = A_{cyl}(0) = \Xi$, то матрица этого уравнения преобразуется в минор второго порядка.

Характеристическое уравнение неподкрепленной конической оболочки имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} A_{cone}^{(2)}(x_0, x_0) \\ A_{cone}^{(2)}(x_0, 1) \end{pmatrix} = 0,$$

а подкрепленной — представляется через определитель блочной матрицы, аналогичной (13).

Во всех случаях характеристическое уравнение служит для отыскания критической комбинации нагрузок при минимизации волнового числа в окружном направлении.

ЧИСЛОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматривается оболочечная конструкция с характеристиками: $h_0 = 2$ мм, $\nu = 0.32$, $E = 68.6462$ ГПа. Коническая оболочка выбирается с параметрами: $l_1 = 1.82$ м, $l_0 = 0.65 l_1$, $\alpha = 75^\circ$. Радиус цилиндрической оболочки равен радиусу большего основания конуса, то есть $R_{cyl} = l_1 \cos \alpha$. Если длину цилиндрической оболочки выбрать равной $L = 2.5R_{cyl}$, то ее критическое давление будет совпадать с критическим давлением конической оболочки $q_0 = 31.253$ кПа при условии, что обе оболочки шарнирно оперты. Жесткости шпангоутов, расположенных на конической оболочке, представляются в виде

$$G_{cone,1}^i = \frac{l_1^3 l_0}{l_i^4 \cos^3 \alpha} \cdot G_{1,i}^*,$$

$$G_{cone,2}^i = \frac{l_1^3 l_0}{l_i^4} \cdot G_{2,i}^*,$$

где

$$G_{1,i}^* = \frac{n^4 (n^2 - 1)^2 (EJ)_{xi}}{R^3 C},$$

$$G_{2,i}^* = \frac{n^2 (n^2 - 1)^2 (EJ)_{zi}}{C(n^2 + \kappa_i) R^3}.$$

Исследуются такие конструкции, что коническая и цилиндрическая оболочки подкреплены шпангоутами, которые имеют равные значения

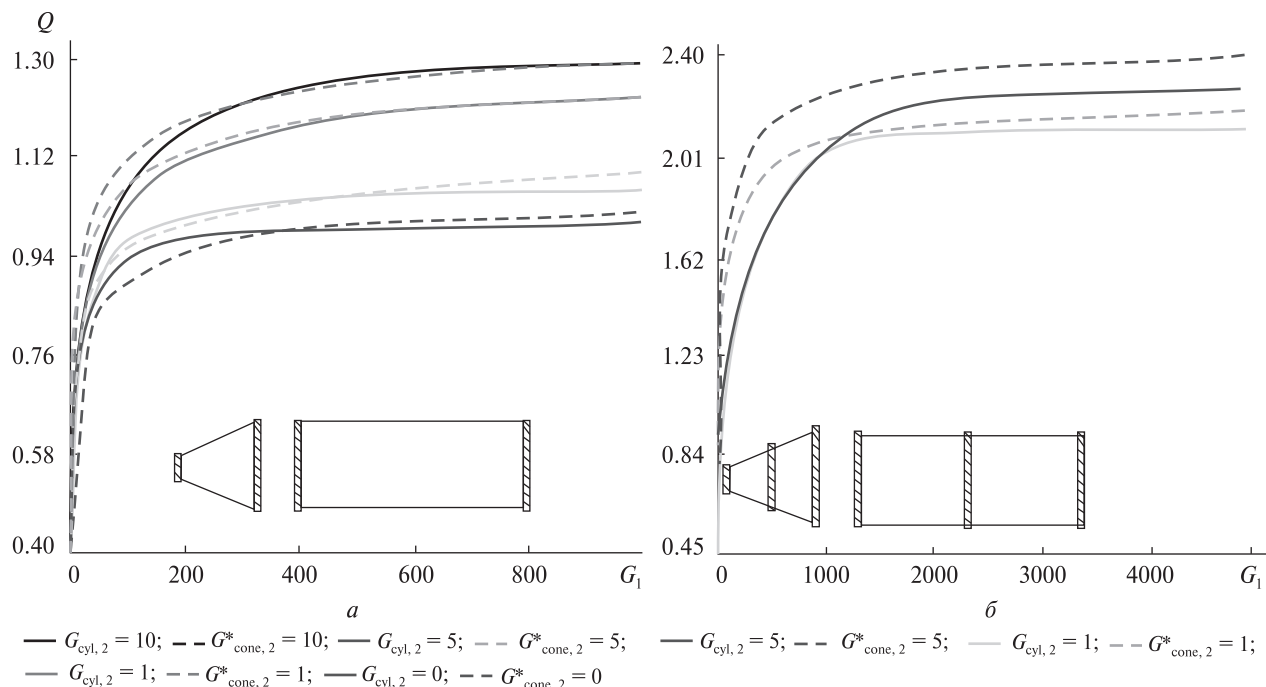


Рис. 3. Анализ локальной потери устойчивости конического и цилиндрического отсеков оболочки с двумя шпангоутами (а) и с тремя шпангоутами (б) в соответствии со схемами ($L = 2.5R_{cyl}$)

каждого из следующих параметров жесткости $G_{cyl,1}^k = G_{cyl,1}$, $G_{cyl,2}^k = G_{cyl,2}$, $G_{1,i}^* = G_{cone,1}^*$ и $G_{2,i}^* = G_{cone,2}^*$ для всех $k = 0, 1, \dots, m_{cyl}$ и $i = 0, 1, \dots, m_{cone}$.

Оболочечные конструкции изучаются в трех случаях. Первый случай — шарнирно опертая на торцах конструкция с одним шпангоутом на большем основании конуса и одним — на левом торце цилиндра; второй — конструкция с парой краевых шпангоутов на каждой части; третий — конструкция с тремя шпангоутами на каждой части, два из которых расположены на краях, а один посередине.

В каждом из указанных случаев, **отдельно для конуса и цилиндра**, построены графики зависимостей (рис. 2 и 3) безразмерного критического давления $Q = q / q_0$ от жесткостей шпангоутов $G_{cone,1}^*$ и $G_{cyl,1}$ соответственно для разных значений $G_{cone,2}^*$ и $G_{cyl,2}$. Сочетание жесткостей шпангоутов на конической и цилиндрической частях конструкции, обеспечивающих состояние равноустойчивости, выбирается так, как показано в табл. 1.

Анализ зависимостей на рис. 2 и 3 показывает, что подкрепление конической и цилиндрической оболочек шпангоутами незначительной

жесткости приводит к снижению критического давления по сравнению с критическим давлением q_0 этих оболочек, шарнирно опертых по обоим торцам (т. е. $Q_{cr} < 1$). При $G_{cone,2}^* \neq 0$ и $G_{cyl,2} \neq 0$ для больших значений $G_{cone,1}^*$ и $G_{cyl,1}$ критическое давление может превзойти q_0 ($Q_{cr} > 1$). Когда на оболочках увеличивается количество шпангоутов, даже небольшие их жесткости дают значительное отклонение критического давления от q_0 ($Q_{cr} \gg 1$).

В рассматриваемых случаях с увеличением жесткости шпангоутов критическое давление стабилизируется как для конической, так и для цилиндрической оболочки (рис. 2—4) на достаточно близких значениях.

Общая потеря устойчивости неподкрепленной конструкции типа «цилиндр — конус» с выбранными размерами происходит при давлении, которое почти на 46 % ниже давления местной потери устойчивости.

Далее изучены составные конструкции при выборе таких жесткостей шпангоутов, расположенных на конической и цилиндрической частях, чтоб обеспечить равноустойчивость цель-








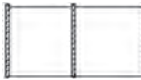
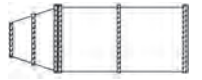
ной конструкции (табл. 1). Значения критического давления равноустойчивой конструкции ниже, чем отдельных ее частей, менее чем на 10 %. Это означает, что с ростом давления, вначале происходит общая потеря устойчивости всей конструкции и практически сразу — конической и цилиндрической частей.

Следующим этапом работы было исследование конструкции, цилиндрическая часть которой в два раза длиннее, чем изученная выше. То есть $L = 5R_{cyl}$. Для того чтобы выбрать шпангоуты, не слишком отличающиеся по жесткости, для обеспечения равноустойчивости конструкции,

содержащей даже два шпангоута на конусе, требуется подкрепить цилиндр не менее чем четырьмя шпангоутами.

На рис. 4 построены зависимости критических давлений от $G_{cone,1}^*$ и $G_{cyl,1}$ при $G_{cone,2}^* = G_{cyl,2} = 5$ для конической оболочки с двумя краевыми шпангоутами, цилиндрической — с четырьмя и пятью равноудаленными шпангоутами, по два из которых являются краевыми. В табл. 2 показано согласование жесткостей для обеспечения равноустойчивости конструкции «цилиндр — конус» с комбинацией количества шпангоутов, соответствующей рис. 4.

Таблица 1. Равноустойчивость подкрепленной конструкции типа «цилиндр — конус» при $L = 2.5R_{cyl}$

| $G_{cone,2}^*$ | $G_{cone,1}^*$ | Q_{cr} для конуса | n | $G_{cyl,2}$ | $G_{cyl,1}$ | Q_{cr} для цилиндра | n | Q_{cr} для конструкции | n |
|---|----------------|------------------------|-----|---|-------------|--------------------------|-----|---|-----|
|  | | | |  | | | |  | |
| 0 | 50 | 0.843117 | 4 | 0 | 29.73 | 0.843111 | 6 | 0.8275 | 4 |
| | 200 | 0.93679 | 4 | | 60.96 | 0.936783 | 6 | 0.910547 | 4 |
| | 600 | 0.992897 | 4 | | 610 | 0.992895 | 7 | 0.963481 | 4 |
| 5 | 50 | 0.290172 | 4 | 5 | 38.85 | 0.910226 | 6 | 0.889502 | 4 |
| | 200 | 0.324305 | 4 | | 118.2 | 1.017298 | 7 | 0.989949 | 4 |
| | 600 | 1.090632 | 4 | | 555 | 1.090632 | 7 | 1.059793 | 4 |
| 10 | 50 | 0.9301619 | 4 | 10 | 43.77 | 0.930158 | 7 | 0.909567 | 4 |
| | 200 | 1.0413069 | 4 | | 126.7 | 1.041293 | 7 | 1.013965 | 4 |
| | 600 | 1.1201358 | 4 | | 418 | 1.120142 | 7 | 1.088711 | 4 |
|  | | | |  | | | |  | |
| 0 | 50 | 0.843864 | 4 | 0 | 50.54 | 0.843864 | 6 | 0.814235 | 4 |
| | 200 | 0.937032 | 4 | | 109.8 | 0.937047 | 6 | 0.897803 | 4 |
| | 600 | 0.992965 | 4 | | 1213.5 | 0.992966 | 7 | 0.950033 | 4 |
| 5 | 50 | 0.990428 | 4 | 5 | 84.47 | 0.990425 | 7 | 0.975735 | 4 |
| | 200 | 1.117896 | 4 | | 233.34 | 1.117895 | 7 | 1.112482 | 4 |
| | 600 | 1.19517 | 4 | | 599.9 | 1.19517 | 7 | 1.136744 | 4 |
| 10 | 50 | 1.0299789 | 4 | 10 | 95.58 | 1.029973 | 7 | 1.019602 | 4 |
| | 200 | 1.1763167 | 4 | | 231.92 | 1.176317 | 7 | 1.14858 | 4 |
| | 600 | 1.25631217 | 5 | | 540.27 | 1.256315 | 8 | 1.228374 | 5 |
|  | | | |  | | | |  | |
| 5 | 50 | 1.524709 | 5 | 5 | 241.2 | 1.524714 | 8 | 1.493477 | 5 |
| | 200 | 1.861432 | 5 | | 649.91 | 1.861434 | 9 | 1.855127 | 5 |
| | 600 | 2.072091 | 6 | | 1156.95 | 2.07209 | 10 | 2.04291 | 6 |

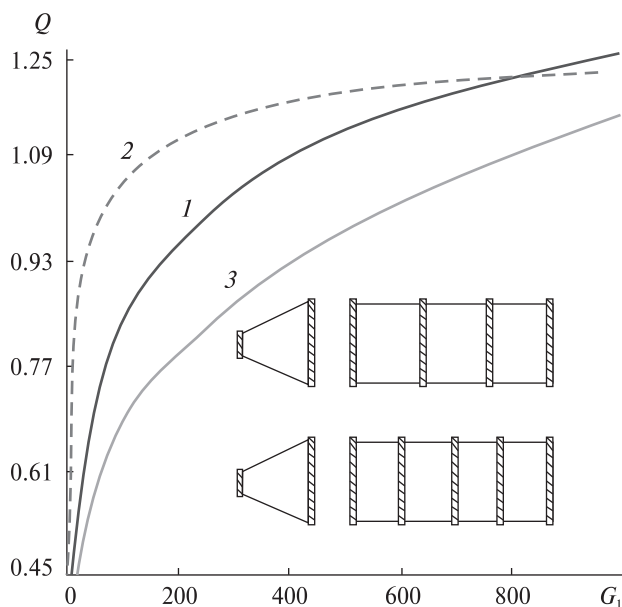


Рис. 4. Локальная потеря устойчивости конического и цилиндрического отсеков оболочки, подкрепленной шпангоутами в соответствии со схемами ($L = 5R_{cyl}$). Кривая 1 — пять шпангоутов на цилиндре, 2 — два шпангоута на конусе, 3 — четыре шпангоута на цилиндре.

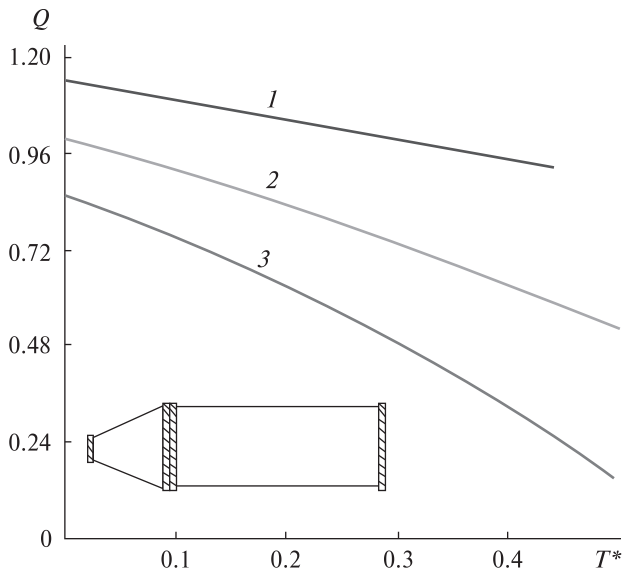


Рис. 5. Влияние осевого сжатия T^* и крутящего момента M^* на критическое давление составной конструкции ($L = 2.5R_{cyl}$). Кривые 1, 2, 3 — для значений $M^* = 0, 1$ и 2 соответственно.

Таблица 2. Равноустойчивость конструкции типа «цилиндр — конус» при $L = 5R_{cyl}$, $G_{cone,2}^* = G_{cyl,2} = 5$

| $G_{cone,1}^*$ | Q_{cr} для конуса | n | $G_{cyl,1}$ | Q_{cr} для цилиндра | n | Q_{cr} для конструкции | n |
|----------------|---------------------|-----|-------------|-----------------------|-----|--------------------------|-----|
| | | | | | | | |
| 600 | 1.19517 | 4 | 1117 | 1.19524 | 7 | 1.1635 | 4 |
| 1000 | 1.217857 | 5 | 1231 | 1.217848 | 8 | 1.1891 | 4 |
| | | | | | | | |
| 800 | 1.02976 | 5 | 800 | 1.201515 | 8 | 1.1988 | 5 |

На следующем этапе работы изучалась устойчивость конструкции при совместном воздействии трех усилий: внешнего давления q , осевого сжатия T и крутящего момента M . Введены безразмерные усилия: $Q = q/q_0$, $T^* = T/(Eh^2)$, $M^* = M/(2\pi Eh^3)$. На рис. 5 построены графики зависимостей Q от T^* при различных M^* для конструкции «цилиндр — конус», на каждой из частей которой расположено по два торцевых шпангоута. При $L = 2.5R_{cyl}$ параметры равно-

устойчивости конструкции выбраны равными $G_{cone,2}^* = G_{cyl,2} = 5$, $G_{cone,1}^* = 600$, $G_{cyl,1} = 599.9$. Анализ результатов показал, что увеличение осевого сжатия, а также крутящего момента приводит к уменьшению критического давления.

Проблема устойчивости цилиндрической или конической оболочки с различными типами граничных условий под воздействием одной или нескольких нагрузок, таких как нормальное внешнее давление, осевое сжатие и кручение, исследо-

валась в работах [3, 4, 9, 10], где результаты были найдены аналитическими, приближенными аналитическими и численными методами. Проведены расчеты для соответствующих граничных условий и случаев нагружения с использованием изложенных методов. Для цилиндрических и конических оболочек результаты отличались менее чем на 3 и 14 % соответственно.

Проблема устойчивости подкрепленной цилиндрической или конической оболочки под воздействием нормального внешнего давления решена в работах [5, 7, 9].

Проведен сравнительный анализ результатов, полученных с использованием метода ВКБ и гибридного метода ВКБ — Галеркина. Значения критических давлений составной подкрепленной конструкции были различны менее чем на 14 %.

ВЫВОДЫ

В данной работе изучается устойчивость оболочечной конструкции типа «цилиндр — конус», находящейся под совместным воздействием внешнего давления, осевого сжатия и крутящего момента. Устойчивость составной подкрепленной конструкции и отдельных ее частей найдена при помощи матричного метода или уравнений сопряжения. Особое внимание уделяется поиску параметров равноустойчивости подкрепленной конструкции, в том числе — выбору рациональных жесткостей шпангоутов на отдельных ее частях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аврамов К. В., Чернобрышко М. В., Батутина Т. Я., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет. *Космічна наука і технологія*. 2015. **21**, № 1. С. 10—14.
2. Акимов Д. В., Гришак В. З., Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И. Сравнительный анализ методик расчета напряженно-деформированного состояния элементов конструкции ракетносителя. *Нові матеріали та технології в металургії та машинобудуванні*. 2016. № 2. С. 116—120. URL: http://nbuv.gov.ua/j-pdf/Nmt_2016_2_22.pdf (дата звернення 01.07.2019).
3. Вольмир А. С. *Устойчивость деформируемых систем*. М.: Наука, 1967. 984 с.
4. Гришак В. З., Дьяченко Н. Н. Определение областей устойчивости конической оболочки при комбинированном нагружении на базе гибридного асимптотического похода. *Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 33—46.
5. Гришак В. З., Маневич А. И. Влияние жесткости шпангоутов на изгиб из плоскости на устойчивость подкрепленной цилиндрической оболочки. *Гидроаэромеханика и теория упругости*. 1972. Вып. 14. С. 121—130.
6. Макаренко И. Н. Устойчивость сопряженных оболочек вращения. *Вестн. СПбГУ. Сер. 1*. 2001. Вып. 3 (17). С. 61—69.
7. Печников В. П. Исследование на основе полубезмоментной теории устойчивости конической оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами. *Изв. вузов. Машиностроение*. 1968. № 10. С. 37—42.
8. Постнов В. А., Тумашик И. В., Москвина И. В. Об устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки. *Проблемы прочности и пластичности*. 2007. Вып. 69. С. 18—23.
9. Преображенский И. Н., Гришак В. З. *Устойчивость и колебания конических оболочек*. М.: Машиностроение, 1986. 240 с.
10. Саченков А. В. Об устойчивости круговой конической оболочки при совместном действии нагрузок. *Исслед. по теории пластин и оболочек*. 1964. № 2. С. 57—70.
11. Andres M., Harte R. Buckling of concret shells: A simplified numerical approach. *J. International Association for Shell and Spatial Structures*. 2006. **47**, No. 3, December n. 152. P. 279—290.
12. Bai X., Xu W., Ren H., Li J. Analysis of the influence of stiffness reduction on the load carrying capacity of ring-stiffened cylindrical shell. *Ocean Engineering*. 2017. **135**. P. 52—62.
13. Geer J. F., Andersen C. M. A hybrid perturbation — Galerkin technique with application to slender body theory. *SIAM J. Appl. Mech.* 1989. **49**. P. 344—361.
14. Gristchak V. Z., Dimitrijeva E. M. A Hybrid WKB-Galerkin Method and its Using to Applied Mechanics Problems. *FACTA UNIVERSITATIS. Ser.: Mechanics, Automatic Control and Robotics*. 1998. **2** (8). P. 709—713.
15. Gristchak V. Z., Gristchak D. D., Fatieieva Yu. A. *Hybrid asymptotic methods. Theory and applications*. Zaporizhzhya: Zaporizhzhya National University, 2016. 108 p.
16. Gristchak V. Z., Pogrebetskaya A.M. On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems. *Technische Mechanik*. 2011. **31**, № 2. P. 112—120.
17. Pimenta P. M., Wriggers P. (Eds.). *New Trends in Thin Structures: Formulation, Optimization and Coupled Problems*. CISM International Centre for Mechanical Sciences, Springer, 2010. Vol. 519. 228 p.
18. Seide P., Weingarten V. L. Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under combined external pressure and axial compression. *AIAA Journal*. 1965. **3** (5). P. 913—920.

19. Simo J. C., Hughes T. J. R. On the Variational Formulation of Assumed Strain Methods. *J. Appl. Mech.* 1986. **53**. P. 51—54.
20. Stein M. Some recent advances in the investigation of shell buckling. *AIAA Journal*. 1968. **6**. P. 2239—2245.
21. Ramm E. (Ed.). *Buckling of shells*. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 688 p.
22. Tafreshi A., Bailey C. G. Instability of imperfect composite cylindrical shells under combined loading. *Composite Structures*. 2007. **80** (1). P. 49—64.
23. Teng J. G., Barbagallo M. Shell restraint to ring buckling at cone-cylinder intersections. *Engineering Structures*. 1997. **19** (6). P. 425—431.
24. Teng J. G., Rotter J. M. *Buckling of Thin Metal Shells*. London, New York: CRC Press, 2004. 520 p.
25. Xue J., Hoo Fatt M. S. Buckling of non-uniform, long cylindrical shell subjected to external hydrostatic pressure. *Engineering structures*. 2002. **24** (8). P. 1027—1034.

Стаття надійшла до редакції 01.07.2019

REFERENCES

1. Avramov K. V., Chernobryvko M. V., Batutina T. Ya., Degtyarenko P. G., Tonkonozhenko A. M. (2015). Dynamic instability of rockets fairings. *Kosm. nauka tehnol.*, **21**, No. 1, 10—14 [in Russian].
2. Akimov D. V., Gristchak V. Z., Grebeniuk S. M., Gomeiniuk S. I. (2016). Comparative analysis of the calculation methods of the stress-strain state of the launch vehicle structural elements. *Novi materialy i tehnologii v metalurgii ta mashynobuduvanni*, No. 2, 116—120 [in Russian]. URL: http://nbuv.gov.ua/j-pdf/Nmt_2016_2_22.pdf (Last accessed 01.07.2019).
3. Volmir A. S. (1967). *Stability of deformable systems*. Moscow: Nauka [in Russian].
4. Gristchak V. Z., Dyachenko N. N. (2017). Stability areas determination of the conical shell at combined loading on a hybrid asymptotic approach basis. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Science*, No. 2, 33—46.
5. Gristchak V. Z., Manevich A. I. (1972). Influence of a ring stiffness on a bend out of a plane on the stability of a reinforced cylindrical shell. *Gidroaeromekhanika i teoriya uprugosti*, No. 14, 121—130 [in Russian].
6. Makarenko I. N. (2001). Stability of conjugate shells of rotation. *Vestnik SPGU. Ser. I.*, No. 3 (17), 61—69 [in Russian].
7. Pechnikov V. P. (1968). Investigation on the basis of a semi-momentless theory of the stability of a conical shell reinforced by elastic rings. *Izv. vuzov. Mashinostroenie*, No. 10, 37—42 [in Russian].
8. Postnov V. A., Tumashik I. V., Moskvina I. V. (2007). About stability of a reinforced cylindrical shell. *Problem of Strength and Plasticity*, No. 69, 18—23 [in Russian].
9. Preobrazhensky I. N., Gristchak V. Z. (1986). *Stability and oscillations of conical shells*. Moscow: Mashinostroenie [in Russian].
10. Sachenkov A. V. (1964). On the stability of a circular conical shell under the joint action of loads. *Studies on the theory of plates and shells*. Kazan: Publishing house of Kazan University, No. 2, 57—70 [in Russian].
11. Andres M., Harte R. (2006). Buckling of concret shells: A simplified numerical approach. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, **47**, No. 3, December n. 152, 279—290.
12. Bai X., Xu W., Ren H., Li J. (2017). Analysis of the influence of stiffness reduction on the load carrying capacity of ring-stiffened cylindrical shell. *Ocean Engineering*, **135**, 52—62.
13. Geer J. F., Andersen C. M. (1989). A hybrid perturbation-Galerkin technique with application to slender body theory. *SIAM J. Appl. Mech.*, **49**, 344 — 361.
14. Gristchak V. Z., Dimitrijeva E. M. (1998). A Hybrid WKB-Galerkin Method and its Using to Applied Mechanics Problems. *FACTA UNIVERSITATIS. Ser.: Mechanics, Automatic Control and Robotics*, **2**, No. 8, 709—713.
15. Gristchak V. Z., Gristchak D. D., Fatieieva Yu. A. (2016). *Hybrid asymptotic methods. Theory and applications*. Zaporizhzhya: Zaporizhzhya National University.
16. Gristchak V. Z., Pogrebetskaya A. M. (2011). On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems. *Technische Mechanik*, **31**, No. 2, 112—120.
17. Pimenta P. M., Wriggers P. (Eds.). (2010). *New Trends in Thin Structures: Formulation, Optimization and Coupled Problems*. CISM International Centre for Mechanical Sciences, Springer, Vol. 519.
18. Seide P., Weingarten V. L. (1965). Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under combined external pressure and axial compression. *AIAA Journal*, **3** (5), 913—920.
19. Simo J. C., Hughes T. J. R. (1986). On the Variational Formulation of Assumed Strain Methods. *J. Appl. Mech.*, **53**, 51—54.
20. Stein M. (1968). Some recent advances in the investigation of shell buckling. *AIAA Journal*, **6**, 2239—2245.
21. Ramm E. (Ed.). (1982). *Buckling of shells*. Berlin: Springer-Verlag.
22. Tafreshi A., Bailey C. G. (2007). Instability of imperfect composite cylindrical shells under combined loading. *Composite Structures*, **80** (1), 49—64.
23. Teng J. G., Barbagallo M. (1997). Shell restraint to ring buckling at cone-cylinder intersections. *Engineering Structure*, **19** (6), 425—431.
24. Teng J. G., Rotter J. M. (2004). *Buckling of Thin Metal Shells*. London and New York: CRC Press.

25. Xue J., Hoo Fatt M. S. (2002). Buckling of non-uniform, long cylindrical shell subjected to external hydrostatic pressure. *Engineering structures*, **24** (8), 1027–1034.

Received 01.07.2019

П. Г. Дегтяренко¹, В. З. Гришчак²,
Д. Д. Гришчак³, Н. М. Дьяченко²

¹ Державне космічне агентство України, Київ, Україна

² Запорізький національний університет,
Запоріжжя, Україна

³ Центральний науково-дослідний інститут озброєння
та військової техніки Збройних Сил України,
Київ, Україна

ДО ПРОБЛЕМИ РІВНОСТІЙКОСТІ ПІДКРІПЛЕНОЇ ОБОЛОНКОВІ КОНСТРУКЦІЇ ПРИ КОМБІНОВАНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Стійкість оболонкової конструкції ракети-носія типу «циліндр — конус» вивчається при комбінованому навантаженні зовнішнім тиском, осьовим стисненням і крутним моментом. Розв'язувальні рівняння задачі розв'язуються аналітично з використанням асимптотичного підходу. У випадку конічного відсіку використовуються два аналітичних методи: ВКБ- і гібридний ВКБ-Гальоркін-метод. Для аналізу стійкості підкріплених оболонок використовується матричний метод, що дозволяє визначити зміну напружено-деформованого стану оболонки при переході через шпангоут. Характеристичне рівняння для визначення критичних навантажень отримано на основі матричного методу і рівнянь спряжень. Особливу увагу приділено вибору коефіцієнтів жорсткості шпангоута для конічної і циліндричної частин, які забезпечують рівні значення критичного тиску. Отримано, що значення критичного тиску для рівностійкої конструкції нижче, ніж у її відсіків. Вивчено стійкість підкріпленої конічної конструкції при комбінованому навантаженні. Обговорюються результати чисельних розрахунків для різних типів підкріплених конструкцій. Показано, що в граничних випадках для циліндричних або конічних оболонок чисельні результати знаходяться в хорошій кореляції з відомими публікаціями.

Ключові слова: оболонкова конструкція типу «циліндр — конус», стійкість оболонки, рівностійкість оболонки, жорсткість шпангоута, комбіноване навантаження.

P. G. Degtyarenko^{1,2}, V. Z. Grishchak³,
D. D. Grishchak⁴, N. M. Dyachenko³

¹ State Space Agency of Ukraine, Kyiv, Ukraine

² Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine

³ Central Scientific Research Institute for Armament
and Military Equipment of the Armed Forces of Ukraine,
Kyiv, Ukraine

TO EQUISTABILITY PROBLEM OF THE REINFORCED SHELL STRUCTURE UNDER COMBINED LOADING

The stability of a cylinder-cone-type shell structure of the launch vehicle is studied under the combined loading of external pressure, axial compression, and torque. The resolving equations for the problem are solved analytically using the asymptotic approach. In the case of the conical compartment, two analytical methods, such as the WKB and the hybrid WKB-Galerkin methods, are used. To analyze the stability of the reinforced shells, we use the matrix method that allows determining the change in the shell stress-strain state through the ring. The characteristic equation for determining critical loads is obtained based on the matrix method and the conjugation equations. Particular attention is paid to the selection of ring stiffness coefficients for the conical and cylindrical parts providing equal critical pressures. It is obtained that the values of the critical pressure in the equistable structure are lower than in its parts. The stability of the reinforced equistable structure under the combined loading is studied. The results of numerical calculations for different types of reinforced structures are discussed. It is shown that in the extreme cases, for cylinder or conical shells, numerical results are well correlated with data of known publications.

Keywords: cylinder-cone-type shell structure, shell stability, equistable shell, ring stiffness, combined loading.