

<https://doi.org/10.15407/knit2019.03.003>

УДК 519.87:629.7.015.3

**Е. А. Дегтярева, А. В. Новиков**

Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное»  
им. М. К. Янгеля», Днепро, Украина

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДВИЖНОЙ ПУСКОВОЙ УСТАНОВКИ

---

*В последнее время в силу геополитических и экономических причин возникла необходимость расширения видов стартов ракет-носителей. Наиболее выгодно осуществлять пуски ракет в районе земного экватора, в частности из пусковых комплексов, размещенных на находящихся на плаву морских стартовых платформах (СП). Однако ограниченные габариты СП не позволяют размещать оборудование стартового комплекса на достаточном удалении друг от друга, а из-за качки пусковая установка совершает непрерывные движения по всем степеням свободы. Поэтому одной из ключевых задач есть обеспечение безударного старта и минимизации площади воздействия факела двигательной установки на элементы подвижного пускового комплекса при полете ракеты на начальном участке траектории. В работе предложена математическая модель управляемого возмущенного движения ракеты относительно подвижной пусковой установки и модели определения координат находящейся на ракете характерной точки относительно элементов пусковой установки и координат следов струй камер сгорания четырехкамерной двигательной установки на поверхности пускового стола при полете ракеты на начальном участке траектории. Предложенные математические модели учитывают совокупность всех наиболее существенных возмущающих факторов и позволяют осуществлять моделирование возмущенных движений ракеты, находящейся на плаву пусковой установки и определять взаимное положения находящихся на них характерных точек. Предложенные математические модели были использованы при разработке и отработке нового закона управления ракетой, стартующей в условиях морской качки, и в послеполетном анализе пусков ракет «Зенит-3SL», стартующих с морской стартовой платформы.*

**Ключевые слова:** математическая модель, полет ракеты на начальном участке траектории.

---

В последнее время в силу геополитических и экономических причин возникла необходимость расширения видов стартов существующих ракет-носителей. Наиболее выгодно осуществлять пуски ракет в районе экватора Земного шара, тем самым максимально используя скорость вращения Земли для повышения энергетики. Самым эффективным вариантом переноса космодрома в экваториальную зону является создание пусковых комплексов, размещенных на находящихся на плаву морских платформах (СП), например, созданных при реализации программы «Морской

старт». Очевидно, что габариты СП не позволяют размещать оборудование стартового комплекса на достаточном расстоянии от пусковой установки (ПУ), да и сама ПУ имеет характерные выступающие точки. К тому же СП из-за качки совершает постоянное движение по всем степеням свободы и имеет существенные статические перекосы. Отсюда возникает одна из ключевых задач — обеспечение безударного старта и минимизации площади воздействия факела двигательной установки (ДУ) на элементы подвижного пускового комплекса при полете ракеты на начальном участке траектории.

© Е. А. ДЕГТЯРЕВА, А. В. НОВИКОВ, 2019

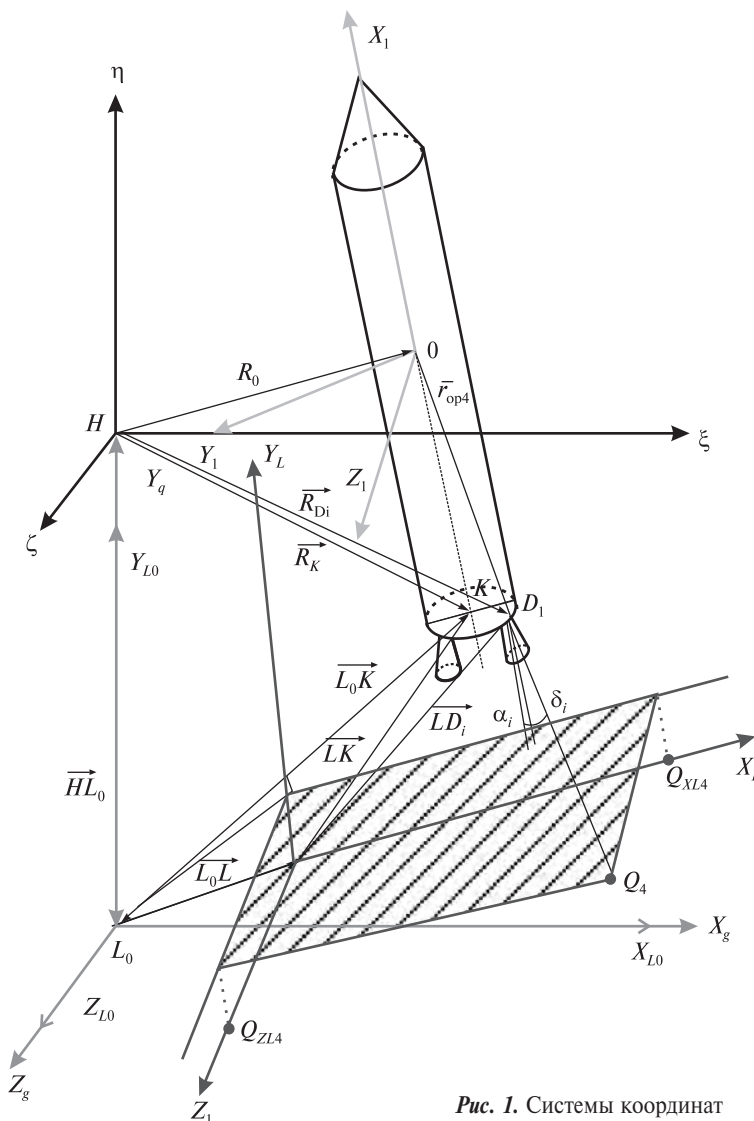


Рис. 1. Системы координат

Для решения этой задачи прежде всего необходимо определиться с объемом известных и неизвестных данных, сформулировать все физические и математические предположения, касающиеся природы объекта управления, и построить его математическую модель [17]. Построение математических моделей изучаемого объекта сопровождается теоретическим обоснованием адекватного отражения этими моделями свойств рассматриваемых процессов и явлений. Отвечающая реальности математическая модель позволяет провести детальное исследование изучаемого объекта и дать надежный прогноз его поведения в различных условиях [9].

В настоящей статье предложены математическая модель управляемого возмущенного движения ракеты относительно подвижной пусковой установки и модели определения координат находящейся на ракете характерной точки относительно элементов ПУ и координат следов факела четырехкамерной ДУ на поверхности пускового стола при полете ракеты на начальном участке траектории.

#### СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В разработанных математических моделях используются следующие правые прямоугольные системы координат (рис. 1).

1. Система  $H_{\xi\eta\zeta}$  — неподвижная система координат (НСК); начало  $H$  — номинальное начальное положение центра масс ракеты (при отсутствии качки, статических перекосов и т. п.), ось  $H_\eta$  направлена по местной вертикали, ось  $H_\xi$  — вдоль номинального положения продольной оси СП в сторону плоскости  $I$  (к корме СП).

2. Система  $LX_L Y_L Z_L$  — подвижная система координат, связанная с пусковым столом СП (СКПС), начало  $L$  — центр ПУ, ось  $LX_L$  — направлена вдоль продольной оси СП в сторону плоскости  $I$ , к корме СП, ось  $LY_L$  — перпендикулярна к верхней палубе СП.

3. Система  $L_0 X_{L0} Y_{L0} Z_{L0}$  — неподвижная система координат, связанная с пусковым столом (СКПС), СКПС<sub>0</sub> — его начальное номинальное положение, начало  $L_0$  — точка пересечения продольной оси ракеты с плоскостью среза сопел ДУ I ступени при их неотклоненном положении (в номинальном положении совпадает с центром ПУ). Оси  $L_0 X_{L0}$ ,  $L_0 Y_{L0}$ ,  $L_0 Z_{L0}$  параллельны соответствующим осям НСК  $H_\xi$ ,  $H_\eta$ ,  $H_\zeta$ .

4. Система  $OX_1 Y_1 Z_1$  — связанная с ракетой система координат (ССК), начало — текущее положение центра масс ракеты, ось  $OX_1$  направлена параллельно продольной оси ракеты к носку, оси  $OY_1$  и  $OZ_1$  направлены в сторону плоскостей стабилизации III и IV соответственно [3].

5. Система  $O_6 X_6 Y_6 Z_6$  — базовая система координат (БСК), начало  $O_6$  находится в точке пересечения продольной оси ракеты с плоскостью среза камер сгорания, ось  $O_6 X_6$  направлена по продольной оси ракеты к носку, оси  $O_6 Y_6$  и  $O_6 Z_6$  параллельны соответствующим осям ССК.

Преобразование координат между ССК и НСК осуществляется с помощью формул

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_H &= \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{r}_C, \\ \mathbf{r}_C &= \mathbf{A}_1^T \cdot \mathbf{r}_H, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}_H$  и  $\mathbf{r}_C$  — векторы положения центра масс ракеты в НСК и ССК соответственно, а матрица

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

имеет компоненты

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \vartheta \cos \psi, \\ a_{12} &= \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi - \sin \vartheta \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= \cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi, \\ a_{21} &= \sin \vartheta \cos \psi, \\ a_{22} &= \sin \vartheta \sin \psi \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \varphi, \\ a_{23} &= \sin \vartheta \sin \psi \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \varphi, \\ a_{31} &= -\sin \psi, \\ a_{32} &= \cos \psi \sin \varphi, \\ a_{33} &= \cos \psi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Матрица преобразования ССК — НСК  $\mathbf{A}_1$  (последовательность поворотов  $\vartheta - \psi - \varphi$ ),  $\vartheta$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  — углы тангажа, рысканья и крена (за положительное направление принимается поворот против часовой стрелки, если смотреть с конца оси, вокруг которой осуществляется поворот).

Преобразование координат между НСК и СКПС осуществляется с помощью формул

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_H &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}_L, \\ \mathbf{r}_L &= \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{r}_H, \end{aligned}$$

где матрица преобразования

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

имеет компоненты

$$\begin{aligned} c_{11} &= \cos \vartheta_L \sin \psi_L, \\ c_{12} &= \cos \vartheta_L \sin \psi_L \sin \varphi_L - \sin \vartheta_L \cos \varphi_L, \\ c_{13} &= \cos \vartheta_L \sin \psi_L \cos \varphi_L + \sin \vartheta_L \sin \varphi_L, \\ c_{21} &= \sin \vartheta_L \cos \psi_L, \\ c_{22} &= \sin \vartheta_L \sin \psi_L \sin \varphi_L + \cos \vartheta_L \cos \varphi_L, \\ c_{23} &= \sin \vartheta_L \sin \psi_L \cos \varphi_L - \cos \vartheta_L \sin \varphi_L, \\ c_{31} &= -\sin \psi_L, \\ c_{32} &= \cos \psi_L \sin \varphi_L, \\ c_{33} &= \cos \psi_L \cos \varphi_L. \end{aligned}$$

Здесь углы  $\vartheta_L$ ,  $\psi_L$ ,  $\varphi_L$  поворота СП относительно НСК являются известными функциями времени.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Движение твердого тела в атмосфере к настоящему времени достаточно хорошо изучено в большом количестве работ, посвященных динамике ракет [1, 2, 5, 7, 8, 10, 12, 15—19, 21]. Эти работы широко используются на практике в ка-

честве учебных пособий, справочных материалов и рекомендаций разработчикам ракет.

В настоящей статье рассмотрена математическая модель управляемого возмущенного движения ракеты, с учетом конструктивных особенностей, состава возмущающих факторов, особенностей их учета, а также особенностей органов управления. Вместе с тем отличительной особенностью представленной математической модели движения ракеты является введение в нее математической модели движущегося стартового комплекса и определение параметров движения ракеты относительно него.

Одним из основных моментов при разработке математической модели движения ракеты относительно ПУ явилось принятие следующих допущений, упрощающих, схематизирующих реальный процесс:

- конструкция ракеты считается жесткой;
- масса ракеты изменяется в процессе моделирования, но отсутствует жидкое наполнение;
- масса в плоскостях  $X_1Z_1$  и  $Y_1Z_1$  распределена равномерно, т. е. центробежные моменты инерции  $J_{xz}$  и  $J_{yz}$  считаются пренебрежимо малыми.

В результате была разработана нелинейная пространственная математическая модель управляемого возмущенного движения ракеты, стартовой в условиях движущегося стартового комплекса. Полученная математическая модель состоит из уравнений пространственного движения в СКПС ракеты как твердого тела под воздействием гравитационных и аэродинамических сил и силы тяги ДУ, а также уравнений, описывающих работу системы стабилизации пространственного положения ракеты с учетом ограничений по углам отклонения и по скорости рулевых приводов. При этом модель движения ракеты учитывает технологические погрешности изготовления и монтажа, отклонения от средних значений параметров атмосферы, а также начальные условия по кинематическим параметрам, которые определяются ветром, качкой и квазистатическими перекосами ПУ относительно линии горизонта. В результате получилась достаточно сложная для аналитического представления нелинейная пространственная модель движения ракеты относительно ПУ и определе-

ния контролируемых параметров. Исследования показали, что вследствие ее нестационарности и нелинейности, а также разнородности природы действующих возмущений применение традиционных методов анализа этой модели [17] не дает приемлемых результатов. Наиболее эффективным и дающим конструктивное решение подходом, обеспечивающим необходимую точность и надежность решения задачи, является математическое моделирование на ПЭВМ [20].

Для получения формульной схемы рассматривалась ракета-носитель (РН) класса «Зенит» с учетом ее конструктивных особенностей. Математическая модель движения СП считается известной, определяется разработчиком СП и состоит из уравнений движения центра масс СП и вокруг ее центра масс, содержащих колебательные составляющие. Математическая модель возмущенного движения СП учитывает также такие характеристики, как высота морской волны, направление её подхода к СП, период, частоту и амплитуду колебаний, фазу подхода волны, сдвиги фаз колебаний по отдельным линейным и угловым координатам.

Двигательная установка рассматриваемого класса ракет включает четыре камеры сгорания (КС), установленные между плоскостями стабилизации (рис. 2). Камеры сгорания конструктивно повернуты на угол  $\alpha_g \leq 5^\circ$  в радиальном направлении от продольной оси РН.

Проекция радиуса-вектора  $\mathbf{r}_{од}$  и точки  $\mathbf{r}_{орі}$  приложения тяг КС на оси ССК определяются по формулам

$$\begin{aligned} r_{одx1} &= x_d - x_T, r_{одy1} = y_T, r_{одz1} = z_T, \\ x_d &= C_d \cdot l, \\ r_{орxi} &= x_{дв} - x_T, i = 1, \dots, 4, \\ r_{орy1} &= -U + y_T + \Delta y_{p1}, \\ r_{орz1} &= -U + z_T + \Delta z_{p1}, \\ r_{орy2} &= U + y_T + \Delta y_{p2}, \\ r_{орz2} &= -U + z_T + \Delta z_{p2}, \\ r_{орy3} &= U + y_T + \Delta y_{p3}, \\ r_{орz3} &= U + z_T + \Delta z_{p3}, \\ r_{орy4} &= -U + y_T + \Delta y_{p4}, \\ r_{орz4} &= U + z_T + \Delta z_{p4}, \end{aligned}$$

где  $C_d$  — аэродинамический коэффициент центра давления,  $l$  — длина корпуса ракеты,  $\Delta y_{pi}, \Delta z_{pi}, i = 1, \dots, 4$  — отклонения от номинальных значений координат точки приложения тяг,  $r_p$  — смещение оси КС,  $X_{дв}$  — точка, полученная пересечением плоскости приложения тяг с осью  $O_6X_6$ ,  $x_T, y_T, z_T$  — координаты центра масс ракеты в БСК,  $U$  — координаты точки крепления  $i$ -й КС ( $D_i, i = 1, \dots, 4$ ) в плоскости приложения тяг  $U_{xi} = U_{yi} = U$  (рис. 2).

Изменение положения центра масс ракеты относительно его начального положения в проекциях на оси ССК (3) и изменение углового положения ракеты относительно центра масс (4) описываются следующими широко известными уравнениями [4, 5]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{x1} &= \frac{F_{x1}}{m} + V_{y1}\omega_{z1} - V_{z1}\omega_{y1}, \\ \dot{V}_{y1} &= \frac{F_{y1}}{m} + V_{z1}\omega_{x1} - V_{x1}\omega_{z1}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{z1} &= \frac{F_{z1}}{m} + V_{x1}\omega_{y1} - V_{y1}\omega_{x1}; \\ \dot{\xi} &= a_{11}V_{x1} + a_{12}V_{y1} + a_{13}V_{z1}, \\ \dot{\eta} &= a_{21}V_{x1} + a_{22}V_{y1} + a_{23}V_{z1}, \\ \dot{\zeta} &= a_{31}V_{x1} + a_{32}V_{y1} + a_{33}V_{z1}; \\ \dot{\omega}_{x1} &= \frac{M_{x1} - (I_{z1} - I_{y1})\omega_{y1}\omega_{z1}}{I_{x1}}, \\ \dot{\omega}_{y1} &= \frac{M_{y1} - (I_{x1} - I_{z1})\omega_{z1}\omega_{x1}}{I_{y1}}, \\ \dot{\omega}_{z1} &= \frac{M_{z1} - (I_{y1} - I_{x1})\omega_{y1}\omega_{x1}}{I_{z1}}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{\Theta} = (\omega_{z1} \cos \varphi - \omega_{y1} \sin \varphi) / \cos \psi,$$

$$\dot{\Psi} = \omega_{y1} \cos \varphi - \omega_{z1} \sin \varphi,$$

$$\dot{\Phi} = \omega_{x1} + \dot{\Theta} \sin \psi,$$

где  $V_{x1}, V_{y1}, V_{z1}$  — проекции вектора скорости центра масс ракеты на оси ССК,  $\xi, \eta, \zeta$  — проекции радиуса-вектора  $\mathbf{R}_0$  центра масс ракеты на оси НСК,  $F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}$  — проекции вектора равнодействующей сил  $\mathbf{F}$ , действующих на ракету, на оси ССК,  $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$  — проекции вектора угловой скорости ракеты на оси ССК,  $M_{x1}, M_{y1}, M_{z1}$  —

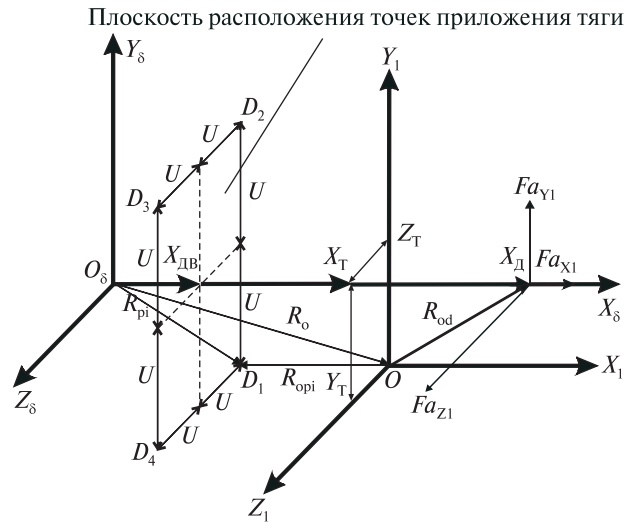


Рис. 2. Точки приложения тяги и аэродинамических сил

проекции вектора момента  $\mathbf{M}$  от равнодействующей сил, действующих на ракету, на оси ССК,  $I_{x1}, I_{y1}, I_{z1}$  — проекции тензора инерции относительно осей ССК,  $\vartheta, \psi, \varphi$  (рад) — углы тангажа, рыскания и крена соответственно.

Векторы равнодействующей силы  $\mathbf{F}$  и момента  $\mathbf{M}$  от нее определяются величиной и направлением тяг КС ДУ I ступени, гравитационной и аэродинамической силами и положением их точек приложения в БСК:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_a + \mathbf{G}_1,$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_a,$$

где  $\mathbf{G}$  — вектор силы тяжести,  $\mathbf{F}_p, \mathbf{M}_p$  — сила и момент от тяги двигателя,  $\mathbf{F}_a, \mathbf{M}_a$  — аэродинамические сила и момент.

Управляющие силы и моменты создаются отклонением КС ДУ I ступени в процессе работы системы стабилизации ракеты.

При моделировании входной информацией для работы алгоритмов стабилизации используются отклонения  $\Delta\vartheta, \Delta\psi, \Delta\varphi$ , являющиеся разностями между фактическими углами  $\vartheta, \psi, \varphi$  и их программными значениями:  $\vartheta_{пп} \approx 90^\circ, \psi_{пп} = 0^\circ, \varphi_{пп} = 0^\circ$ , угловые скорости  $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$  и линейные скорости  $V_{y1}, V_{z1}$ , являющиеся результатом интегрирования уравнений возмущенного движения (4), (3).

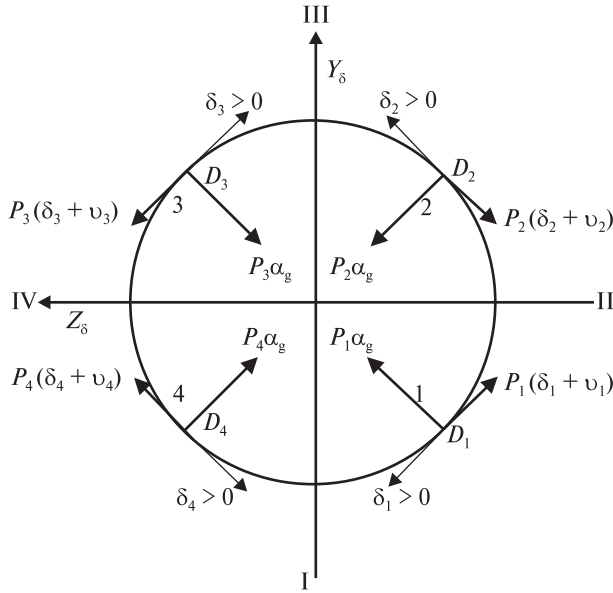


Рис. 3. Схема размещения КС относительно плоскостей стабилизации РН, положительное направление отклонения КС и действия сил тяги от КС

С учетом динамики приводов углы поворота КС относительно своих осей вращения определяются уравнениями

$$\begin{aligned} T_{\text{рп}} \dot{\delta}_1 + \delta_1 &= \delta_9 + \delta_\psi - \delta_\varphi, \\ T_{\text{рп}} \dot{\delta}_2 + \delta_2 &= -\delta_9 + \delta_\psi + \delta_\varphi, \\ T_{\text{рп}} \dot{\delta}_3 + \delta_3 &= -\delta_9 - \delta_\psi - \delta_\varphi, \\ T_{\text{рп}} \dot{\delta}_4 + \delta_4 &= \delta_9 - \delta_\psi + \delta_\varphi, \end{aligned}$$

где  $T_{\text{рп}}$  — постоянная времени привода,  $\delta_i$  — углы поворота КС. Положительные значения углов поворота КС приняты в соответствии с рис. 3.

Углы и скорости поворота КС ограничены возможностями привода. Ограничения  $\delta_i$  и  $\dot{\delta}_i$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} &\text{— при } |\dot{\delta}_i| > \dot{\delta}_{\text{max}} \text{ —} \\ &\quad \delta_i = \dot{\delta}_{\text{max}} \text{sign}(\dot{\delta}_i), \quad \delta_i = \delta_{i-1} + \dot{\delta}_i \Delta t_n; \\ &\text{— при } |\delta_i| > \delta_{\text{max}} \text{ —} \\ &\quad \dot{\delta}_i = 0, \quad \delta_i = \delta_{\text{max}} \text{sign}(\delta_i), \end{aligned}$$

где  $\Delta t_n$  — шаг интегрирования уравнений возмущенного движения,  $\delta_{i-1}$  — значение угла поворота КС на предыдущем шаге.

Проекция вектора тяги  $P_i$  на оси ССК определяются выражениями

$$\begin{aligned} F_{\text{px1}} &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4, \\ F_{\text{py1}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} [\alpha_g (P_1 - P_2 - P_3 + P_4) + P_1(\delta_1 + \upsilon_1) - \\ &\quad - P_2(\delta_2 + \upsilon_2) - P_3(\delta_3 + \upsilon_3) + P_4(\delta_4 + \upsilon_4)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F_{\text{pz1}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} [\alpha_g (P_1 + P_2 - P_3 - P_4) - P_1(\delta_1 + \upsilon_1) - \\ &\quad - P_2(\delta_2 + \upsilon_2) + P_3(\delta_3 + \upsilon_3) + P_4(\delta_4 + \upsilon_4)], \end{aligned}$$

где  $P_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) — тяга  $i$ -й КС,  $\upsilon_i$  — перекося вектора тяги  $i$ -й КС. Принимая во внимание, что  $\alpha_g \leq 5^\circ$ , считаем  $\cos \alpha_g \approx 1$ ,  $\sin \alpha_g \approx 0$ .

Моменты сил вокруг осей ССК, возникающие при повороте КС, определяются по формулам

$$\begin{aligned} M_{\text{px1}} &= \sqrt{2} \cdot U \cdot [P_1(\delta_1 + \upsilon_1) - P_2 \cdot (\delta_2 + \upsilon_2) + \\ &\quad + P_3 \cdot (\delta_3 + \upsilon_3) - P_4 \cdot (\delta_4 + \upsilon_4)] + \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \{P_1 \cdot [y_T(\alpha_g - \delta_1 - \upsilon_1) - z_T \cdot (\alpha_g + \delta_1 + \upsilon_1)] + \\ &\quad + P_2 \cdot [y_T \cdot (\alpha_g - \delta_2 - \upsilon_2) + z_T \cdot (\alpha_g + \delta_2 + \upsilon_2)] + \\ &\quad + P_3 \cdot [y_T \cdot (-\alpha_g + \delta_3 + \upsilon_3) + z_T \cdot (\alpha_g + \delta_3 + \upsilon_3)] + \\ &\quad + P_4 \cdot [y_T \cdot (-\alpha_g + \delta_4 + \upsilon_4) - z_T \cdot (\alpha_g + \delta_4 + \upsilon_4)]\}, \quad (6) \\ M_{\text{py1}} &= -(x_p - x_T) \cdot F_{\text{pz1}} - U \cdot (P_1 + P_2 - P_3 - P_4) + \\ &\quad + z_T \cdot P + (P_1 \cdot \Delta z_{p1} + P_2 \cdot \Delta z_{p2} + P_3 \cdot \Delta z_{p3} + P_4 \cdot \Delta z_{p4}), \\ M_{\text{pz1}} &= (x_p - x_T) \cdot F_{\text{py1}} - U \cdot (P_1 - P_2 - P_3 + P_4) - \\ &\quad - y_T \cdot P - (P_1 \cdot \Delta y_{p1} + P_2 \cdot \Delta y_{p2} + P_3 \cdot \Delta y_{p3} + P_4 \cdot \Delta y_{p4}). \end{aligned}$$

При определении аэродинамических сил учитывается приземный ветер, модуль и направление которого по отношению к СП определяется формулой [6, 14]:

$$W(h) = W_{10} \left( \frac{h}{10} \right)^{0.1},$$

где  $W_{10}$  — скорость ветра на высоте 10 м,  $h = h_{\text{СП}} + h(t)$ , м — высота центра масс РН над поверхностью воды,  $h_{\text{СП}}$  — высота СП.

Проекция скорости ветра на оси ССК определяются выражениями

$$\begin{aligned} W_{x1} &= W(h) [a_{31} \sin \varphi_w - a_{11} \cos \varphi_w], \\ W_{y1} &= W(h) [a_{32} \sin \varphi_w - a_{12} \cos \varphi_w], \\ W_{z1} &= W(h) [a_{33} \sin \varphi_w - a_{13} \cos \varphi_w], \end{aligned}$$

где  $\varphi_w = 0 \dots 180^\circ$  — угол между направлением скорости ветра и продольной осью СП (рис. 4),  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) — элементы матрицы  $\mathbf{A}_1$ .

Проекция вектора поточной скорости  $\mathbf{V}_B$  на оси ССК и углы атаки  $\alpha_w$  и скольжения  $\beta_w$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} V_{BX_1} &= W_{x1} - V_{x1}, \\ V_{BY_1} &= W_{y1} - V_{y1}, \\ V_{BZ_1} &= W_{z1} - V_{z1}, \\ \alpha_w &= -\arctg\left(\frac{V_{BY_1}}{V_{BX_1}}\right), \\ \beta_w &= \arctg\left(\frac{V_{BZ_1}}{V_{BX_1}}\right). \end{aligned}$$

Проекция аэродинамических сил и моментов на оси ССК вычисляются по формулам [1, 2, 5, 7, 8, 10, 12, 14—19, 21]:

$$\begin{aligned} F_{ax1} &= -C_x q S, \\ F_{ay1} &= C_y(|\alpha_w|, h) q S \operatorname{sign} \alpha_w, \\ F_{az1} &= -C_z(|\beta_w|, h) q S \operatorname{sign} \beta_w, \\ q &= \frac{1}{2} [\rho(h) + \Delta\rho] (V_{BX_1}^2 + V_{BY_1}^2 + V_{BZ_1}^2), \\ M_{ax1} &= -F_{ay1} z_T + F_{az1} y_T, \\ M_{ay1} &= F_{ax1} z_T + F_{az1} (x_d - x_T), \\ M_{az1} &= F_{ay1} (x_d - x_T) - F_{ax1} y_T, \end{aligned}$$

где  $C_x, C_y, C_z$  — аэродинамические коэффициенты продольной, подъемной и нормальной сил,  $q$  — скоростной напор,  $V_{BX_1}, V_{BY_1}, V_{BZ_1}$  — проекции вектора поточной скорости  $\mathbf{V}_B$  на оси ССК,  $\rho(h)$  — величина плотности атмосферы как функция высоты полета ракеты,  $\Delta\rho$  — отклонение плотности атмосферы от номинального значения,  $h$  — высота полета ракеты над поверхностью СП,  $S$  — площадь миделя,  $x_d$  — координата центра давления в БСК.

В НСК сила тяжести  $\mathbf{G}$  имеет проекции  $0, -G(t), 0$ , где  $G(t)$  — текущий вес ракеты.

Проекция силы тяжести на оси ССК равны:

$$G_{x1} = -G(t) a_{21},$$

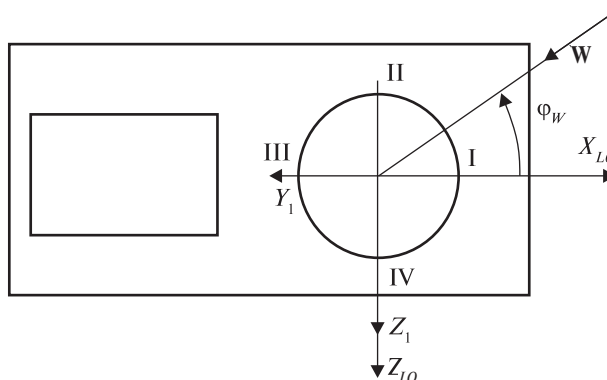


Рис. 4. Схема определения направления действия ветра

$$\begin{aligned} G_{y1} &= -G(t) a_{22}, \\ G_{z1} &= -G(t) a_{23}, \end{aligned}$$

где  $a_{ij}$  — элементы матрицы  $\mathbf{A}_1$ .

Таким образом, получена математическая модель движения РН, учитывающая ее конструктивные особенности и специфику действующих на РН возмущающих факторов.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ СТАРТОВОЙ ПЛАТФОРМЫ

Угловые ( $\vartheta_L, \psi_L, \varphi_L$ ) и линейные ( $x_L, y_L, z_L$ ) перемещения СП относительно НСК являются известными функциями времени и задаются разработчиками СП. Данные уравнения содержат колебательную составляющую относительно квазистатических отклонений:

$$\begin{aligned} \vartheta_L &= B_\vartheta \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi_\vartheta) + \vartheta_{Lst}, \\ \psi_L &= B_\psi \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi_\psi), \\ \varphi_L &= B_\varphi \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi_\varphi) + \varphi_{Lst}; \\ x_L &= B_x \cos(\omega t + \varphi_0), \\ y_L &= B_y \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi_y), \\ z_L &= B_z \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi_z), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\omega = 2\pi/T_p$  — частота колебаний СП,  $t$  — текущее время,  $\vartheta_L$  — поворот СП относительно оси  $L_0 Z_{L0}$  (килевая качка —  $\text{tet}_L$ ),  $\psi_L$  — поворот СП относительно оси  $L_0 Y_{L0}$  (курсовая качка —  $\text{ps}_L$ ),  $\varphi_L$  — поворот СП относительно оси  $L_0 X_{L0}$  (бортовая качка —  $\text{fi}_L$ ),  $\vartheta_{Lst}, \varphi_{Lst}$  — статические перекосы СП,  $B_\vartheta, B_\psi, B_\varphi$  — амплитуды колеба-

ний СП,  $B_x, B_y, B_z$  — амплитуды перемещений СП,  $\Delta\varphi_\theta, \Delta\varphi_\psi, \Delta\varphi_\phi$  — сдвиги фаз колебаний СП относительно фазы колебаний в направлении оси  $L_0X_{L0}$ ,  $\varphi_0 = 0...180^\circ$  — фаза колебаний СП вдоль оси  $L_0X_{L0}$ .

Амплитуды угловых и линейных перемещений  $B_\theta, B_\psi, B_\phi, B_x, B_y, B_z$ , фазовые сдвиги  $\Delta\varphi_\theta, \Delta\varphi_\psi, \Delta\varphi_\phi, \Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z$  и статические перекосы по крену  $\vartheta_{Lst}$  и дифференту  $\phi_{Lst}$  являются известными функциями периода и угла подхода волны.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ «ОПАСНОЙ» ТОЧКИ

При анализе безударности ракеты с элементами ПУ в качестве контрольного параметра рассматриваются перемещения «опасных» точек относительно пускового устройства.

В качестве такой обобщающей «опасной» точки рассматривается точка пересечения продольной оси ракеты с плоскостью среза сопел КС ДУ I ступени — точка  $K$  на рис. 1. Ее перемещения относительно ПУ равны проекциям вектора  $\overline{LK}$  на оси СКПС —  $LK_{XL}$  и  $LK_{ZL}$ .

Вектор  $\overline{LK}$  получается путем векторного сложения:

$$\overline{LK} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_L = \mathbf{R}_0 + \overline{OK} - \overline{HL}_0 - \overline{L}_0L.$$

Проекции вектора  $\mathbf{R}_0(\xi, \eta, \zeta)$  определяются при интегрировании уравнений движения (3).

Вектор  $\overline{OK}$  определяет положение «опасной» точки в ССК. Его проекции на оси ССК и НСК равны

$$OK_{x1} = -x_T, OK_{y1} = OK_{z1} = 0,$$

$$OK_\xi = -a_{11}x_T, OK_\eta = -a_{21}x_T, OK_\zeta = -a_{31}x_T,$$

где  $a_{ij}$  — элементы матрицы  $\mathbf{A}_1$ .

Вектор  $\overline{HL}_0$  определяет положение точки  $L_0$  в НСК:

$$HL_{0\xi} = 0, HL_{0\eta} = -x_T^*, HL_{0\zeta} = 0,$$

где  $x_T^*$  — начальное положение центра тяжести (в момент  $t_0 = 0$ ) в НСК.

Вектор  $\overline{L}_0L$  определяет перемещение центра ПУ относительно СКПС<sub>0</sub>. Его перемещение в НСК определяется формулами (7):

$$L_0L_\xi = B_\xi \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$L_0L_\eta = B_\eta \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi_\eta), \quad (9)$$

$$L_0L_\zeta = B_\zeta \cos(\omega t + \varphi_0 + \Delta\varphi_\zeta),$$

где  $B_i = B_j, i = \xi, \eta, \zeta, j = x, y, z$ .

Из (9) следуют выражения для проекций вектора смещения  $\overline{LK}$  на оси НСК:

$$LK_\xi = \xi - a_{11}x_T - L_0L_\xi,$$

$$LK_\eta = \eta - a_{21}x_T + x_T^* - L_0L_\eta,$$

$$LK_\zeta = \zeta - a_{31}x_T - L_0L_\zeta$$

и на СКПС:

$$LK_{XL} = LK_\xi \cdot c_{11} + LK_\eta \cdot c_{21} + LK_\zeta \cdot c_{31},$$

$$LK_{YL} = LK_\xi \cdot c_{12} + LK_\eta \cdot c_{22} + LK_\zeta \cdot c_{32}, \quad (10)$$

$$LK_{ZL} = LK_\xi \cdot c_{13} + LK_\eta \cdot c_{23} + LK_\zeta \cdot c_{33},$$

где  $c_{ij}$  — элементы матрицы  $\mathbf{C}$ .

Таким образом, в настоящем разделе представлена последовательность преобразований, необходимых для определения положения «опасной» точки относительно ПУ и получены формулы определения координат «опасной» точки в связанной с подвижной СП системе координат (10). Перемещения  $x_{от} = LK_{XL}$  и  $z_{от} = LK_{ZL}$  используются при оценке безударности старта ракеты.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ СЛЕДОВ СТРУЙ ДВИГАТЕЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СТАРТОВОЙ ПЛАТФОРМЫ

Под следом струи  $i$ -й КС ДУ I ступени понимается точка пересечения оси  $i$ -й КС с плоскостью  $LX_LZ_L$  СКПС (или параллельной ей и отстоящей от нее на некоторое расстояние). Координаты следов струй определяются аналогично координатам «опасной» точки в следующей последовательности.

1. Определяются координаты точек пересечения геометрических осей КС и осей вращения КС в ССК, т. е.  $r_{opxli}, r_{opyli}, r_{opzli}$ .

2. Определяются проекции  $P_{Ki}$  ( $K = x_1, y_1, z_1$ ) единичных векторов осей КС ( $\mathbf{P}_i^0$ ) в ССК:

$$P_{xli}^0 = \frac{-P_{xli}}{P_i}, P_{yli}^0 = \frac{-P_{yli}}{P_i}, P_{zli}^0 = \frac{-P_{zli}}{P_i},$$



где  $P_i$  — проекции векторов тяги  $i$ -й КС двигателя на оси СКК.

3. Определяются координаты точек  $D_i$  в СКПС (рис. 1)

$$\overline{LD}_i = \mathbf{R}_0 + \overline{OD}_i - \overline{HL}_0 - \overline{L}_0 \overline{L},$$

где  $\overline{OD}_i = \mathbf{r}_{opi}$ :

$$LD_{\xi j} = \xi + r_{opxli} a_{11} + r_{opyli} a_{12} + r_{opzli} a_{13} - L_0 L_{\xi},$$

$$LD_{\eta i} = \eta + r_{opxli} a_{21} + r_{opyli} a_{22} + r_{opzli} a_{23} - L_0 L_{\eta} + x_T^*,$$

$$LD_{\zeta i} = \zeta + r_{opxli} a_{31} + r_{opyli} a_{32} + r_{opzli} a_{33} - L_0 L_{\zeta},$$

$$LD_{xLi} = LD_{\xi j} c_{11} + LD_{\eta i} c_{21} + LD_{\zeta i} c_{31},$$

$$LD_{yLi} = LD_{\xi j} c_{12} + LD_{\eta i} c_{22} + LD_{\zeta i} c_{32},$$

$$LD_{zLi} = LD_{\xi j} c_{13} + LD_{\eta i} c_{23} + LD_{\zeta i} c_{33}.$$

4. Определяются проекции векторов  $\mathbf{P}_i^0$  в СКПС:

$$P_{\xi j}^0 = P_{xli}^0 a_{11} + P_{yli}^0 a_{12} + P_{zli}^0 a_{13},$$

$$P_{\eta i}^0 = P_{xli}^0 a_{21} + P_{yli}^0 a_{22} + P_{zli}^0 a_{23},$$

$$P_{\zeta i}^0 = P_{xli}^0 a_{31} + P_{yli}^0 a_{32} + P_{zli}^0 a_{33},$$

$$P_{xLi}^0 = P_{\xi j}^0 c_{11} + P_{\eta i}^0 c_{21} + P_{\zeta i}^0 c_{31},$$

$$P_{yLi}^0 = P_{\xi j}^0 c_{12} + P_{\eta i}^0 c_{22} + P_{\zeta i}^0 c_{32},$$

$$P_{zLi}^0 = P_{\xi j}^0 c_{13} + P_{\eta i}^0 c_{23} + P_{\zeta i}^0 c_{33}.$$

5. Определяются точки пересечения осей КС с поверхностью СП:

$$\begin{aligned} D &= -h, \quad \kappa = (LD_{yLi} - h_n) / P_{yLi}^0, \\ Q_{xLi} &= LD_{xLi} - P_{xLi}^0 \kappa, \\ Q_{yLi} &= LD_{yLi} - P_{yLi}^0 \rho = h, \\ Q_{zLi} &= LD_{zLi} - P_{zLi}^0 \kappa. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, приведенная последовательность преобразований для определения координат следов струй от КС ДУ1 на движущейся СП позволяет получить формулы определения этих координат в СКПС.

### ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Полученная математическая модель пространственного движения ракеты на начальном участке полета является довольно сложной, что практически исключает возможность ее использования при аналитическом исследовании и синтезе

законов управления движением ракеты. Для аналитического анализа динамики старта ракеты с подвижного основания необходима более простая линеаризованная модель возмущенного движения ракеты. Основанием для упрощения является небольшая протяженность начального участка движения — до высоты подъема порядка 200 м и, вследствие этого, возможность принятия следующих допущений:

— в полете на рассматриваемом участке траектории нет изменений массы ракеты, ее моментов инерции и координат центра масс;

— общая задача пространственного управления представляется в виде независимых задач движения в плоскостях тангажа, рыскания и крена [5];

— угол атаки и отклонения от программных значений углов тангажа, рыскания и крена предполагаются малыми, т. е. имеют место аппроксимации [3]:

$$C_n(\alpha, M) \approx C_n^\alpha(M) \cdot \alpha,$$

$$C_y(\alpha, M) \approx C_y^\alpha(M) \cdot \alpha,$$

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1, \quad x = \Delta\vartheta, \Delta\psi, \Delta\varphi;$$

$$\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_{пр}, \quad \Delta\psi = \psi, \quad \Delta\varphi = \varphi.$$

После упрощений получим системы линейных уравнений движения РН в НСК [11]:

$$\begin{cases} \ddot{y} = a'_{yy} \ddot{y} + a_{y\vartheta} \vartheta + a_{y\delta} \delta_\vartheta + a'_{yy} W_y + \overline{F}_y, \\ \ddot{z} = a'_{zz} \ddot{z} + a_{z\psi} \psi + a_{z\delta} \delta_\psi - a'_{zz} W_z + \overline{F}_z, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = a'_{\psi z} \ddot{z} + a_{\psi\psi} \psi + a_{\psi\delta} \delta_\psi - a'_{\psi z} W_z + \overline{M}_\psi, \\ \ddot{\vartheta} = a'_{\vartheta y} \ddot{y} + a_{\vartheta\vartheta} \vartheta + a_{\vartheta\delta} \delta_\vartheta + a'_{\vartheta y} W_y + \overline{M}_\vartheta, \\ \ddot{\varphi} = a_{\varphi\delta} \delta_\varphi + \overline{M}_\varphi, \end{cases} \quad (13)$$

$$a'_{zz} = a'_{yy} = -\frac{C_y^\alpha q S}{m V},$$

$$a_{z\psi} = -a_{y\vartheta} = -\frac{P + C_{ya}^\alpha q S}{m},$$

$$a_{z\delta} = -a_{y\delta} = -\frac{P_y}{m},$$

$$a_{\psi\delta} = -a_{\vartheta\delta} = -\frac{P_y (x_T - x_{дв})}{I_z}, \quad P_y = P \cos(45^\circ),$$

$$a_{\psi\psi} = a_{\vartheta\vartheta} = -\frac{C_y^\alpha q S (x_T - x_d)}{I_z},$$

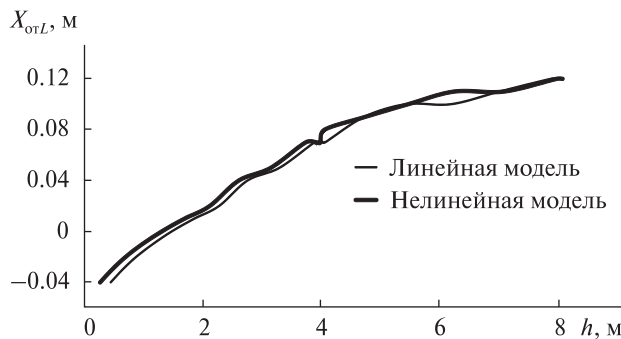


Рис. 5. Изменение по высоте полета РН координаты  $x_{OTL}$

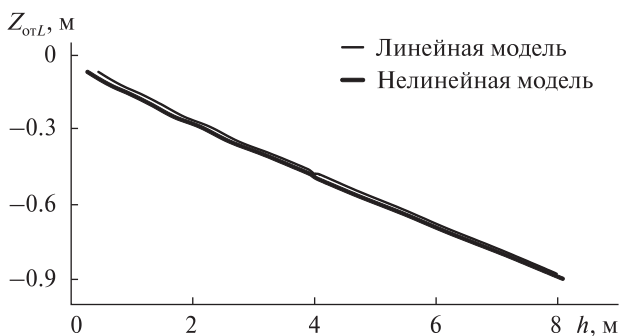


Рис. 6. Изменение по высоте полета РН координаты  $z_{OTL}$

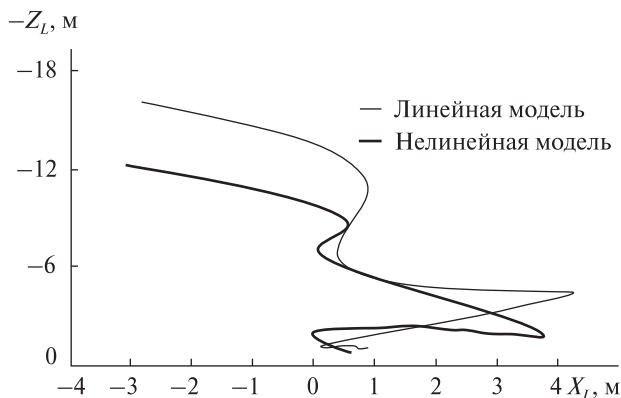


Рис. 7. Траектории следов струй от КС1 ДУ на поверхности СП

$$a'_{\psi z} = -a'_{\vartheta y} = -\frac{C_y^\alpha q S (x_T - x_d)}{I_z V},$$

$$a_{\varphi \delta} = -\frac{Pr}{I_x},$$

$$\bar{F}_y = \frac{F_{\Sigma y}}{m}, \bar{M}_\vartheta = \frac{M_{\Sigma \vartheta}}{I_y},$$

$$\bar{F}_z = \frac{F_{\Sigma z}}{m}, \bar{M}_\psi = \frac{M_{\Sigma \psi}}{I_z}, \bar{M}_\varphi = \frac{M_{\Sigma \varphi}}{I_x},$$

где  $x, y, z$  — координаты центра масс РН в программно-связанной системе координат (ПССК), которая в номинальном движении совпадает с ССК и отличается от нее на величину ошибок стабилизации при возмущенном движении;  $\delta_\vartheta, \delta_\psi, \delta_\varphi$  — командные сигналы на приводы управляющих органов по тангажу, рысканию и крену;  $W_z, W_y$ , м/с — проекции скорости ветра на оси ПССК;  $\bar{F}_z, \bar{M}_\psi, \bar{F}_y, \bar{M}_\vartheta, \bar{M}_\varphi$  ( $1/c^2$ ) — приведенные значения возмущающих сил и моментов от погрешностей изготовления и монтажа РН, действующих в канале рыскания, тангажа и крена соответственно;  $m$  — масса РН;  $C_y^\alpha, C_{ya}^\alpha$  ( $1/\text{град}$ ) — производные коэффициента нормальной и подъемной сил по углу атаки;  $V$  — скорость РН в НСК.

Линейные уравнения координат «опасной» точки в СКПС имеют вид

$$\begin{cases} x_{OTL} = \xi + \vartheta_L \eta - \psi_L \zeta + x_T (\Delta \vartheta - \vartheta_L) + \vartheta_L x_T^* - x_L - \vartheta_L y_L + \psi_L z_L, \\ y_{OTL} = \eta - \vartheta_L \xi + \varphi_L \zeta - x_T + x_T^* - y_L + \vartheta_L x_L - \varphi_L \cdot z_L, \\ z_{OTL} = \zeta - \varphi_L \eta + \psi_L \xi + x_T (\Delta \psi + \varphi_L) - \varphi_L x_T^* - z_L + \varphi_L y_L - \psi_L x_L, \end{cases} \quad (14)$$

где  $\Delta \vartheta = \vartheta - \vartheta_{\text{пр}}$ ,  $\Delta \psi = \psi$ ,  $\vartheta_{\text{пр}}$ ,  $\psi_{\text{пр}}$  — программные значения углов тангажа и рыскания;  $x_T^*$  — координата центра масс РН в начальный момент времени. Координаты  $x_L, y_L, z_L$  и углы  $\vartheta_L, \psi_L, \varphi_L$  определяются формулами (7), (8).

Линейные уравнения координат следов струй ДУ на поверхности СП в СКПС имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_{\text{СЛ}1,4} &= \xi + \eta_1 \Delta \vartheta + (\delta_{1,4} + \upsilon_{1,4} + \alpha_g) \cdot \eta_2 \cos 45^\circ - \\ &\quad - \psi_L \zeta + (U_{z1,4}^* (\Delta \varphi - \psi_L) - U_{y1,4}^* - x_L), \\ \xi_{\text{СЛ}2,3} &= \xi + \eta_1 \Delta \vartheta - (\delta_{2,3} + \upsilon_{2,3} + \alpha_g) \eta_2 \cos 45^\circ - \\ &\quad - \psi_L \zeta + (U_{z2,3}^* (\Delta \varphi - \psi_L) - U_{y2,3}^* - x_L), \quad (15) \\ \xi_{\text{СЛ}1,2} &= \zeta + \eta_1 \Delta \psi - (\delta_{1,2} + \upsilon_{1,2} + \alpha_g) \eta_2 \cos 45^\circ + \\ &\quad + \psi_L \xi + (U_{y1,2}^* (\Delta \varphi - \psi_L) + U_{z1,2}^* - z_L), \\ \xi_{\text{СЛ}3,4} &= \zeta + \eta_1 \Delta \psi + (\delta_{3,4} + \upsilon_{3,4} + \alpha_g) \eta_2 \cos 45^\circ + \\ &\quad + \psi_L \xi + (U_{y3,4}^* (\Delta \varphi - \psi_L) + U_{z3,4}^* - z_L), \end{aligned}$$

где

$$\Delta \varphi = \varphi, \eta_1 = (\eta - y_L), \eta_2 = \eta_1 + U_{xi}^*, U_{xi}^* = U_{xi} - x_T, U_{yi}^* = U_{yi} + y_{pi} + y_T, U_{zi}^* = U_{zi} + z_{pi} + z_T.$$

Значения координат  $x_{отL}$  и  $z_{отL}$ , рассчитанные по полным нелинейным и линеаризованным уравнениям, приведены на рис. 5—7.

Как видно, координаты «опасной» точки  $x_{от}$  и  $z_{от}$ , полученные для нелинейной пространственной и упрощенной линейной моделей движения РН, достаточно близки. Траектории следов струй от КС ДУ на поверхности подвижной СП при использовании линейной модели движения РН имеют одинаковый характер изменения в сравнении с траекториями, полученными по нелинейной пространственной модели. Наибольшая разница между одноименными координатами следов струй нелинейной и упрощенной линейной моделей составляет 4 м.

Следовательно, упрощенную линейную модель движения ракеты на начальном участке полета можно использовать для качественной оценки динамики полета ракеты. Количественную же оценку необходимо проводить по нелинейной пространственной модели движения ракеты путем моделирования на ПЭВМ.

## ВЫВОДЫ

Представлены две математические модели движения ракеты относительно ПУ: пространственная нелинейная с учетом полной совокупности возмущающих факторов и упрощенная линейная.

Представленные математические модели позволяют:

1) моделировать пространственное возмущенное управляемое движение ракеты относительно подвижной ПУ. Определять параметры движения ракеты относительно подвижной ПУ и параметры движения подвижной ПУ.

2) определять координаты находящихся на ракете характерных точек относительно подвижной ПУ.

3) определять координаты точек пересечения осей КС с плоскостью подвижного пускового стола.

Представленные математические модели можно использовать для исследований динамики управляемого возмущенного движения ракеты и ее составных частей при старте с подвижной пусковой установки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абагрян К. А., Рапопорт И. М. *Динамика ракет*. Москва: Машиностроение, 1969. 378 с.
2. Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. П. *Баллистика управляемых ракет дальнего действия*. Москва: Наука, 1966. 307 с.
3. *Аэродинамика ракет*: в 2-х кн. Кн. 2. Методы аэродинамического расчета (Под ред. М. Хемша, Дж. Нилсена). Москва: Мир, 1989. 512 с.
4. Бухгольц Н. Н. *Основной курс теоретической механики*: учеб. для вузов. Москва: Наука, 1965. Ч 2. 333 с.
5. Вермишев Ю. К. *Основы управления ракетами*. Москва: Военное изд-во Министерства обороны СССР, 1968. 320 с.
6. *Воздействие ветра на ракеты-носители*. Пер. с англ. В. С. Межина. 1974. 502 с.
7. Герасюта Н. Ф., Новиков А. В., Белецкая Н. Г. *Динамика полета. Основные задачи динамического проектирования*: учеб. пособ. Днепропетровск, 1998. 366 с.
8. *Динамика ракет* (Под ред. В. П. Мишина). Москва: Машиностроение, 1990. 463 с.
9. Зарубин В. С. *Математическое моделирование в технике*: учеб. для вузов. Москва: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2003. 496 с.
10. Игдалов И. М., Кучма Л. Д., Поляков Н. В., Шептун Ю. Д. *Ракета как объект управления*: учебник. Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС, 2004. 541 с.
11. Игдалов И. М., Кучма Л. Д., Поляков Н. В., Шептун Ю. Д. *Динамическое проектирование ракет. Задачи динамики ракет и их космических ступеней*: монография (Под ред. акад. С. Н. Конюхова). Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. нац. ун-та, 2010. 264 с.
12. Игдалов И. М., Кучма Л. Д., Поляков М. В., Шептун Ю. Д. *Ракети-носії і космічні ступені ракет як об'єкти керування*. Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ, 2007. 562 с.
13. *Инженерный справочник по космической технике* (Под общ. ред. А. В. Солодова). Москва: Воениздат, 1969. 696 с.
14. Киселев С. П. *Физические основы аэродинамики ракет*. Москва: Воениздат, 1976. 111 с.
15. Колесников К. С. *Динамика ракет*: учеб. для вузов. 2-е изд., исправл. и доп. Москва: Машиностроение, 2003. 520 с.
16. Лебедев А. А., Герасюта Н. Ф. *Баллистика ракет*. Москва: Машиностроение, 1970. 244 с.
17. Летов А. М. *Динамика полета и управление*. Москва: Наука, 1969. 359 с.
18. Остославский И. В., Стражева И. В. *Динамика полета. Траектории летательных аппаратов*. Москва: Машиностроение, 1969. 500 с.
19. Пугачев В. С., Казаков И. Е., Гладков Д. И. и др. *Системы управления и динамика полета ракет*. Москва: Типография ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1965. 617 с.

20. Тарасик В. П. *Математическое моделирование технических систем*: учеб. для вузов. Мн.: ДизайнПРО, 2004. 640 с.
21. Феодосьев В. И. *Основы техники ракетного полета*: учеб. для вузов. Москва: Наука, 1979. 494 с.

Стаття надійшла до редакції 07.06.2018

## REFERENCES

1. Abagryan K. A., Rapoport I. M. (1969). *Rocket Dynamics*. Moscow: Mashinostroyeniye [in Russian].
2. Appazov R. F., Lavrov S. S., Mishin V. P. (1966). *Long-Range Guided Missiles Ballistics*. Moscow: Nauka [in Russian].
3. Hemsh M., J. Nilsen (1989). *Rocket Aerodynamics*: in 2 books. Book 2. Methods of Aerodynamic Analysis. Moscow: Mir [in Russian].
4. Bukhgolts N. N. (1965). *Basic Course of Theoretical (Parts 1-2)*. Part 2: manual for universities. Moscow: Nauka [in Russian].
5. Vermishev Y. K. (1968). *Fundamentals of Rocket Control*. Moscow: Military Publishing House of the USSR Ministry of Defense [in Russian].
6. Mezhin V. S. (Trans) (1974). *Wind Effects on Launch Vehicles*. Leading Department of Scientific—Technical Information № 4. The Advisory Group for Aerospace research and Development of NATO [in Russian].
7. Gerasyuta N. F., Novykov A. V., Beletskaya N. G. (1998). *Flight Dynamics. Basic Tasks of Dynamic Designing*. Dnepropetrovsk: Ministry of Industrial Policy of Ukraine, Yuzhnoye State Design Office. Ministry of Education of Ukraine, Dnepropetrovsk State University. Dnepropetrovsk [in Russian].
8. Mishin V. P. (Eds.) (1990). *Rocket Dynamics*. Moscow: Mashinostroyeniye, 463 p. [in Russian].
9. Zarubin V. S. (2003). *Mathematical Modelling in Engineering*. Moscow: Bauman MGTU Publishing Office [in Russian].
10. Igdalov I. M., Kuchma L. D., Polyakov N. V., Sheptun Y. D. (2004). *Rocket as Control Object*. Dnepropetrovsk: ART-PRESS [in Russian].
11. Igdalov I. M., Kuchma L. D., Polyakov N. V., Sheptun Y. D. (2007). *Launch Vehicles and Space Rocket Stages as Control Objects*. Dnepropetrovsk: DNU Publishing Office [in Ukrainian].
12. Igdalov I. M., Kuchma L. D., Polyakov N. V., Sheptun Y. D. (2010). *Dynamic Designing of Rockets. Tasks of Rockets and their Space Stages Dynamics*. S. N. Konyukhov (Eds). Dnepropetrovsk: Dnepropetrovsk National University Publishing Office [in Russian].
13. Solodov A. V. (Eds.) (1969). *Engineering Guide on Space Hardware*. Moscow: Voenizdat [in Russian].
14. Kiselyov S. P. (1976). *Physical Principles of Rocket Aerodynamics*. Moscow: Voenizdat [in Russian].
15. Kolesnikov K. S. (2003). *Rocket Dynamics*. Moscow: Mashinostroyeniye [in Russian].
16. Lebedev A. A., Gerasyuta N. F. (1970). *Rocket Ballistics*. Moscow: Mashinostroyeniye [in Russian].
17. Letov A. M. (1969). *Flight Dynamics and Control*. Moscow: Nauka [in Russian].
18. Ostoslavsky I. V., Strazheva I. V. (1969). *Flight Dynamics. Flying Vehicles Trajectories*. Moscow: Mashinostroyeniye [in Russian].
19. Pugachyov V. S., Kazakov I. E., Gladkov D. I. (1965). *Rocket Control Systems and Flight Dynamics*. V. S. Pugachyov, N. E. Zhukovsky (Eds). VVIA Printing Office [in Russian].
20. Tarasik V. P. (2004). *Mathematical Modelling of Technical Systems*. Mn.: DesignPRO [in Russian].
21. Feodosyev V. I. (1979). *Principles of Rocket Flight Technique*. Moscow: Nauka [in Russian].

Received 07.06.2018

О. А. Дегтярева, О. В. Новиков

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля», Дніпро, Україна

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ РАКЕТИ ВІДНОСНО РУХОМОЇ ПУСКОВОЇ УСТАНОВКИ

В останній час через економічні та геополітичні причини виникла необхідність розширення видів стартів ракет-носіїв. Найбільш вигідно здійснювати пуски ракет у районі земного екватора, зокрема із пускових комплексів, розташованих на морських стартових платформах. Проте обмежені габарити стартових платформ не дозволяють розташовувати обладнання стартового комплексу на достатньому віддаленні одне від одного, а через хитавицю пусковий пристрій здійснює безперервні рухи за всіма ступенями свободи. Через це одним з ключових завдань є забезпечення безударного старту та мінімізація площини впливу факелу рушійної установки на елементи рухомого пускового комплексу під час польоту ракети на початковому відрізку траєкторії. У роботі запропоновано математичну модель керованого збуреного руху ракети відносно рухомого пускового пристрою та моделі визначення координат характерної точки на ракеті відносно елементів пускового пристрою і координат слідів струменів від камер згоряння чотирьохкамерної рушійної установки на поверхні пускового столу при польоті ракети на початковому відрізку траєкторії. Запропоновані математичні моделі враховують сукупність усіх найбільш суттєвих збурень та дозволяють здійснювати моделювання збурених рухів ракети і пускового пристрою, що перебуває на плавучій платформі, а також визначати взаємне положення характерних точок, що на них розташовані. Запропоновані математичні моделі були використані при розробці та опрацюванні нового закону керування ракетою, що стартує в умовах

морської хитавиці, та у післяпольотному аналізі пусків ракет «Зеніт-3SL», що стартували з морської стартової платформи.

**Ключові слова:** математична модель, політ ракети на початковому відрізку траєкторії.

*O. A. Degtiarova, O. V. Novykov*

Yangel Pivdenne State Design Office, Dnipro, Ukraine

#### MATHEMATICAL MODEL OF THE ROCKET MOTION RELATIVE TO MOBILE LAUNCHER

Recently, due to geopolitical and economic reasons, it has become necessary to enhance the types of launches of existing launch vehicles. The rocket launches are most advantageous to carry out in the vicinity of Earth equator. The most effective launches options are provided on launching complexes located on floating sea platforms (LP). But restrained LP dimensions do not allow the deployment of the launching complex equipment at the sufficient distance from each other. Besides, the launcher continuously moves in all degrees of freedom be-

cause of sea rolling. Hence, one of the key tasks is to ensure the collision-free launch and minimize the area of the impact of the propulsion system jet on the elements of the mobile launching complex during rocket flight on the initial segment of a trajectory. Here, we propose the mathematical model of the controlled disturbed motion of a rocket relative to mobile launcher. In addition, we present models for determining the coordinates of characteristic point located on the rocket relative to launcher elements and coordinates of combustion chambers' jet traces on the surface of the launch pad during rocket flight on the initial trajectory leg. The proposed mathematical models take into account the ensemble of all most significant disturbing factors and allow modeling the disturbed motions of the rocket, floating launcher and determining relative positions of characteristic points located on them. These models were used when developing and verifying the new control law for the rocket launched in the conditions of sea rolling and in the post-flight analysis of Zenit-3SL rockets launched from the sea launch platform.

**Keywords:** mathematical model, rocket flight in the initial trajectory leg.