



КОСМІЧНА НАУКА І ТЕХНОЛОГІЯ

НАЦІОНАЛЬНА
АКАДЕМІЯ
НАУК УКРАЇНИ

Том 25
2(117)
2019

SPACE SCIENCE AND TECHNOLOGY

НАУКОВО-ПРАКТИЧНИЙ ЖУРНАЛ + ЗАСНОВАНО В ЛЮТОМУ 1995 р. + ВИХОДИТЬ 6 РАЗІВ НА РІК + КИЇВ

ЗМІСТ

Динаміка та керування космічними апаратами

Пироженко А. В., Маслова А. И., Васильев В. В. О влиянии второй зональной гармоники на движение спутника по почти круговым орбитам 3

Сафронов О. В., Семон Б. Й., Неділько О. М. Згинально-крутильний флатер аеродинамічного профілю зі стрибками ущільнення 12

Космічні матеріали та технології

Аврамов К. В., Чернобричко М. В., Успенський Б. В. Вільні коливання функціонально-градієнтних на-ноармованих циліндричних оболонок 23

Космічне приладобудування

Коханов О. Б., Венедіктов Ю. І., Барабанов М. О., Венедіктов О. Ю. Прилад «Піон» для вивчення іоносферної плазми на борту мікросупутника на базі платформи «YuzhSat» 38

Космічна й атмосферна фізика

Черемных О. К., Черемных С. О., Козак Л. В., Кронберг Е. А. Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца и магнито-гидродинамические моды на границе геомагнитного хвоста 43

CONTENTS

Spacecraft Dynamics and Control

Pirozhenko A. V., Maslova A. I., Vasilyev V. V. About the influence of second zonal harmonic on the motion of satellite in almost circular orbits 3

Safronov O. V., Semon B. Y., Nedilko O. M. Flexural-torsional flutter of an aerodynamic profile with irregular compaction 12

Space Materials and Technologies

Avramov K. V., Chernobryvko M. V., Uspensky B. V. Free vibrations of functionally gradient CNT-infused cylindrical shells 23

Space Instruments

Kokhanov O. B., Venediktov Yu. I., Barabanov M. O., Venediktov O. Yu. “Pion” device for studying ionospheric plasma on board of a micro-satellite based on the YuzhSat platform 38

Space and Atmospheric Physics

Cheremnykh O. K., Cheremnykh S. O., Kozak L. V., Kronberg E. A. Instability of Kelvin — Helmholtz and magnetohydrodynamic modes on the boundary of geomagnetic tail 43

Науки про життя в космосі

Лобачевська О. В., Кияк Н. Я., Хоркавців Я. Д. Морфофункціональні особливості клітин протонеми *Weissia tortilis* Spreng. з різною чутливістю до гравітації 60

Соціогуманітарні аспекти космічних досліджень

Новиков А. В., Новикова Т. А. Дуальное образование: проблемы и перспективы подготовки специалистов для ракетно-космической отрасли 71

Наші автори 77

Space Life Sciences

Lobachevska O. V., Kyiak N. Ya., Khorkavtsiv Ya. D. Morpho-functional peculiarities of the moss *Weissia tortilis* Spreng. protonemata cells with different gravisensitivity 60

Social Sciences in Space Exploration

Novykov O. V., Novykova T. O. Dual education: problems and prospects while training specialists for aerospace industry 71

Our authors 77

На першій сторінці обкладинки — гравічутливі каулонемні столони і дендроїдна протонемна дернина *Weissia tortilis* (див. статтю О. В. Лобачевської та ін. на с. 60)

Журнал «Космічна наука і технологія» включено до переліку наукових фахових видань України, в яких публікуються результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата фізико-математичних та технічних наук

У підготовці видання взяло участь Українське регіональне відділення Міжнародної академії астронавтики

Відповідальний секретар редакції О.В. КЛИМЕНКО

Адреса редакції: 01030, Київ-30, вул. Володимирська, 54
тел./факс (044) 526-47-63, ел. пошта: reda@mao.kiev.ua
Веб-сайт: space-scitechnjournal.org.ua

Свідоцтво про реєстрацію КВ № 1232 від 2 лютого 1995 р.

Перереєстровано Міністерством юстиції України 21.11.2018 р., Свідоцтво серія КВ № 23700-13540 ПР

Підписано до друку 06.06.2019. Формат 84 × 108/16. Гарн. Ньютон. Ум. друк. арк. 8,19.
Обл.-вид. арк. 8,60. Тираж 101 прим. Зам. № 5637.

Оригінал-макет виготовлено і тираж віддруковано ВД «Академперіодика» НАН України
вул. Терещенківська, 4, м. Київ, 01004

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи серії ДК № 544 від 27.07.2001 р.

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2019.02.003>

УДК 629.78

А. В. Пироженко¹, А. И. Маслова¹, В. В. Васильев²

¹ Институт технической механики Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины, Днепро, Украина

² Earth Observing System Data Analytics

О ВЛИЯНИИ ВТОРОЙ ЗОНАЛЬНОЙ ГАРМОНИКИ НА ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА ПО ПОЧТИ КРУГОВЫМ ОРБИТАМ

Воздействия на движение спутника, вызванные второй зональной гармоникой разложения потенциала притяжения Земли в ряд по сферическим функциям, во многих случаях на порядки превосходят воздействия других возмущающих сил. Для низких околоземных орбит воздействия второй зональной гармоникой являются определяющими в отклонении траектории движения спутника от кеплеровой орбиты. Рассматривается задача определения краткопериодических изменений траектории движения спутника по почти круговым орбитам под воздействием второй зональной гармоникой. Это далеко не новая задача, решение которой дано во многих фундаментальных исследованиях небесной механики и механики космического полета. Вместе с тем при проектировании спутников и их систем, в частности спутников дистанционного зондирования Земли, есть потребность в простых инженерных оценках отличия возмущенной траектории движения от кеплеровой орбиты. Нужно получить ответы на следующие вопросы: какие закономерности возмущенной траектории, как выбрать кеплерову орбиту сравнения, какие изменения радиуса, скорости, углового положения в возмущенной траектории, какое отклонение возмущенной орбиты от плоскости орбиты сравнения? В статье использованы новые переменные, описывающие отклонение возмущенной траектории от круговой кеплеровой орбиты сравнения. Введение новых параметров для почти круговых орбит позволило более просто получить линеаризованные уравнения движения и построить аналитические оценки отклонения траектории от орбиты сравнения. Построены и проанализированы оценки изменения радиуса, скорости, углового положения в возмущенной траектории, и ее отклонение от орбиты сравнения на временном интервале порядка одного витка. Определены условия существования орбит с минимальным изменением их радиуса под действием второй зональной гармоникой. Показана принципиальная возможность орбит, которые испытывают только вынужденные колебания радиуса от второй зональной гармоникой, амплитуда которых составляет единицы километров. Например, при высоте орбиты 675 км амплитуда этих колебаний не превосходит 3.5 км.

Ключевые слова: изменения траектории спутника, вторая зональная гармоника, новые переменные.

ВВЕДЕНИЕ

Воздействия на движение спутника, вызванные второй зональной гармоникой разложения потенциала притяжения Земли в ряд по сферическим функциям, во многих случаях на порядки превосходят воздействия других возмущающих сил и определяют отклонения траектории движения спутника от кеплеровой орбиты. Ниже

рассматривается задача определения короткопериодических изменений траектории движения спутника по почти круговым орбитам под воздействием второй зональной гармоникой. Это далеко не новая задача, решение которой дано во многих фундаментальных исследованиях небесной механики и механики космического полета [1, 3, 8—10]. Однако, как представляется, стремление ранее проведенных исследований к более точному прогнозированию движения спутника

© А. В. ПИРОЖЕНКО, А. И. МАСЛОВА, В. В. ВАСИЛЬЕВ, 2019

затрудняло краткость и ясность изложений методик построения оценок и полученных результатов. Часто ранее проведенные исследования заканчивались достаточно громоздкими формулами оценок изменения оскулирующих элементов орбиты [1, 3, 9].

Вместе с тем проектирование спутников и их систем, в частности спутников дистанционного зондирования Земли, обнаруживает дополнительную потребность в простых инженерных оценках отличия возмущенной траектории движения от кеплеровой орбиты. Нужно получить ответы на следующие вопросы: Какие закономерности возмущенной траектории? Как выбрать кеплерову орбиту сравнения? Какие изменения радиуса, скорости, углового положения в возмущенной траектории? Какое отклонение возмущенной орбиты от плоскости орбиты сравнения? Использование новых переменных, учитывающих особенности движения по почти круговым орбитам, позволяет достаточно просто вывести уравнения возмущенного движения по почти круговым орбитам и получить ответы на поставленные вопросы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение центра масс спутника Земли с учетом его возмущений второй зональной гармоникой гравитационного поля Земли.

Уравнение движения центра масс спутника имеет вид

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{\mu \vec{R}}{R^3} + \vec{F}, \quad (1)$$

где $\vec{R}$ — радиус-вектор центра масс спутника относительно притягивающего центра, μ — постоянная гравитационного поля, $\vec{F}$ — возмущающее ускорение, точками обозначаются производные по времени.

Введем инерциальную и орбитальную правые системы координат (СК) с началом в притягивающем центре O : $OXYZ$ и $Ox\eta z$ соответственно. Плоскость OXY инерциальной СК лежит в плоскости экватора, ось OX направлена в точку весны, ось OZ — по оси вращения Земли, ось Ox орбитальной СК направлена вдоль $\vec{R}$, ось Oy — в

плоскости мгновенной орбиты в сторону движения спутника, ось Oz — по бинормали к орбите.

Ориентацию $Ox\eta z$ в $OXYZ$ будем описывать эйлеровыми углами i, Ω, u — наклонением, долгой восходящего узла и аргументом широты соответственно.

Возмущающие ускорения второй зональной гармоники в проекциях на оси $Ox\eta z$ имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{3c_{20} \mu R_3^2}{2R^4} (3\sin^2 u \sin^2 i - 1), \\ F_2 &= -\frac{3c_{20} \mu R_3^2}{2R^4} \sin 2u \sin^2 i, \\ F_3 &= -\frac{3c_{20} \mu R_3^2}{2R^4} \sin u \sin 2i, \end{aligned} \quad (2)$$

где c_{20} — безразмерный коэффициент второй зональной гармоники, $c_{20} = 1.0826 \cdot 10^{-3}$, R_3 — средний экваториальный радиус Земли, индексами 1, 2, 3 обозначаются проекции на оси Ox , Oy и Oz соответственно.

УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Умножая уравнение (1) слева векторно на $\vec{R}$, получим

$$\frac{d(\vec{R} \times \dot{\vec{R}})}{dt} = \vec{R} \times \vec{F}, \text{ или } \dot{\vec{L}} = \vec{M}, \quad (3)$$

где $\vec{L} = \vec{R} \times \dot{\vec{R}}$ — вектор удельного кинетического момента; $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$ — удельный момент возмущающих сил.

На основании леммы об абсолютной производной вектора по времени запишем (3) в виде

$$\vec{L}' + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M}, \quad (4)$$

где $\vec{L}'$ — относительная производная приведенного кинетического момента в орбитальной СК (ОСК), $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения ОСК относительно инерциальной СК (ИСК).

Проектируя (4) на оси ОСК, получим

$$\dot{L} = M_3, \quad \omega_2 L = M_1 = 0, \quad \omega_1 L = -M_2. \quad (5)$$

Так как $\vec{L} = L\vec{e}_3 = \vec{R} \times \dot{\vec{R}} = R^2 \omega_3 \vec{e}_3$, то

$$\omega_3 = L / R^2. \quad (6)$$

Таким образом, ОСК совершает вращательное движение относительно ИСК, вращаясь относительно двух взаимно перпендикулярных осей Ox ($\vec{R}$) и Oz ($\vec{L}$). Последнее равенство в (5) означает, что гироскопический момент $\omega_1 L$ (момент двух вращений [1]) уравнивает момент внешних сил, стремящийся «опрокинуть» систему, т. е. вывести материальную точку из плоскости ее вращения.

Соотношения (5), (6) полностью решают задачу динамики в вопросе изменения ориентации плоскости орбиты. Определение законов изменения углов ориентации кинетического момента (плоскости орбиты) в ИСК есть задача кинематики.

Уравнения изменения углов i , Ω , u легко получить из кинематических соотношений для углов Эйлера:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\Omega} \sin i \sin u + \frac{di}{dt} \cos u, \\ \omega_2 &= \dot{\Omega} \sin i \cos u - \frac{di}{dt} \sin u, \\ \omega_3 &= \dot{\Omega} \cos i + \dot{u}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \frac{R}{p} \cos u \tilde{F}_3, \\ \dot{p} &= 2R\tilde{F}_2, \\ \dot{\Omega} &= \frac{R \sin u}{p \sin i} \tilde{F}_3, \\ \dot{u} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{R^2} - \frac{R}{p} \sin u \operatorname{ctg} i \tilde{F}_3,\end{aligned}\quad (7)$$

где $\tilde{F}_i = \sqrt{p/\mu} F_i$ ($i=1, 2, 3$), и из соотношения $L = \sqrt{\mu p}$ введена новая переменная p — фокальный параметр орбиты.

Уравнение изменения R получим, проектируя (1) на Ox с учетом, что $\vec{R}\vec{e}_1 = \ddot{R} - \omega_3^2 R$, где $\vec{e}_1$ — орт оси Ox

$$\ddot{R} - \frac{L^2}{R^3} = -\frac{\mu}{R^2} + F_1. \quad (8)$$

Для описания отклонения возмущенной орбиты от кеплеровой круговой орбиты введем новые переменные

$$\begin{aligned}R &= R_0(1 + b_1), \quad \dot{R} = b_2 \sqrt{\mu/R_0}, \\ p &= R_0(1 + \gamma),\end{aligned}\quad (9)$$

где R_0 — радиус невозмущенной круговой орбиты, параметры b_1 и γ — отклонения текущего радиуса и фокального параметра возмущенной орбиты от радиуса невозмущенной орбиты соответственно, отнесенные к R_0 , параметр b_2 — радиальная скорость на возмущенной орбите, отнесенная к скорости движения по невозмущенной круговой орбите.

Дифференцируя (9), получим

$$\dot{R} = R_0 \dot{b}_1, \quad \ddot{R} = b \sqrt{\mu/R}, \quad \dot{p} = R_0 \dot{\gamma}. \quad (10)$$

С учетом (7) — (10) уравнения возмущенного движения можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= z \cos u F_3^*, \quad \dot{\Omega} = \frac{R \sin u}{p \sin i} \tilde{F}_3, \\ \Delta \dot{u} &= \sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}} \left(\frac{s^{1/2}}{z^2} - 1 \right) - \dot{\Omega} \cos i, \quad \dot{\gamma} = 2zs F_2^*, \\ \dot{b}_1 &= \sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}} b_2, \quad \dot{b}_2 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}} \frac{\gamma - b_1}{z^3} + F_1^*,\end{aligned}\quad (11)$$

где введены следующие обозначения: $z = 1 + b_1$ — безразмерный радиус орбиты, равный отношению радиуса орбиты к радиусу орбиты сравнения, $s = 1 + \gamma$ — безразмерный фокальный параметр орбиты, равный отношению фокального параметра орбиты к фокальному параметру орбиты сравнения (поскольку орбита сравнения — круговая, то ее фокальный параметр равен радиусу, т. е. R_0), $\Delta u = u - u_0$, u_0 — аргумент широты невозмущенной орбиты, $\dot{u}_0 = \sqrt{\mu/R_0^3}$, $F_{2,3}^* = \sqrt{R_0/(\mu s)} F_{2,3}$, $F_1^* = \sqrt{R_0/\mu} F_1$.

Отметим удобство использования уравнений (11) для численного расчета возмущенного движения спутника по орбитам, близким к круговым [7]: переходя к новой независимой переменной u_0 , получаем компактную форму уравнений возмущенного кеплерова движения, в которой переход к реальному времени задается простейшим соотношением $\Delta t = \Delta u_0 / \sqrt{\mu/R_0^3}$.

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ

Переходя к дифференцированию по u_0 и подставляя возмущающие ускорения (2), получим

$$\begin{aligned} i' &= -\frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{z^3 s^{1/2}} \sin 2u \sin 2i, \\ \Omega' &= -2\varepsilon \frac{1}{z^3 s^{1/2}} \cos i \sin^2 u, \\ \Delta u' &= \left(\frac{s^{1/2}}{z^2} - 1 \right) - \Omega' \cos i, \\ \gamma' &= -2\varepsilon \frac{s^{1/2}}{z^3} \sin^2 i \sin 2u, \\ b_1' &= b_2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$b_2' = \frac{\gamma - b_1}{z^3} + \varepsilon \frac{1}{z^4} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1),$$

где штрихом обозначена производная по u_0 ,
 $\varepsilon = \frac{3}{2} c_{20} \frac{R_0^2}{R_0^3}$ (для $R_0 = 7000$ км, $\varepsilon = 1.35 \cdot 10^{-3}$).

Поскольку $\varepsilon \ll 1$, и учитывая, что для почти круговых орбит b_1, b_2, γ — также малые величины, перепишем уравнения (12) с сохранением величин только первого порядка малости:

$$\begin{aligned} i' &= -\frac{\varepsilon}{2} \sin 2u_0 \sin 2i, \\ \Omega' &= -2\varepsilon \cos i \sin^2 u_0, \\ \Delta u' &= 0.5\gamma - 2b_1 - \Omega' \cos i, \\ \gamma' &= -2\varepsilon \sin^2 i \sin 2u_0, \\ b_1' &= b_2, \\ b_2' &= \gamma - b_1 + \varepsilon (3 \sin^2 i \sin^2 u_0 - 1). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь предполагается, что в начальный момент времени $u = u_0$ ($u_n = u_{0n}$). Погрешность уравнений (13) составляет $\varepsilon^{*2} \Delta u_0$, где $\varepsilon^* = \max\{\varepsilon, b_1, b_2, \gamma\}$, Δu_0 — интервал интегрирования.

ОЦЕНКА ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ

Уравнения (13) легко решаются.

$$\text{tgi} = \text{tgi}_n \exp \left(\frac{\varepsilon}{2} (\cos 2u_0 - \cos 2u_{0n}) \right). \quad (14)$$

Или, с учетом, что изменение наклона мало, из (13) или (14) получим

$$\Delta i = \frac{\varepsilon}{4} \sin 2i_n (\cos 2u_0 - \cos 2u_{0n}).$$

Это известное выражение кратко периодических изменений i для почти круговых орбит [9,

10]. Из него следует, что под действием притяжения экваториального горба спутник на каждом полувитке отклоняется от невозмущенной орбиты в сторону экватора. Здесь предполагается, что невозмущенная орбита имеет такое же наклонение, как исходная при пересечении плоскости экватора.

С той же точностью получим

$$\Omega = \Omega_n - \frac{\varepsilon}{2} \cos i_n (2(u_0 - u_{0n}) - \sin 2u_0 + \sin 2u_{0n}).$$

Полученные оценки изменения i и Ω позволяют оценить отклонение траектории движения спутника от плоскости невозмущенной орбиты, т. е. в направлении, перпендикулярном к плоскости орбиты. Для этого надо вычислить $(\vec{R} - \vec{R}_0) \cdot \vec{e}_{30}$, где индексом «0» обозначены параметры невозмущенной орбиты, $\vec{e}_{30}$ — орт оси Oz ОСК невозмущенной орбиты. Следовательно, отклонение траектории от плоскости невозмущенной орбиты равно $\zeta = \vec{R} \cdot \vec{e}_{30} = R(\vec{e}_1, \vec{e}_{30})$. Для вычисления последнего выражения надо перейти в ИСК. Нетрудно получить, что с рассматриваемой точностью

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_{30}) = \frac{\varepsilon}{2} \sin 2i_0 (u_0 \cos u_0 - \sin u_0),$$

где предполагается, что при $u_0 = 0$ траектории совпадают.

Тогда оценка отклонения возмущенной траектории от плоскости орбиты равна

$$\zeta = R_0 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2i_0 (u_0 \cos u_0 - \sin u_0). \quad (15)$$

Интересно отметить, что значительно проще соотношение (15) получается при рассмотрении уравнений относительного движения — уравнений изменения $\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_0$, где $\vec{R}_0$ — радиус невозмущенной кеплеровой орбиты $\vec{R}_0 = -\mu \vec{R}_0 / R_0^3$. Вычитая из (1) уравнение для $\vec{R}_0$ и проектируя на оси ОСК невозмущенной орбиты, получим, в предположении малости r / R_0 , известные уравнения относительного движения двух тел на круговой орбите [2]. В англоязычной литературе эти уравнения носят названия уравнений Хилла, или уравнений Клохесси — Вилтшира [10]. Уравнение отклонения $\vec{r}$ от плоскости невозмущенной орбиты имеет вид

$$\zeta'' + \zeta = \frac{R_0^3}{\mu} F_3, \quad (16)$$

где $\zeta = \vec{r} \cdot \vec{e}_{30}$, F_3 — нормальное возмущающее ускорение из (2); штрихом, как и ранее, отмечена производная по u_0 . Интегрируя (16) при $\zeta_n = 0$, $\zeta'_n = 0$, сразу получим оценку (15).

Если учесть вековое движение Ω в опорной орбите, то оценка отклонений возмущенной траектории от плоскости орбиты примет вид

$$\zeta = -R_0 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2i_0 \sin u_0.$$

То есть, в первом приближении отклонения от плоскости орбиты описываются гармоническими колебаниями с амплитудой $|R_0 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2i_0|$. В качестве примера будем рассматривать спутник, движущейся на орбите высотой $h = 675$ км и наклоном $i = 98.1^\circ$. Для такой орбиты амплитуда колебаний ζ приблизительно равна 1.3 км, а при $u_0 = 60^\circ$ отклонение приблизительно равно 1.13 км.

ОЦЕНКИ ИЗМЕНЕНИЙ ДВИЖЕНИЙ ПО ОРБИТЕ

Из уравнений (13) легко находится уравнение, описывающее изменение фокального параметра

$$\gamma = \gamma_n + \varepsilon \sin^2 i_n (\cos 2u_0 - \cos 2u_{0n}).$$

Точность этого решения такая же, как и решения для i и Ω .

Изменения радиуса траектории можно описать уравнением второго порядка

$$b_1'' = \gamma - b_1 + \varepsilon(3 \sin^2 i \sin^2 u_0 - 1),$$

или, подставляя оценку для γ и выделяя периодическую часть

$$b_1'' + b_1 = -\frac{\varepsilon}{2} \sin^2 i \cos 2u_0 + \gamma_n + \varepsilon \left(\sin^2 i \left(\frac{3}{2} - \cos 2u_{0n} \right) - 1 \right).$$

Это линейное уравнение легко решается аналитически. Однако общее его решение достаточно громоздко и содержит в себе все случаи, анализ которых выходит за рамки данной статьи.

Как известно, общее решение этого линейного уравнения будет содержать постоянное смещение b_1 , свободные (обусловленные эллиптичностью орбиты) колебания и вынужденные колебания. Сообразуясь с целью статьи, заключающейся в анализе влияния собственно второй

зональной гармоники, рассмотрим только вынужденные колебания.

Эти вынужденные колебания радиуса будут присутствовать при любых орбитах. Конечно, их сочетания с колебаниями, обусловленными эллиптичностью орбиты, могут давать разные эффекты. Но, учитывая и ограниченность изложения, в данной статье будем считать это темой дополнительных исследований.

Итак, рассмотрим задачу оценки изменений радиуса траектории, обусловленных собственно воздействием второй зональной гармоники, т. е. оценки вынужденных колебаний b_1 . Покажем, что существуют орбиты, которые испытывают только вынужденные колебания от второй зональной гармоники.

Для произвольного R_n положим $b_{1n} = 0$ и $b_{2n} = 0$, т. е. в начальный момент времени траектория касается круговой кеплеровой орбиты сравнения ($R_n = R_0$, $\dot{R}_n = 0$). Потребуем также, чтобы среднее значение b_1 равнялось нулю.

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \varepsilon - \varepsilon \sin^2 i (1.5 - \cos 2u_{0n}), \\ \gamma &= \varepsilon(1 - 1.5 \sin^2 i) + \varepsilon \sin^2 i \cos 2u_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Следовательно, орбита, заданная в произвольной точке старта R_n трансверсальной скоростью $\sqrt{\mu(1 + \gamma_n)/R_n}$, будет испытывать только вынужденные колебания от второй зональной гармоники.

Из последнего равенства (17) следует, что для таких орбит кинетический момент траектории в среднем больше (меньше) кинетического момента на орбите сравнения, если в среднем на этой орбите сила притяжения Земли больше (меньше) силы притяжения центрального поля, т. е. если $1 - 1.5 \sin^2 i > 0$ ($1 - 1.5 \sin^2 i < 0$).

Из первого равенства в (17) следует, что только для траекторий с $\sin^2 i \geq 0.4$ существуют «точки старта», т. е. u_{0n} такие, что $\gamma_n = 0$. Иными словами, только при условии $\sin^2 i \geq 0.4$ существуют возмущенные траектории с начальными радиусом R_0 и трансверсальной скоростью $\sqrt{\mu/R_0}$ (т. е. как для кеплеровых орбит), такие, что интегрально среднее отклонение радиуса траектории от R_0 равно нулю (R периодически колеблется относительно R_0). Для этого эти начальные условия траектории

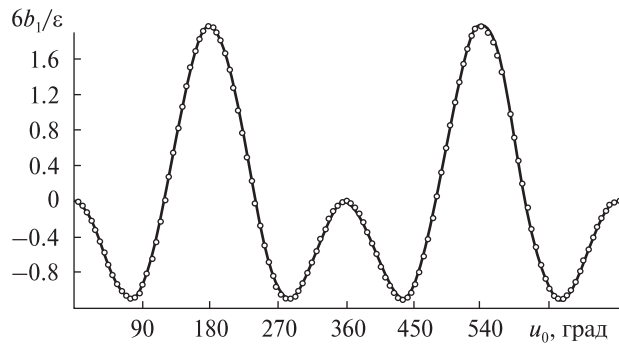


Рис. 1. Изменение b_1 для $u_{0n}=0$ для $h=675$ км, $i=98.1^\circ$ (сплошная линия — численное интегрирование нелинеаризованных уравнений (12), кружки — аналитическое решение (18))

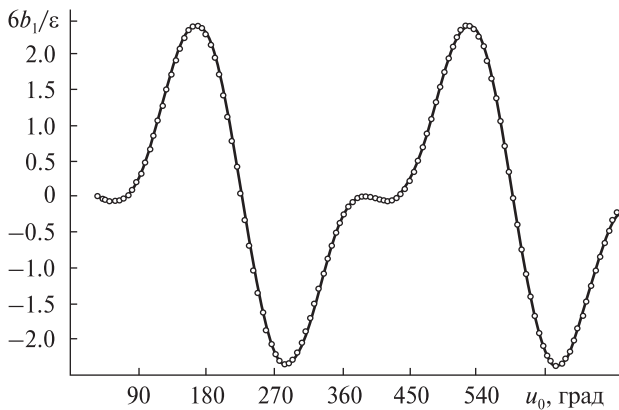


Рис. 2. Изменение b_1 для изначально круговой траектории $u_{0n}=0.5\arccos(1.5-\sin^2 i_n) \approx 30^\circ$ для $h=675$ км, $i=98.1^\circ$ (сплошная линия — численное интегрирование нелинеаризованных уравнений (12), кружки — аналитическое решение (18))

должны быть заданы в определенной ее точке $u_{0n}=0.5\arccos(1.5-\sin^2 i_n)$. Такие траектории можно назвать изначально круговыми.

При принятых предположениях изменение b_1 описывается уравнением

$$b_1'' + b_1 = -0.5\varepsilon \sin^2 i \cos 2u_0$$

с начальными условиями $b_{1n}=0$, $b_{2n}=0$. Его решение есть

$$b_1 = \frac{1}{6}\varepsilon \sin^2 i [\cos 2u_{0n} \cos(u_0 - u_{0n}) - 2\cos(u_0 + u_{0n}) + \cos 2u_0]. \quad (18)$$

Величина, стоящая в скобках, двояко периодична. Ее можно охарактеризовать максималь-

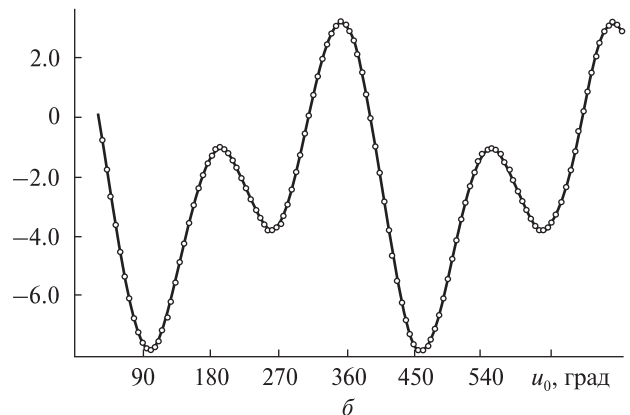
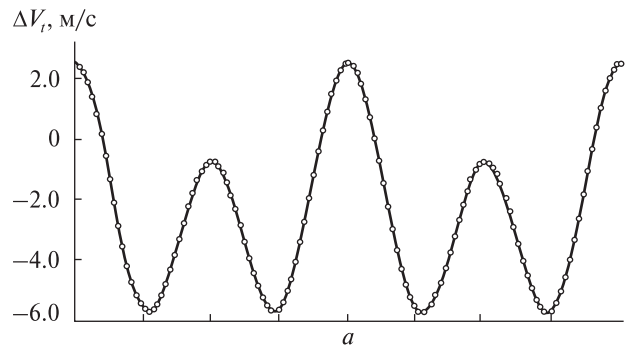


Рис. 3. Отклонение ΔV_t трансверсальной скорости от скорости движения по круговой орбите сравнения для $h=675$ км, $i=98.1^\circ$: а — $u_{0n}=0$, б — $u_{0n} \approx 30^\circ$ (сплошная линия — численное интегрирование нелинеаризованных уравнений (12), кружки — использовано аналитическое решение (19))

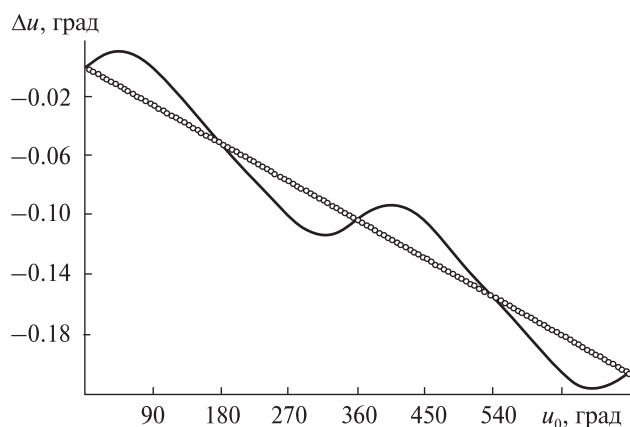


Рис. 4. Изменение Δu при $u_{0n}=0$ для $h=675$ км, $i=98.1^\circ$ (сплошная линия — численное интегрирование нелинеаризованных уравнений (12), кружки — линейное изменение Δu)

ным отклонением от нуля. Анализ показывает, что максимальные значения достигают приблизительно величины 2.6 при $u_{0n} \approx 45^\circ$. В любом случае сохраняется понятная закономерность движения: при приближении к экваториальному горбу скорость движения растет и повышается радиус траектории; при удалении от горба скорость снижается и снижается высота орбиты.

На рис. 1 для рассматриваемого примера орбиты ($h = 675$ км, $i = 98.1^\circ$) показано изменение b_1 для $u_{0n} = 0$, рассчитанное численным интегрированием уравнений (12) (сплошная линия), и решение (18) $b_1 = \frac{1}{6} \varepsilon \sin^2 i (\cos 2u_0 - \cos u_0)$ (кружки).

Соответствующие изменения радиуса возмущенной траектории составят около 4.6 км. Максимальные отклонения траектории от невозмущенной орбиты под действием второй зональной гармоники можно оценить величиной 3.5 км, а следовательно, максимальные изменения радиуса траектории за период обращения вокруг Земли составит приблизительно 7 км. Для полярной орбиты эти оценки примут значения 4 км и 8 км соответственно.

На рис. 2 для $h = 675$ км, $i = 98.1^\circ$ показано изменение b_1 изначально круговой траектории, для которой $u_{0n} = 0.5 \arccos(1.5 - \sin^2 i_n) \approx 30^\circ$.

Анализ траекторий показывает (см. рис. 1, 2), что максимальные значения радиус достигает в окрестностях, близких к экватору, а минимальные — вблизи полюсов. Вместе с тем, как видно из рис. 2, радиус орбиты вблизи полюса (на рис. 2 северный полюс, $u_0 = 90^\circ$) может быть больше радиуса над экватором (на рис. 2 в восходящем узле $u_0 = 360^\circ$). Поэтому утверждение: «что происходит как бы частичное «отслеживание» поверхности Земли высотой полета» [4] не представляется корректным.

Отметим, что эллиптичность орбит и длительная их эволюция под влиянием зональных гармоник [5] могут в разы увеличить отклонения высоты от круговой орбиты сравнения.

Изменения трансверсальной скорости движения спутника можно оценить следующим образом:

$$V_t = \frac{\sqrt{\mu p}}{R} = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}} \frac{s^{1/2}}{z} \approx \sqrt{\frac{\mu}{R_0}} (1 + 0.5\gamma - b_1). \quad (19)$$

На рис. 3 аналогично рис. 1, 2, показано отклонение трансверсальной скорости от скорости движения по круговой орбите сравнения ($\Delta V_t = V_t - \sqrt{\mu / R_0}$).

Максимальные отклонения составляют около 8 м/с, а максимальные изменения скорости при движении по траектории — около 11 м/с.

Отметим, что для кеплеровых орбит на рассматриваемых высотах изменение скорости на 1 м/с соответствует изменению радиуса круговой орбиты приблизительно на 1.9 км (грубая оценка).

Поскольку средняя скорость движения по возмущенной орбите отличается от скорости движения по орбите сравнения, то и изменение аргумента широты имеет вековую составляющую. В среднем $\Delta u = 0.25\varepsilon(6 - 7\sin^2 i_0)u_0$. К этому линейному изменению добавляются гармонические колебания с орбитальной и удвоенной орбитальной частотой. На рис. 4 для $h = 675$ км, $i = 98.1^\circ$ показано изменение Δu при $u_{0n} = 0$. Сплошной линией изображено численное решение уравнений (12), кружками — среднее изменение Δu .

Как видно, движение по возмущенной траектории отстает от движения по орбите сравнения приблизительно на 0.1° за виток. При этом колебания отклонений широты относительно среднего движения достигают амплитуды около 0.03° .

ВЫВОДЫ

В статье рассмотрена модельная задача движения спутника Земли по почти круговым орбитам с учетом возмущений только от второй зональной гармоники гравитационного поля Земли. Построены линейные уравнения, позволяющие достаточно просто получить аналитические выражения, которые с высокой точностью описывают отклонения траектории от кеплеровой орбиты сравнения на одном витке движения. В рамках рассмотренной задачи получены следующие результаты.

1. Использование новой формы уравнений возмущенного кеплерова движения позволило более кратко и просто получить оценки влияния второй зональной гармоники на движение спутника по почти круговым орбитам.

2. Для движений в плоскости орбиты определены круговые кеплеровы орбиты сравнения, позволяющие оценить влияние на изменение траекторий собственно второй зональной гармоник.

3. Построены и проанализированы оценки отклонений возмущенной траектории от орбиты сравнения: отклонений от плоскости орбиты сравнения и изменений фокального параметра орбиты построены для произвольных почти круговых орбит; отклонений радиуса и скорости — в предположении равенства нулю среднего изменения радиуса орбиты за виток, т. е. только вынужденных их колебаний.

4. Показано существование орбит, которые испытывают только вынужденные колебания радиуса от второй зональной гармоник, амплитуда которых составляет единицы километров. Например, при высоте орбиты 675 км амплитуда этих колебаний не превосходит 3.5 км.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П. *Теория движения искусственных спутников Земли*. М.: Наука, 1977. 360 с.
2. Белецкий В. В. *Очерки о движении космических тел*. (3-е изд.) М.: Изд-во ЛКИ, 2009. 432 с.
3. Дубошин Г. Н. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*. М.: Наука, 1976. 864 с.
4. Иванов Н. М., Лысенко Л. Н. *Баллистика и навигация космических аппаратов*. М.: Дрофа, 2004. 544 с.
5. Кулаенко Б. В., Эльясберг П. Е. Эволюция почти круговых орбит ИСЗ под влиянием зональных гармоник. *Космич. исслед.* 1968. 6, № 2. С. 186—202.
6. Пироженко А. В. К построению новых форм уравнений возмущенного кеплерова движения. *Космична наука і технологія*. 1999. 5, № 2/3. С. 103—107.
7. Пироженко А. В., Маслова А. И. К динамике твердого тела. Моменты центробежных ускорений. *Техн. мех.* 2013. № 3. С. 63—71.
8. Эльясберг П. Е. *Введение в теорию полета искусственных спутников Земли*. М.: Наука, 1965. 540 с.
9. Beutler G. *Methods of celestial mechanics V. II: Application to Planetary System, Geodynamics and Satellite Geodesy*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. 468 p.
10. Vallado D. A. *Fundamentals of astrodynamics and applications*. McGraw-Hill Primis Custom Publ., 1997. 950 p.

Стаття надійшла до редакції 29.10.2018

REFERENCES

1. Aksenov E. G. (1977). *Theory of motion of artificial Earth satellites*. Moscow: Nauka.
2. Beletskii V. V. (2009). *Essays on the motion of cosmic bodies*. Moscow: Izd-vo LKI.
3. Duboshin H. N. (1976). *Reference guide to celestial mechanics and astrodynamics*. Moscow: Nauka.
4. Ivanov N. M., Lysenko L. N. (2004). *Ballistics and navigation of space vehicles*. Moscow: Drofa.
5. Kuhaenko B. V., Eliasberh P. E. (1968). Evolution of almost circular orbits of satellites under the influence of zonal harmonics. *Cosmic res.*, 6(2), 186—202.
6. Pirozhenko A. V. (1999). To the construction of new forms of the equations of perturbed Keplerian motion. *Space science and technology*, 5(2/3), 103—107.
7. Pirozhenko A. V., Maslova A. I. (2013). To the dynamics of a rigid body. Moments of centrifugal acceleration. *Technical mechanics*, 3, 63—71.
8. Eliasberh P. E. (1965). *Introduction to the theory of flight of artificial Earth satellites*. Moscow: Nauka.
9. Beutler G. (2005). *Methods of celestial mechanics V. II: Application to Planetary System, Geodynamics and Satellite Geodesy*. Berlin Heidelberg: Springer.
10. Vallado D. A. (1997). *Fundamentals of astrodynamics and applications*. McGraw-Hill Primis Custom Publ.

Received 29.10.2018

О. В. Пироженко¹, А. И. Маслова¹, В. В. Васильев²

¹ Інститут технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України, Дніпро, Україна

² Earth Observing System Data Analytics

ПРО ВПЛИВ ДРУГОЇ ЗОНАЛЬНОЇ ГАРМОНІКИ НА РУХ СУПУТНИКА ПО МАЙЖЕ КРУГОВИХ ОРБИТАХ

Вплив другої зональної гармоніки розкладу потенціалу тяжіння Землі в ряд по сферичних функціях на рух супутників у багатьох випадках на порядки перевершує вплив інших збурювальних сил. Для низьких навколоземних орбіт вплив другої зональної гармоніки є основним при визначенні відмінностей між реальною траєкторією руху супутника та кеплеровою орбітою. У статті розглядається задача визначення короткоперіодичних змін траєкторії руху супутника по майже кругових орбітах під впливом другої зональної гармоніки. Це далеко не нова задача, рішення якої наведено у багатьох фундаментальних дослідженнях небесної механіки і механіки космічного польоту. Разом з тим при проектуванні супутників і їхніх систем, зокрема супутників дистанційного зондування Землі, є потреба у простих інженерних оцінках відмінності збуреної траєкторії руху від кеплерової орбіти. Потрібно отримати відповіді на такі питання:

які закономірності збуреної траєкторії, як вибрати кеплерову орбіту порівняння, які зміни радіуса, швидкості, кутового положення на збуреній траєкторії, яке відхилення збуреної орбіти від площини орбіти порівняння? У статті використано нові змінні, що описують відхилення збуреної траєкторії від кругової кеплерової орбіти порівняння. Введення нових параметрів для майже кругових орбіт дозволило простіше отримати лінеаризовані рівняння руху і побудувати аналітичні оцінки відхилення траєкторії від орбіти порівняння. Побудовано та проаналізовано оцінки зміни радіуса, швидкості, кутового положення на збуреній траєкторії і її відхилення від орбіти порівняння на часовому інтервалі порядку одного витка. Визначено умови існування орбіт з мінімальною зміною їхнього радіуса під дією другої зональної гармоніки. Показано принципову можливість орбіт, які зазнають лише вимушених коливань радіуса від другої зональної гармоніки, амплітуда яких складає декілька кілометрів. Наприклад, при висоті орбіти 675 км амплітуда цих коливань буде не більшою ніж 3.5 км.

Ключові слова: зміни траєкторії супутника, друга зональна гармоніка, нові змінні.

A. V. Pirozhenko ¹, A. I. Maslova ¹, V. V. Vasilyev ²

¹ The Institute of Technical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the State Space Agency of Ukraine, Dnipro, Ukraine

² Earth Observing System Data Analytics

ABOUT THE INFLUENCE OF SECOND ZONAL HARMONIC ON THE MOTION OF SATELLITE IN ALMOST CIRCULAR ORBITS

Impacts on satellite motion, caused by the second zonal harmonic of the expansion of the Earth's gravitation potential in a series, in many cases exceed by far the impacts caused by

other perturbing forces. For low near-earth orbits, the effects of the second zonal harmonic are crucial, in distinctions between perturbed trajectory and Kepler orbit. The article deals with the problem of determining the short-period changes in the satellite's trajectory in almost circular orbits under the influence of the second zonal harmonic. This is not a new task. Its solution is given in many fundamental studies of celestial mechanics and space flight mechanics. At the same time, the design of satellites and their systems, in particular, Earth remote sensing satellites, reveals an additional need for simple engineering estimates of distinctions between perturbed trajectory and Kepler orbit. It is necessary to get answers to the following questions: What are the regularities of the perturbed trajectory? How to choose a Keplerian orbit of comparison? What are the changes in radius, velocity, angular position in a perturbed trajectory? What is the deviation of the perturbed orbit from the plane of the comparison orbit? We use new variables that describe the deviation of the perturbed trajectory from the circular Kepler orbit of comparison. The introduction of new parameters for almost circular orbits made it possible to obtain linearized equations of motion more simply, and to construct analytical estimates of the deviation of the trajectory from the comparison orbit. The estimates of changes in the radius, velocity, angular position in a perturbed trajectory, and its deviation from the comparison orbit have been constructed and analysed. The conditions for the existence of orbits with a minimum change of radius under the influence of the second zonal harmonic have been determined for one rotation of satellite in orbit. The existence of orbits, which experience only forced oscillations of the radius from the second zonal harmonic, the amplitude of which is a few kilometres, is shown. For example, with an orbit altitude of 675 km, the amplitude of these oscillations does not exceed 3.5 km.

Keywords: satellite trajectory changes, second zonal harmonic, new variables.

О. В. Сафронов, Б. Й. Семон, О. М. Неділько

Національний університет оборони України імені Івана Черняхівського, Київ, Україна

ЗГИНАЛЬНО-КРУТИЛЬНИЙ ФЛАТЕР АЕРОДИНАМІЧНОГО ПРОФІЛЮ ЗІ СТРИБКАМИ УЩІЛЬНЕННЯ

Пропонується одна з можливих математичних моделей оцінки впливу стрибків ущільнення на величину критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера прямого аеродинамічного профілю у трансзвуковому потоці повітря. Математична модель базується на традиційних методах класичного (двоступеневого) флатера, на спільному аналізі рівнянь Бернуллі для стисливого газу, характеристик надзвукового потоку газу у течії Прандтля — Майєра і на застосуванні гіпотези «динамічного викривлення профілю». На базі лінеаризації рівнянь Бернуллі для стисливого газу, а саме для повітря, отримано умову формування стрибків ущільнення на поверхні аеродинамічного профілю у трансзвуковому діапазоні чисел Маха. На базі цієї умови, враховуючи характер зміни параметрів місцевого надзвукового потоку при обтіканні дифузорної частини поверхні аеродинамічного профілю, і на базі гіпотези «динамічного скривлення профілю» отримано наближені закономірності взаємодії стрибків ущільнення з згинально-крутильними коливаннями аеродинамічного профілю. Отримані закономірності використано для формування математичних моделей оцінки величини дестабілізаційних та збуджувальних сил і моментів, зумовлених особливостями взаємодії стрибків ущільнення із згинально-крутильними коливаннями аеродинамічного профілю. Оцінювання критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю зі стрибками ущільнення виконувалось шляхом розв'язування системи двох диференціальних рівнянь другого порядку, на основі якого отримано наближені аналітичні залежності величини критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю, як в однорідному потоці повітря, так і у потоці зі стрибками ущільнення. Порівнянням отриманих результатів показано, що величина критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера типових аеродинамічних профілів зі стрибками ущільнення завжди менша, ніж величина критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера в однорідному потоці повітря.

Ключові слова: аеродинамічний профіль, математична модель, згинально-крутильний флатер, стрибки ущільнення, трансзвуковий потік, число Маха, стисливість повітря, швидкісний напір, тиск.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Коливання аеродинамічних поверхонь надзвукових літаків та аерокосмічних систем, які спостерігаються у трансзвуковому діапазоні чисел M польоту, досі не мають достатньо чіткого фізичного пояснення причин їхнього виникнення. Не розроблені математичні методи, якими можна описати процеси, що відбуваються при ви-

никненні коливань аеродинамічних поверхонь на цих режимах польоту [3, 12].

Доцільність розробки теоретичних методів оцінки аеропружних характеристик літаків, і у першу чергу критичної швидкості флатера аеродинамічних поверхонь, важко переоцінити, оскільки оцінка цих характеристик прямими методами безпосередньо у льотному експерименті неможлива.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Теоретичним та експериментальним дослідженням цього явища присвячено багато публікацій, в

яких запропоновано різноманітні підходи для обґрунтування причин виникнення інтенсивних коливань аеродинамічних поверхонь сучасних надзвукових літаків, умови їхнього виникнення, вплив різноманітних факторів на рівень коливань [3—5, 8, 10—13].

Відмічено, що рівень цих коливань залежить від великої кількості параметрів, основними з яких є число M потоку повітря, геометричні характеристики аеродинамічних поверхонь, частота їхніх власних пружних коливань та масово-інерційні характеристики [3, 12].

У деяких працях відмічено вплив стрибків ущільнення на виникнення коливань аеродинамічних поверхонь у трансзвуковому потоці повітря.

Так, у праці [8] відмічено, що стрибок ущільнення є основною причиною різкого зниження межі флатера на режимі трансзвукових швидкостей, але теоретичного обґрунтування цього припущення не наведено. У роботі [5] отримано висновки, що ударні хвилі не виникають у якійсь визначеній точці профілю, вони коливаються з великою частотою між двома можливими положеннями рівноваги. У роботі [4] прямо вказано, що розрахувати це явище за допомогою класичної аеродинамічної теорії неможливо, хоча коливання аеродинамічної поверхні керування є простим гармонічним коливанням. Нарешті, в огляді [3] також відмічено, що дійсний механізм цих коливань залишається до кінця не з'ясованим.

Тобто, досі немає загальноприйнятої математичної моделі взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічних поверхонь і, як наслідок, немає моделі оцінки впливу стрибків ущільнення на величину критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю.

З цієї причини виникнення цих коливань спостерігалось, як правило, лише на етапі льотних випробувань і не прогнозувалось ні теоретичними розрахунками, ні результатами продувок аеродинамічних моделей в аеродинамічних трубах. Тому експериментальні дослідження залишаються основним методом оцінки характеристик флатера літаків на трансзвукових швидкостях польоту. Емпіричними методами залишаються і методи зменшення рівня цих коливань.

Пошук ефективних методів зменшення рівня коливань аеродинамічних поверхонь керування на цій стадії доводки літака не завжди досягає позитивних результатів і безпека польотів літаків на трансзвукових швидкостях забезпечується лише додатковим обмеженням льотних характеристик. Так, на надзвукових літаках F-14 швидкість польоту на висотах нижче 3 км обмежена числом Маха $M = 0.85$ [11]. Аналогічні обмеження режимів польоту мають і деякі інші надзвукові літаки.

Мета роботи — розробити математичну модель оцінки впливу стрибків ущільнення на величину критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо згинально-крутильні коливання тонкого аеродинамічного профілю, розташованого у трансзвуковому потоці під нульовим кутом атаки.

Обтікання аеродинамічного профілю трансзвуковим потоком повітря вважаємо безвідривним. Швидкість трансзвукового потоку відповідає таким значенням M , при яких стрибки ущільнення розташовані у дифузійній частині аеродинамічного профілю, тобто поблизу задньої кромки.

Аеродинамічний вплив трансзвукового потоку на коливання аеродинамічного профілю визначається сумою аеродинамічних сил і моментів, зумовлених як однорідним потоком повітря, так і наявністю стрибків ущільнення. Ці сили і моменти, як правило, є нелінійними функціями характеристик аеродинамічних профілів та трансзвукового потоку, але при малих амплітудах коливань аеродинамічних профілів їх можна уявити лінійними функціями.

Крім того, у нашій роботі оцінка критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю з урахуванням впливу стрибків ущільнення розглядається як самостійне явище аеропружності, яке вирішується за допомогою математичного апарату класичного (двоступеневого) флатера аеродинамічних профілів, а також базується на спільному аналізі закономірностей зміни параметрів над-

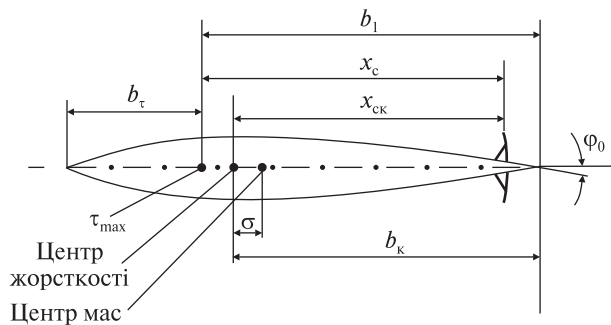


Рис. 1. Аеродинамічний профіль у трансзвуковому потоці зі стрибками ущільнення (див. текст)

звукового потоку у течії Прандтля — Майєра [5], рівнянь Бернуллі для стисливого газу [1] та на використанні гіпотези «динамічного скривлення» аеродинамічного профілю [9].

З урахуванням цих зауважень та користуючись підходами [4, 14], систему диференціальних рівнянь згинально-крутильних коливань аеродинамічного профілю у трансзвуковому потоці повітря зі стрибками ущільнення можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \ddot{Y}(t) + \omega_y^2 Y(t) - \sigma \ddot{\theta}(t) &= \frac{1}{\bar{m}} (\bar{F}_a + \bar{F}_c), \\ \ddot{\theta}(t) + \omega_k^2 \theta(t) - \frac{\bar{m}}{J} \sigma \ddot{Y}(t) &= \frac{1}{J} (\bar{M}_a + \bar{M}_c), \end{aligned} \quad (1)$$

де $Y(t)$ — згинальні коливання аеродинамічного профілю, ω_y — кутова частота власних згинальних коливань аеродинамічного профілю, σ — відстань осі жорсткості аеродинамічного профілю від його центра мас, $\theta(t)$ — крутильні коливання аеродинамічного профілю, $\bar{m}$ — розподілена маса аеродинамічного профілю, $\bar{F}_a$ — розподілена аеродинамічна сила, зумовлена однорідним потоком повітря, $\bar{F}_c$ — розподілена аеродинамічна сила, зумовлена впливом стрибків ущільнення, ω_k — кутова частота власних крутильних коливань аеродинамічного профілю, J — розподілений масовий момент інерції аеродинамічного профілю, $\bar{M}_a$ — розподілений аеродинамічний момент, зумовлений однорідним потоком повітря, $\bar{M}_c$ — розподілений аеродинамічний момент, зумовлений впливом стрибків ущільнення.

На рис. 1 наведено основні геометричні параметри аеродинамічного профілю у трансзвуковому потоці. Тут b_{τ} — відстань від носка профілю до перерізу максимальної його товщини, b_1 — відстань від задньої кромки профілю до перерізу максимальної його товщини, τ_{max} — точка максимальної товщини профілю, x_c — відстань від перерізу стрибка ущільнення до максимальної товщини профілю, x_{ck} — відстань від перерізу стрибка ущільнення до центра жорсткості профілю, σ — відстань між центром жорсткості і центром мас, φ_0 — максимальний кут нахилу дифузornoї частини профілю.

Розподілені аеродинамічні сили та моменти, зумовлені однорідним потоком повітря, можна подати відомими залежностями [14]:

$$\bar{F}_a = C_y^a q b \left[\theta(t) + \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) \frac{b}{V} \dot{\theta}(t) - \frac{\dot{Y}(t)}{V} \right], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_a = C_y^a q b^2 \left\{ \left(\frac{x_0 - x_f}{b} \right) \left[\theta(t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) \frac{b}{V} \dot{\theta}(t) - \frac{\dot{Y}(t)}{V} \right] - \frac{\pi b \dot{\theta}(t)}{8 C_y^a V} \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

де C_y^a — похідна коефіцієнта піднімальної сили по куту атаки профілю, q — швидкісний напір потоку повітря, b — хорда аеродинамічного профілю, x_0 — відстань осі жорсткості від передньої кромки аеродинамічного профілю, x_f — відстань аеродинамічного фокуса від передньої кромки аеродинамічного профілю, V — швидкість потоку повітря.

Основні труднощі теоретичного дослідження цього явища зумовлені необхідністю аналітичного представлення впливу стисливості повітря та стрибків ущільнення на зміну характеристик аеродинамічних поверхонь у трансзвуковому діапазоні швидкостей польоту. Звичайно в аналітичних дослідженнях вплив стисливості повітря враховується за допомогою поправок, наприклад поправки Прандтля — Глауєрта [5]

$$\bar{C}_{cp} = \frac{P_1 - P_{\infty}}{q} \approx \frac{\bar{C}_p}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}}, \quad (4)$$

де $\bar{C}_{cp}$ — коефіцієнт тиску місцевого потоку на поверхні аеродинамічного профілю з урахуванням стисливості повітря, P_1 — тиск місцевого

надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю, P_∞ — тиск дозвукового потоку повітря, q — швидкісний напір дозвукового потоку повітря, C_p — коефіцієнт тиску місцевого потоку на поверхні аеродинамічного профілю без урахування стисливості повітря, M_∞ — число Маха дозвукового потоку повітря.

Але необхідно зауважити, що при визначенні впливу стисливості повітря на величину коефіцієнта тиску за допомогою поправки (4), при числах $M_\infty \rightarrow 1$ виникають значні похибки.

Додаткові труднощі при оцінці характеристик місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю надзвукових літаків на трансзвукових швидкостях польоту виникають у випадку, коли на поверхні аеродинамічного профілю формуються стрибки ущільнення.

Зауважимо також і те, що у трансзвуковому діапазоні чисел M польоту значні похибки виникають і при оцінці аеропружних характеристик числовими методами [2].

У роботі [11] замість коефіцієнту тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю було запропоновано іншу безрозмірну величину, а саме

$$\Delta \bar{P}_1 = \frac{P_\infty - P_1}{P_\infty} = 1 - \frac{P_1}{P_\infty} = 1 - \bar{P}_1, \quad (5)$$

де $\Delta \bar{P}_1$ — відносна величина зміни тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю, $\bar{P}_1$ — відносна величина тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю.

Використання відношення (5) збільшує точність оцінки визначення зміни тиску місцевого надзвукового потоку. Дійсно, у трансзвуковому діапазоні чисел M можлива лінеаризація рівняння Бернуллі для стисливого газу, а саме для повітря:

$$\bar{P}_1 = \frac{P_1}{P_\infty} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \approx 1 + M_\infty^2 - M_1^2, \quad (6)$$

де M_1 — число Маха місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю, k — показник адіабати (для повітря $k = 1.405$).

З рівняння (6) отримаємо

$$\Delta \bar{P}_1 = 1 - \bar{P}_1 \approx M_\infty^2 - M_1^2. \quad (7)$$

Крім того, якщо у рівнянні (7) покласти $M_\infty = M_{кр}$, то:

$$\Delta P_1 = \Delta P_{кр} = 1 - P_{кр} \approx 1 - M_{кр}^2, \quad (8)$$

де $\Delta \bar{P}_{кр}$ — відносна величина зміни критичного тиску місцевого потоку на поверхні аеродинамічного профілю, $\bar{P}_{кр}$ — відносна величина критичного тиску місцевого потоку на поверхні аеродинамічного профілю, $M_{кр}$ — критичне число Маха аеродинамічного профілю.

З рівняння (8) випливає

$$\bar{P}_{кр} \approx M_{кр}^2. \quad (9)$$

Зауважимо, що похибка наближеної залежності (9) для тонких аеродинамічних поверхонь надзвукових літаків з відносною товщиною аеродинамічного профілю $\bar{\tau} = 0.04 \dots 0.08$ не перевищує 1.0 %.

Враховуючи, що розширення надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю розпочинається з величини $\bar{P}_1 = \bar{P}_{кр}$, рівняння (6) можна представити і іншим чином, а саме:

$$\bar{P}_1 = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_{кр}^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} - (1 - \bar{P}_{кр}). \quad (10)$$

Зауважимо, що при $M_\infty = 1$ з рівняння (10) отримаємо точну залежність

$$\bar{P}_{1min} = 2\bar{P}_{кр} - 1, \quad (11)$$

де $\bar{P}_{1min}$ — мінімальна відносна величина тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю при повному адіабатичному розширенні, тобто при $M_\infty = 1$.

Перетворимо залежність (11) до виду

$$\Delta \bar{P}_{1max} = 1 - \bar{P}_{1min} = 2(1 - \bar{P}_{кр}) = 2\Delta \bar{P}_{кр}, \quad (12)$$

де $\Delta \bar{P}_{1max}$ — максимальна відносна величина зміни тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю при повному адіабатичному розширенні.

Рівність (12) вказує, що при повному адіабатичному розширенні місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю

максимальна відносна величина зміни тиску місцевого надзвукового потоку удвічі більша, ніж відносна величина зміни критичного тиску.

На підставі рівності (12) залежність величини зміни тиску місцевого надзвукового потоку за хордою аеродинамічного профілю від $x_c = 0$ до перетину розташування стрибків ущільнення можна подати наближеною залежністю

$$\Delta P(x) = \frac{1}{2} \Delta P_0 \left(1 + \frac{x_c}{b_1} \right), \quad (13)$$

де ΔP_0 — максимальна величина зміни тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні сталого аеродинамічного профілю при таких числах M дозвукового потоку, коли стрибки ущільнення досягають задньої кромки профілю, x_c — відстань перетину розташування стрибків ущільнення від перетину максимальної товщини аеродинамічного профілю, b_1 — відстань перетину максимальної товщини аеродинамічного профілю від його задньої кромки.

Враховуючи, що зміна тиску місцевого надзвукового потоку після стрибків ущільнення до тиску незбуреного потоку повітря здійснюється за законом, близьким до лінійного, величини розподілених сил та моментів, зумовлених особливостями взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічного профілю, можна подати такими наближеними залежностями:

$$\bar{F}_c(x) \approx -\frac{1}{2} \Delta P(x) \Delta l(x) \approx -\frac{1}{4} \Delta P_0 \left(1 + \frac{x_c}{b_1} \right) \Delta l(x), \quad (14)$$

$$\bar{M}_c(x) \approx \bar{F}_c(x) x_c \approx \frac{1}{4} \Delta P_0 \left(1 + \frac{x_c}{b_1} \right) \Delta l(x) x_c, \quad (15)$$

де $\Delta l(x)$ — сумарна величина переміщень стрибків ущільнення при згинально-крутильних коливаннях аеродинамічного профілю.

З метою визначення сумарної величини переміщень стрибків ущільнення при згинально-крутильних коливаннях аеродинамічного профілю запишемо залежність (10) з урахуванням рівності (9) у наближеному вигляді:

$$\bar{P}_1 \approx 2M_{кр} - M_\infty. \quad (16)$$

З порівняння залежностей (6) і (16) отримаємо

$$M_1 - 1 \approx 2(M_\infty - M_{кр}). \quad (17)$$

Рівняння (17) визначає зв'язок числа M_1 місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю, числа M_∞ незбуреного дозвукового потоку повітря та критичного числа $M_{кр}$ аеродинамічного профілю. Це рівняння визначає умови адіабатичного розширення місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю. А саме, при адіабатичному розширенні місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю його число M_1 збільшується удвічі швидше, ніж число M_∞ незбуреного дозвукового потоку повітря.

Саме залежність (17) визначає умови формування стрибків ущільнення на поверхні аеродинамічного профілю або умови перетворення місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю у дозвуковий потік.

З іншого боку, оскільки місцевий надзвуковий потік у дифузійній частині профілю можна представити течією Прандтля — Майєра, тобто течією надзвукового потоку навколо тупого випуклого кута, є і геометричне обмеження числа M місцевого надзвукового потоку на поверхні профілю.

Звичайно зміна параметрів надзвукового струму у течії Прандтля — Майєра подається у вигляді таблиць [1], використовувати які в аналітичних розрахунках не завжди зручно. З метою спрощення оцінки зміни параметрів надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю, враховуючи, що розширення надзвукового потоку на поверхні профілю починається з числа $M_1 = 1$, у праці [11] було запропоновано таку наближену залежність:

$$M_1 \approx \sqrt[3]{1 + 11.5 \varphi(x)}, \quad (18)$$

де $\varphi(x)$ — кут відхилення надзвукового струму у дифузійній частині аеродинамічного профілю, або характер зміни кута нахилу дотичної до поверхні дифузійної частини профілю.

Зауважимо, що похибка визначення числа M_1 місцевого надзвукового струму на поверхні аеродинамічного профілю згідно із залежністю (18) при $\varphi(x) \leq 10^\circ$ не перевищує 1 %. Така похибка значно менша від похибок обробки експериментальних даних ($\approx 5\%$ [10]).

Як вказано вище, залежність (18) визначає геометричне обмеження числа M_1 місцевого над-

звукового струму на поверхні аеродинамічного профілю. Дійсно, якщо дифузorna частина аеродинамічного профілю є плоскою пластиною, тобто $\varphi(x) = 0^\circ$, то число Маха має значення $M_1 = 1$ навіть при прискоренні дозвукового потоку від $M_\infty = M_{кр}$ до $M_\infty = 1$.

Залежності (17) і (18) дозволяють визначити закономірності взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічного профілю, але, як впливає з умови (18), для цього необхідно додатково знати характер зміни поверхні профілю за хордою у дифузornой частини. Для типових профілів, наприклад, типу ЦАГІ, зміну кута нахилу дотичної до поверхні дифузornой частини профілю можна подати наближеною залежністю [2]

$$\varphi(x) = \varphi_0 \frac{x_c}{b_1}, \quad (19)$$

де φ_0 — максимальний кут нахилу дотичної до поверхні дифузornой частини профілю, або максимальний кут відхилення надзвукового струму у дифузornой частини аеродинамічного профілю.

Залежності (17)—(19) дозволяють обґрунтувати закономірності взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічних профілів та кількісно оцінити деякі характеристики аеродинамічних профілів у трансзвуковому потоці повітря.

Дійсно, з аналізу залежностей (17)—(19) випливає, що при малих коливаннях аеродинамічного профілю стрибки ущільнення переміщуються від початкового розташування у ті перетини профілю, де кут відхилення надзвукового потоку на поверхні профілю дорівнює куту відхилення надзвукового потоку у перетині початкового розташування стрибків ущільнення.

Ці закономірності взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічних профілів, наприклад з кутовим відхиленням аеродинамічного профілю, можна записати у вигляді:

$$\varphi(x) = \varphi_0 \frac{x_c}{b_1} \approx \varphi_0 \frac{x_c - \Delta x_y(\theta)}{b_1} + \theta(t), \quad (20)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 \frac{x_c}{b_1} \approx \varphi_0 \frac{x_c + \Delta x_n(\theta)}{b_1} - \theta(t), \quad (21)$$

де $\Delta x_y(\theta)$ — величина переміщення стрибків ущільнення при кутовому відхиленні аеродинамічного профілю уперед від початкового розта-

шування, $\Delta x_n(\theta)$ — величина переміщення стрибків ущільнення при кутовому відхиленні аеродинамічного профілю назад від початкового розташування, $\theta(t)$ — характер крутильних коливань аеродинамічного профілю.

З аналізу рівнянь (20) і (21) випливає

$$\Delta x_n(\theta) = \Delta x_y(\theta) \approx \frac{b_1}{\varphi_0} \theta(t). \quad (22)$$

А сумарне переміщення стрибків ущільнення вперед та назад, згідно з рівнянням (22) дорівнює

$$\Delta l(\theta) = \Delta x_y(\theta) + \Delta x_n(\theta) \approx 2 \frac{b_1}{\varphi_0} \theta(t). \quad (23)$$

Аналогічно можна визначити і характер взаємодії стрибків ущільнення зі швидкістю згинальних коливань аеродинамічного профілю.

У цьому випадку кут атаки аеродинамічного профілю зменшується на величину

$$\Delta \theta(\dot{Y}) = - \frac{\dot{Y}(t)}{V}. \quad (24)$$

Тому, як і при аналізі рівнянь (20) і (21), отримаємо:

$$\Delta x_n(\dot{Y}) = \Delta x_y(\dot{Y}) \approx \frac{b_1}{\varphi_0 V} \dot{Y}(t), \quad (25)$$

$$\Delta l(\dot{Y}) = \Delta x_y(\dot{Y}) + \Delta x_n(\dot{Y}) \approx 2 \frac{b_1}{\varphi_0 V} \dot{Y}(t). \quad (26)$$

Тут $\Delta x_y(\dot{Y})$ — переміщення стрибків ущільнення, зумовлене швидкістю згинальних коливань аеродинамічного профілю, уперед від початкового розташування, $\Delta x_n(\dot{Y})$ — переміщення стрибків ущільнення, зумовлене швидкістю згинальних коливань аеродинамічного профілю, назад від початкового розташування, $\Delta l(\dot{Y})$ — сумарне переміщення стрибків ущільнення уперед та назад, зумовлене швидкістю згинальних коливань аеродинамічного профілю.

Для оцінки закономірностей взаємодії стрибків ущільнення з кутовою швидкістю коливань аеродинамічного профілю скористаємося гіпотезою «динамічного скривлення» аеродинамічного профілю [9].

Згідно з цією гіпотезою характеристики сталого аеродинамічного профілю не відрізняються від характеристик профілю, який коливається, якщо сталий профіль скривлений таким чином, що місцеві кути його обтікання потоком повітря

змінюються за законом

$$\Delta\alpha(\dot{\theta}) = \frac{x_{\text{ск}}}{V} \dot{\theta}(t), \quad (27)$$

де $x_{\text{ск}}$ — відстань перетину хорди профілю, в якому розташований стрибок ущільнення, від осі жорсткості профілю.

Переміщення стрибків ущільнення вперед і назад від початкового розташування, зумовлені закономірностями їхньої взаємодії з кутовою швидкістю коливань аеродинамічного профілю, можна визначити з рівнянь

$$\varphi(x) = \varphi_0 \frac{x_c}{b_l} \approx \varphi_0 \frac{x_c - \Delta x_y(\dot{\theta})}{b_l} + \frac{x_{\text{ск}} - \Delta x_y(\dot{\theta})}{V} \dot{\theta}(t); \quad (28)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 \frac{x_c}{b_l} \approx \varphi_0 \frac{x_c + \Delta x_{\text{н}}(\dot{\theta})}{b_l} - \frac{x_{\text{ск}} + \Delta x_{\text{н}}(\dot{\theta})}{V} \dot{\theta}(t). \quad (29)$$

З рівнянь (27) і (28) отримаємо переміщення стрибків ущільнення вперед від початкового розташування:

$$\Delta x_y(x_{\text{ск}}; \dot{\theta}) \approx \frac{x_{\text{ск}} b_l}{\varphi_0 V + b_l \dot{\theta}(t)} \dot{\theta}(t). \quad (30)$$

З рівнянь (27) і (29) отримаємо переміщення стрибків ущільнення назад від початкового розташування:

$$\Delta x_{\text{н}}(x_{\text{ск}}; \dot{\theta}) \approx \frac{x_{\text{ск}} b_l}{\varphi_0 V - b_l \dot{\theta}(t)} \dot{\theta}(t). \quad (31)$$

З рівнянь (30) і (31) отримаємо сумарне переміщення стрибків ущільнення уперед і назад від початкового розташування, зумовлене їхньою взаємодією з кутовою швидкістю коливань аеродинамічного профілю:

$$\Delta l(x_{\text{ск}}; \dot{\theta}) \approx 2 \frac{x_{\text{ск}} b_l \varphi_0 V}{\varphi_0^2 V^2 - b_l^2 \dot{\theta}^2(t)} \dot{\theta}(t). \quad (32)$$

З рівняння (32) випливає, що сумарне переміщення стрибків ущільнення вперед і назад, зумовлене їхньою взаємодією з кутовою швидкістю коливань аеродинамічного профілю, збільшується з переміщенням стрибків ущільнення до задньої кромки аеродинамічного профілю. Але при деяких значеннях числа M_{∞} незбуреного трансзвукового потоку або при збільшенні амплітуди коливань аеродинамічного профілю переміщення стрибків ущільнення назад від початкового розташування обмежується задньою кромкою аеродинамічного профілю, і сумарне

переміщення стрибків ущільнення починає зменшуватися.

Це обмеження можна подати умовою

$$x_{\text{ск}} = b_k - \Delta x_{\text{н}}(\dot{\theta}), \quad (33)$$

де b_k — відстань осі жорсткості профілю до його задньої кромки.

Підставляючи залежність (31) в умову (33), отримаємо умову, при якій сумарне переміщення стрибків ущільнення, зумовлене їхньою взаємодією з кутовою швидкістю коливань аеродинамічного профілю, досягає максимальної величини

$$x_{\text{ск}} \approx \frac{b_k}{\varphi_0 V} [\varphi_0 V - b_l \dot{\theta}(t)]. \quad (34)$$

А підставляючи умову (34) у залежність (32), отримаємо максимальну величину сумарного переміщення стрибків ущільнення, зумовлену їхньою взаємодією з кутовою швидкістю коливань аеродинамічного профілю

$$\Delta l(\dot{\theta}) \approx 2 \frac{b_k b_l}{\varphi_0 V + b_l \dot{\theta}(t)} \dot{\theta}(t). \quad (35)$$

Обмеження (33) є основною причиною нелінійного характеру сил і моментів, зумовлених взаємодією стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічних поверхонь. Але необхідно нагадати, що критична швидкість флатера визначається, як правило, при $\dot{\theta}(t) \rightarrow 0$, тобто характер залежності сил і моментів від різноманітних параметрів вважається лінійним.

З урахуванням цих зауважень залежність (34) перетворюється у рівність $x_{\text{ск}} \approx b_k$, а у рівняннях (14) і (15) $x_c = b_l$.

При цих умовах залежність (35) можна подати у вигляді

$$\Delta l(\dot{\theta}) \approx 2 \frac{b_k b_l}{\varphi_0 V} \dot{\theta}(t). \quad (36)$$

З рівнянь (23), (26) і (36) отримаємо сумарну величину переміщень стрибків ущільнення, зумовлених згинально-крутильними коливаннями аеродинамічного профілю:

$$\Delta l(\theta; \dot{\theta}; \ddot{\theta}) \approx 2 \frac{b_k}{\varphi_0} \left[\theta(t) + \frac{b_l}{V} \dot{\theta}(t) - \frac{b_l}{b_k V} \ddot{\theta}(t) \right]. \quad (37)$$

Зауважимо, що розглянутий характер взаємодії стрибків ущільнення зі згинально-крутильними коливаннями аеродинамічного профілю викликають виникнення дестабілізаційних та збурювальних сил і моментів.

Підставляючи залежність (37) у рівняння (14) і (15) та прийнявши у цих рівняннях $x_c = b_1$, отримаємо розподілені величини сил і моментів, зумовлених взаємодією стрибків ущільнення зі згинально-крутильними коливаннями:

$$\bar{F}_c \approx -\Delta P_0 \frac{b_k}{\varphi_0} \left[\theta(t) + \frac{b_1}{V} \dot{\theta}(t) - \frac{b_1}{b_k V} \dot{Y}(t) \right], \quad (38)$$

$$\bar{M}_c \approx \Delta P_0 \frac{b_k^2}{\varphi_0} \left[\theta(t) + \frac{b_1}{V} \dot{\theta}(t) - \frac{b_1}{b_k V} \dot{Y}(t) \right]. \quad (39)$$

Як вказано вище та доведено експериментальними дослідженнями, коливання аеродинамічних поверхонь при виникненні флатера близькі до гармонічних, тому згідно з рекомендаціями [4, 6] розв'язок системи рівнянь (1) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_0 e^{i\omega t}, \\ \theta(t) &= \theta_0 e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (40)$$

де Y_0 — амплітуда згинальних коливань аеродинамічного профілю, θ_0 — амплітуда крутильних коливань аеродинамічного профілю, ω — кругова частота згинально-крутильних коливань аеродинамічного профілю при виникненні флатера.

Підставляючи розв'язок (40) і рівняння (2), (3), (38) та (39) у систему (1), отримаємо характеристичне рівняння згинально-крутильних коливань аеродинамічного профілю:

$$Y_0(a_{11} + i\omega b_{11} - \omega^2) + \theta_0(\sigma\omega^2 + a_{12} + i\omega b_{12}) = 0, \quad (41)$$

$$Y_0 \left(\frac{\bar{m}}{J} \sigma\omega^2 + i\omega b_{21} \right) + \theta_0(a_{21} + i\omega b_{22} - \omega^2) = 0,$$

де

$$a_{11} = \omega_y^2, \quad a_{12} = -C_y^a q \frac{b}{\bar{m}} + \Delta P_0 \frac{b_1}{\varphi_0},$$

$$a_{22} = \omega_\theta^2 - C_y^a q \frac{b^2}{J} \left(\frac{x_0 - x_F}{b} \right) - \Delta P_0 \frac{b_1 b_k}{J \varphi_0},$$

$$b_{11} = \frac{1}{\bar{m} V} \left(C_y^a q b - \Delta P_0 \frac{b_1}{\varphi_0} \right), \quad (42)$$

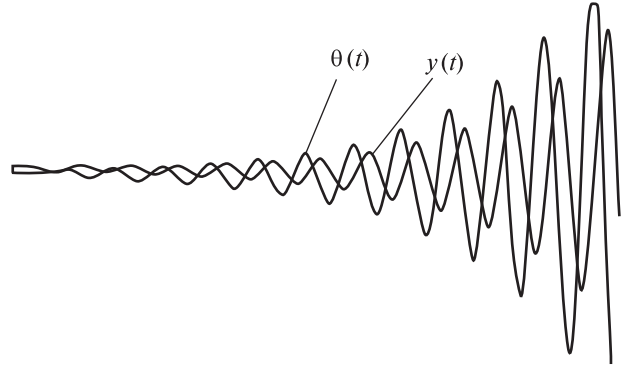


Рис. 2. Характер згинально-крутильних коливань при $q \geq q_\Phi$ ($f = 16.5$ Гц)

$$b_{12} = -\frac{1}{\bar{m} V} \left[C_y^a q b^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) - \Delta P_0 \frac{b_1^2}{\varphi_0} \right],$$

$$b_{21} = \frac{1}{J V} \left[C_y^a q b^2 \left(\frac{x_0 - x_F}{b} \right) + \Delta P_0 \frac{b_1 b_k}{\varphi_0} \right],$$

$$b_{22} = -\frac{1}{J V} \left[C_y^a q b^3 \left(\frac{x_0 - x_F}{b} \right) \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) - \frac{\pi}{8} q b^3 - \Delta P_0 \frac{b_1^2}{\varphi_0} \right].$$

Задавши детермінант системи (41) рівним нулю, отримаємо частотне рівняння, аналіз якого може бути покладений в основу дослідження стійкості згинально-крутильних коливань аеродинамічного профілю як в однорідному потоці повітря, так і у потоці зі стрибками ущільнення.

Запишемо це частотне рівняння у вигляді

$$A_4 \omega^4 + i A_3 \omega^3 + A_2 \omega^2 + i A_1 \omega + A_0 = 0, \quad (43)$$

де

$$A_0 = a_{11} a_{22}, \quad A_1 = a_{11} b_{22} - a_{12} b_{21} + a_{22} b_{11},$$

$$A_2 = - \left(a_{11} + \frac{\bar{m}}{J} \sigma a_{12} + a_{22} + b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} \right), \quad (44)$$

$$A_3 = - \left(b_{11} + \frac{\bar{m}}{J} \sigma b_{12} + \sigma b_{21} + b_{22} \right), \quad A_4 = 1 - \frac{\bar{m}}{J} \sigma^2.$$

Розділяючи дійсні та уявні частини рівняння (43), отримаємо

$$A_4 \omega^4 + A_2 \omega^2 + A_0 = 0, \quad (45)$$

$$A_3 \omega^2 + A_1 = 0. \quad (46)$$

Рівняння (45) та (46) дозволяють оцінити стійкість згинально-крутильних коливань аеродинамічного профілю у потоці повітря.

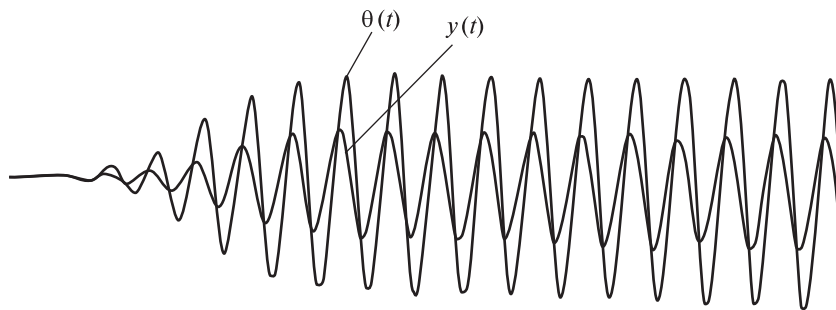


Рис. 3. Характер згинально-крутильних коливань аеродинамічного профілю при $q_{\text{фс}} < q < q_{\text{ф}} (f = 19.8 \text{ Гц})$

У відповідності з рекомендаціями роботи [6] флатер аеродинамічного профілю може виникати при умові

$$A_2 = 0. \quad (47)$$

Умова (47) відповідає мінімально можливій величині критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю.

Підставляючи в умову (47) позначення (42) і (44) та опускаючи величини малого порядку, а саме задавши $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \approx 0$, отримаємо

$$A_2 = \omega_y^2 + \omega_\theta^2 - C_y^a q \frac{b}{J} (x_0 - x_F + \sigma) - \Delta P_0 \frac{b_1}{J \phi_0} (b - x_0 - \sigma) = 0. \quad (48)$$

Величину критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю в однорідному потоці повітря, тобто без урахування впливу стрибків ущільнення, отримаємо з рівняння (48), прийнявши $\Delta P_0 = 0$:

$$q_{\text{ф}} \approx \frac{(\omega_y^2 + \omega_\theta^2) \bar{J}}{C_e^a b (x_0 - x_F + \sigma)}. \quad (49)$$

Типовий характер коливань аеродинамічного профілю при виникненні флатера показано на рис. 2.

Для визначення величини критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю з урахуванням впливу стрибків ущільнення нагадаємо, що згідно із залежністю (7) величина ΔP_0 у рівнянні (48) може бути подана у вигляді

$$\Delta P_0 \approx P_\infty (M_{10} - M_{\infty 0}), \quad (50)$$

де M_{10} — число Маха місцевого надзвукового потоку на поверхні сталого аеродинамічного

профілю, при якому стрибки ущільнення досягають задньої кромки, $M_{\infty 0}$ — число Маха незбуреного трансзвукового потоку, при якому стрибки ущільнення досягають задньої кромки сталого аеродинамічного профілю.

Крім того, нагадаємо відому залежність [5]

$$q = \frac{k}{2} M_\infty^2 P_\infty. \quad (51)$$

З урахуванням залежності (51) перетворимо залежність (50) до виду

$$\Delta P_0 \approx 2q \frac{M_{10} - M_{\infty 0}}{k M_{\infty 0}^2}. \quad (52)$$

Підставляючи залежність (52) у рівняння (48), отримаємо величину критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю з урахуванням впливу стрибків ущільнення:

$$q_{\text{фс}} \approx \frac{(\omega_y^2 + \omega_\theta^2) \bar{J}}{C_e^a b (x_0 - x_F + \sigma) + 2 \frac{M_{10} - M_{\infty 0}}{k \phi_0 M_\infty^2} b_1 (b - x_0 - \sigma)}. \quad (53)$$

З порівняння залежностей (49) і (53) випливає, що величина критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю з урахуванням впливу стрибків ущільнення завжди менша, ніж величина критичного швидкісного напору флатера в однорідному потоці повітря.

Але необхідно зауважити таке. У дійсності згинально-крутильні коливання аеродинамічних поверхонь у трансзвуковому потоці повітря, які спостерігаються у лабораторних і льотних дослідженнях, при величинах швидкісного напору $q_{\text{фс}} \leq q_{\text{ф}}$ є автоколиваннями системи «аеродинамічна поверхня — стрибки ущільнення», амплітуда коливань зростає, а частота збільшується.

літуда яких залежить від різноманітних параметрів аеродинамічних профілів та трансзвукового потоку. Типовий характер цих коливань показано на рис. 3.

ВИСНОВКИ

У статті запропоновано одну з можливих математичних моделей оцінки впливу стрибків ущільнення на критичний швидкісний напір згинально-крутильного флатера аеродинамічних профілів у трансзвуковому потоці повітря. Модель може бути використана для попередньої оцінки аеропружних характеристик аеродинамічних поверхонь надзвукових літаків і аерокосмічних систем та їхньої залежності від характеристик аеродинамічних профілів та параметрів трансзвукового потоку. Чому і доцільно присвятити наступні дослідження.

ЛІТЕРАТУРА

- Абрамович Г. Н. *Прикладная газовая динамика*. Москва: Наука, 1976. 888 с.
- Аэродинамика летательных аппаратов при трансзвуковых скоростях*. Москва: ЦАГИ, 1974. Ч. II. 161 с.
- Аэродинамическое исследование колеблющейся поверхности управления при трансзвуковых скоростях*. Москва: ЦАГИ, 1975. 105 с.
- Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л. *Аэроупругость*. Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. 800 с.
- Гошек И. *Аэродинамика больших скоростей*. Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. 547 с.
- Ден-Гартог Дж. П. *Механические колебания*. Москва: Физматгиз, 1960. 560 с.
- Иностранная военная техника. *Зарубеж. военное обозрение*. 1996. № 5. С. 58—62.
- Исогаи К. *О механизме резкого снижения границы флаттера крыла прямой стреловидности на режиме трансзвукового полета*. Москва: РТК, 1981. Ч. II. С. 169—171.
- Келдыш М. В. *Избранные труды. Механика*. Москва: Наука, 1985. 568 с.
- Левкин В. Ф. Экспериментальные исследования нестационарных аэродинамических характеристик поверхностей управления при трансзвуковых скоростях. *Тр. Центр. аэро-гидродинам. ин-та*. 1982. Вып. 2132. 16 с.
- Сафронов А. В. Аэродинамическое воздействие скачков уплотнения на колеблющийся в околосзвуковом потоке на элерон. *Уч. зап. Центр. аэро-гидродинам. ин-та*. 1991. 22, № 3. С. 110—117.
- Сафронов О. В., Сёмон Б. Й., Неділько О. М. Математична модель оцінки впливу аеродинамічної компенсації поверхонь керування на рівень їх коливань при виникненні трансзвукового флатера. *Космічна наука і технологія*. 2018. 24, № 4. С. 14—23.
- Свищев Г. П. Эффективность руля и шарнирные моменты его при больших скоростях. *Тр. Центр. аэро-гидродинам. ин-та*. 1975. Вып. 1722. 10 с.
- Стрелков С. П. *Введение в теорию колебаний*. Москва: Наука, 1964. 440 с.

Стаття надійшла до редакції 10.12.2018

REFERENCES

- Abramovich G. N. (1976). *Applied gas dynamics*. Moscow: Science.
- Aerodynamics of aircraft at transonic speeds. Part II. (1974). *CAHI*, No. 442, 161 p.
- Aerodynamic study of an oscillating control surface at transonic velocities (1975). *TsAGI*, No. 456, 105 p.
- Bisplinghoff R. L., Ashley H., Halfman R. L. (1958). *Aeroelasticity*. Moscow: Foreign Literature Publishing House.
- Goschek I. (1954). *Aerodynamics of high speeds*. Moscow: IL.
- Den-Hartog J. P. (1960). *Mechanical Oscillations*. Moscow: Fizmatgiz.
- Foreign military equipment (1996). *Foreign military review*, No. 5, 58—62.
- Isogai K. (1981). On the mechanism of a sharp decrease in the flutter boundary of a straight sweep in a transonic flight mode. Part II. *RTK*, 19, No. 10, 169—171.
- Keldisch M. V. (1985). *Selected works. Mechanics*. Moscow: Science.
- Levkin V. F. (1982). Experimental studies of non-stationary aerodynamic characteristics of control surfaces at transonic speeds. *Papers of TsAGI*, No. 2132, 16 p.
- Safronov A. V. (1991). Aerodynamic impact of shock waves on aileron oscillating in a transonic flow on aileron. *CAHI Notes*, 21(3), 110—117.
- Safronov A. V., Semon B. Y., Nedilko A. N. (2018). Mathematical model to estimate the effect of aerodynamic aircraft control surfaces compensation on the level of their vibrations in case of transonic flutter. *Kosm. nauka tehnol.*, 24(4), 14—23.
- Svyshchev G. P. (1975). Efficiency of the steering wheel and its hinge moments at high speeds. *Works of CAHI*, No. 1722, 10 p.
- Strelkov C. P. (1964). *Introduction to the theory of oscillations*. Moscow: Nauka.

Received 10.12.2018

А. В. Сафронов, Б. Й. Семон, А. Н. Неділько

Национальный университет обороны Украины
имени Ивана Черняховского, Киев, Украина

ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЙ ФЛАТТЕР АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ СО СКАЧКАМИ УПЛОТНЕНИЯ

Предлагается одна из возможных математических моделей оценки влияния скачков уплотнения на величину критического скоростного напора изгибно-крутильного флаттера прямого аэродинамического профиля в трансзвуковом потоке воздуха. Математическая модель базируется на традиционных методах классического (двухстепенного) флаттера, на совместном анализе уравнений Бернулли для сжимаемого газа, характеристик сверхзвукового потока газа в течении Прандтля — Майера и на применении гипотезы «динамического искривления профиля». На базе линеаризации уравнений Бернулли для сжимаемого газа, а именно для воздуха, получено условие формирования скачков уплотнения на поверхности аэродинамического профиля в трансзвуковом диапазоне чисел Маха. На базе этого условия, учитывая характер изменения параметров местного сверхзвукового потока при обтекании диффузорной части поверхности аэродинамического профиля, и на базе гипотезы «динамического искривления профиля» получены приближенные закономерности взаимодействия скачков уплотнения с изгибно-крутильными колебаниями аэродинамического профиля. Полученные закономерности использованы для формирования математических моделей оценки величин дестабилизирующих и возмущающих сил и моментов, обусловленных особенностями взаимодействия скачков уплотнения с изгибно-крутильными колебаниями аэродинамического профиля. Оценка критического скоростного напора изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля со скачками уплотнения выполнялась путем решения системы двух дифференциальных уравнений второго порядка, на основании которого получены приближенные аналитические зависимости величин критического скоростного напора изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля, как в однородном потоке воздуха, так и в потоке со скачками уплотнения. Сравнением полученных результатов показано, что величина критического скоростного напора изгибно-крутильного флаттера типовых аэродинамических профилей со скачками уплотнения всегда меньше, чем величина критического скоростного напора изгибно-крутильного флаттера в однородном потоке воздуха.

Ключевые слова: аэродинамический профиль, математическая модель, изгибно-крутильный флаттер, скачки уплотнения, трансзвуковой поток, число Маха, сжимаемость воздуха, скоростной напор, давление.

O. V. Safronov, B. Y. Semon, O. M. Nedilko

The National Defence University of Ukraine
named after Ivan Cherniakhovsyi, Kyiv, Ukraine

FLEXURAL-TORSIONAL FLUTTER OF AN AERODYNAMIC PROFILE WITH IRREGULAR COMPACTION

The article proposes one of the possible mathematical models for estimating the effect of shock waves on the value of the critical velocity head of a bending-torsional flutter of a direct aerodynamic profile in transonic air flow. The mathematical model is based on the traditional methods of classical (two-degree) flutter, on a joint analysis of the Bernoulli equations for compressible gas, on the characteristics of the supersonic gas flow in the Prandtl-Meier flow, and on the application of the “dynamic profile curvature” hypothesis. On the basis of the linearization of the Bernoulli equations for a compressible gas, namely for air, the condition for the formation of shock waves on the airfoil surface in the transonic range of Mach numbers is obtained. Using this condition and the “dynamic profile curvature” hypothesis as a basis and taking into account the nature of changes in the parameters of the local supersonic flow when flowing around the diffuser part of the surface of an aerodynamic profile, approximate laws of interaction of shock waves with flexural-torsional oscillations of the airfoil are obtained. The patterns obtained are used to form mathematical models for estimating the values of destabilizing and perturbing forces and moments caused by the peculiarities of the interaction of shock waves with flexural-torsional oscillations of the airfoil. The estimation of the critical velocity head of a flexural-torsional flutter of an aerodynamic profile with shock waves was performed by solving a system of two differential equations of the second order. The result of the estimation formed the basis for determining approximate analytical dependences of the values of the above mentioned critical velocity head. They were obtained both in uniform air flow and the flow with irregular seals. A comparison of the obtained results shows that the magnitude of the critical velocity head of a flexural-torsional flutter of typical aerodynamic profiles with shock waves is always less than the magnitude of the critical velocity head of the flexural-torsional flutter in uniform air flow.

Keywords: aerodynamic profile, mathematical model, flexural-torsional flutter, shock waves, transonic flow, Mach number, air compressibility, velocity head, pressure.

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2019.02.023>

УДК 539.3+624.074

К. В. Аврамов, М. В. Чернобривко, Б. В. Успенський

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного
Національної академії наук України, Харків, Україна

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ НАНОАРМОВАНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Останнім часом у світовому ракетобудуванні все частіше на заміну металам та їхнім сплавам приходять полімерні композитні матеріали, що армовані вуглецевими нанотрубками, так звані нанокомпозити. Це пов'язано з тим, що в умовах робочих високоінтенсивних навантажень при однаковій вазі нанокомпозити мають значну перевагу над алюмінієвими сплавами за своїми механічними характеристиками міцності. Циліндричні нанокомпозитні корпусні елементи ракет можуть бути армовані вуглецевими нанотрубками з різним розподілом їх по товщині матриці. В даний час існує п'ять основних типів наноармування, які призводять до виникнення функціонально-градієнтного матеріалу по товщині оболонки. При аналізі коливань елементів ракетно-космічної техніки необхідно розглядати можливість резонансу між конструкцією та аеродинамічними навантаженнями. Невід'ємною частиною такого аналізу є аналіз вільних коливань оболонки, який проводиться з метою визначення та запобігання небезпечних резонансних режимів. Класичні моделі коливань циліндричних оболонок не дозволяють враховувати зміну властивостей матеріалу по товщині. У даній роботі запропоновано метод аналізу вільних коливань функціонально-градієнтних нанокомпозитних циліндричних оболонок, які можуть бути складовою частиною ракетних комплексів і конструкцій літаків. Розглянуто залежності параметрів коливань від типу наноармування, об'ємної частки нанотрубок в композиті та товщини оболонки. Результати аналітичного дослідження порівнюються з чисельним моделюванням методом скінченних елементів. Запропонована модель враховує зміну властивостей матеріалу по товщині оболонки для кожного з п'яти випадків наноармування. Показано, що відбудова нанокомпозитних оболонок від резонансних режимів може здійснюватися шляхом раціонального вибору типу армування вуглецевими нанотрубками.

Ключові слова: нанокомпозит, нанотрубка, функціонально-градієнтний матеріал, циліндрична оболонка, вільні коливання, власні частоти.

ВСТУП

Стрімкий прогрес передових технологій виробництва в останні роки призвів до виникнення функціонально градуєнтованих композитів зі включеннями нанотрубок (нанокомпозитів). Ці матеріали мають високі перспективи для використання в аерокосмічній, енергетичній, машинобудівній та багатьох інших галузях. Тому властивості нанокомпозитів стали темою багатьох сучасних досліджень. Для повноцінного використання цих матеріалів необхідно розвивати аналітичні та чисельні методи, які дозволять проводити аналіз поведінки нанокомпозитних оболонок у різному середовищі.

При розробці нанокомпозитних конструкцій значну роль відіграє обчислювальний підхід,

який дозволяє проводити симуляції для їхнього аналізу та синтезу. Ефективні пружні властивості вуглецевих нанотрубок обчислено за допомогою методів мікромеханіки в роботі [36]. Ці ефективні властивості використано у методі Морі — Такака для обчислення ефективних пружних властивостей нанокомпозиту. У роботі [21] властивості нанокомпозитів обчислено методом скінченних елементів з використанням тривимірного об'ємного елемента на базі методів механіки суцільних середовищ. У цій роботі для перевірки результатів застосовується розширене правило змішування, яке базується на теорії міцності матеріалів для оцінки ефективного модуля Юнга у поздовжньому напрямі. У роботі [31] запропоновано метод розробки конструктивних моделей полімерного композиту з наноармуванням.

© К. В. АВРАМОВ, М. В. ЧЕРНОБРИВКО, Б. В. УСПЕНСЬКИЙ, 2019

Метод базується на методі еквівалентного континууму для наноструктурованих матеріалів. Побудовано модель еквівалентного континууму, в якій механічні властивості визначаються за допомогою силових констант, які описують зв'язані та незв'язані міжатомні взаємодії у молекулярній моделі.

У серії статей експериментально досліджувались механічні характеристики нанокompозитів. Результати випробувань на розтягнення зразків описано у роботі [2]. Виявлено, що модуль Юнга та міцність зсуву змінюються в два та чотири рази відповідно для композитів з 1 % та 4 % часткою нанотрубок відносно резинового зразків. У роботі [7] досліджено вплив типу нанокompозиту на жорсткість епоксидної матриці, армованої вуглецевими нанотрубками. Це армування значно зміцнює композит без зниження деформації руйнування. Експериментальні результати армування епоксидної матриці вуглецевими нановолокнами описано в роботі [35]. Армування підвищило напруження руйнування. У роботі [15] описано, що модуль Юнга нанокompозиту з орієнтованим армуванням може перевищувати модуль Юнга нанокompозиту з довільно орієнтованим армуванням у п'ять разів. Модифікована форма правила змішування використовується для обчислення модуля Юнга. Показано, що експериментальні та розрахункові значення для модуля Юнга є близькими. У роботі [5] показано, що експериментально отриманий модуль пружності на розтягнення нанокompозиту збільшується за лінійним законом при підвищенні концентрації нанотрубок у композиті. У роботі [32] було досліджено механічні властивості композитів з епоксидною матрицею, армованих багат шаровими вуглецевими нанотрубками, шляхом проведення випробувань на розтягнення. Експериментальні результати свідчать, що модуль Юнга та міцність на розтягнення можуть бути значно підвищені шляхом додавання малої кількості багат шарових вуглецевих нанотрубок. У роботі [29] запропоновано правило змішування, що суттєво відрізняється від того, яке використовується у більшості досліджень. У оглядовій роботі [13] наведено різні мікромеханічні моделі для оцінки механічних властивостей нанокompозитів.

Серію робіт присвячено статичі та динаміці оболонок з нанокompозитів на базі їхніх лінійних моделей. Статика та динаміка циліндричних оболонок з наноармованого матеріалу розглядається в роботах [14, 22, 39, 40, 45]; лінійні коливання пластин з наноармованих композитів — у роботах [11, 17, 18], а вільні коливання подвійно-криволінійних пологих оболонок з функціонально градуйованого композиту з нановключеннями графенових нанопластинок з урахуванням трьох різних видів армування — у роботах [42, 43]. Математичну модель шарнірно опертої подвійно-криволінійної пологої оболонки побудовано на базі принципу Гамільтона та теорії зсуву високого порядку. Динамічний аналіз нанокompозитних циліндрів, армованих одношаровими вуглецевими нанотрубками під дією ударного навантаження зроблено в роботі [28]. Також аналізувались вільні коливання та поширення хвиль у конструкції.

Нелінійне деформування тонкостінних конструкцій з нанокompозитів досліджувалось неодноразово. Так, у роботах [30, 37, 38] розглядається нелінійний згин шарнірно обпертих функціонально градуйованих нанокompозитних пластин та циліндричної оболонки, армованих одношаровими вуглецевими нанотрубками. Рівняння руху базуються на зсувній теорії деформації пластин високого порядку з нелінійністю типу фон Кармана. У роботі [20] наведено аналіз надлишкових прогинів функціонально градуйованих циліндричних панелей, армованих вуглецевими нанотрубками, під дією осьового стиснення з урахуванням геометричної нелінійності. У роботах [23—25] отримано нелінійну динамічну модель функціонально градуйованих нанокompозитних кінцевих панелей за допомогою нелінійної теорії оболонок Новожилова. Принцип Гамільтона застосовано для побудови трьох диференціальних рівнянь руху системи у частинних похідних та досліджено явище динамічної нестійкості. У роботі [9] запропоновано розширення теорії оболонок Кірхгофа для нелінійного аналізу функціонально градуйованих нанокompозитних тонких оболонок. Розглянуто нелінійну втрату стійкості гіперболічними та циліндричними оболонками.

У роботі [12] розглянуто багатошарову функціонально градуйовану прямокутну пластину, армовану графеновими нанопластинками. Кожний шар пластини складається з суміші ізотропної полімерної матриці та графенових нанопластинок. Для обчислення властивостей матеріалу застосовано модифіковану модель Халпіна — Тсая та правило змішування. Робота [10] містить дослідження вільних коливань функціонально градуйованих пористих нанокомпозитних пластин, армованих малою кількістю графенових нанопластинок на двопараметричному пружному фундаменті з різноманітними крайовими умовами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ВЛАСТИВОСТІ МАТЕРІАЛУ

Розглядається циліндрична оболонка постійної товщини h . Динамічний напружено-деформований стан оболонки досліджується у криволінійній системі координат x, θ, z . Основними невідомими задачі є три проекції переміщень середньої поверхні оболонки та кути обертання нормалі до середньої поверхні (рис. 1). Деформації точок оболонки вважаються малими, а проекції трьох переміщень u, v, w — помірними. Оскільки деформації точок оболонки малі, зв'язок між напруженнями та деформаціями є лінійним та описується законом Гука.

Оболонку створено з функціонально градієнтного матеріалу з наноармуванням. Вважається, що при наноармуванні всі вуглецеві нанотрубки розташовано у матеріалі матриці паралельно у повздовжньому напрямі оболонки. При цьому створюється ортотропний функціонально градієнтний матеріал.

Є п'ять основних типів наноармування (рис. 2). Тип UD-CNT відповідає рівномірному наноармуванню у поперечному напрямку циліндричної оболонки, всі інші (FGV, FGL, FGX та FGO) характеризуються нерівномірним армуванням у поперечному напрямку та відповідають функціонально градієнтним композитним матеріалам. Якщо V_{CNT}^* — сукупна об'ємна частка вуглецевих нанотрубок у композиті, об'ємну частку нанотрубок у заданому перерізі $V_{CNT}(z)$ можна знайти за виразами, які представлено у табл. 1 [11, 37, 43].

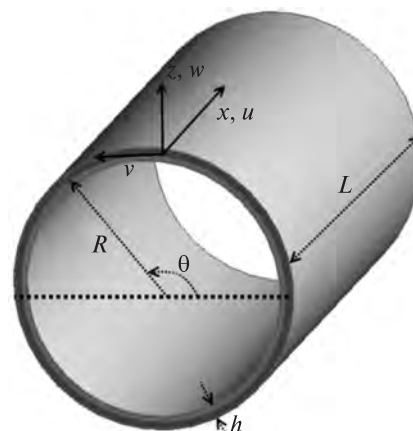


Рис. 1. Схема оболонки

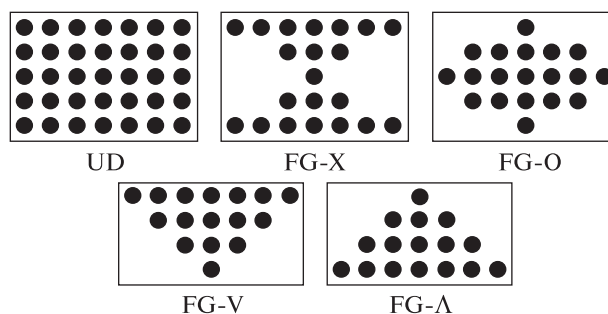


Рис. 2. Типи наноармування

Механічні характеристики функціонально-градієнтного композитного матеріалу циліндричної оболонки також залежать від поперечної координати z та визначаються за допомогою правила змішування так [37, 43]:

$$\begin{aligned} E_{11}(z) &= \eta_1 V_{CNT}(z) E_{11}^{CNT} + V_m(z) E^m, \\ E_{22}(z) &= \frac{\eta_2 E_{22}^{CNT} E^m}{V_{CNT}(z) E^m + V_m(z) E_{22}^{CNT}}, \\ G_{12}(z) &= \frac{\eta_3 G_{12}^{CNT} E^m}{V_{CNT}(z) G^m + V_m(z) G_{12}^{CNT}}, \\ \mu_{12}(z) &= V_{CNT}(z) \mu_{12}^{CNT} + V_m(z) \mu^m, \\ \mu_{21}(z) &= \frac{\mu_{12}(z)}{E_{11}(z)} E_{22}(z), \\ \rho(z) &= V_{CNT}(z) \rho^{CNT} + V_m(z) \rho^m, \\ V_m(z) &= 1 - V_{CNT}(z), \end{aligned} \quad (1)$$

Таблиця 1. Залежність об'ємної частки нанотрубок від поперечної координати оболонки z при різних типах армування

Тип армування	Об'ємна частка нанотрубок
UD-CNT	$V_{CNT}(z) \equiv V_{CNT}^*$
FGV-CNT	$V_{CNT}(z) = \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^*$
FGL-CNT	$V_{CNT}(z) = \left(1 - \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^*$
FGX-CNT	$V_{CNT}(z) = \frac{4 z }{h} V_{CNT}^*$
FGO-CNT	$V_{CNT}(z) = 2 \left(1 - \frac{2 z }{h}\right) V_{CNT}^*$

де E_{11} , E_{22} , G_{12} — модулі Юнга та зсуву композитного матеріалу, μ_{12} , μ_{21} — коефіцієнти Пуассона композитного матеріалу, ρ — питома маса композитного матеріалу, E_{11}^{CNT} , E_{22}^{CNT} , G_{12}^{CNT} — модулі Юнга та зсуву нанотрубок, μ_{12}^{CNT} — коефіцієнт Пуассона вуглецевих нанотрубок, η_1 , η_2 , η_3 — параметри ефективності наноармування для заданої пари «нанотрубки — матриця» та сукупної об'ємної частки нанотрубок у композиті, E^m , G^m — модулі Юнга та зсуву матеріалу матриці, ρ^{CNT} , ρ^m — питома маса нанотрубок та матриці.

Оскільки матеріал оболонки є композитним та градієнтним, модель конструкції повинна враховувати зсув [33, 34, 44]. Окрім описаних вище пружних констант, необхідно визначити модулі зсуву матеріалу. Згідно з правилом змішування [43] вони розраховуються з формул

$$G_{13}(z) = \frac{\eta_3 G_{13}^{CNT} E^m}{V_{CNT}(z) G^m + V_m(z) G_{13}^{CNT}},$$

$$G_{23}(z) = \frac{\eta_3 G_{23}^{CNT} E^m}{V_{CNT}(z) G^m + V_m(z) G_{23}^{CNT}},$$

де G_{13} , G_{23} — модулі зсуву композитного матеріалу, G_{13}^{CNT} , G_{23}^{CNT} — модулі зсуву вуглецевих нанотрубок.

Закон Гука для композитного матеріалу оболонки має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta z} = G_{23}(z) \gamma_{\theta z},$$

$$\sigma_{xz} = G_{23}(z) \gamma_{xz},$$

$$\sigma_{x\theta} = G_{12}(z) \gamma_{x\theta},$$

де

$$\begin{aligned} Q_{11}(z) &= \frac{E_{11}(z)}{1 - \mu_{12}(z) \mu_{21}(z)}, \\ Q_{22}(z) &= \frac{E_{22}(z)}{1 - \mu_{12}(z) \mu_{21}(z)}, \\ Q_{12}(z) &= \frac{\mu_{21}(z) E_{11}(z)}{1 - \mu_{12}(z) \mu_{21}(z)}, \end{aligned} \quad (3)$$

γ_{xz} , $\gamma_{\theta z}$ — деформації зсуву, ε_{xx} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\gamma_{\theta z}$, γ_{xz} , $\gamma_{x\theta}$ — елементи тензора зсуву Гріна, σ_{xz} , $\sigma_{\theta z}$ — напруження зсуву, σ_{xx} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{x\theta}$ — елементи тензора напружень.

РІВНЯННЯ РУХУ

Проекції переміщень довільної точки оболонки, яка перебуває на відстані z від серединної поверхні, на осі x , θ та z позначимо як $u_x(x, \theta, t, z)$, $u_\theta(x, \theta, t, z)$ та $u_z(x, \theta, t, z)$ відповідно. Як описано в роботах [3, 4], ці проекції подаються у вигляді

$$u_x(x, \theta, t, z) = u(x, \theta, t) + z \varphi_1(x, \theta, t) + z^2 \psi_1(x, \theta, t) + z^3 \gamma_1(x, \theta, t), \quad (4)$$

$$u_\theta(x, \theta, t, z) = \left(1 + \frac{z}{R}\right) v(x, \theta, t) + z \varphi_2(x, \theta, t) +$$

$$+ z^2 \psi_2(x, \theta, t) + z^3 \gamma_2(x, \theta, t),$$

$$u_z(x, \theta, t, z) = w(x, \theta, t),$$

де R — радіус циліндричної оболонки, φ_1 та φ_2 — кути обертання нормалі до серединної поверхні відносно осей θ та x відповідно.

П'ять змінних $u(x, \theta, t)$, $v(x, \theta, t)$, $w(x, \theta, t)$, $\varphi_1(x, \theta, t)$, $\varphi_2(x, \theta, t)$ характеризують нелінійну динаміку оболонки. Ці функції обираються як основні невідомі задачі. Функції $\psi_1(x, \theta, t)$, $\gamma_1(x, \theta, t)$, $\psi_2(x, \theta, t)$, $\gamma_2(x, \theta, t)$ розкладення (4) визначаються з крайових умов

$$\gamma_{xz} \Big|_{z=\pm 0.5h} = 0, \quad \gamma_{\theta z} \Big|_{z=\pm 0.5h} = 0, \quad (5)$$

де

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x},$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{1+zR^{-1}} \left(\frac{\partial u_z}{R \partial \theta} - \frac{u_{\theta}}{R} \right). \quad (6)$$

Введення розкладень (4) у (5) та (6) приводить до таких співвідношень:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 0, \\ \psi_2 &= \frac{1}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\phi_2}{2R} \left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \gamma_1 &= -\frac{4}{3h^2} \left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \gamma_2 &= \frac{h^2 - 8R^2}{6R^3 h^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{h^2 + 8R^2}{6R^2 h^2} \phi_2 - \frac{v}{3R^3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Кінетична енергія циліндричної оболонки представляється у вигляді

$$T = 0.5 \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-0.5h}^{0.5h} \rho(z) (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_{\theta}^2 + \dot{u}_z^2) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz dx R d\theta, \quad (8)$$

де $\dot{u}_x = \frac{\partial u_x}{\partial t}$, $\dot{u}_{\theta} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial t}$, $\dot{u}_z = \frac{\partial u_z}{\partial t}$, L — довжина оболонки вздовж твірної лінії.

Підстановка проєкцій (4), з урахуванням формул (7), у вираз (8) дозволяє записати кінетичну енергію у формі

$$\begin{aligned} T = 0.5 \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-0.5h}^{0.5h} \rho(z) & \left[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + 2z \left(\frac{\dot{v}^2}{R} + \dot{u}\dot{\phi}_1 + \dot{v}\dot{\phi}_2 \right) + \right. \\ & + z^2 \left(\frac{\dot{v}^2}{R^2} + \dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \frac{2}{R} \dot{v}\dot{\phi}_2 + 2\dot{v}\dot{\psi}_2 \right) + \\ & + 2z^3 \left(\dot{u}\dot{\gamma}_1 + \frac{\dot{v}\dot{\psi}_2}{R} + \dot{\gamma}_2 \dot{v} + \dot{\phi}_2 \dot{\gamma}_2 \right) + \\ & + z^4 \left(2\dot{\phi}_1 \dot{\gamma}_1 + \dot{\psi}_2^2 + \frac{2}{R} \dot{\gamma}_2 \dot{v} + 2\dot{\phi}_2 \dot{\gamma}_2 \right) + \\ & \left. + z^5 2\dot{\psi}_2 \dot{\gamma}_2 + z^6 (\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2) \right] \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz dx R d\theta. \quad (9) \end{aligned}$$

Аналогічно дослідженню [34], у виразі (9) будемо вважати $1 + z/R \approx 1$. Тоді вираз для кінетичної енергії набуває вигляду

$$\begin{aligned} T = 0.5 \int_0^{2\pi} \int_0^L & \left[r_0 (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + 2r_1 \left(\frac{\dot{v}^2}{R} + \dot{u}\dot{\phi}_1 + \dot{v}\dot{\phi}_2 \right) + \right. \\ & + r_2 \left(\frac{\dot{v}^2}{R^2} + \dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \frac{2}{R} \dot{v}\dot{\phi}_2 + 2\dot{v}\dot{\phi}_2 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 2r_3 \left(\dot{u}\dot{\gamma}_1 + \frac{\dot{v}\dot{\psi}_2}{R} + \dot{\gamma}_2 \dot{v} + \dot{\phi}_2 \dot{\gamma}_2 \right) + \\ & + r_4 \left(2\dot{\phi}_1 \dot{\gamma}_1 + \dot{\psi}_2^2 + \frac{2}{R} \dot{\gamma}_2 \dot{v} + 2\dot{\phi}_2 \dot{\gamma}_2 \right) + \\ & \left. + r_5 2\dot{\psi}_2 \dot{\gamma}_2 + r_6 (\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2) \right] dx R d\theta, \quad (10) \end{aligned}$$

де

$$r_i = \int_{-0.5h}^{0.5h} z^i \rho(z) dz, \quad i = 0, \dots, 6.$$

Таким чином, кінетичну енергію (10) представлено подвійним інтегралом.

Потенціальна енергія оболонки представляється у вигляді

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} & (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{\theta z} \gamma_{\theta z} + \\ & + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{x\theta} \gamma_{x\theta}) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz R d\theta dx. \quad (11) \end{aligned}$$

Підставляючи у вираз (11) співвідношення (2) та враховуючи формули (1) і (3), отримаємо вираз

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} & (Q_{11} \varepsilon_{xx}^2 + 2Q_{12} \varepsilon_{\theta\theta} \varepsilon_{xx} + Q_{22} \varepsilon_{\theta\theta}^2 + \\ & + G_{23} \gamma_{\theta z}^2 + G_{13} \gamma_{xz}^2 + G_{12} \gamma_{x\theta}^2) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz R d\theta dx. \quad (12) \end{aligned}$$

Оскільки оболонка здійснює геометрично нелінійне деформування, елементи тензора деформацій ε_{xx} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\gamma_{x\theta}$ пов'язані з проєкціями переміщень u_x , u_{θ} , u_z таким чином [43]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + 0.5 \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R(1+zR^{-1})} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_z \right) + \frac{1}{2R^2(1+zR^{-1})^2} \times \\ & \times \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_z \right)^2 + \left(-\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_{\theta} \right)^2 \right], \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R(1+zR^{-1})} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R(1+zR^{-1})} \times \\ & \times \left[\frac{\partial u_x}{\partial \theta} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_z \right) \frac{\partial u_{\theta}}{\partial x} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \left(-\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_{\theta} \right) \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Отже, елементи тензора деформацій задовольняють співвідношення (13) та (6). Підстановка співвідношень (4) у (6) та (13) дозволяє отримати розклад елементів тензора деформацій за степенями z :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{XX} &= \varepsilon_{XX,0} + zk_{XX}^{(0)} + z^2 k_{XX}^{(1)} + z^3 k_{XX}^{(2)}; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta,0} + zk_{\theta\theta}^{(0)} + z^2 k_{\theta\theta}^{(1)} + z^3 k_{\theta\theta}^{(2)}; \\ \gamma_{X\theta} &= \gamma_{X\theta,0} + zk_{X\theta}^{(0)} + z^2 k_{X\theta}^{(1)} + z^3 k_{X\theta}^{(2)}; \\ \gamma_{XZ} &= \gamma_{XZ,0} + zk_{XZ}^{(0)} + z^2 k_{XZ}^{(1)} + z^3 k_{XZ}^{(2)}; \\ \gamma_{\theta Z} &= \gamma_{\theta Z,0} + zk_{\theta Z}^{(0)} + z^2 k_{\theta Z}^{(1)} + z^3 k_{\theta Z}^{(2)},\end{aligned}\quad (14)$$

де коефіцієнти розкладення задовольняють співвідношення

$$\varepsilon_{XX,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + 0.5 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (15)$$

$$k_{XX}^{(0)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad k_{XX}^{(1)} = 0, \quad k_{XX}^{(2)} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta\theta,0} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \\ &+ \frac{1}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right],\end{aligned}$$

$$k_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{w}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta},$$

$$k_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{2R^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial v}{\partial \theta},$$

$$k_{\theta\theta}^{(2)} = -\frac{4R^2 + h^2}{3R^4 h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} -$$

$$-\frac{4R^2 + 2h^2}{3R^3 h^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - \frac{1}{3R^4} \frac{\partial v}{\partial \theta},$$

$$\gamma_{X\theta,0} = \frac{\partial u}{R\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right],$$

$$k_{X\theta}^{(0)} = \frac{\partial \varphi_1}{R\partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{R\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x},$$

$$k_{X\theta}^{(1)} = -\frac{\partial \varphi_1}{R^2 \partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{2R\partial x},$$

$$k_{X\theta}^{(2)} = -\frac{4}{3h^2 R} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{h^2 + 8R^2}{6R^2 h^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} -$$

$$-\frac{1}{3R^3} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2 - 16R^2}{6R^3 h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta},$$

$$\gamma_{XZ,0} = \varphi_1 + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad k_{XZ}^{(0)} = 0,$$

$$k_{XZ}^{(1)} = -\frac{4}{h^2} \left(\varphi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad k_{XZ}^{(2)} = 0,$$

$$\gamma_{\theta Z,0} = \varphi_2 + \frac{\partial w}{R\partial \theta}, \quad k_{\theta Z}^{(0)} = 0,$$

$$k_{\theta Z}^{(1)} = -\frac{4}{Rh^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{4}{h^2} \varphi_2,$$

$$k_{\theta Z}^{(2)} = \frac{4R^2 + h^2}{3R^4 h^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{4R^2 + 2h^2}{3R^3 h^2} \varphi_2 + \frac{v}{3R^4}.$$

Співвідношення (14) описують розподіл деформацій по товщині оболонки. Величини $\varepsilon_{XX,0}$, $\varepsilon_{\theta\theta,0}$, $\gamma_{X\theta,0}$ нелінійно залежать від проекцій переміщень. Саме ці складові описують геометрично нелінійне деформування конструкції. Деформації зсуву γ_{XZ} і $\gamma_{\theta Z}$ лінійно залежать від проекцій переміщень конструкції.

Параметри $k_{XX}^{(0)}, \dots, k_{XX}^{(2)}, k_{\theta\theta}^{(0)}, \dots, k_{\theta\theta}^{(2)}, k_{X\theta}^{(0)}, \dots, k_{X\theta}^{(2)}$ описують зміни в кривизні та кутах обертання оболонок. У співвідношеннях для цих величин враховуються тільки лінійні залежності щодо проекцій переміщень, оскільки нелінійні додатки практично не впливають на зміни кривизни [33, 43].

Введення співвідношень (14) й (15) у вираз (12) та інтегрування за змінною z дозволяє отримати вираз для потенціальної енергії:

$$\Pi = 0.5 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\sum_{v=0}^6 \tilde{\Pi}_v \right) dx R d\theta, \quad (16)$$

де

$$\tilde{\Pi}_0 = Q_{11}^{(0)} \varepsilon_{XX,0}^2 + 2Q_{12}^{(0)} \varepsilon_{\theta\theta,0} \varepsilon_{XX,0} + Q_{22}^{(0)} \varepsilon_{\theta\theta,0}^2 +$$

$$+ G_{23}^{(0)} \gamma_{\theta Z,0}^2 + G_{12}^{(0)} \gamma_{X\theta,0}^2 + G_{13}^{(0)} \gamma_{XZ,0}^2,$$

$$\tilde{\Pi}_1 = 2Q_{11}^{(1)} \varepsilon_{XX,0} k_{XX}^{(0)} + 2Q_{22}^{(1)} \varepsilon_{\theta\theta,0} k_{\theta\theta}^{(0)} +$$

$$+ 2Q_{12}^{(1)} \varepsilon_{\theta\theta,0} k_{XX}^{(0)} + 2Q_{12}^{(1)} k_{\theta\theta}^{(0)} \varepsilon_{XX,0} + 2G_{12}^{(1)} \gamma_{X\theta,0} k_{X\theta}^{(0)},$$

$$\tilde{\Pi}_2 = 2Q_{12}^{(2)} k_{\theta\theta}^{(0)} k_{XX}^{(0)} + 2G_{12}^{(2)} \gamma_{X\theta,0} k_{X\theta}^{(0)} + Q_{22}^{(2)} k_{\theta\theta}^{(0)2} +$$

$$\begin{aligned}
& +2G_{13}^{(2)}\gamma_{XZ,0}k_{XZ}^{(1)} + 2G_{23}^{(2)}\gamma_{\theta Z,0}k_{\theta Z}^{(1)} + Q_{11}^{(2)}k_{XX}^{(0)2} + \\
& + 2Q_{22}^{(2)}\epsilon_{\theta\theta,0}k_{\theta\theta}^{(1)} + 2Q_{12}^{(2)}k_{\theta\theta}^{(1)}\epsilon_{XX,0} + G_{12}^{(2)}k_{X\theta}^{(0)2}, \\
& \tilde{\Pi}_3 = 2G_{12}^{(3)}\gamma_{X\theta,0}k_{X\theta}^{(2)} + 2G_{12}^{(3)}k_{X\theta}^{(0)}k_{X\theta}^{(1)} + \\
& + 2G_{23}^{(3)}\gamma_{\theta Z,0}k_{\theta Z}^{(2)} + 2Q_{12}^{(3)}k_{\theta\theta}^{(2)}\epsilon_{XX,0} + 2Q_{22}^{(3)}\epsilon_{\theta\theta,0}k_{\theta\theta}^{(2)} + \\
& + 2Q_{22}^{(3)}\epsilon_{\theta\theta,0}k_{\theta\theta}^{(2)} + 2Q_{22}^{(3)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{\theta\theta}^{(1)} + 2Q_{12}^{(3)}\epsilon_{\theta\theta,0}k_{XX}^{(2)} + \\
& + 2Q_{11}^{(3)}\epsilon_{XX,0}k_{XX}^{(2)} + 2Q_{12}^{(3)}k_{\theta\theta}^{(1)}k_{XX}^{(0)}, \\
& \tilde{\Pi}_4 = Q_{22}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(1)2} + G_{23}^{(4)}k_{\theta Z}^{(1)2} + 2Q_{12}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(2)}k_{XX}^{(0)} + \\
& + 2G_{12}^{(4)}k_{X\theta}^{(0)}k_{X\theta}^{(2)} + 2Q_{22}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{\theta\theta}^{(2)} + G_{13}^{(4)}k_{XZ}^{(1)2} + \\
& + G_{12}^{(4)}k_{X\theta}^{(1)2} + 2Q_{12}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{XX}^{(2)} + 2Q_{11}^{(4)}k_{XX}^{(0)}k_{XX}^{(2)}, \\
& \tilde{\Pi}_5 = 2G_{23}^{(5)}k_{\theta Z}^{(1)}k_{\theta Z}^{(2)} + 2Q_{12}^{(5)}k_{\theta\theta}^{(1)}k_{XX}^{(2)} + \\
& + 2G_{12}^{(5)}k_{X\theta}^{(1)}k_{X\theta}^{(2)} + 2Q_{22}^{(5)}k_{\theta\theta}^{(1)}k_{\theta\theta}^{(2)}, \\
& \tilde{\Pi}_6 = 2Q_{12}^{(6)}k_{\theta\theta}^{(2)}k_{XX}^{(2)} + Q_{11}^{(6)}k_{XX}^{(2)2} + \\
& + Q_{22}^{(6)}k_{\theta\theta}^{(2)2} + G_{23}^{(6)}k_{\theta Z}^{(2)2} + G_{12}^{(6)}k_{X\theta}^{(2)2}
\end{aligned}$$

Механічні характеристики нанокомпозиту, які входять у вираз для потенційної енергії (16), визначаються таким чином:

$$\begin{aligned}
& \{Q_{11}^{(i)}, Q_{12}^{(i)}, Q_{22}^{(i)}, G_{23}^{(i)}, G_{13}^{(i)}, G_{12}^{(i)}\} = \\
& = \int_{-0.5h}^{0.5h} z^i \{Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, G_{23}, G_{13}, G_{12}\} dz.
\end{aligned}$$

Отже, вирази для кінетичної та потенційної енергій циліндричної нанокомпозитної оболонки отримано.

Надалі розглядатиметься шарнірно-оперта циліндрична оболонка, для якої граничні умови набувають вигляду

$$w|_{x=0} = v|_{x=0} = \varphi_2|_{x=0} = w|_{x=L} = v|_{x=L} = \varphi_2|_{x=L} = 0,$$

$$N_X|_{x=0} = M_X|_{x=0} = N_X|_{x=L} = M_X|_{x=L} = 0,$$

де N_X — поздовжнє напруження на одиницю довжини, M_X — осьовий момент напруження на одиницю довжини.

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНКИ

Для дослідження лінійних коливань оболонки скористаємося методом Релея — Рітца. Тоді шу-

кані рішення повинні задовольняти тільки граничні умови (15). Лінійні коливання оболонки представимо у вигляді [16, 27, 41]:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_n(x) \cos(n\theta) \\ V_n(x) \sin(n\theta) \\ W_n(x) \cos(n\theta) \\ X_n(x) \cos(n\theta) \\ Y_n(x) \sin(n\theta) \end{bmatrix} \cos(\omega t), \quad (17)$$

де функції $U_n(x)$, $V_n(x)$, $W_n(x)$, $X_n(x)$, $Y_n(x)$ наближено представляються так:

$$U_n(x) = \sum_{m=1} A_m^{(U)} \cos(\lambda_m x),$$

$$V_n(x) = \sum_{m=1} A_m^{(V)} \sin(\lambda_m x),$$

$$W_n(x) = \sum_{m=1} A_m^{(W)} \sin(\lambda_m x),$$

$$X_n(x) = \sum_{m=1} A_m^{(X)} \cos(\lambda_m x),$$

$$Y_n(x) = \sum_{m=1} A_m^{(Y)} \sin(\lambda_m x),$$

де $\lambda_m = m\pi/L$.

Використання методу Релея — Рітца [41] для аналізу параметрів лінійних коливань оболонки дозволяє перейти до проблеми власних значень.

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

Для розрахунку механічних характеристик функціонально-градієнтного композитного матеріалу з наноармуванням використовуються параметри ефективності армування, описані в роботах [6, 8, 23]. Значення цих параметрів наведено у табл. 2. Було використано такі значення механічних характеристик:

$$E_{11}^{CNT} = 5.6466 \text{ ТПа}, E_{22}^{CNT} = 7.08 \text{ ТПа},$$

$$G_{12}^{CNT} = G_{13}^{CNT} = 1.9445 \text{ ТПа},$$

$$G_{23}^{CNT} = 2.3334 \text{ ТПа},$$

$$\mu_{12}^{CNT} = 0.175, \rho^{CNT} = 1400 \text{ кг/м}^3,$$

$$E^m = 2.5 \text{ ГПа}, \mu^m = 0.34, \rho^m = 1150 \text{ кг/м}^3.$$

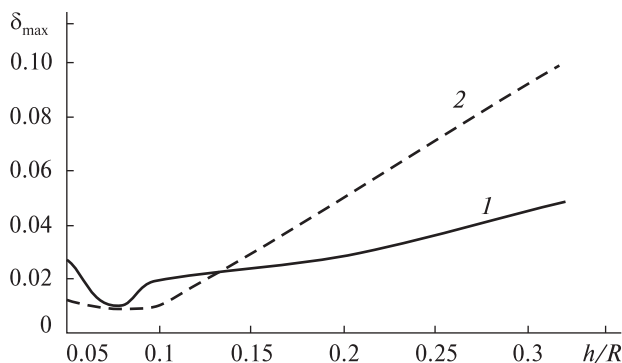


Рис. 3. Максимальні відносні похибки $\delta_{\max}$ власних частот, отримані методом скінченних елементів та методом Релея — Рітца в залежності від параметра h/R : 1 — для оболонки довжиною $L = 1$ м, 2 — для оболонки довжиною $L = 0.5$ м

Результати розрахунку лінійних коливань циліндричної оболонки, отримані методом Релея — Рітца, порівнювались з даними, отриманими за допомогою скінченно-елементного аналізу. Для розрахунку лінійних коливань скінченно-елементними методами було використано тривимірні скінченні елементи. Розрахунки проведено для нанокompозиту з типом армування FGV з об'ємною часткою нанотрубок $V_{CNT}^* = 0.12$. Значення параметрів оболонки дорівнювали

$$R = 0.25 \text{ м}, h = 5 \text{ см}, h/R = 0.02, L = 1 \text{ м}. \quad (18)$$

Оболонка, яку описують параметри (18), є тонкою.

Розрахунки методом Релея — Рітца було проведено для трьох видів розкладень переміщень (4).

1. У розкладенні (4) використано лише лінійні складові за z . У виразі для потенціальної енергії (16) було враховано складові до z^3 , а у кінетичній енергії (10) — до z^2 .

2. У розкладенні (4) в кінетичній та потенційній енергіях враховано складові до z^2 .

3. У розкладенні (4) враховано всі складові, а кінетична та потенціальна енергії мали повні форми (9) та (16).

Для аналізу результатів використано систематизацію оболонок, представлену у роботі [1]. Оболонка вважається тонкою, якщо $h/R < 0.05$, і товстою — при $0.05 < h/R < 0.33$.

Розраховані значення власних частот коливань оболонки з параметрами (18) представлено

у табл. 3, де приведено: номер варіанта розрахунку, величину n , яка вводиться рівнянням (17), власні частоти f , отримані методом скінченних елементів, оцінки власних частот f' , f'' , f''' , отримані на основі розкладів, описаних у п.п. 1, 2, 3 відповідно, відносну різницю δ частот f' та f . Видно, що власні частоти f' , f'' , f''' близькі між собою, тобто лінійного по z розкладу переміщень у (4) цілком достатньо для розрахунків.

Слід зазначити, що всі частоти, представлені в табл. 3, є парними, тобто є такі самі частоти з іншою формою розв'язку (17). У цьому розв'язку $\cos(n\theta)$ змінюється на $\sin(n\theta)$ та навпаки. Ця властивість притаманна всім розглянутим тут власним частотам.

Таким чином, результати розрахунків з урахуванням лише лінійних по z членів у виразах (4) та результати скінченно-елементних розрахунків є близькими. Результати, отримані за уточненими теоріями (п.п. 2 та 3), є близькими до результатів, отриманих з урахуванням лише лінійних по z складових у виразах для переміщень. Така ситуація зумовлена тонкістю оболонки, що призводить до малого внеску квадратичних та кубічних по z складових у вирази для переміщень.

Таблиця 2. Значення параметрів ефективності армування

V_{CNT}^*	η_1	η_2	η_3
0.12	0.137	1.022	0.715
0.17	0.142	1.626	1.138
0.28	0.141	1.585	1.109

Таблиця 3. Оцінки власних частот f, f', f'', f''' коливань оболонки з параметрами (18), отримані методом скінченних елементів або з використанням розкладів 1—3 відповідно

Варіант	n	f , Гц	f' , Гц	f'' , Гц	f''' , Гц	δ
1	4	131.01	128.1	128.17	128.1	0.02
2	3	134.66	132.21	132.22	132.20	0.018
3	5	160.9	158.19	158.32	158.15	0.017
4	2	176.93	176.86	176.87	176.87	0.0004
5	6	216.26	212.2	212.42	212.12	0.019

Таблиця 4. Власні частоти оболонок при значеннях параметрів $R = 0.25$ м, $V_{CNT}^* = 0.12$ і 0.28 , $L = 0.5$ і 1 м та при різних товщинах оболонок

h , см	h/R	n	f , Гц	f' , Гц	f'' , Гц	f''' , Гц	δ		
$V_{CNT}^* = 0.28, R = 0.25 \text{ м}, L = 1 \text{ м}$									
0.0125	0.05	3	248.4	243.54	244.16	243.41	0.017		
		2	259.68	259.29	259.38	259.24	0.0012		
		4	342.29	331.27	332.88	330.9	0.027		
0.015	0.06	1	386.54	388.98	388.98	388.96	0.0063		
		3	264.7	268.84	269.81	268.63	0.019		
		2	268.9	265.80	265.93	265.72	0.011		
0.017	0.06	4	387.1	386.60	388.98	385.98	0.0048		
		1	387.7	390.51	390.51	390.48	0.007		
		2	269.6	271.56	271.76	271.44	0.007		
0.02	0.08	3	289.2	290.08	291.39	289.76	0.002		
		1	387.0	391.87	391.88	391.83	0.012		
		4	430.1	431.01	434.10	430.10	0		
0.025	0.10	2	279.1	281.03	281.34	280.81	0.006		
		3	322.0	323.03	324.95	322.52	0.0016		
		1	389.4	394.14	394.14	394.06	0.01		
0.050	0.20	4	496.1	497.33	501.667	495.92	0.00040		
		2	300.88	298.61	299.18	298.16	0.006		
		3	390.33	379.50	382.65	378.51	0.02		
0.08	0.032	1	394.65	398.44	398.44	398.27	0.009		
		4	627.56	605.96	612.78	603.35	0.02		
		2	395.56	401.34	404.61	398.01	0.006		
0.08	0.032	1	412.67	426.09	426.11	424.46	0.028		
		3	647	652.88	666.21	647.09	0		
		1	433.96	460.78	460.83	455.34	0.049		
0.08	0.032	2	504.18	518.22	527.59	509.49	0.01		
		3	904.92	917.75	949.36	904.44	0.00053		
		$V_{CNT}^* = 0.28, R = 0.25 \text{ м}, L = 0.5 \text{ м}$							
0.013	0.052	3	474.84	468.54	468.96	467.39	0.012		
		4	507.82	501.46	502.76	499.95	0.009		
		2	543.24	539.89	539.96	539.11	0.006		
0.015	0.06	5	626.02	620.58	623.18	618.52	0.004		
		1	751.23	753.93	753.93	753.55	0.003		
		6	811.75	806.16	810.31	803.077	0.002		
0.017	0.06	3	507.17	500.48	501.09	498.68	0.01		
		4	560.66	554.26	556.06	551.98	0.008		
		2	561.58	558.03	558.13	556.78	0.006		
0.02	0	5	705.14	699.99	703.50	696.93	0.002		
		1	759.09	762.76	762.76	762.14	0.005		
		6	921.75	916.54	922.09	911.98	0.0004		
0.025	0.1	3	538.65	533.43	534.25	530.80	0.008		
		2	578.76	577.24	577.37	575.34	0.002		
		4	611.72	607.38	609.75	604.14	0.003		
0.05	0.2	1	764.48	772.32	772.32	771.35	0.01		
		5	780	778.57	783.12	774.27	0.004		
		6	1023	1024	1031.8	1018.31	0.008		
0.08	0.32	3	589.11	583.68	584.89	579.50	0.007		
		2	609.67	607.34	607.54	604.19	0.003		
		4	690.74	686.58	689.96	681.57	0.001		
0.025	0.1	1	780.38	787.70	787.70	786.03	0.009		
		5	895.97	894.00	900.34	887.41	0.005		
		2	656.82	658.79	659.14	652.79	0.006		
0.05	0.2	3	667.98	666.95	668.98	659.41	0.01		
		1	801.4	814.93	814.94	811.58	0.01		
		4	814.24	814.81	820.21	806.04	0.01		
0.08	0.32	5	1074.8	1077.90	1087.79	1066.48	0.008		
		2	831.92	876.78	878.54	850.29	0.02		
		1	875.94	938.09	938.12	921.22	0.05		
0.08	0.32	3	974.97	1013.28	1022.43	984.16	0.009		
		4	1303	1340	1361.5	1307.3	0.003		
		5	1766.7	1808.62	1844.23	1764.9	0.001		
0.08	0.32	1	901.25	1020.6	1020.65	992.6	0.1		
		2	936.2	1025.81	1030.88	984.56	0.05		
		3	1205.6	1277.42	1300.84	1234.56	0.02		
0.005	0.02	4	1679	1745.88	1793.89	1695.03	0.009		
		$V_{CNT}^* = 0.12, R = 0.25 \text{ м}, L = 1 \text{ м}$							
		0.010	0.04	4	131.01	128.1	128.17	128.10	0.02
3	134.66			132.206	132.22	132.20	0.018		
5	160.9			158.19	158.32	158.15	0.017		
0.015	0.06	2	176.93	176.86	176.87	176.87	0.0004		
		6	216.26	212.2	212.42	212.12	0.019		
		3	158.91	159.60	159.69	159.55	0.004		
0.025	0.1	2	182.53	183.25	183.26	183.24	0.004		
		4	195.54	201.22	201.56	201.11	0.028		
		1	274.66	279.64	279.65	279.64	0.018		
0.025	0.1	3	190.17	195.29	195.61	195.15	0.026		
		2	190.74	192.22	192.26	192.17	0.007		
		4	266.03	281.56	282.49	281.15	0.05		
0.025	0.1	1	276.14	281.72	281.72	281.70	0.02		
		2	215.25	216.034	216.21	215.77	0.0024		
		3	274.08	276.36	277.602	275.72	0.006		
0.025	0.1	1	281.52	287.23	287.24	287.14	0.02		
		4	434.9	442.41	445.74	440.65	0.013		

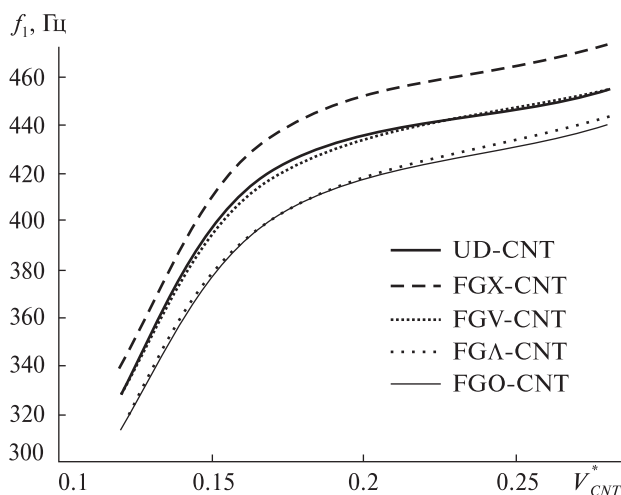


Рис. 4. Залежність першої власної частоти від об'ємної частки нанотрубок для різних типів армування

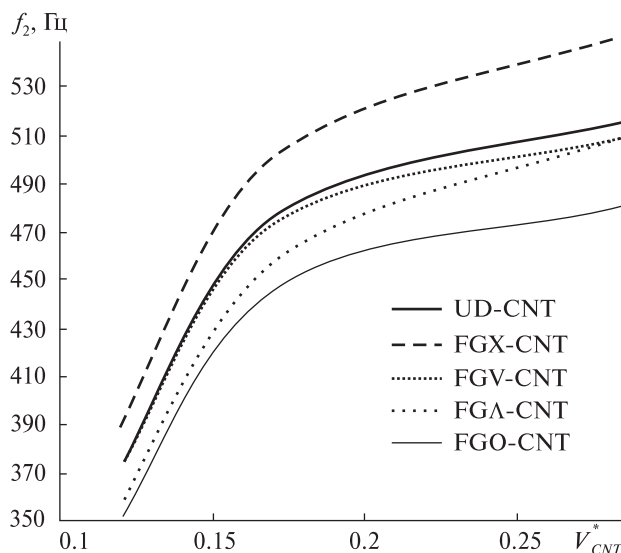


Рис. 5. Залежність другої власної частоти від об'ємної частки нанотрубок для різних типів армування

Проведено розрахунки власних частот коливань оболонок з різними товщинами h і довжинами L , FGV-армуванням нанокompозиту при двох значеннях параметра об'ємної частки нанотрубок V_{CNT}^* . У табл. 4 приведено власні частоти f , отримані методом скінченних елементів, власні частоти f' , f'' , f''' , отримані методом Релея — Рітца з розкладаннями рішень, як описано вище (п.п. 1, 2, 3) і відносну різницю δ між значеннями частоти, отриманими методом Релея — Рітца та методом скінченних елементів.

На рис. 3 приведено результати аналізу максимальної похибки $\delta_{\max}$ власних частот товстих оболонок, отримані на основі аналізу розкладів, описаних у п. 3. Суцільна лінія 1 відповідає результатам, які отримано для оболонки довжиною $L = 1$ м, а штрихова лінія 2 — для оболонки довжиною $L = 0.5$ м. Для оболонки $L = 1$ м відносна похибка власних частот, які було отримано методом Релея — Рітца, є допустимою навіть для дуже товстої оболонки $h/R = 0.35$. Для коротших оболонок $L = 0.5$ м при $0.25 \leq h/R \leq 0.35$ метод Релея — Рітца призводить до помилкових результатів, і для розрахунку власних частот слід використовувати тривимірну теорію.

Досліджено поведінку власних частот при різних видах наноармування для найтовстішої з розглянутих оболонок з розмірами $h/R = 0.32$, $R = 0.25$ м, $h = 0.08$ м. У табл. 5 приведено: значення об'ємної частки V_{CNT} нанотрубок у композиті, вид армування з наведених на рис. 2 та у табл. 1, першу, другу та третю власну частоти f_1, f_2, f_3 , параметр n , фізичний сенс якого описано рівняннями (17). Поведінку перших та других власних частот наведено на рис. 4 та 5 відповідно.

Як видно з рис. 4, найвища перша власна частота спостерігається при FGX-армуванні. Пер-

Таблиця 5. Власні частоти оболонки з параметрами $h/R = 0.32$, $L = 1$ м, $h = 0.08$ м при різних видах армування

V_{CNT}	Вид наноармування	f_1 , Гц, $n = 1$	f_2 , Гц, $n = 2$	f_3 , Гц, $n = 2$
0.28	UD-CNT	454.32	515.51	907.408
0.17	UD-CNT	420.73	477.18	858.78
0.12	UD-CNT	329.58	374.11	667.18
0.28	FGX-CNT	473.63	551.806	975.17
0.17	FGX-CNT	435.73	501.84	892.17
0.12	FGX-CNT	340.71	390.77	685.80
0.28	FGV-CNT	455.34	509.49	904.44
0.17	FGV-CNT	418.86	474.44	857.82
0.12	FGV-CNT	327.22	371.87	666.41
0.28	FGL-CNT	443.94	508.84	934.02
0.17	FGL-CNT	402.09	458.41	862.07
0.12	FGL-CNT	314.01	357.25	664.58
0.28	FGO-CNT	440.21	480.41	865.48
0.17	FGO-CNT	401.54	446.80	831.51
0.12	FGO-CNT	313.01	350.95	649.23

ша власна частота для UD-армування є близькою до першої власної частоти для армування FGV. Ці частоти є меншими за частоти при армуванні FGX. Найнижчі перші власні частоти спостерігаються при типах армування FGL та FGO. Вони також є близькими між собою. Зазначимо, що мінімальне значення першої власної частоти при $V_{CNT}^* = 0.28$ дорівнює 440.21 Гц, а максимальне — 473.64 Гц.

Таким чином, перші власні частоти суттєво різні при різних типах армування.

Поведінка другої власної частоти (рис. 5) якісно близька до поведінки першої власної частоти. Виключення складають значення f_2 при типах армування FGL та FGO. Перші власні частоти в цих випадках збігаються, а друга власна частота композиту FGL є більшою за аналогічну частоту композиту FGO. Максимальна власна частота при $V_{CNT}^* = 0.28$ та армуванні FGX складає 551.8 Гц, а для FGO армування — 480.41 Гц. Таким чином, другі власні частоти суттєво залежать від типу армування. Цю особливість можна використати для відстроювання оболонки від резонансу без суттєвої зміни її міцності та статичного відгуку.

ВИСНОВКИ

У роботі запропоновано метод аналізу вільних лінійних коливань нанокомпозитних циліндричних оболонок, які можуть бути складовою частиною об'єктів ракетно-космічної техніки. Порівняння результатів аналізу зі скінченноелементними тривимірними моделями дозволяє стверджувати, що запропонований метод дозволяє досліджувати коливання тонких нанокомпозитних оболонок з великою точністю. Досліджено поведінку власних частот та форм коливань від типу наноармування, товщини оболонки та об'ємної частки нанотрубок у композиті. Показано, що відстроювання коливань нанокомпозитної оболонки може здійснюватися шляхом раціонального обиравання типу армування вуглецевими нанотрубками.

Роботу виконано за підтримки Цільової комплексної програми НАН України з наукових космічних досліджень на 2018—2022 рр.

ЛІТЕРАТУРА

1. Галишин А. К. Расчет пластин и оболочек по уточенным теориям. *Исследование по теории пластин и оболочек*. 1967. Т. V. С. 66—92.
2. Allaoui A., Bai S., Cheng H. M., Bai J. B. Mechanical and electrical properties of a MWNT/epoxy composite. *Composites Sci. and Technol.* 2002. 62. P. 1993—1998.
3. Amabili M. A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. *Int. J. Non-Linear Mech.* 2010. 45. P. 409—418.
4. Amabili M. Nonlinear vibrations of laminated circular cylindrical shells: Comparison of different shell theories. *Composite Struct.* 2011. 94. P. 207—220.
5. Andrews R., Jacques D., Minot M., Rantell T. Fabrication of carbon multiwall nanotube/polymer composites by shear mixing. *Macromol. Mater. Eng.* 2002. 287. P. 395—403.
6. Asadi H. Numerical simulation of the fluid-solid interaction for CNT reinforced functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Acta Astronautica*. 2017. 138. P. 214—224.
7. Ci L., Bai J. B. The reinforcement role of carbon nanotubes in epoxy composites with different matrix stiffness. *Composites Sci. and Technol.* 2006. 66. P. 599—603.
8. Duc N. D., Cong P. H., Tuan N. D., Tran P., Thanh N. V. Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations. *Thin-Walled Struct.* 2017. 115. P. 300—310.
9. Frikha A., Zghal S., Dammak F. Finite rotation three and four nodes shell elements for functionally graded carbon nanotubes-reinforced thin composite shells analysis. *Computer Meth. Appl. Mech. and Eng.* 2014. 358. P. 569—584.
10. Gao K., Gao W., Chen D., Yang J. Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation. *Composite Struct.* 2018. 204. P. 831—846.
11. García-Macías E., Rodríguez-Tembleque L., Sáez A. Bending and free vibration analysis of functionally graded graphene vs. carbon nanotube reinforced composite plates. *Composite Struct.* 2018. 186. P. 123—138.
12. Gholami R., Ansari R. Nonlinear harmonically excited vibration of third-order shear deformable functionally graded graphene platelet-reinforced composite rectangular plates. *Eng. Struct.* 2018. 156. P. 197—209.
13. Hu H., Onyebueke L., Abatan A. Characterizing and Modeling Mechanical Properties of Nanocomposites. Review and Evaluation. *J. Miner. & Mater. Character. & Eng.* 2010. 9(4). P. 275—319.
14. Kaser Y. D., Rossana T. F. Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew cylindrical shells using the Chebyshev-Ritz formulation. *Composites Part B: Eng.* 2012. 62. P. 231—241.

15. Kanagaraj S., Varanda F. R., Zhil'tsova T. V., Oliveira M., Simoes A.O. Mechanical properties of high density polyethylene/carbon nanotube composites. *Composites Sci. and Technol.* 2007. 67. P. 3071—3077.
16. Khdeir A. A., Reddy J. N., Frederick D. A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories. *J. Eng. Sci.* 1989. 27(11). P. 1337—1351.
17. Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L. Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment. *Composite Struct.* 2013. 106. P. 128—138.
18. Lei Z. X., Zhang L. W., Liew K. M. Elastodynamic analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded plates. *Int. J. Mech. Sci.* 2015. 99. P. 208—217.
19. Leissa A. W., Nordgren R. P. Vibration of Shells. *J. Appl. Mech.* 1974. 41(2). P. 544—562.
20. Liew K. M., Lei Z. X., Yu J. L., Zhang L. W. Postbuckling of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels under axial compression using a meshless approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2014. 268. P. 1—17.
21. Liu Y. J., Chen X. L. Evaluations of the effective material properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element. *Mech. of Mater.* 2003. 35. P. 69—81.
22. Mehrabadi S. J., Aragh B. S. Stress analysis of functionally graded open cylindrical shell reinforced by agglomerated carbon nanotubes. *Thin-Walled Struct.* 2014. 80. P. 130—141.
23. Mehri M., Asadi H., Wang Q. On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow. *Composite Struct.* 2016. 153. P. 938—951.
24. Mehri M., Asadi H., Kouchakzadeh M. A. Computationally efficient model for flow-induced instability of CNT reinforced functionally graded conical curved panels subjected to axial compression. *Computer Meth. Appl. Mech. and Eng.* 2015. 932. P. 163—172.
25. Mehri M., Asadi H., Wang Q. On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow. *Composite Struct.* 2016. 153. P. 938—951.
26. Mehri M., Asadi H., Wang Q. Buckling and vibration analysis of a pressurized CNT reinforced functionally graded truncated conical shell under an axial compression using HDQ method. *Computer Meth, Appl. Mech. and Eng.* 2009. 59. P. 1164—1176.
27. Messina A., Soldatos K. P. Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions. *J. Sound and Vibration.* 1999. 227(4). P. 749—768.
28. Moradi-Dastjerdi R., Foroutan M., Pourasghar A. Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method. *Mater. and Design.* 2013. 44. P. 256—266.
29. Nejati M., Asanjarani A., Dimitri R., Tornabene F. Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Conical Shells Reinforced by Carbon Nanotubes. *Int. J. Mech. Sci.* 2011. 95. P. 1221—1237.
30. Ninh D. G., Bich D. H. Characteristics of nonlinear vibration of nanocomposite cylindrical shells with piezoelectric actuators under thermo-mechanical loads. *Aero-space Sci. and Technol.* 2018. 77. P. 595—609.
31. Odegard G. M., Gates T. S., Wise K. E., Park C., Siochi E. J. Constitutive modeling of nanotube-reinforced polymer composites. *Composites Sci. and Technol.* 2003. 63. P. 1671—1687.
32. Omid M., Rokni H., Milani A. S., Seethaler R. J., Arasteh R. Prediction of the mechanical characteristics of multi-walled carbon nanotube/epoxy composites using a new form of the rule of mixtures. *Carbon.* 2010. 48. P. 3218—3228.
33. Reddy J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *ASME J. Appl. Mech.* 1984. 51. P. 745—752.
34. Reddy J. N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Int. J. Solids and Struct.* 1984. 20(9/10). P. 881—896.
35. Richard P., Prasse T., Cavaille J. Y., Chazeau L., Gauthier C., Duchet V. Reinforcement of rubbery epoxy by carbon nanofibres. *Mater. Sci. and Eng.* 2003. 352. P. 344—348.
36. Seidel G. D., Lagoudas D. C. Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites. *Mech. Mater.* 2006. 38. P. 884—907.
37. Shen H. S. Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments. *Composite Struct.* 2009. 91. P. 9—19.
38. Shen H. S., Xiang Y. Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2012. 57. P. 196—205.
39. Sobhaniaragh V., Batra R. C., Mansur W. J., Peters F. C. Thermal response of ceramic matrix nanocomposite cylindrical shells using Eshelby-Mori-Tanaka homogenization scheme. *Composites Part B. Eng.* 2017. 118. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.02.032.
40. Song Z. G., Zhang L. W., Liew K. M. Vibration analysis of CNT-reinforced functionally graded composite cylindrical shells in thermal environments. *Int. J. Mech. Sci.* 2014. 264. P. 289—302.
41. Timarci T., Soldatos K. P. Comparative dynamic studies for symmetric cross — ply circular cylindrical shells on the basis of a unified shear deformable shell theory. *J. Sound and Vibration.* 1995. 187(4). P. 609—624.
42. Wang A., Chen H., Hao Y., Zhang W. Vibration and bending behavior of functionally graded nanocomposite doubly-curved shallow shells reinforced by graphene nanoplatelets. *Results in Phys.* 2018. 9. P. 550—559.
43. Wang Q., Cui X., Qin B., Liang Q. Vibration analysis of the functionally graded carbon nanotube reinforced com-

posite shallow shells with arbitrary boundary conditions. *Composite Struct.* 2003. 132. P. 60–82.

44. Wang Q., Qin B., Shi D., Liang Q. A semi-analytical method for vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite doubly-curved panels and shells of revolution. *Composite Struct.* 2015. 28. P. 2574–2591.
45. Zhang L. W., Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L. Static and dynamic of carbon nanotube reinforced functionally graded cylindrical panels. *Composite Struct.* 2014. 111. P. 205–212.

Стаття надійшла до редакції 21.12.2018

REFERENCES

1. Galishin A. K. (1967). Calculation of plates and shells according to specified theories. *Studies in the theory of plates and shells*, V, 66–92 [in Russian].
2. Allaoui A., Bai S., Cheng H. M., Bai J. B. (2002). Mechanical and electrical properties of a MWNT/epoxy composite. *Composites Sci. and Technol.*, 62, 1993–1998.
3. Amabili M. (2010). A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 45, 409–418.
4. Amabili M. (2011). Nonlinear vibrations of laminated circular cylindrical shells: Comparison of different shell theories. *Composite Struct.*, 94, 207–220.
5. Andrews R., Jacques D., Minot M., Rantell T. (2002). Fabrication of carbon multiwall nanotube/polymer composites by shear mixing. *Macromol. Mater. Eng.*, 287, 395–403.
6. Asadi H. (2017). Numerical simulation of the fluid-solid interaction for CNT reinforced functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Acta Astronautica*, 138, 214–224.
7. Ci L., Bai J. B. (2006). The reinforcement role of carbon nanotubes in epoxy composites with different matrix stiffness. *Composites Sci. and Technol.*, 66, 599–603.
8. Duc N. D., Cong P. H., Tuan N. D., Tran P., Thanh N. V. (2017). Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations. *Thin-Walled Struct.*, 115, 300–310.
9. Frikha A., Zghal S., Dammak F. (2014). Finite rotation three and four nodes shell elements for functionally graded carbon nanotubes-reinforced thin composite shells analysis. *Computer Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 358, 569–584.
10. Gao K., Gao W., Chen D., Yang J. (2018). Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation. *Composite Struct.*, 204, 831–846.
11. García-Macías E., Rodríguez-Tembleque L., Sáez A. (2018). Bending and free vibration analysis of functionally graded graphene vs. carbon nanotube reinforced composite plates. *Composite Struct.*, 186, P. 123–138.
12. Gholami R., Ansari R. (2018). Nonlinear harmonically excited vibration of third-order shear deformable functionally graded graphene platelet-reinforced composite rectangular plates. *Eng. Struct.*, 156, 197–209.
13. Hu H., Onyebueke L., Abatan A. (2010). Characterizing and Modeling Mechanical Properties of Nanocomposites. Review and Evaluation. *J. Miner. & Mater. Character. & Eng.*, 9 (4), 275–319.
14. Kaser Y. D., Rossana T. F. (2012). Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew cylindrical shells using the Chebyshev-Ritz formulation. *Composites Part B: Eng.*, 62, 231–241.
15. Kanagaraj S., Varanda F. R., Zhil'tsova T. V., Oliveira M., Simoes A. O. (2007). Mechanical properties of high density polyethylene/carbon nanotube composites. *Composites Sci. and Technol.*, 67, 3071–3077.
16. Khdeir A. A., Reddy J. N., Frederick D. (1989). A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories. *J. Eng. Sci.*, 27 (N 11), 1337–1351.
17. Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L. (2013). Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment. *Composite Struct.*, 106, 128–138.
18. Lei Z. X., Zhang L. W., Liew K. M. (2015). Elastodynamic analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded plates. *Int. J. Mech. Sci.*, 99, 208–217.
19. Leissa A. W., Nordgren R. P. (1974). Vibration of Shells. *J. Appl. Mech.*, 41 (N 2), 544–562.
20. Liew K. M., Lei Z. X., Yu J. L., Zhang L. W. (2014). Postbuckling of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels under axial compression using a meshless approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 268, 1–17.
21. Liu Y. J., Chen X. L. (2003). Evaluations of the effective material properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element. *Mech. Mater.*, 35, 69–81.
22. Mehrabadi S. J., Aragh B. S. (2014). Stress analysis of functionally graded open cylindrical shell reinforced by agglomerated carbon nanotubes. *Thin-Walled Struct.*, 80, P. 130–141.
23. Mehri M., Asadi H., Wang Q. (2016). On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow. *Composite Struct.*, 153, 938–951.
24. Mehri M., Asadi H., Kouchakzadeh M. A. (2015). Computationally efficient model for flow-induced instability of CNT reinforced functionally graded conical curved panels subjected to axial compression. *Computer Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 302, 163–172.

25. Mehri M., Asadi H., Wang Q. (2016). On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow. *Composite Struct.*, 153, 938—951.
26. Mehri M., Asadi H., Wang Q. (2009). Buckling and vibration analysis of a pressurized CNT reinforced functionally graded truncated conical shell under an axial compression using HDQ method. *Computer Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 59, 1164—1176.
27. Messina A., Soldatos K. P. (1999). Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions. *J. Sound and Vibration*, 227(4), 749—768.
28. Moradi-Dastjerdi R., Foroutan M., Pourasghar A. (2013). Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method. *Mater. and Design*, 44, 256—266.
29. Nejati M., Asanjarani A., Dimitri R., Tornabene F. (2011). Static and free vibration analysis of functionally graded conical shells reinforced by carbon nanotubes. *Int. J. Mech. Sci.*, 95, 1221—1237.
30. Ninh D. G., Bich D. H. (2018). Characteristics of nonlinear vibration of nanocomposite cylindrical shells with piezoelectric actuators under thermo-mechanical loads. *Aerospace Sci. and Technol.*, 77, 595—609.
31. Odegard G. M., Gates T. S., Wise K. E., Park C., Siochi E. J. (2003). Constitutive modeling of nanotube—reinforced polymer composites. *Composites Sci. and Technol.*, 63, 1671—1687.
32. Omid M., Rokni H., Milani A. S., Seethaler R. J., Arasteh R. (2010). Prediction of the mechanical characteristics of multi-walled carbon nanotube/epoxy composites using a new form of the rule of mixtures. *Carbon*, 48, 3218—3228.
33. Reddy J. N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *ASME J. Appl. Mech.*, 51, 745—752.
34. Reddy J. N. (1984). A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Int. J. Solids and Struct.*, 20(9/10), 881—896.
35. Richard P., Prasse T., Cavaille J. Y., Chazeau L., Gauthier C., Duchet V. (2003). Reinforcement of rubbery epoxy by carbon nanofibres. *Mater. Sci. and Eng.*, 352, 344—348.
36. Seidel G. D., Lagoudas D. C. (2006). Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites. *Mech. Mater.*, 38, 884—907.
37. Shen H. S. (2009). Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments. *Composite Struct.*, 91, 9—19.
38. Shen H. S., Xiang Y. (2012). Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 57, 196—205.
39. Sobhaniragh V., Batra R. C., Mansur W. J., Peters F. C. (2017). Thermal response of ceramic matrix nanocomposite cylindrical shells using Eshelby-Mori-Tanaka homogenization scheme. *Composites Part B. Eng.*, 118. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.02.032.
40. Song Z. G., Zhang L. W., Liew K. M. (2014). Vibration analysis of CNT-reinforced functionally graded composite cylindrical shells in thermal environments. *Int. J. Mech. Sci.*, 264, 289—302.
41. Timarci T., Soldatos K. P. (1995). Comparative dynamic studies for symmetric cross — ply circular cylindrical shells on the basis of a unified shear deformable shell theory. *J. Sound and Vibration*, 187(4), 609—624.
42. Wang A., Chen H., Hao Y., Zhang W. (2018). Vibration and bending behavior of functionally graded nanocomposite doubly-curved shallow shells reinforced by graphene nanoplatelets. *Results in Phys.*, 9, 550—559.
43. Wang Q., Cui X., Qin B., Liang Q. (2003). Vibration analysis of the functionally graded carbon nanotube reinforced composite shallow shells with arbitrary boundary conditions. *Composite Struct.*, 132, 60—82.
44. Wang Q., Qin B., Shi D., Liang Q. (2015). A semi-analytical method for vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite doubly-curved panels and shells of revolution. *Composite Struct.*, 28, 2574—2591.
45. Zhang L. W., Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L. (2014). Static and dynamic of carbon nanotube reinforced functionally graded cylindrical panels. *Composite Struct.*, 111, 205—212.

Received 21.12.2018

К. В. Аврамов, М. В. Чернобрышко, Б. В. Успенский

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного Национальной
академии наук Украины, Харьков, Украина

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ НАНОАРМИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В настоящее время в мировом ракетостроении на смену металлам и их сплавам приходят полимерные композитные материалы, армированные углеродными нанотрубками. Это связано с тем, что в условиях высокоинтенсивных нагрузок при одинаковом весе нано-композиты значительно превосходят алюминиевые сплавы по своим прочностным механическим характеристикам. Цилиндрические нанокомпозитные корпусные элементы ракет могут быть армированы углеродными нанотрубками с различным распределением их по толщине матрицы. В настоящее время существует пять основных типов наноармирования, которые приводят к возникновению функционально-градиентного материала по толщине оболочки. При анализе колебаний элементов ракетно-космической техники необходимо рассматривать возможность резонанса между конструкцией и аэродинамическими нагрузкам. Неотъемлемым элементом этого анализа является анализ свободных колебаний оболочки, который проводится с целью определения и предотвращения опасных резонансных режимов. Клас-

сические модели колебаний цилиндрических оболочек не позволяют учитывать изменяющиеся по толщине свойства материала. В данной работе предложен метод анализа свободных колебаний функционально-градиентных нанокомпозитных цилиндрических оболочек, которые могут быть составной частью ракетных комплексов и конструкций самолетов. Рассмотрены зависимости параметров колебаний от типа наноармирования, объемной доли нанотрубок в композите и толщины оболочки. Результаты аналитического исследования сравниваются с численным моделированием методом конечных элементов. Предложенная модель учитывает изменяющиеся по толщине свойства материала для пяти случаев наноармирования. Показано, что отстройка нанокомпозитных оболочек от резонансных режимов может осуществляться путем рационального выбора типа армирования углеродными нанотрубками.

Ключевые слова: нанокомпозит, нанотрубка, функционально-градиентный материал, цилиндрическая оболочка, свободные колебания, собственные частоты.

K. V. Avramov, M. V. Chernobryvko, B. V. Uspensky

A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

FREE VIBRATIONS OF FUNCTIONALLY GRADIENT CNT-INFUSED CYLINDRICAL SHELLS

Currently, in the world aerospace industry, metals and their alloys are widely replaced by polymer composite materials reinforced with carbon nanotubes (CNT). This is due to the

much higher durability of the nanocomposites compared to aluminum alloys under high-intensity loads. Cylindrical nanocomposite rocket body elements can be reinforced with carbon nanotubes using different distribution across the matrix thickness. Currently, there are five main types of CNT-reinforcement, which lead to the formation of a functional-graded material through the thickness of the shell. Analysis of vibrations in aerospace units' elements must be conducted considering the possibility of a resonance between the structure and aerodynamic loads. An integral part of this analysis is the analysis of free oscillations of the shell, which is carried out to determine and prevent dangerous resonant modes. Classical oscillation models of cylindrical shells do not allow taking into consideration material properties varying within shell thickness. This paper proposes a technique of analysis of free vibrations in functionally graded nanocomposite cylindrical shells, which can be an integral part of rocket complexes and aircraft structures. The dependencies of the vibration parameters on the type of the reinforcement, a volume fraction of carbon nanotubes in the composite, and the shell thickness are considered. The results of the analytical study are compared with numerical simulation based on the finite element method. The proposed model takes into consideration the material properties varying within shell thickness for five common cases of CNT-reinforcement. It is shown that detuning of nanocomposite shells from resonant modes can be carried out by a rational choice of the type of the CNT-reinforcement.

Keywords: CNT-infused composite, nanotube, functionally gradient material, cylindrical shell, free vibrations, eigen frequencies.

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2019.02.038>

УДК 533.9

О. Б. Коханов, Ю. І. Венедіктов, М. О. Барабанов, О. Ю. Венедіктов

Одеський національний політехнічний університет, Одеса, Україна

ПРИЛАД «ПІОН» ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ІОНОСФЕРНОЇ ПЛАЗМИ НА БОРТУ МІКРОСУПУТНИКА НА БАЗІ ПЛАТФОРМИ «YUZH SAT»

Описано проект створення приладу «Піон», розроблений в Одеському національному політехнічному університеті. Прилад призначений для встановлення на борту мікросупутників і дозволяє отримати інформацію про масовий склад, щільність, температуру, спрямовану швидкість іонів холодної іоносферної плазми і потенціал корпусу супутника відносно плазми. Розглянуто передумови для створення приладу, наведено конструкцію приладу, принципи його роботи та обробки результатів вимірювання, технічні та наукові характеристики приладу. Як давач прилад використовує плоский аналізатор з гальмівним потенціалом. Проект створення приладу зайняв третє місце на конкурсі «Відбір проектів корисного навантаження платформи «YuzhSat».

Ключові слова: космічна плазма, вимірювання, обробка даних, пристрій, проект.

Вимірювання параметрів іонів іоносферної плазми має велику наукову і практичну цінність для вивчення сонячно-земних зв'язків, уточнення моделі іоносфери Землі, дослідження впливу стану іоносфери на радіозв'язок, на потенціал космічних апаратів, а також на їхню траєкторію; для пошуку змін стану іоносфери, що передують землетрусам; для правильної інтерпретації результатів експериментів з вимірювання магнітного поля Землі.

Конструкцію запропонованого приладу представлено на рис. 1. Прилад складається з аналізатора з гальмівним потенціалом (АГП) і блоку електроніки (БЕ), який здійснює живлення електродів АГП, прийом і обробку сигналу АГП, формування пакетів даних вимірювань і видачу їх по послідовному інтерфейсу на систему збору даних для передачі.

Прилад встановлюється на борту мікросупутника (МС). Попадання сонячного світла у вхідне вікно

АГП має бути мінімальним, тобто прилад бажано розміщувати у сонячній тіні. Для нормальної роботи приладу супутник повинен мати тривісну стабілізацію з точністю не гірше 0.2° , яку забезпечує платформа «YuzhSat». Нормаль вхідного вікна АГП повинна бути орієнтована по вектору швидкості МС з точністю не гірше 2° , щоб реєструвати потік іоносферної плазми, що набігає. В поле зору давача (у межах $\pm 70^\circ$ від нормалі до вхідного вікна АГП) не повинні потрапляти елементи конструкції МС. Слід зазначити, що прилад не вимагає застосування виносних штанг, що є безперечною перевагою.

Для забезпечення теплового режиму прилад, крім вхідного отвору давача, обшивається екранно-вакуумною теплоізоляцією (ЕВТІ). В результаті очікується діапазон робочих температур БЕ $-20 \dots +50^\circ\text{C}$. Аналізатор з гальмівним потенціалом може працювати у ширшому діапазоні температур, до $-100 \dots +100^\circ\text{C}$.

Розглянемо принцип роботи і характеристики приладу. Конструкцію плоского АГП представ-

лено на рис. 2. Аналізатор з гальмівним потенціалом складається з корпусу у вигляді металевого стакана, всередині якого розміщено систему металевих сіток і колектор. Гальмівна сітка забезпечує аналіз іонів по енергії. Цю сітку долають тільки ті іони, енергія яких достатня для подолання потенціалу, створюваного напругою U_r , яка подається на сітку відносно корпусу супутника. Ступенєво змінюючи напругу U_r , можна здійснювати аналіз іонів по енергії. Колектор являє собою плоску пластину, яка збирає іони, що пройшли систему сіток. Струм колектора I_c несе інформацію про щільність потоку іонів, які пройшли сітку. Для ефективного збирання іонів на колектор відносно корпусу супутника подається негативна напруга $U_c \approx 20$ В. Супресорна сітка забезпечує додаткове відсічення електронів плазми і притлумлення струму фото- і вторинних електронів з колектора. Для цього на цю сітку відносно корпусу супутника подається негативна напруга, істотно менша за U_c ($U_{sg} \approx -70$ В).

Метод вимірювань, що реалізується за допомогою АГП, — непрямий. Він полягає у вимірюванні вольтамперної характеристики (ВАХ) АГП у вигляді залежності струму колектора I_c від напруги U_r аналізаторної (гальмівної) сітки і подальшій наземній обробці даних вимірювань з отриманням інформації про параметри іонів: масовий склад, концентрацію, температуру, спрямовану швидкість. Крім того, отримується інформація про потенціал корпусу супутника відносно плазми і фоновий струм колектора, що утворюється високоенергійними зарядженими частинками, які пройшли систему сіток. При знятті ВАХ гальмівна

напруга змінюється східчасто від нуля до максимального значення порядку 25 В.

Інформація про ВАХ передається у вигляді масивів цифрових відліків струму колектора I_c і значень ступенів гальмівної напруги U_r , при яких вимірювалися відліки струму колектора. У залежності від програми вимірювань інформація про значення ступенів U_r може і не передаватися, в цьому випадку ці значення можна визначити за відомим алгоритмом вимірювань U_r .

Наземна обробка даних вимірювань здійснюється за критерієм мінімуму суми квадратів різниці відліків отриманої ВАХ і її моделі (метод найменших квадратів).

Для оцінки визначуваних параметрів авторами проекту був розроблений алгоритм пошуку на основі еволюційних методів, який прискорює рішення і підвищує його достовірність [1].

Для висот орбіти мікросупутників платформи «YuzhSat» (від 450 до 1000 км) основними компонентами іоносферної плазми є іони H^+ , He^+ , N^+ , O^+ з очікуваними параметрами: загальна концентрація іонів — $10^3 \dots 10^5 \text{ см}^{-3}$; температура іонів — $900 \dots 1700$ К; потенціал корпусу — $0 \dots -10$ В; спрямована швидкість іонів — $7 \dots 9$ км/с. Виходячи з цих даних, діапазон зміни гальмівної напруги U_r було обрано від 0 до 25 В. Ефективна площа колектора АГП приладу «Піон» обрана досить великою (близько 50 см^2) для підвищення чутливості приладу. При цьому діапазон реєстрованих іонних струмів колектора охоплює значення $10^{-11} \dots 10^{-6}$ А. Крім іонних струмів в сигналі колектора наявний адитивний фоновий струм, утворений струмом високоенергійних за-

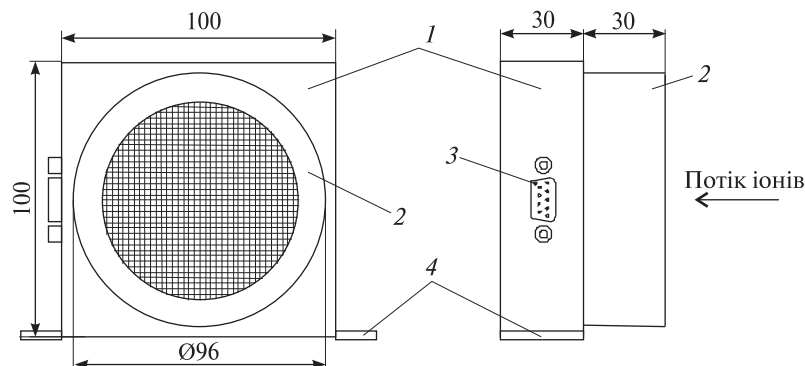


Рис. 1. Конструкція приладу «Піон»: 1 — блок електроніки, 2 — аналізатор з гальмівним потенціалом, 3 — комунікаційний роз'єм (живлення і інтерфейс RS-422), 4 — лапки кріплення

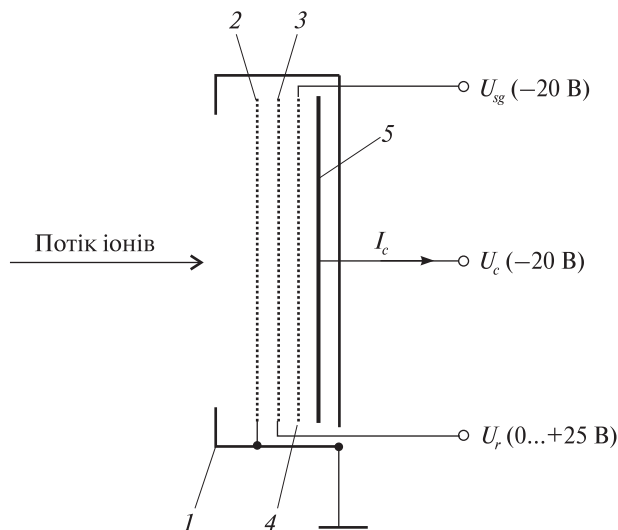


Рис. 2. Аналізатор з гальмівним потенціалом: 1 — корпус, 2 — вхідна сітка, 3 — аналізаторна (гальмівна) сітка, 4 — супресорна сітка, 5 — колектор

ряджених частинок, залишковим (не придушеним супресорною сіткою) струмом фото- і вторинної емісії, вхідним струмом вимірювача струму і наведеним до входу зміщенням його нуля. Цей фоновий струм може становити $\pm 10^{-8}$ А.

Розглянемо особливості вимірювання ВАХ АГП у приладі «Піон». Для зменшення впливу фонового струму на точність вимірювання іонного струму на початку кожного циклу вимірювань проводиться апаратна компенсація фонового струму при максимальній гальмівній напрузі [2]. Вона полягає у подачі в ланцюг колектора компенсаторного струму, величина якого підбирається методом проб і помилок таким чином, щоб вихідний сигнал вимірювача струму був близький до нуля.

Струм іонів перетворюється у двійковий код з плаваючою точкою з 12-розрядною мантисою (включаючи знак) і основою 8 у степені від -3 до 0 . При цьому величина струму визначається виразом

$$I = 0.5 \cdot N \cdot 8^{L-4} \text{ нА},$$

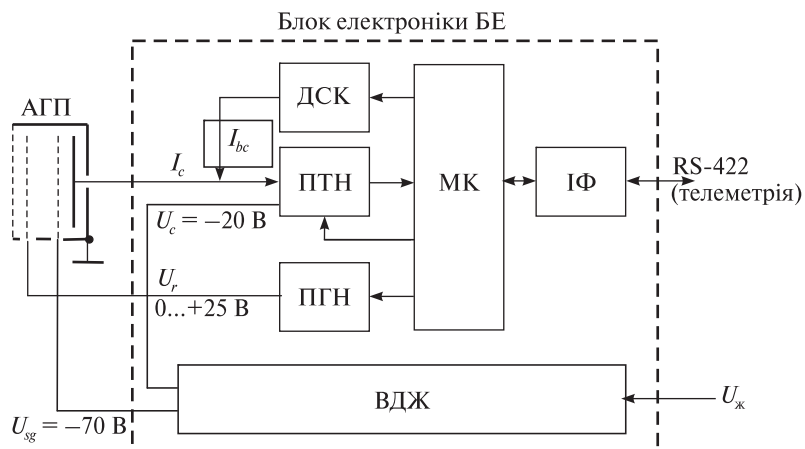
де N — десятковий еквівалент коду мантиси, L — номер шкали від 1 до 4 . Мінімальна дискретність струму становить 2 пА. Таке перетворення, на відміну, наприклад, від логарифмічного перетворення, дозволяє поліпшити розділ іонів з малою концентрацією.

Алгоритм роботи приладу передбачає локалізацію відліків на спадній ділянці ВАХ. Це підвищує точність визначення масового складу іонів і їхніх параметрів в умовах обмеженої кількості відліків ВАХ. Обмеження циклу вимірювань значенням 1 с і низька швидкодія вимірювача струму (час релаксації 10 мс) не дозволяють знімати більш ніж 100 відліків ВАХ. Для локалізації відліків у приладі здійснюється грубе і точне сканування ВАХ. При грубому скануванні U_r поступово змінюється від 0 до 25 В з рівномірним кроком при числі ступенів 32 . У результаті грубого сканування по порогах 95 і 5% від повного іонного струму визначаються межі напруги U_r спадної ділянки ВАХ. Після цього у зазначених межах провадиться точне сканування (з дрібнішим кроком) з числом ступенів 64 .

Структурну схему електроніки приладу приведено на рис. 3. Розглянемо функції основних вузлів на структурній схемі. АГП виконує роль давача іонів. Джерело струму компенсації (ДСК) виробляє біполярний ток I_{bc} , керований сигналом цифро-аналогового перетворювача (ЦАП) мікроконтролера (МК). Цей струм додається до струму колектора I_c . Під час компенсації фонового струму МК підбирає I_{bc} таким чином, щоб вихідний сигнал ПТН був близький до нуля. ДСК також використовується для тестування приладу. ПТН перетворює сумарний струм $I_c + I_{bc}$ у ланцюзі колектора у пропорційну напругу на одній з чотирьох лінійних шкал, яку обирає МК. ПГН розширює діапазон сигналів внутрішнього ЦАП МК до діапазону зміни U_r від 0 до 25 В.

Мікроконтролер типу STM32F100 складається з типових вузлів: 32-розрядного процесора, пам'яті програм, пам'яті даних, портів введення-виведення, багатоканального 12-розрядного АЦП, двох 12-розрядних ЦАП, універсального асинхронного приймально-передавального послідовного інтерфейсу (UART), набору таймерів, годинника реального часу (RTC) і давача температури. За допомогою порту виведення МК керує вибором шкали ПТН. За допомогою АЦП МК оцифровує: вихідні сигнали ПТН, постійні напруги живлення АГП і сигнал вбудованого давача температури. За допомогою одного ЦАП МК керує ДСК, а за допомогою іншого —

Рис. 3. Структурна схема приладу «Піон»: АГП — аналізатор з гальмівним потенціалом, ДСК — джерело струму компенсації, ПТН — перетворювач «струм — напруга», ПГН — підсилювач гальмівної напруги, МК — мікроконтролер, ІФ — інтерфейс, ВДЖ — вторинне джерело живлення



гальмує напругою (через ПГН). МК програмно реалізує цикл вимірювань, проводячи компенсацію фоновому струму, вибір шкали ПТН, грубе і точне сканування. МК накопичує інформацію про вимірювання у пам'яті даних, формує телеметричний кадр і за допомогою UART видає його через ІФ за певним протоколом на бортову систему збору даних. Крім того, МК приймає команди по послідовному інтерфейсу і реалізує їхнє виконання. Зокрема, за допомогою послідовного інтерфейсу здійснюються команди переходу в режим зниженого споживання, виконання калібрування і тестування, синхронізації внутрішнього годинника RTC з бортовим часом.

Інтерфейс об'єднує в собі драйвер і приймач, який забезпечує фізичне узгодження UART МК з бортовою системою збору даних і керування за певним стандартом (передбачається використання стандарту RS-422). ВДЖ забезпечує перетворення напруги бортової мережі (наприклад, 12 В) в ряд напруг, необхідних для харчування АГП і пристроїв БЕ.

Вся електроніка приладу розміщується на двосторонній друкованій платі розміром 94 × 94 мм, яка розташована в алюмінієвому боксі розміром 100 × 100 × 30 мм. Максимальна інформативність приладу складає 1.521 кбіт/с (213 байт за 1.12 с). Для платформи «YuzhSat» така інформативність є цілком прийнятною. При необхідності зменшити інформативність приладу може використовуватися алгоритм стиснення даних, реалізований в МК, який підключається в залежності від режиму вимірювань.

Основні характеристики приладу «Піон»

Тип давача	Плоский АГП
Компоненти вимірюваної плазми	H^+ , He^+ , N^+ , O^+
Концентрація іонів, ion/cm^{-3}	$10^3...10^5$
Еквівалентна температура іонів, К	900...1700
Спрямована швидкість іонів, км/с	7...9
Діапазон вимірювання іонного струму, А	$10^{-11}...10^{-6}$
Діапазон компенсації фоновому струму колектора АГП, А	$-10^8...+10^8$
Діапазон зміни потенціалу гальмівної сітки АГП, В	0...+25
Потенціал супресорної сітки АГП, В	-70
Потенціал колектора АГП, В	-20
Напруга живлення, В	12
Потужність, Вт	≤0.5
Час циклу вимірювань, с	1.12
Число відліків ВАХ АГП за цикл вимірювань	96
Тип інтерфейсу даних і команд	Послідовність RS-422
Інформативність, кбіт/с	≤1.55
Габаритні розміри, мм	≤100 × 100 × 60
Маса, кг	≤0.6
Діапазон робочих температур, °C	≥-20...+50

Таким чином, прилад «Піон» є простим і надійним приладом, виконаним на сучасному науково-технологічному рівні. Габарити, маса, енергоспоживання та інформативність приладу узгоджуються з обмеженнями мікросупутників на базі платформи «YuzhSat» комплектацій 2 і 3, але наведені цифри сумісні з характеристиками приладів, які літали на набагато більших платформах. Використання приладу

не вимагає застосування виносних штанг, хоча і висуваються високі вимоги до орієнтації АГП і її стабілізації.

Реалізація космічного експерименту з використанням приладу «Піон» дозволить: проводити моніторинг стану іоносфери вздовж орбіти МС, дані якого можуть бути використані для: створення більш досконалої Міжнародної Моделі Іоносфери; уточнення процесів взаємодії іоносфера — плазмосфера; виявлення іоносферних ознак, що передують землетрусам; корекції даних інших експериментів; отримувати інформацію про потенціал корпусу МС, що важливо для вивчення процесів електризації поверхні супутника з метою забезпечення надійності функціонування бортових радіоелектронних засобів; апробувати сучасну компонентну базу для космічної апаратури; випробувати нові алгоритми вимірювань за допомогою АГП. Алгоритми вимірювання і обробки після успішної апробації на мікросупутниках можуть бути після мінімальної адаптації використані для вимірювання параметрів плазми в інших космічних експериментах, де як давач використовуються АГП.

До розробки приладу планується залучити молодих вчених, аспірантів і студентів ОНПУ, які набудуть досвіду розробки космічної апаратури і програмного забезпечення для обробки інформації космічних експериментів та підвищать рівень своєї підготовки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Венедіктов А. Ю., Барабанов Н. А. *Определение наиболее рациональной стратегии скрещивания при обработке информации о свойствах космической плазмы с помощью метода основанного на эволюционных вычислениях для зонда с запирающим потенциалом*. Тези доп. 15 Укр. конф. з космічних досліджень. Київ: НАН України, 2015. С. 78.
2. Knudsen W. C., Bakke J. C., Spennner K., Novak V. Retarding potential analyzer for the Pioneer-Venus Orbiter mission. *Space Sci. Instrum.* 1979. 4. P. 351—372.

Стаття надійшла до редакції 26.11.2018

REFERENCES

1. Venediktov A. Yu., Barabanov N. A. (2015). *Opredelenie naibolee ratsional'noy strategii skreshchivaniya pri obrabotke informatsii o svoystvakh kosmicheskoy plazmy s pomoshch'yu metoda osnovannogo na evolyutsionnykh vychisleniyakh*

dlya zonda s zapirayushchim potentsialom. Tezy dopovidey 15 Ukrainskoi konferentsii z kosmichnykh doslidzhen'. Kyiv: NANUP, 78 [in Russian].

2. Knudsen W. C., Bakke J. C., Spennner K., Novak V. (1979). Retarding potential analyzer for the Pioneer-Venus Orbiter mission. *Space Sci. Instrum.*, 4, 351—372.

Received 26.11.2018

А. Б. Коханов, Ю. И. Венедиктов,
Н. А. Барабанов, А. Ю. Венедиктов

Одесский национальный
политехнический университет, Одесса, Украина

ПРИБОР «ПИОН» ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЫ НА БОРТУ МИКРОСПУТНИКА НА БАЗЕ ПЛАТФОРМЫ «YUZH SAT»

Описан проект создания прибора «Пион», разработанного в Одесском национальном политехническом университете. Прибор предназначен для установки на борту микроспутников и позволяет получить информацию о массовом составе, плотности, температуре, направленной скорости ионов холодной ионосферной плазмы и потенциале корпуса спутника относительно плазмы. Рассмотрены предпосылки для создания прибора, приведена конструкция прибора, принципы его работы и обработки результатов измерения, технические и научные характеристики прибора. В качестве датчика прибор использует плоский анализатор с тормозящим потенциалом. Проект прибора занял третье место на конкурсе «Отбор проектов полезной нагрузки платформы «YuzhSat».

Ключевые слова: космическая плазма, измерения, обработка данных, прибор, проект.

А. В. Коханов, Ю. И. Венедиктов,
М. О. Барабанов, О. Ю. Венедиктов

Odesa National Polytechnic University, Odesa, Ukraine

“PION” DEVICE FOR STUDYING IONOSPHERIC PLASMA ON BOARD OF A MICRO-SATELLITE BASED ON THE YUZH SAT PLATFORM

We present the design of the “Pion” device, which is intended for installation on board micro-satellites. It is developed at the Odesa National Polytechnic University. The device provides data about the mass composition, density, temperature, directional velocity of ions of the cold ionospheric plasma, and the potential of the satellite shell relative to the plasma. The device uses a flat analyzer with a braking potential as a sensor. In the article, we consider the prerequisites for creating the device, the device design, principles of its operation and processing of measurement results. Technical and scientific characteristics of the device are presented too.

Keywords: space plasma, data processing, device, micro-satellite.

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2019.02.043>

УДК 551.510; 533.93

О. К. Черемных¹, С. О. Черемных¹, Л. В. Козак^{1,2}, Е. А. Кронберг³

¹ Институт космических исследований Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины, Киев, Украина

² Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина

³ Институт Макса Планка, Геттинген, Германия

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КЕЛЬВИНА — ГЕЛЬМГОЛЬЦА И МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЫ НА ГРАНИЦЕ ГЕОМАГНИТНОГО ХВОСТА

Описаны математические и теоретические методы исследования продольных и косых МГД-мод, генерируемых солнечным ветром и локализованных вблизи границы геомагнитного хвоста. Указанные моды, в отличие от МГД-мод, распространяющихся внутри замкнутой части магнитного поля Земли, практически не исследовались ни теоретически, ни экспериментально. Показано, что задача об МГД-колебаниях на границе раздела двух движущихся одна относительно другой плазменных сред сводится к нахождению и исследованию уравнения малых колебаний, а также нахождения для него граничных условий. Приведена процедура получения дисперсионного уравнения для МГД-мод, локализованных на границе раздела движущейся и покоящейся плазменных сред. Аналитически установлено, что одна из восьми возможных МГД-мод может быть неустойчивой из-за развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца как при слабом, так и при сильном магнитном полях. Продемонстрировано, что косые возмущения, распространяющиеся под углом к вектору скорости среды, играют доминирующую роль при развитии этой неустойчивости. Отмечено, что генерация большого количества устойчивых МГД-мод на границе раздела плазм может привести к реализации турбулентного состояния плазмы. Результаты работы могут быть использованы для описания волновых процессов на границе геомагнитного хвоста и для объяснения генерации УНЧ-возмущений на ночной стороне магнитосферы Земли.

Ключевые слова: неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, продольные и косые МГД-моды, волны, сжимаемая замагниченная среда, хвост магнитосферы Земли.

ВВЕДЕНИЕ

Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца (КГ) возникает на границе раздела сплошных сред, в которой происходит резкое изменение их параметров. Она была открыта Гельмгольцем [44] и Кельвином [54] ещё в 19 веке. Эта неустойчивость встречается в газах [3], жидкостях [10, 11] и плазме [6], и её исследованию посвящено боль-

шое число работ (см. обзоры [25, 50]). Она играет важную роль в переносе энергии солнечного ветра в земную магнитосферу [4, 9, 50, 51, 55]. В частности, считается, что неустойчивость КГ играет доминирующую роль в механизме вязкого взаимодействия солнечного ветра с магнитосферой Земли, передавая импульс в магнитосферу [29, 50] и вызывая формирование размытых пограничных слоёв. Неустойчивость КГ реализуется в магнитосфере Сатурна [39] и на границе магнитопауз Земли [48] и Юпитера [59]. Также

© О. К. ЧЕРЕМНЫХ, С. О. ЧЕРЕМНЫХ,
Л. В. КОЗАК, Е. А. КРОНБЕРГ, 2019

из-за разрыва поля скоростей она наблюдается в солнечном ветре [45, 53] и хвостах ионизованных комет [5]. Наблюдения со спутников Hinode/SOT и SDO/AIA свидетельствуют о развитии неустойчивости КГ в солнечных протуберанцах и других структурах солнечной короны [36, 56]. В природе обычно реализуются дозвуковые скачки скорости, на которых развитие неустойчивости проявляется в виде нарастающих колебаний на границе раздела сред, а на нелинейной стадии — приводит к образованию вихрей. Классический пример — неустойчивость КГ на поверхности воды [24]. Неустойчивость КГ на дозвуковых перепадах скорости приводит к образованию цепочек вихреобразных структур, наблюдаемых в форме облаков в земной атмосфере [2]. Такие же структуры характерны для атмосфер Юпитера и Сатурна [22, 57]. Поскольку на этих планетах наблюдается сильное дифференциальное вращение атмосфер, то эти вихревые структуры обычно интерпретируются как проявление неустойчивости КГ. Вихревые образования, обусловленные развитием неустойчивости КГ наблюдаются также в магнитосфере и полярных сияниях Земли [14, 21]. Образование магнитных «жгутов» в ионосфере Венеры связывают с нелинейной стадией развития неустойчивости КГ [58].

В настоящей работе неустойчивость КГ изучается на границе геомагнитного хвоста, обтекаемого солнечным ветром. Из обычной гидродинамики известно, что возмущения в сверхзвуковых течениях, совпадающие по направлению со скоростью, являются устойчивыми [12]. Поэтому считается, что сверхзвуковое течение плазмы на границе геомагнитного хвоста является устойчивым (см. работу [50]). Позднее С. И. Сыроватским [18, 19] было показано, что косые возмущения, распространяющиеся под углом Θ к вектору скорости, неустойчивы на границе раздела сред даже в случае, когда продольные возмущения ($\Theta = 0$) устойчивы. Их фазовая скорость может быть существенно меньше скорости течения, а значение инкремента больше, чем у продольных возмущений [50]. Известно, что магнитное поле уменьшает инкремент неустойчивости КГ в случае продольных сдвиговых те-

чений [20, 32]. Однако учёт даже небольшой сжимаемости среды снижает стабилизирующий эффект магнитных полей. Работа [40] была одной из первых работ, в которых исследовалась устойчивость косых возмущений на плоской границе раздела движущихся одна относительно другой плазм с учётом магнитного поля и сжимаемости среды. В этой работе было получено несколько упрощённых критериев устойчивости. Однако дальнейшего развития результаты [40] не получили, так как рассмотренные в ней случаи не совсем соответствовали реальной физической ситуации. Новые элементы в методику исследования косых возмущений внесли работы [31, 52]. В ряде случаев мы будем сравнивать полученные результаты с их результатами.

Хотя Л. Д. Ландау и С. И. Сыроватский внесли большой вклад в изучение неустойчивости КГ, вопрос об устойчивости косых возмущений на границе раздела плазменных сжимаемых сред при наличии магнитного поля и скачка скорости на границе остался ими не исследованным. Основное внимание в данной работе будет уделено теоретическим и математическим аспектам исследования как продольных, так и косых МГД-мод, генерируемых солнечным ветром и локализованных вблизи границы геомагнитного хвоста, которую мы будем отождествлять с границей раздела плазменных сред. Последние были обнаружены в рамках многоспутникового проекта «Cluster» [8, 43]. Отметим, что указанные моды, за редким исключением [1, 14, 26, 48, 50] практически не исследовались ни теоретически, ни экспериментально, в отличие от МГД-мод, распространяющихся внутри замкнутой части магнитного поля Земли [15, 28, 30, 33, 35, 37, 38, 41]. Можно ожидать, что эти моды связаны с неустойчивостью КГ. Они также должны зависеть от угла Θ распространения возмущений по отношению к вектору скорости.

Мы будем анализировать МГД-моды, распространяющиеся вдоль плоской граничной поверхности между двумя движущимися одна относительно другой плазмами. В этом случае угол Θ связывает продольную ($\lambda_{\parallel}$) и поперечную ($\lambda_{\perp}$) длины волн относительно вектора скорости среды соотношением $\cos \Theta = 1/\sqrt{1 + \lambda_{\parallel}^2/\lambda_{\perp}^2}$. Продоль-

ным возмущениям ($\Theta=0$) соответствуют возмущения с $\lambda_{\perp} \gg \lambda_{\parallel}$, а поперечным ($\Theta \approx \pi/2$) — возмущения с $\lambda_{\parallel} \gg \lambda_{\perp}$. В работах [42, 43] на основе наблюдательных данных с космических аппаратов было показано, что в пограничной области плазменного слоя хвоста магнитосферы Земли реализуются колебания силовых линий магнитного поля, распространяющиеся вдоль магнитного поля. При ширине поперечного размера потока порядка 3000 км наблюдаемые характерные длины волн этих колебаний соответствовали 5...20 радиусам Земли. Поэтому справедлива оценка $\lambda_{\parallel} > \lambda_{\perp}$. Это обстоятельство указывает на необходимость рассмотрения как продольных, так и косых МГД-мод вдоль границы раздела плазменных сред. В работе [1] на основе результатов работы [43] был сделан вывод о том, что эти колебания генерируются посредством возбуждения неустойчивости КГ из-за распространения ускоренного потока плазмы. В работе [47] отмечалось, что неустойчивость КГ в солнечном ветре генерируется на косых возмущениях.

Данная статья дополняет результаты, полученные нами в работе [34], и содержит их математическое обоснование. В работе последовательно изложена процедура теоретического анализа неустойчивости КГ и распространения МГД-мод на границе геомагнитного хвоста, а также кратко излагаются результаты работы [34].

МОДЕЛЬ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваем течение невязкой и идеально проводящей плазмы вблизи участка поверхности, который можно считать плоским, так что можно ввести декартову систему координат (x, y, z). Пусть плоскость $x = 0$ нулевой толщины является границей раздела двух однородных плазменных потоков, движущихся с разными постоянными скоростями выше и ниже границы раздела. На этой границе, следуя методике [13, 16, 18], полагаем, что все параметры плазмы изменяются скачкообразно. Считаем, что векторы равновесных скоростей $\vec{v}_0$ и магнитных полей $\vec{B}_0$ параллельны плоскости (y, z) и направлены вдоль оси y .

Задача об МГД-колебаниях в рамках рассматриваемой модели сводится к исследованию малых колебаний вблизи положения равновесия. Полагаем

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{v}', \\ \rho &= \rho_0 + \rho', \\ P &= P_0 + P', \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}',\end{aligned}\tag{1}$$

где $\vec{v}_0, \rho_0, P_0$ и $\vec{B}_0$ — начальные стационарные значения скорости, плотности, давления и магнитного поля, а $\vec{v}', \rho', P'$ и $\vec{B}'$ — их малые отклонения от равновесных значений. Пренебрегая малыми величинами высших порядков, из уравнений идеальной магнитной гидродинамики [6, 17] получаем исходные уравнения

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}' \right] = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}' - \nabla \Pi', \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{B}' = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v}' - \vec{B}_0 \operatorname{div} \vec{v}', \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \rho' + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \vec{B}' = 0. \tag{5}$$

Здесь $\Pi' = \rho' c_s^2 + \vec{B}_0 \cdot \vec{B}'$ — возмущение полного давления плазмы, $c_s = \sqrt{(\partial P_0 / \partial \rho_0)_s}$ — адиабатическая скорость звука. Магнитное поле в (2), (3) и (5) масштабировано следующим образом: $\vec{B} / \sqrt{4\pi} \rightarrow \vec{B}$. Система уравнений (2)–(5) описывает поведение восьми неизвестных величин: трёх составляющих вектора скорости, трёх составляющих вектора магнитного поля, а также давления и плотности. Покажем, что эту систему можно свести к одному уравнению малых колебаний.

УРАВНЕНИЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ

В силу линейности системы (2)–(5) и однородности сред по координатам y и z рассмотрим возмущения равновесных величин в виде

$$\exp [i(-\omega t + k_y y + k_z z)].$$

Здесь $\omega = \omega_r + i\gamma$ — комплексная частота,

$\vec{k} = \{0, k_y, k_z\}$ — волновой вектор, который далее полагается действительной величиной. При $\gamma > 0$ колебания неустойчивы, и их амплитуда увеличивается со временем по экспоненциальному закону. Зависимость возмущений от x определяется уравнениями (2)–(5). Из (2) и (3) находим

$$\begin{aligned} v'_x &= -\frac{1}{\rho_0(\omega - k_y v_0)} \left[k_y B_0 B'_x + i \frac{\partial \Pi'}{\partial x} \right], \\ v'_y &= -\frac{1}{\rho_0(\omega - k_y v_0)} [k_y B_0 B'_y - k_y \Pi'], \\ v'_z &= -\frac{1}{\rho_0(\omega - k_y v_0)} [k_y B_0 B'_z - k_z \Pi'], \\ B'_x &= -\frac{k_y B_0}{\rho_0(\omega - k_y v_0)} v'_x, \\ B'_y &= -\frac{k_y B_0}{\rho_0(\omega - k_y v_0)} v'_y + \frac{\rho'}{\rho_0} B_0, \\ B'_z &= -\frac{k_y B_0}{\rho_0(\omega - k_y v_0)} v'_z. \end{aligned} \quad (6)$$

Исключая из выражений для возмущенного магнитного поля возмущенную скорость, получаем

$$\begin{aligned} B'_x &= i \frac{k_y B_0 \cdot \partial \Pi' / \partial x}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}, \\ B'_y &= \frac{(\omega - k_y v_0)^2 B_0 \rho' - k_y^2 B_0 \Pi'}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}, \\ B'_z &= -\frac{k_y k_z B_0 \Pi'}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнений (5) и (7) следует дифференциальное уравнение второго порядка, связывающее возмущение полного давления плазмы Π' и возмущение плотности ρ' :

$$\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x^2} - (k_y^2 + k_z^2) \Pi' + (\omega - k_y v_0) \rho' = 0.$$

Из определения Π' и выражения для B'_y находим еще одну связь возмущения плотности и возмущения полного давления плазмы:

$$\rho' = \frac{\Pi'}{c_s^2 + \frac{B_0^2}{\rho_0} - \frac{k_y^2 c_s^2 B_0^2}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2}}.$$

Из этих двух уравнений следует

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x^2} - (k_y^2 + k_z^2) \Pi' + \\ &+ \frac{(\omega - k_y v_0)^4 \Pi'}{(\omega - k_y v_0)^2 \left(c_s^2 + \frac{B_0^2}{\rho_0} \right) - \frac{k_y^2 c_s^2 B_0^2}{\rho_0}} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, уравнения (2)–(5) свелись к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (8). Оно справедливо как в области $x > 0$, так и в области $x < 0$. Величины, относящиеся к области $x > 0$, будем в дальнейшем обозначать нижним индексом 1, а к области $x < 0$ — индексом 2. Считаем, что компоненты волнового вектора k_y и k_z имеют одинаковые значения в обеих областях.

Заметим, что уравнение (8) может быть также получено из уравнения (4), если v'_x , v'_y и v'_z выразить через Π' и ρ' . Действительно, запишем последнее в виде

$$i(\omega - k_y v_0) \rho' = \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}'.$$

С помощью уравнения (6) выразим компоненты возмущенной скорости через Π' и ρ' :

$$\begin{aligned} v'_x &= -i \frac{\partial \Pi'}{\partial x} \frac{(\omega - k_y v_0)}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}, \\ v'_y &= \frac{k_y \Pi'(\omega - k_y v_0) - k_y \frac{B_0^2}{\rho_0} \rho'(\omega - k_y v_0)}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}, \\ v'_z &= \frac{k_z \Pi'(\omega - k_y v_0)}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}. \end{aligned}$$

Из этих четырех уравнений и уравнения, связывающего возмущенную плотность с возмущенным полным давлением плазмы, прямыми расчетами получаем уравнение (8).

Из условия исчезновения возмущений на бесконечности по каждую сторону от поверхности разрыва из (8) находим

$$\begin{aligned} \Pi'_1 &= A_1 \exp[-\chi_1 x + i(k_y y + k_z z - \omega t)], \\ \Pi'_2 &= A_2 \exp[\chi_2 x + i(k_y y + k_z z - \omega t)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь A_1, A_2 — произвольные постоянные, а $\chi_1, \chi_2 > 0$ и определены выражением

$$\chi^2 = k^2 - \frac{(\omega - k_y v_0)^4}{(\omega - k_y v_0)^2 \left(c_s^2 + \frac{B_0^2}{\rho_0} \right) - \frac{k_y^2 c_s^2 B_0^2}{\rho_0}},$$

$$k^2 = k_y^2 + k_z^2.$$

Решения (9) описывают поверхностные возмущения, амплитуды которых экспоненциально быстро убывают от границы раздела сред в обеих областях.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Для получения дисперсионного уравнения необходимо найти граничные условия. Первое граничное условие найдем из условия отсутствия потока вещества через границу раздела сред. Уравнение поверхности раздела сред можно записать в виде

$$f(x, y, z, t) = x - \zeta(y, z, t) = 0, \quad (10)$$

где ζ — малое смещение границы раздела в результате возмущения, причем

$$\zeta \propto \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z).$$

Из (10) следует, что вектор нормали к возмущенной поверхности раздела имеет вид

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{1}{|\nabla f|} (\vec{e}_x - \vec{e}_y k_y \zeta - \vec{e}_z k_z \zeta). \quad (11)$$

Обозначим через $\vec{D}$ скорость поверхности раздела. Для точек x_i этой поверхности справедливы уравнения

$$f(x_i, t) = 0, \quad \frac{dx_i}{dt} = D_i.$$

Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial t} + D_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \quad (12)$$

Из (11) и (12) получаем, что нормальная составляющая скорости D_n поверхности раздела равна

$$D_n = \vec{D} \cdot \vec{n} = D_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{|\nabla f|} = - \frac{\partial f / \partial t}{|\nabla f|},$$

или

$$D_n = - \frac{i\omega \zeta}{|\nabla f|}. \quad (13)$$

Нормальная составляющая скорости возмущенной среды на границе раздела равна

$$\vec{v} \cdot \vec{n} + \vec{v}' \cdot \vec{n} = (v_0 \vec{e}_y + \vec{v}') \cdot \frac{1}{|\nabla f|} (\vec{e}_x - \vec{e}_y k_y \zeta - \vec{e}_z k_z \zeta) = \frac{1}{|\nabla f|} (v'_x - ik_y v_0 \zeta - \vec{e}_z k_z \zeta) = \frac{1}{|\nabla f|} (v'_x - ik_y v_0 \zeta). \quad (14)$$

Поскольку частицы среды не пересекают поверхности раздела, то нормальная к поверхности раздела скорость среды должна совпадать с нормальной составляющей самой поверхности. Приравняв (13) и (14), получаем

$$- \frac{i\omega \zeta}{|\nabla f|} = \frac{1}{|\nabla f|} (v'_x - ik_y v_0 \zeta),$$

откуда

$$\zeta = \frac{iv'_x}{\omega - k_y v_0}. \quad (15)$$

Уравнение поверхности (10) справедливо как при $x < 0$, так и при $x > 0$, поэтому для «тонкой» границы раздела сред величина ζ является непрерывной, т. е.

$$\{\zeta\} = \zeta|_{x=+0} - \zeta|_{x=-0} = 0.$$

Следовательно, первое граничное условие, которое обычно называют кинематическим граничным условием [23], можно записать в виде

$$\frac{v'_{1x}}{\omega - k_y v_{01}} \Big|_{x=+0} = \frac{v'_{2x}}{\omega - k_y v_{02}} \Big|_{x=-0}. \quad (16)$$

Это граничное условие совпадает с граничными условиями, приведенными в работах [13, 36].

В качестве второго граничного условия мы будем использовать уравнение

$$\Pi_1|_{x=+0} = \Pi_2|_{x=-0}, \quad (17)$$

которое описывает непрерывность возмущения полного давления на границе раздела сред и называется динамическим граничным условием [23]. Это уравнение получается интегрированием x -составляющей уравнения (2) поперёк сдвигового слоя конечной толщины 2ε , от

$x = -\varepsilon$ до $x = \varepsilon$ с последующим предельным переходом $\varepsilon \rightarrow 0$. Учитывая (16) и пренебрегая членами порядка ε , получаем уравнение (17).

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Из (9) и (16) следует

$$A_1 = A_2.$$

Используя это равенство, выражая v'_x через Π' (см. Приложение) и подставляя получившееся выражение в (17), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{01}(\omega - k_y v_{01})^2 - k_y^2 B_{01}^2} \frac{\partial \Pi'_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \\ &= \frac{1}{\rho_{01}(\omega - k_y v_{02})^2 - k_y^2 B_{02}^2} \frac{\partial \Pi'_2}{\partial x} \Big|_{x=0}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (9) и (18) получаем дисперсионное уравнение (см. Приложение)

$$\begin{aligned} &\left\{ k^2 - (\omega - k \cos \Theta v_{01})^4 / \left[(\omega - k \cos \Theta v_{01})^2 \times \right. \right. \\ &\quad \times \left(c_{s1}^2 + \frac{B_{01}^2}{\rho_{01}} \right) - \frac{k^2 \cos^2 \Theta c_{s1}^2 B_{01}^2}{\rho_{01}} \left. \right] \Big\}^{1/2} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\rho_{01}(\omega - k \cos \Theta v_{01})^2 - k^2 \cos^2 \Theta B_{01}^2} + \\ &\quad + \frac{1}{\rho_{02}(\omega - k \cos \Theta v_{02})^2 - k^2 \cos^2 \Theta B_{02}^2} \times \\ &\quad \times \left\{ k^2 - (\omega - k \cos \Theta v_{02})^4 / \left[(\omega - k \cos \Theta v_{02})^2 \times \right. \right. \\ &\quad \times \left(c_{s2}^2 + \frac{B_{02}^2}{\rho_{02}} \right) - \frac{k^2 \cos^2 \Theta c_{s2}^2 B_{02}^2}{\rho_{02}} \left. \right] \Big\}^{1/2} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь Θ — угол между волновым вектором и вектором скорости, $\cos \Theta = k_y / k$, $k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$. Комплексные значения ω соответствуют неустойчивому движению плазмы.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Из уравнения (19) в частном случае несжимаемых сред ($c_{s1}, c_{s2} \rightarrow \infty$) получаем уравнение, описывающее неустойчивость КГ для косых ($\Theta \neq 0$) дозвуковых течений в магнитном поле [6, 20]

$$\begin{aligned} \rho_{01}(\omega - k \cos \Theta v_{01})^2 + \rho_{02}(\omega - k \cos \Theta v_{02})^2 &= \\ &= k^2 \cos^2 \Theta (B_{01}^2 + B_{02}^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Из уравнения (20) находим

$$\begin{aligned} \omega &= k \cos \Theta \left\{ \frac{(\rho_{01} v_{01} + \rho_{02} v_{02})}{(\rho_{01} + \rho_{02})} \pm \frac{1}{(\rho_{01} + \rho_{02})} \times \right. \\ &\quad \times [(\rho_{01} + \rho_{02})(B_{01}^2 + B_{02}^2) - \rho_{01} \rho_{02} (v_{01} - v_{02})^2]^{1/2} \Big\}. \end{aligned} \quad (21)$$

При $\Theta = 0$ уравнение (20) совпадает с уравнением (35) работы [20]. Уравнение (21) показывает, что при перепаде скорости $|v_{01} - v_{02}|$, удовлетворяющем условию

$$(v_{01} - v_{02})^2 > \left(\frac{1}{\rho_{01}} + \frac{1}{\rho_{02}} \right) (B_{01}^2 + B_{02}^2), \quad (22)$$

частота ω имеет положительную мнимую часть. Это означает, что возмущения неустойчивы. Отметим, что условие неустойчивости (22) справедливо как для продольных, так и для косых возмущений, поскольку не зависит от угла. В случае $\Theta = 0$, $v_{01} = v_0$, $v_{02} = 0$, $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$ уравнения (21) и (22) совпадают с уравнениями (35) и (36) работы [20]. Если $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$, то из (22) получается критерий (37) указанной работы.

В случае обычной гидродинамики ($B_{01} = B_{02} = 0$) из (19) получается дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{[k^2 c_{s1}^2 - (\omega - k \cos \Theta v_{01})^2]^{1/2}}{\rho_{01} c_{s1} (\omega - k \cos \Theta v_{01})^2} + \\ &+ \frac{[k^2 c_{s2}^2 - (\omega - k \cos \Theta v_{02})^2]^{1/2}}{\rho_{02} c_{s2} (\omega - k \cos \Theta v_{02})^2} = 0, \end{aligned}$$

приведенное в работе [19]. Однако в указанной работе (в которой полагалось $v_{01} = v_0$, $v_{02} = 0$) в качестве дисперсионного уравнения использовалось не это уравнение, а эквивалентное ему

уравнение вида

$$\frac{k^2 c_{s1}^2 - (\omega - k v_0 \cos \Theta)^2}{\rho_{01}^2 c_{s1}^2 (\omega - k v_0 \cos \Theta)^4} = \frac{k^2 c_{s2}^2 - \omega^2}{\rho_{02}^2 c_{s2}^2 \omega^4}, \quad (23)$$

Отметим, что в уравнении (23) могут присутствовать дополнительные корни (см. Приложение), которые необходимо исключить из рассмотрения. Уравнение (23) при $\Theta = 0$ полностью совпадает с уравнением, полученным в работе [12], где было показано, что при $\Theta = 0$, $c_{s1} = c_{s2} = c_s$, $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$ и выполнении неравенства

$$v_0 > 2\sqrt{2}c_s \quad (24)$$

неустойчивость не реализуется. Однако позднее С. И. Сыроватский [19] показал, что даже при выполнении условия (24) возмущения с $\Theta \neq 0$ могут быть неустойчивыми. В частности, им было отмечено, что при $\Theta \neq 0$ устойчивость реализуется при выполнении условия

$$v_0 > v_{кр}, \quad v_{кр} = \frac{2\sqrt{2}c_s}{\cos \Theta}. \quad (25)$$

Неравенство (25) показывает, что если скорость $v_0 < 2\sqrt{2}c_s$, то движение неустойчиво для малых возмущений при любых значениях угла Θ . Если же $v_0 > 2\sqrt{2}c_s$, то есть две области значений угла Θ . Для одной из них выполняется неравенство (25), и возмущения являются устойчивыми. Для другой области углов это неравенство не выполняется, и возмущения неустойчивы. Поскольку вторая область существует всегда, то это означает, в противоположность выводу [12], что граница раздела сред всегда будет неустойчивой по отношению к бесконечно малым возмущениям, распространяющимся под углом к вектору скорости. Очевидно, что при $\cos \Theta \rightarrow 0$ (перпендикулярные возмущения, $\Theta \rightarrow \pi/2$) устойчивость в принципе невозможна, поскольку, как следует из (25), $v_{кр} \rightarrow \infty$.

РЕДУКЦИЯ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ (19)

Для решения задачи о распространении МГД-волн на границе геомагнитного хвоста необходимо из (19) найти зависимость $\omega = \omega(k, \Theta, c_{si}, c_{Ai}, v_{0i} \cos \Theta)$, $i = 1, 2$. Такую задачу из-за большого количества свободных параметров трудно решить как аналитически, так и

численно. Это удаётся сделать только при некоторых упрощающих предположениях [1, 16, 25]. Поэтому мы упростим уравнение (19), для чего используем простейшую модель разрыва скорости в сжимаемой среде [25]. Считаем, что равновесные плотность ρ_0 , давление p_0 и магнитное поле $\vec{B}_0$ одинаковы и постоянны по обе стороны от границы раздела потоков плазмы, так что скорость звука и альвеновская скорость являются постоянными величинами. Не ограничивая общности рассмотрения и следуя [19], будем считать, что при $x > 0$ скорость равна $\vec{U}_0 = v_0 \vec{e}_y$, а при $x < 0$ скорость равна нулю. Последнее предположение означает, что скачок скорости происходит в бесконечно тонком слое по сравнению с поперечным размером потока. При сделанных предположениях дисперсионное уравнение (19) существенно упрощается и принимает вид

$$\left[k^2 - \frac{(\omega - k v_0 \cos \Theta)^4}{(\omega - k v_0 \cos \Theta)^2 (c_s^2 + c_A^2) - k^2 c_s^2 c_A^2 \cos^2 \Theta} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{1}{\rho_0 (\omega - k v_0 \cos \Theta)^2 - k^2 B_0^2 \cos^2 \Theta} + \\ + \frac{1}{\rho_0 \omega^2 - k^2 B_0^2 \cos^2 \Theta} \times \\ \times \left[k^2 - \frac{\omega^4}{\omega^2 (c_s^2 + c_A^2) - k^2 c_s^2 c_A^2 \cos^2 \Theta} \right]^{1/2} = 0, \quad (26)$$

где

$$c_A^2 = B_0^2 / \rho_0.$$

В дальнейшем вместо (26), следуя [19], мы будем использовать уравнение

$$\left[k^2 - \frac{(\omega - k v_0 \cos \Theta)^4}{(\omega - k v_0 \cos \Theta)^2 (c_s^2 + c_A^2) - k^2 c_s^2 c_A^2 \cos^2 \Theta} \right] \times \\ \times \frac{1}{[\rho_0 (\omega - k v_0 \cos \Theta)^2 - k^2 B_0^2 \cos^2 \Theta]^2} = \\ = \left[k^2 - \frac{\omega^4}{\omega^2 (c_s^2 + c_A^2) - k^2 c_s^2 c_A^2 \cos^2 \Theta} \right] \times \\ \times \frac{1}{[\rho_0 \omega^2 - k^2 B_0^2 \cos^2 \Theta]^2}. \quad (27)$$

Уравнение (27) отличается от (26) дополнительным корнем $\omega = kv_0 \cos \Theta / 2$ (см. Приложение). Далее мы исключим этот вещественный корень из рассмотрения.

В случае несжимаемых плазменных сред ($c_s \rightarrow \infty$) из (27) получаем уравнение

$$\omega = \frac{kv_0}{2} \cos \Theta \pm k \cos \Theta \sqrt{c_A^2 - v_0^2/4},$$

из которого следует, что магнитное поле стабилизирует неустойчивость при условии

$$4c_A^2 \geq v_0^2,$$

что соответствует условию (22) и результатам работы [20].

При отсутствии магнитного поля уравнение (27) описывает четыре ветви колебаний с частотами

$$\omega = \frac{kv_0}{2} \cos \Theta \pm kc_s \left[1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \Theta}{4c_s^2} \pm \left[1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \Theta}{c_s^2} \right]^{1/2} \right]^{1/2}.$$

Одна из этих ветвей колебаний неустойчива. Для неё находим, что неустойчивость реализуется в интервале скоростей $0 < v_0^2 \cos^2 \Theta < 8c_s^2$. Условие устойчивости $v_0 \geq v_{кр}$, $v_{кр} = 2\sqrt{2}c_s / \cos \Theta$ в рассматриваемом случае согласуется с условием (25).

Таким образом, уравнение (27) сохраняет все качественные особенности неустойчивости Кельвина — Гельмгольца, однако имеет более простой вид. Ниже мы будем использовать это уравнение для рассмотрения МГД-возмущений, локализованных вблизи границы раздела движущейся и неподвижной плазменных сред.

Завершая данный раздел, покажем, что уравнение (27) допускает дальнейшее упрощение. С этой целью введём в рассмотрение величины

$$x = \Omega - \frac{kV}{2}, \quad y = \Omega + \frac{kV}{2},$$

$$\Omega = \omega - \frac{kV}{2}, \quad V = v_0 \cos \Theta$$

и представим уравнение (27) в виде

$$(y^2 - x^2) \{ [k^2 x^2 y^2 (c_s^2 + c_A^2)^2 -$$

$$-k^4 (x^2 + y^2) (c_s^2 + c_A^2) c_s^2 c_A^2 \cos^2 \Theta + k^6 c_s^4 c_A^4 \cos^4 \Theta] \times \\ \times [x^2 + y^2 - 2k^2 c_A^2 \cos^2 \Theta] k^4 x^2 y^2 c_s^2 c_A^4 \cos^4 \Theta - \\ - k^6 (x^2 + y^2) c_s^2 c_A^6 \cos^6 \Theta + \\ + k^4 x^2 y^2 (c_s^2 + c_A^2) c_A^4 \cos^4 \Theta - x^4 y^4 (c_s^2 + c_A^2) \} = 0.$$

Поскольку вещественный корень $y^2 - x^2 = 2kv_0 \cos \Theta \sim \omega - kv_0 \cos \Theta / 2$ исключается из рассмотрения, то в ноль обращается выражение в фигурных скобках. Разделив это выражение на k^8 , и учитывая, что

$$xy = \Omega^2 - \frac{k^2 V^2}{4} = \left(\omega - \frac{kv_0}{2} \cos \Theta \right)^2 - \left(\frac{kv_0}{2} \cos \Theta \right)^2, \\ x^2 + y^2 = 2 \left(\Omega^2 + \frac{k^2 V^2}{4} \right) = \\ = 2 \left[\left(\omega - \frac{kv_0}{2} \cos \Theta \right)^2 + \left(\frac{kv_0}{2} \cos \Theta \right)^2 \right],$$

получаем дисперсионное уравнение

$$2 \left[\left(a^2 - \frac{b^2}{4} \right)^2 \beta^2 (1 + \beta)^2 - \right. \\ \left. - 2 \left(a^2 + \frac{b^2}{4} \right) \beta^2 (1 + \beta)^2 \cos^2 \Theta + \beta^2 \cos^4 \Theta \right] \times \\ \times \left[\left(a^2 + \frac{b^2}{4} \right) \beta - \cos^2 \Theta \right] + \\ + 2 \left(a^2 - \frac{b^2}{4} \right)^2 \beta^3 \cos^4 \Theta - 2 \left(a^2 + \frac{b^2}{4} \right) \beta^2 \cos^6 \Theta + \\ + \left(a^2 - \frac{b^2}{4} \right)^2 \beta^2 (1 + \beta) \cos^4 \Theta - \\ - \left(a^2 - \frac{b^2}{4} \right)^4 \beta^4 (1 + \beta) = 0, \quad (28)$$

которое представляет собой алгебраическое уравнение четвёртой степени относительно переменных a^2 и b^2 , где

$$a = \frac{\omega}{k} - \frac{v_0}{2} \cos \Theta, \quad b = v_0 \cos \Theta.$$

Уравнение (28) было приведено без вывода в работе [34] и является записанным в другом виде аналогом уравнения (27). Оно использовалось в указанной работе для анализа продольных и косых возмущений. Это уравнение при заданных v_0 и Θ описывает восемь ветвей колебаний. В результате может получиться очень сложное и запутанное движение, близкое к турбулентному. Напомним простой пример такого движения — фигуры Лиссажу для двух частот [27]. В природных условиях скорость плазменного потока v_0 постоянно изменяется. Поэтому можно ожидать, что должна постоянно происходить генерация большого количества МГД-мод, приводящая к появлению турбулентности на границе геомагнитного хвоста. Заметим, что вопрос турбуликации течения на границе геомагнитного хвоста изучался в работе [49], где было показано, что вследствие хаотизации фаз возмущённых колебаний происходит образование эффективной турбулентной вязкости и формирование широких пограничных слоёв.

Ниже мы кратко представим результаты, вытекающие из дисперсионного уравнения (28) для различных значений величины $\beta = c_s^2/c_A^2$, характеризующей отношение газодинамического давления плазмы к давлению магнитного поля. Мы рассмотрим два случая: $\beta > 1$ и $\beta < 1$. Полный аналитический анализ этого уравнения приведен в работе [34].

СЛАБОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ($\beta > 1$)

При $\beta > 1$ уравнение (28) принимает вид

$$\begin{aligned} & 2 \left[\left(A - \frac{B}{4} \right)^2 \beta^2 (1 + \beta)^2 - \right. \\ & - 2 \left(A + \frac{B}{4} \right) \beta^2 (1 + \beta) \cos^2 \Theta + \beta^2 \cos^4 \Theta \Big] \times \\ & \times \left[\left(A + \frac{B}{4} \right) \beta - \cos^2 \Theta \right] + \\ & + 2 \left(A - \frac{B}{4} \right)^2 \beta^3 \cos^4 \Theta - 2 \left(A + \frac{B}{4} \right) \beta^2 \cos^6 \Theta + \\ & + \left(A - \frac{B}{4} \right)^2 \beta^2 (1 + \beta) \cos^4 \Theta - \left(A - \frac{B}{4} \right)^4 \beta^4 (1 + \beta) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

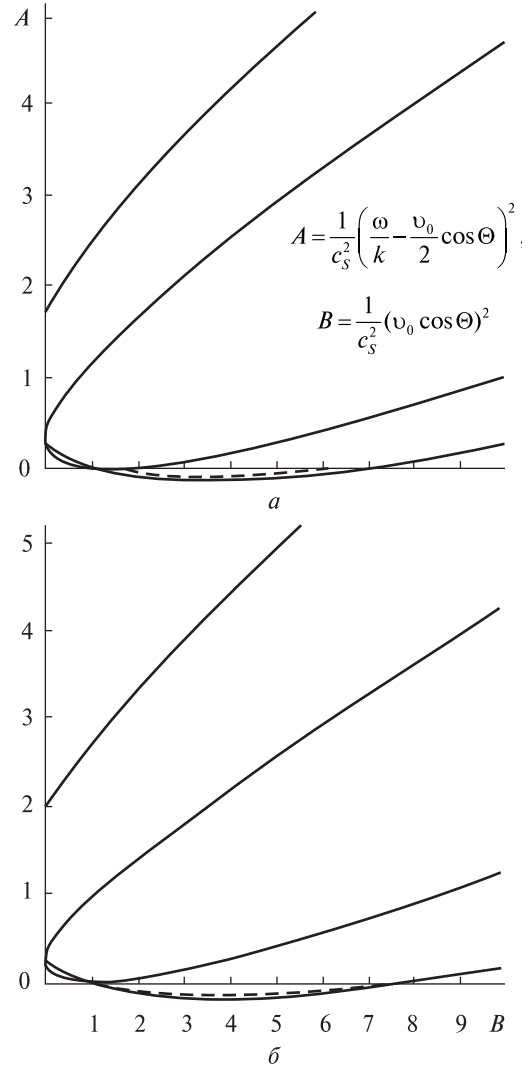
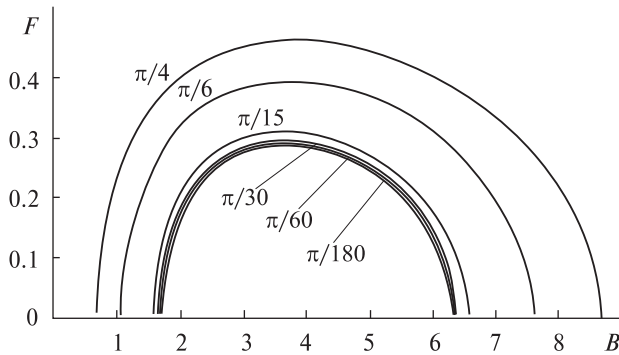


Рис. 1. Диаграмма магнитогидродинамических мод в плоскости $A - B$ для $\beta = 3$: a — при $\Theta = 0$, b — при $\Theta = 30^\circ$

где

$$A = \frac{a^2}{c_s^2}, \quad B = \frac{b^2}{c_s^2}.$$

На рис. 1 представлены диаграммы поведения МГД-мод при $\beta > 1$ ($\beta = 5$), удовлетворяющие дисперсионному уравнению (29). Устойчивым возмущениям соответствует $A \geq 0$, а неустойчивым — $A < 0$. Из восьми ветвей колебаний шесть являются устойчивыми, одна ветвь затухает во времени и еще одна — неустойчива. Видно, что диаграмма косых возмущений ($\Theta \neq 0$) на рис. 1, b качественно не отличается от диаграммы продольных возмущений ($\Theta = 0$) на рис. 1, a .



Полагая $\beta \gg 1$ и используя разложение по малому параметру $1/\beta$, из уравнения (29) для неустойчивой ветви колебаний получаем

$$\omega = \frac{kv_0}{2} \cos \Theta + ikc_s \left\{ \left[\frac{v_0^2}{c_s^2} \cos^2 \Theta \left(1 + \frac{\sin^2 \Theta}{\beta} \right) + 1 + \frac{2\sin^2 \Theta}{\beta} - \frac{2\cos^2 \Theta}{\beta} \right]^{1/2} - \frac{v_0^2}{4c_s^2} \cos^2 \Theta - 1 - \frac{\sin^2 \Theta}{\beta} \right\}^{1/2}. \quad (30)$$

Из (30) следует, что нарастающие во времени возмущения могут распространяться под любыми малыми углами, включая $\Theta = 0$, что согласуется с результатами [52].

На рис. 1 пунктиром отмечены кривые, соответствующие неустойчивости КГ, рассчитанные по формуле (30). Видно, что имеет место хорошее соответствие численных расчетов с аналитической формулой.

На рис. 2 представлены зависимости безразмерного инкремента $F = \gamma/(kc_s)$ (см. (30)) от $v_0 \cos \Theta$ при $\beta = 3$ для различных значений угла Θ . Видно, что величина инкремента и интервал скоростей, в котором развивается неустойчивость КГ, у косых возмущений больше, чем у продольных. Этот результат находится в полном соответствии с выводами работы [50].

СИЛЬНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ($\beta < 1$)

В этом случае уравнение (28) удобно представить в виде

$$2 \left[\left(C - \frac{D}{4} \right)^2 (1 + \beta)^2 - 2(1 + \beta) \beta \cos^2 \Theta \left(C + \frac{D}{4} \right) + \beta^2 \cos^4 \Theta \right] \times$$

Рис. 2. Зависимость функции F от углов $\Theta \leq 45^\circ$ для $\beta = 0.3$ на плоскости $F - B$, где

$$F = \left\{ \left[\frac{v_0^2}{c_s^2} \cos^2 \Theta \left(1 + \frac{\sin^2 \Theta}{\beta} \right) + 1 + \frac{2\sin^2 \Theta}{\beta} - \frac{2\cos^2 \Theta}{\beta} \right]^{1/2} - \frac{v_0^2}{4c_s^2} \cos^2 \Theta - 1 - \frac{\sin^2 \Theta}{\beta} \right\}^{1/2}, \quad B = \frac{1}{c_s^2} (v_0 \cos \Theta)^2$$

$$\times \left(C + \frac{D}{4} - \cos^2 \Theta \right) + 2\beta \left(C - \frac{D}{4} \right) \cos^4 \Theta - 2\beta \left(C + \frac{D}{4} \right) \cos^6 \Theta + \left(C - \frac{D}{4} \right)^2 (1 + \beta) \cos^4 \Theta - \left(C - \frac{D}{4} \right)^4 (1 + \beta) = 0. \quad (31)$$

Здесь

$$C = \frac{a^2}{c_A^2}, \quad D = \frac{b^2}{c_A^2}.$$

Диаграммы поведения МГД-мод при $\beta < 1$ ($\beta = 0.3$), удовлетворяющих дисперсионному уравнению (31), приведены на рис. 3. Неустойчивым возмущениям соответствует $C < 0$, устойчивым — $C \geq 0$. Диаграмма для косых мод (рис. 3, б) отличается от диаграммы для продольных возмущений, представленной на рис. 3, а, наличием неустойчивой ветви.

Полагая $\beta \ll 1$, из (31) разложением по малому параметру β находим, что частота и инкремент неустойчивой моды в случае сильного магнитного поля ($\beta < 1$) имеют вид

$$\omega = \frac{kv_0}{2} \cos \Theta + ikc_A \left\{ \left[\frac{v_0^2}{c_A^2} \cos^2 \Theta (1 + \beta \sin^2 \Theta) + 1 + 2\beta \sin^2 \Theta + (1 + 2\beta) \cos^4 \Theta - 2(1 + \beta) \cos^2 \Theta \right]^{1/2} - \frac{v_0^2}{4c_A^2} \cos^2 \Theta - 1 - \beta \sin^2 \Theta \right\}^{1/2}. \quad (32)$$

Кривая инкремента, полученная с использованием формулы (32), на рис. 3, б практически неотличима от кривой, полученной из численных расчетов.

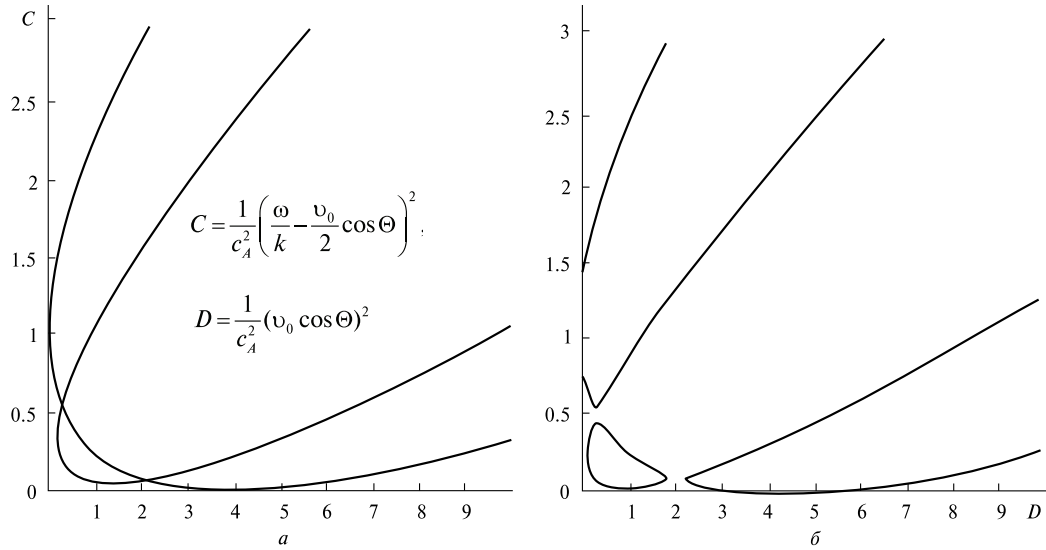


Рис. 3. Диаграмма магнитогидродинамических мод в плоскости $C-D$ для $\beta = 0.3$: a — при $\Theta = 0$, b — при $\Theta = 30^\circ$ и $\theta = 0^\circ$

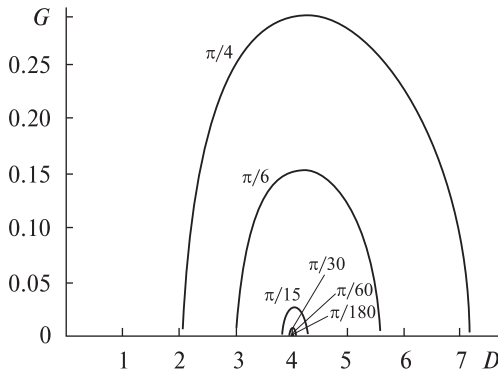


Рис. 4. Зависимость функции G от углов $\Theta \leq 30^\circ$ для $\beta = 0.3$ на плоскости $G-D$, где

$$G = \left\{ \left[\frac{v_0^2}{c_A^2} \cos^2 \Theta (1 + \beta \sin^2 \Theta) + 1 + 2\beta \sin^2 \Theta + (1 + 2\beta) \cos^4 \Theta - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(1 + \beta) \cos^2 \Theta \right]^{1/2} - \frac{v_0^2}{4c_A^2} \cos^2 \Theta - 1 - \beta \sin^2 \Theta \right\}^{1/2}, \\ D = \frac{1}{c_A^2} (v_0 \cos \Theta)^2$$

На рис. 4 представлены зависимости функции безразмерного инкремента $G = \gamma / (kc_A)$ от углов $\Theta \leq 30^\circ$ при $\beta = 0.3$. Видно, что при таких углах величина $\hat{\gamma}$ пренебрежимо мала и локализована вблизи точки $v_0 = 2c_A$, в которой при $\Theta = 0$ она обращается в ноль. Этот результат свидетельствует о генерации при малых углах неустойчивых мод с исчезающе малыми инкрементами, что полностью согласуется с результатами работы [31].

Из (32) следует, что поперечные возмущения ($\Theta \rightarrow \pi/2$), как и в случае слабого магнитного поля (30), будут устойчивыми для скоростей $v_0^2 \leq 4c_A^2$.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Основные результаты работы следующие.

- Получено уравнение малых колебаний (8) для МГД-мод, распространяющихся по поверхности раздела двух однородных плазменных потоков, движущихся с разными скоростями выше и ниже поверхности раздела.
- Для этого уравнения получены граничные условия (16) и (17).
- Из уравнений (8), (16) и (17) найдено дисперсионное уравнение (19), учитывающее сжимаемость среды и магнитное поле. С помощью этого уравнения проанализирован ряд предель-

ных случаев. Для несжимаемых сред из этого уравнения получено дисперсионное уравнение (20), обобщающее результаты работы [20] на случай косых волн. Было продемонстрировано, что в случае обычной гидродинамики уравнение (19) совпадает с дисперсионным уравнением работы [19], в которые впервые была отмечена особая роль косых возмущений.

- Для аналитического и численного анализа МГД-мод в рамках модели потоков с одинаковыми параметрами, уравнение (19) было редуцировано к уравнению (27). Было показано, что это уравнение описывает все основные особенности неустойчивости КГ.

- Уравнение (27) было сведено к уравнению (28), которое описывает восемь ветвей колебаний при фиксированной скорости потока v_0 и угла Θ . Отмечено, что в результате получается сложное и запутанное движение плазмы, близкое к турбулентному. Это уравнение проанализировано для различных значений величины β , характеризующей отношение газодинамического давления к давлению магнитного поля.

- Анализ уравнения (28) показал, что из восьми ветвей колебаний шесть являются устойчивыми, одна ветвь затухает во времени и ещё одна является неустойчивой. Продemonстрировано, что условие возникновения неустойчивости КГ зависит от отношения газодинамического давления плазмы к давлению магнитного поля, т.е. от величины β , и от угла Θ распространения возмущений относительно вектора скорости. При слабом магнитном поле ($\beta > 1$) неустойчивость реализуется как на продольных ($\Theta = 0$), так и на косых возмущениях ($\Theta \neq 0$). Их фазовая скорость меньше скорости течения ($\omega/k \sim v_0 \cos \Theta/2$), а инкремент существенно больше, чем для продольных возмущений (рис. 2, 4). В случае сильного магнитного поля ($\beta < 1$) неустойчивость развивается только на косых возмущениях.

- Отмечено, что интервалы скоростей, на которых развивается неустойчивость КГ, для косых возмущений существенно больше, чем такие же интервалы для продольных возмущений (см. рис. 2, 4). Это справедливо как для случая $\beta > 1$, так и в случае $\beta < 1$. Из (30) и (32) при $\Theta \rightarrow \pi/2$ следует, что косые возмущения могут быть не-

стойчивыми даже при больших сверхзвуковых скоростях.

Таким образом, косые возмущения играют доминирующую роль в генерации неустойчивости КГ. Несмотря на преобладающую роль косых возмущений при возбуждении неустойчивости КГ, в большинстве современных работ при аналитическом и численном анализе указанной неустойчивости их влияние практически не учитывается (см. замечание в работе [50]).

Работа выполнялась при поддержке гранта 90312 фонда Фольксваген («VW-Stiftung») и Международного института космических исследований ISSI-BJ, Пекин, Китай, а также при частичной поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по физике плазмы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод дисперсионных уравнений (19) и (27)

Из уравнений (6) и (7) находим

$$v'_x = -i \frac{\partial \Pi'}{\partial x} \frac{(\omega - k_y v_0)}{\rho_0 (\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}. \quad (\text{П1})$$

Комбинация выражений (16) и (П1) дает (18). Из (9) и (18) следует

$$\frac{\chi_1}{\rho_{01} (\omega - k_y v_{01})^2 - k_y^2 B_{01}^2} + \frac{\chi_2}{\rho_{02} (\omega - k_y v_{02})^2 - k_y^2 B_{02}^2} = 0, \quad (\text{П2})$$

где χ_1 и χ_2 определяются выражениями (9). Полагаем, что имеет место условие

$$\frac{\chi_1}{\rho_{01} (\omega - k_y v_{01})^2 - k_y^2 B_{01}^2} \neq \frac{\chi_2}{\rho_{02} (\omega - k_y v_{02})^2 - k_y^2 B_{02}^2}. \quad (\text{П3})$$

Умножив уравнение (П2) на выражение

$$\frac{\chi_1}{\rho_{01} (\omega - k_y v_{01})^2 - k_y^2 B_{01}^2} - \frac{\chi_2}{\rho_{02} (\omega - k_y v_{02})^2 - k_y^2 B_{02}^2}, \quad (\text{П4})$$

получаем дисперсионное уравнение (19).

Заметим, что условие (П3) может нарушаться, например, в системе с параметрами

$$\begin{aligned} \rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0, \quad c_{s1} = c_{s2} = c_s, \\ B_{01} = B_{02} = B_0, \quad v_{01} \neq v_{02}. \end{aligned} \quad (\text{П5})$$

В этом случае при частоте

$$\omega = \frac{k_y}{2} (v_{01} + v_{02}) \quad (\text{П6})$$

выражение (П4) обращается в ноль, а уравнение (П2) в ноль не обращается. Поэтому для равновесных параметров (П5) корень (П6) должен быть исключен из рассмотрения при анализе уравнения (27).

ЛИТЕРАТУРА

- Буринская Т. М. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца для потока плазмы, ограниченного в пространстве. *Физика плазмы*. 2008. 14, № 11. С. 1013—1020.
- Госсард Э., Хук У. *Волны в атмосфере*. М.: Мир, 1978. 532 с.
- Григорьев Ю. Н., Ершов И. В., Зырянов К. И. Численное моделирование волн Кельвина-Гельмгольца в слабо неравновесном молекулярном газе. *Вычисл. техн.* 2008. 13, № 5. С. 25—38.
- Гульельми А. В., Потапов А. С., Клайн Б. И. Комбинированная неустойчивость Релея-Тейлора-Кельвина-Гельмгольца на магнитопаузе. *Солнечно-земная физ.* 2010. Вып. 15. С. 24—27.
- Ершкович А. И., Нусинов А. А., Черников А. А. О неустойчивости Кельвина — Гельмгольца в кометных хвостах I типа. *Астрон. журн.* 1972. 49. С. 866—871.
- Загородний А. Г., Черемных О. К. *Введение в физику плазмы*. Киев: Наук. думка, 2014. 695 с.
- Зеленый Л. М., Веселовский И. С. (ред.). *Плазменная геологофизика*. Москва: Физматлит, 2008. Т. 2. 672 с.
- Зеленый Л. М., Григоренко Е. Е., Федоров А. О. Пространственно-временные ионные структуры в хвосте магнитосферы Земли: бимлеты, как результат неадиабатического импульсного ускорения плазмы. *Письма в ЖЭТФ*. 2004. 80. С. 771—783.
- Кременецкий И. А., Черемных О. К. *Космическая погода: механизмы и проявления*. Киев: Наук. думка, 2009. 144 с.
- Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К. *Математические модели сплошных сред*. Киев: Наук. думка, 2010. 552 с.
- Ламб Г. *Гидродинамика*. Москва: ОГИЗ, 1947. 929 с.
- Ландау Л. Д. Устойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде. *Докл. АН СССР*. 1944. 44. С. 339—342.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Н. М. *Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика*. Москва: Наука, 1986. 736 с.
- Леонович А. С., Мазур В. А., Козлов Д. А. МГД-волны в геомагнитном хвосте: Обзор. *Солнечно-земная физ.* 2015. 1, № 1. С. 4—42.
- Леонович А. С., Мазур В. А., Сенаторов В. Н. Альфвеновский волновод. *ЖЭТФ*. 1983. 85, № 1(7). С. 141—145.
- Михайловский А. Б. *Теория плазменных неустойчивостей. Т.1. Неустойчивости однородной плазмы*. Москва: Атомиздат, 1970. 294 с.
- Половин Р. В., Демуцкий В. П. *Основы магнитной гидродинамики*. Москва: Энергоатомиздат, 1987. 208 с.
- Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика. *Успехи физ. наук*. 1957. 62, № 3. С. 247—303.
- Сыроватский С. И. Неустойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде. *ЖЭТФ*. 1954. 27. С. 121—123.
- Сыроватский С. И. Об устойчивости тангенциальных разрывов в магнитогидродинамической среде. *ЖЭТФ*. 1953. 24. С. 622—630.
- Троицкая В. А., Гульельми А. В. Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы. *Успехи физ. наук*. 1969. 97. С. 453—494.
- Трунев А. П. Моделирование атмосферных вихревых течений на Юпитере и Сатурне. *Науч. журн. Куб. ГАУ*. 2017. № 126 (02). 25 с. DOI: 10.21515/1990-4665-126-050.
- Уизем Д. *Линейные и нелинейные волны*. Москва: Мир, 1977. 622 с.
- Фабер Т. Е. *Гидроаэродинамика*. Москва: Постмаркет, 2001. 560 с.
- Фридман А. М. Модифицированный критерий Ландау стабилизации неустойчивости тангенциального разрыва скорости в сжимаемой среде. *Успехи физ. наук*. 1990. 160, вып. 10. С. 179—183.
- Шевелёв М. М., Буринская Т. М. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца для цилиндрического потока плазмы с произвольной температурой. *Физ. плазмы*. 2011. 37. С. 1081—1095.
- Яворский Б. М., Детлаф А. А. *Справочник по физике*. Москва: Наука, 1985. 512 с.
- Agapitov A. V., Cheremnykh O. K. Natural oscillations of the Earth magnetosphere associated with solar wind sudden impulses. *Ukr. Phys. J.* 2008. 53, № 5. P. 506—510.
- Axford W. I. Viscous interaction between the solar wind and the Earth's magnetosphere. *Planet. Space Sci.* 1964. 12. P. 45—51.
- Burdo O. S., Cheremnykh O. K., Verkhoglyadova O. P. Study of ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth. *Izv. Akad. Nauk. Fiz.* 2000. 64, № 9. P. 1896—1900.
- Burinskaya T. M., Shevelev M. M., Rauch I.-L. Kelvin-Helmholtz instability for a bounded plasma flow in a longitudinal magnetic field. *Plasma Phys. Repts.* 2011. 37, № 1. P. 43—55.
- Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Cambridge: Univ. Press, 1961. 652 p.
- Cheremnykh O. K. Transversally small-scale perturbations in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces. *Plasma Phys. and Contr. Fusion*. 2010. 52(9). 095006.
- Cheremnykh O., Cheremnykh S., Kozak L., Kronberg E. Magnetohydrodynamic waves and the Kelvin-Helmholtz instability at the boundary of plasma mediums. *Phys. Plasmas*. 2018. 25, № 10. id. 102119.
- Cheremnykh O. K., Danilova V. V. Transverse small-scale MHD disturbances in space plasma with magnetic

- surfaces. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2011. 27, № 2. P. 98—108.
36. Cheremnykh O., Fedun V., Ladikov-Roev Yu., Verth G. On the Stability of Incompressible MHD Modes in Magnetic Cylinder with Twisted Magnetic Field and Flow. *Astrophys. J.* 2018. 866, № 2. P. 86—98.
 37. Cheremnykh O. K., Klimushkin D. Y., Kostarev D. V. On the structure of azimuthally small-scale UKF oscillations of hot space plasma in a curved magnetic field. Modes with continuous spectrum. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2014. 30, № 5. P. 209—222.
 38. Dai L., Takahashi K., Lysak R., et al. Storm time occurrence and spatial distribution of Pc4 poloidal ULF waves in the inner magnetosphere: A Van Allen Probes statistical study. *J. Geophys. Res.* 2015. 120. P. 4748—4762.
 39. Delamere P. A., Wilson R. J., Masters A. Kelvin-Helmholtz instability at Saturn's magnetosphere: Hybrid simulations. *J. Geophys. Res.* 2011. 116. A10222 (16 p).
 40. Fejer J. A. Hydromagnetic stability at fluid velocity discontinuity between compressible fluids. *Phys. Fluids*. 1964. 7, № 4. P. 499—503.
 41. Foulon C., Farrugia C. I., Fazakerley A. N., et al. Evolution of Kelvin-Helmholtz activity on the dusk flank magnetopause. *J. Geophys. Res.* 2008. 113. A11203 (12 p).
 42. Grigorenko E. E., Burinskaya T. M., Shevelev M., et al. Large-scale fluctuations of PBSL magnetic flux tubes induced by the field-aligned motion of highly accelerated ions. *Ann. géophys.* 2010. 28. P. 1273—1288.
 43. Grigorenko E. E., Sauvaud J. A., Zelenyi L. M. Spatial-Temporal characteristics of ion beamlets in the plasma sheet boundary layer of magnetotail. *J. Geophys. Res.* 2007. 112. A05218. doi: 10.1029/2006 JA 011986.
 44. Helmholtz H. L. F. On the discontinuous movement of fluids. *Mon. Rept. Roy. Prussian Acad. Phil. in Berlin*. 1868. 28. P. 215—218.
 45. Jokipii J. R., Davis L. Long-wavelength turbulence and heating of the solar wind. *Astrophys. J.* 1969. 156. P. 1101—1106.
 46. Kelling A. Alfvén waves and their roles in the dynamics of the Earth's magnetotail: A review. *Space Sci. Revs.* 2009. 142. P. 73—156.
 47. Korzhov N. P., Mishin V. V., Tomozov V. M. On the role of plasma parameters and the Kelvin-Helmholtz instability in a viscous interaction of solar wind streams. *Planet and Space Sci.* 1984. 32, N 9. P. 1169—1178.
 48. Kyoung-Joo Hwang. Magnetopause Waves Controlling the Dynamics of Earth's Magnetosphere. *J. Astron. and Space Sci.* 2015. 32, № 1. P. 1—11.
 49. Mishin V. V. Velocity boundary layers in the distant geotail and Kelvin-Helmholtz instability. *Planet. and Space Sci.* 2005. 53. P. 157—160.
 50. Mishin V. V., Tomozov V. M. Kelvin-Helmholtz Instability in the Solar Atmosphere, Solar Wind and Geomagnetosphere. *Solar Phys.* 2016. 291, № 11. P. 3165—3184.
 51. Miura A. Kelvin-Helmholtz instability at the magnetospheric boundary: Dependence on the magnetosheath sonic Mach number. *J. Geophys. Res.* 1992. 97. P. 10655—10675.
 52. Miura A., Pritchett P. L. Nonlocal stability analysis of MHD Kelvin-Helmholtz instability in a compressible plasma. *J. Geophys. Res.* 1982. 87. P. 7431—7444.
 53. Parker E. N. Dynamical Properties of Stellar Coronas and Stellar Winds. *Astrophys. J.* 1964. 139. P. 690—709.
 54. Thompson W. Hydrokinetic solution and observations. *Phil. Mag.* 1871. 42. P. 362—377.
 55. Rankin R., Fenrich F., Tikhonchuk V. T. Shear Alfvén waves on stretched magnetic field lines near midnight in Earth's magnetosphere. *Geophys. Res. Lett.* 2000. 27. P. 3265—3268.
 56. Ryutova M., Berger T., Frank Z., et al. Observation of plasma instabilities in quiescent prominences. *Solar Phys.* 2010. 267. P. 75—94.
 57. Smith B. A., Saderlom L. A., Beeber R., et al. The Jupiter system through the eyes of Voyager-1. *Science*. 1979. 204, № 4396. P. 951—971.
 58. Wolff R. S., Goldstein B. E., Yeates C. M. The onset and development of Kelvin-Helmholtz instability at the Venus ionosphere. *J. Geophys. Res.* 1980. 85A, № 12. P. 76—97.
 59. Zhang B., Delamere P. A., Ma X., Burkholder B., Wiltberger M., Lyon J. G., Merkiv V. G., Sorathia K. A. Asymmetric Kelvin-Helmholtz Instability at Jupiter's Magnetopause Boundary: Implications for Corotation-Dominated Systems. *Geophys. Res. Lett.* 2017. 45. P. 56—63.

Стаття надійшла до редакції 30.10.2018

REFERENCES

1. Burinskaya T. M. (2008). Kelvin-Helmholtz Instability in a Bounded Plasma Flow. *Plasma Phys. Reports*, 34(11), 936—943.
2. Gossard E. E., Hooke W. H. (1975). *Waves in the Atmosphere: Atmospheric Infrasound and Gravity Waves, Their Generation and Propagation*. Elsevier Science Ltd., 472 p.
3. Grigoriev Yu. N., Ershov I. V., Zyryanov K. I. (2008). Numerical modeling of Kelvin — Helmholtz waves in a weakly nonequilibrium molecular gas. *Computational technol.*, 13(5), 25—38 (In Russian).
4. Guglielmi A. V., Potapov A. S., Klein B. I. (2010). The combined Rayleigh — Taylor — Kelvin — Helmholtz instability on a magnetopause. *Solar-Terrestrial phys.*, 15, 24—27 (In Russian).
5. Ershkovich A. I., Nusinov A. A., Chernikov A. A. (1972). On the Kelvin — Helmholtz instability in cometary tails of type I. *Astron. J.*, 49, 866—871 (In Russian).
6. Zagorodniy A. G., Cheremnykh O. K. (2014). *Introduction to plasma physics*. Kyiv: Naukova Dumka.
7. Zelenyi L. M., Veselovskiy I. S. (Ed.). (2008). *Cosmic geoheliophysics*. Physmatlit (Moscow), 2, 672 p. (In Russian).
8. Zelenyi L. M., Grigorenko E. E., Fedorov A. O. (2004). Spatial-Temporal Ion Structures in the Earth's Magneto-

- tail: Beamlets as a Result of Nonadiabatic Impulse Acceleration of the Plasma. *JETP Lett.*, 80(10), 663–673.
9. Kremenetsky I. A., Cheremnykh O. K. (2009). *Space weather: mechanisms and manifestations*. Kyiv: Naukova Dumka.
10. Ladikov-Roev Yu. P., Cheremnykh O. K. (2010). *Mathematical models of continuum*. Kyiv: Naukova Dumka.
11. Lamb H. (1932). *Hydrodynamics* (6th ed.). Cambridge: Univ. Press.
12. Landau L. D. (1944). Stability of tangential discontinuities in a compressible medium. *Repts Acad. Sci. USSR*, 44, 339–342.
13. Landau L. D., Lifshits N. M. (1986). *Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics*. M.: Science.
14. Leonovich A. S., Mazur V. A., Kozlov D. A. (2015). MHD waves in the geomagnetic tail: A Review. *Solar-Terrestrial Phys.*, 1(1), 4–42 (In Russian).
15. Leonovich A. S., Mazur V. A., Senatorov V. N. (1983). Alfvén waveguide. *JETP*, 58(1), 83–85.
16. Mikhailovsky A. B. (1970). *Theory of plasma instabilities Vol. 1. Homogeneous plasma instabilities*. Moscow: Atomizdat (In Russian).
17. Polovin R. V., Demutsky V. P. (1987). *The basics of magnetic hydrodynamics*. Moscow: Energoatomizdat.
18. Syrovatsky S. I. (1957). Magnetic fluid dynamics. *UFN*, 62(3), 247–303 (In Russian).
19. Syrovatsky S. I. (1954). Instability of tangential discontinuities in a compressible medium. *JETP*, 27, 121–123 (In Russian).
20. Syrovatsky S. I. (1953). On the stability of tangential discontinuities in a magnetohydrodynamic medium. *JETP*, 24, 622–630 (In Russian).
21. Troitskaya V. A., Guglielmi A. V. (1969). Geomagnetic pulsations and diagnostics of the magnetosphere. *UFN*, 12, 195–218.
22. Trunev A. P. (2017). *Simulation of atmospheric vortex flows on Jupiter and Saturn*. Krasnodar: KubGAU (In Russian).
23. Whitham G. (1999). *Linear and nonlinear waves*. Pub. Wiley-Interscience.
24. Faber T. E. (2001). *Hydroaerodynamics*. Moscow: Postmarket (In Russian).
25. Friedman A. M. (1990). Modified criterion for the Landau stabilization of the instability of a tangential velocity discontinuity in a compressible medium. *UFN*, 33(10), 865–867.
26. Shevelev M. M., Burinskaya T. M. (2011). Kelvin–Helmholtz instability of a cylindrical plasma flow with an arbitrary temperature. *Plasma Phys. Repts*, 37(12), 1006–1019.
27. Yavorsky B. M., Detlaf A. A. (1985). *Handbook of physics*. Moscow: Science.
28. Agapitov A. V., Cheremnykh O. K. (2008). Natural oscillations of the Earth magnetosphere associated with solar wind sudden impulses. *Ukr. Phys. J.*, 53(5), 506–510.
29. Axford W. I. (1964). Viscous interaction between the solar wind and the Earth’s magnetosphere. *Planet. and Space Sci.*, 12, 45–51.
30. Burdo O. S., Cheremnykh O. K., Verkhoglyadova O. P. (2000). Study of ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth. *Izv. Akad. Nauk. Fiz.*, 64 (9), 1896–1900.
31. Burinskaya T. M., Shevelev M. M., Rauch I.-L. (2011). Kelvin — Helmholtz instability for a bounded plasma flow in a longitudinal magnetic field. *Plasma Phys. Repts*, 37(1), 43–55.
32. Chandrasekhar S. (1961). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Cambridge: Univ. Press.
33. Cheremnykh O. K. (2010). Transversally small-scale perturbations in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces. *Plasma Phys. and Contr. Fusion*, 52(9), 095006.
34. Cheremnykh O., Cheremnykh S., Kozak L., Kronberg E. (2018). Magnetohydrodynamic waves and the Kelvin–Helmholtz instability at the boundary of plasma mediums. *Phys. Plasmas*, 25(10), 102119. <https://doi.org/10.1063/1.5048913>.
35. Cheremnykh O. K., Danilova V. V. (2011). Transverse small-scale MHD disturbances in space plasma with magnetic surfaces. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*, 27(2), 98–108.
36. Cheremnykh O., Fedun V., Ladikov-Roev Yu., Verth G. (2018). On the stability of incompressible MHD modes in magnetic cylinder with twisted magnetic field and flow. *Astrophys. J.*, 866(2), 86–98.
37. Cheremnykh O. K., Klimushkin D. Y., Kostarev D. V. (2014). On the structure of azimuthally small-scale UKF oscillations of hot space plasma in a curved magnetic field. Modes with continuous spectrum. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*, 30(5), 209–222.
38. Dai L., Takahashi K., Lysak R., et al. (2015). Storm time occurrence and spatial distribution of Pc4 poloidal ULF waves in the inner magnetosphere: A Van Allen Probes statistical study. *J. Geophys. Res.*, 120, 4748–4762.
39. Delamere P. A., Wilson R. J., Masters A. (2011). Kelvin — Helmholtz instability at Saturn’s magnetosphere: Hybrid simulations. *J. Geophys. Res.*, 116, A10222 (16 p).
40. Fejer J. A. (1964). Hydromagnetic stability at fluid velocity discontinuity between compressible fluids. *Phys. Fluids*, 7(4), 499–503.
41. Foullon C., Farrugia C. I., Fazakerley A. N., et. al. (2008). Evolution of Kelvin — Helmholtz activity on the dusk flank magnetopause. *J. Geophys. Res.*, 113, A11203 (12 p).
42. Grigorenko E. E., Burinskaya T. M., Shevelev M., et. al. (2010). Large-scale fluctuations of PBSL magnetic flux tubes induced by the field-aligned motion of highly accelerated ions. *Ann. Geophys.*, 28, 1273–1288.
43. Grigorenko E. E., Sauvaud J. A., Zelenyi L. M. (2007). Spatial-Temporal characteristics of ion beamlets in the

- plasma sheet boundary layer of magnetotail. *J. Geophys. Res.*, 112, A05218. doi: 10.1029/2006 JA 011986.
44. Helmholtz H. L. F. (1868). On the discontinuous movement of fluids. *Mon. Rept. Roy. Prussian Acad. Phil. in Berlin*, 28, 215–218.
 45. Jokipii J. R., Davis L. (1969). Long-wavelength turbulence and heating of the solar wind. *Astrophys. J.*, 156, 1101–1106.
 46. Kelling A. (2009). Alfvén waves and their roles in the dynamics of the Earth's magnetotail: A review. *Space Sci. Rev.*, 142, 73–156.
 47. Korzhov N. P., Mishin V. V., Tomozov V. M. (1984). On the role of plasma parameters and the Kelvin — Helmholtz instability in a viscous interaction of solar wind streams. *Planet and Space. Sci.*, 32(9), 1169–1178.
 48. Kyoung-Joo Hwang. (2015). Magnetopause waves controlling the dynamics of Earth's magnetosphere. *J. Astron. Space Sci.*, 32(1), 1–11.
 49. Mishin V. V. (2005). Velocity boundary layers in the distant geotail and Kelvin — Helmholtz instability. *Planet. and Space Sci.*, 53, 157–160.
 50. Mishin V. V., Tomozov V. M. (2016). Kelvin — Helmholtz Instability in the Solar Atmosphere, Solar Wind and Geomagnetosphere. *Solar Phys.*, 291(11), 3165–3184.
 51. Miura A. (1992). Kelvin — Helmholtz instability at the magnetospheric boundary: Dependence on the magnetosheath sonic Mach number. *J. Geophys. Res.*, 97, 10655–10675.
 52. Miura A., Pritchett P. L. (1982). Nonlocal stability analysis of MHD Kelvin — Helmholtz instability in a compressible plasma. *J. Geophys. Res.*, 87, 7431–7444.
 53. Parker E. N. (1964). Dynamical properties of stellar coronas and stellar winds. *Astrophys. J.*, 139, 690–709.
 54. Thompson W. (1871). Hydrokinetic solution and observations. *Phil. Mag.*, 42, 362–377.
 55. Rankin R., Fenrich F., Tikhonchuk V. T. (2000). Shear Alfvén waves on stretched magnetic field lines near midnight in Earth's magnetosphere. *Geophys. Res. Lett.*, 27, 3265–3268.
 56. Ryutova M., Berger T., Frankz Z., et al. (2010). Observation of plasma instabilities in quiescent prominences. *Solar Phys.*, 267, 75–94.
 57. Smith B. A., Saderlom L. A., Beeber R., et. al. (1979). The Jupiter system through the eyes of Voyager-1. *Science*, 204(4396), 951–971.
 58. Wolff R. S., Goldstein B. E., Yeates C. M. (1980). The onset and development of Kelvin — Helmholtz instability at the Venus ionosphere. *J. Geophys. Res.*, 85A(12), 76–97.
 59. Zhang B., Delamere P. A., Ma X., Burkholder B., Wiltberger M., Lyon J. G., Meriv V. G., Sorathia K. A. (2017). Asymmetric Kelvin — Helmholtz instability at Jupiter's magnetopause boundary: Implications for corotation-dominated systems. *Geophys. Res. Lett.*, 45, 56–63.

Received 30.10.2018

О. К. Черемных¹, С. О. Черемных¹,
Л. В. Козак^{1,2}, Кронберг Е. О.³

¹ Інститут космічних досліджень
Національної академії наук України
і Державного космічного агентства України,
Київ, Україна

² Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

³ Інститут Макса Планка, Геттінген, Німеччина

НЕСТІЙКІСТЬ КЕЛЬВІНА — ГЕЛЬМГОЛЬЦА І МАГНІТОГІДРОДИНАМІЧНІ МОДИ НА МЕЖІ ГЕОМАГНІТНОГО ХВОСТА

Описано математичні і теоретичні методи дослідження поздовжніх і похилих МГД-мод, що генеруються сонячним вітром і локалізовані поблизу границі геомагнітного хвоста. Зазначені моди, на відміну від МГД-мод, що поширюються всередині замкнутої частини магнітного поля Землі, практично не досліджувалися ні теоретично, ні експериментально. Показано, що задача про МГД-коливання на межі розділу двох середовищ, що рухаються одне відносно іншого, зводиться до побудови і дослідження рівняння малих коливань, а також формулювання для нього граничних умов. Наведено процедуру отримання дисперсійного рівняння для МГД-мод, локалізованих на межі розділу рухомих та нерухомих плазмових середовищ. Аналітично встановлено, що одна з восьми можливих МГД-мод може бути нестійкою через розвиток нестійкості Кельвіна — Гельмгольца як при слабкому, так і при сильному магнітному полі. Продемонстровано, що похилі збурення, що поширюються під кутом до вектора швидкості середовища, відіграють домінуючу роль при розвитку цієї нестійкості. Відзначено, що генерація великої кількості стійких МГД-мод на межі розділу плазми може призвести до реалізації турбулентного стану плазми. Результати роботи можуть бути використані для опису хвильових процесів на границі геомагнітного хвоста і для пояснення генерації УНЧ-збурень на нічній стороні магнітосфери Землі.

Ключові слова: нестійкість Кельвіна — Гельмгольца, поздовжні та похилі МГД-моди, хвилі, нестискуване замагнічене середовище, хвіст магнітосфери Землі.

O. K. Cheremnykh¹, S. O. Cheremnykh¹,
L. V. Kozak^{1,2}, E. A. Kronberg³

¹ Space Research Institute of the National Academy
of Science of Ukraine and the National Space Agency
of Ukraine, Kyiv, Ukraine

² Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine

³ Max Planck Institute, Göttingen, Germany

INSTABILITY OF KELVIN-HELMHOLTZ AND MAGNETOHYDRODYNAMIC MODES ON THE BOUNDARY OF GEOMAGNETIC TAIL

The paper focuses on the description of mathematical and theoretical methods for studying the longitudinal and oblique MHD modes generated by the solar wind, which are localized near the boundary of the geomagnetic tail. On the contrary to the MHD modes propagating in the inner part of the Earth's magnetic field, these modes have hardly been studied either theoretically or experimentally. It is shown that the problem of MHD oscillations on the boundary between two relatively

moving plasma media is reduced to finding and studying the equation of small variations, as well as finding its boundary conditions. We present the procedure for obtaining the dispersion equation for MHD modes localized on the boundary between moving and stationary plasma media. The analysis revealed that one of the eight possible MHD modes could be unstable due to the development of the Kelvin-Helmholtz instability for both weak and strong magnetic field. It is shown that oblique perturbations propagating at an angle to the velocity vector of the medium play a dominant role in the development of this instability. Moreover, the generation of a large number of stable MHD modes at the plasma boundary can lead to the realization of a turbulent plasma state. The results of the work can be applied in the description of wave processes at the boundary of the geomagnetic tail and in the explanation of the generation of ULF disturbances on the night side of the Earth's magnetosphere.

Keywords: Kelvin-Helmholtz instability, longitudinal and oblique MHD modes, waves in a compressible magnetized medium, the tail of the Earth's magnetosphere.

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2019.02.060>

УДК 580.7:581.44 (477)

О. В. Лобачевська, Н. Я. Кияк, Я. Д. Хоркавців

Інститут екології Карпат Національної академії наук України, Львів, Україна

МОРФОФУНКЦІОНАЛЬНІ ОСОБЛИВОСТІ КЛІТИН ПРОТОНЕМИ *WEISSIA TORTILIS* SPRENG. З РІЗНОЮ ЧУТЛИВІСТЮ ДО ГРАВІТАЦІЇ

Гравітропізм бріофітів є видоспецифічним, залежить від екологічних факторів та життєвої стратегії виду. Мета досліджень полягала у визначенні взаємозв'язку між морфологією клітин протонем *Weissia tortilis* Spreng. у процесі диференціювання, їхньою резистентністю до УФ-опромінення та мінливістю гравітропізму. Встановлено, що формування щільної дернини із коротких нерозгалужених хлоронемних столонів, як додаткової ростової форми протонем моху, забезпечує екранування каулонемних столонів від радіації. Показано, що за особливостями морфогенезу та росту столонів лише каулонемні клітини протонем *W. tortilis* є гравічутливими. На основі проведених порівняльних досліджень рівня гравічутливості та метаболізму вуглеводів *Ceratodon purpureus* Brid. і *W. tortilis* з'ясовано специфічність біохімічних реакцій залежно від умов гравітостимуляції рослин та стійкості до екологічних чинників. Припускається, що виявлена специфічність обумовлена різною толерантністю мохів до впливу стресових чинників: *C. purpureus* — космополітний вид моху, гравічутливий на усіх стадіях розвитку, тоді як *W. tortilis* — аридний вид, гравічутливий лише на стадії каулонемі.

Ключові слова: мохи, гравічутливість, УФ-опромінення, вуглеводний обмін.

ВСТУП

У фенотипі рослин важливою ростовою реакцією є гравітропізм, а у життєвій стратегії — це адаптивна форма росту в локальних умовах екотопу [29, 30]. На основі досліджень гравічутливості і морфогенезу мохоподібних встановлено різноманітність гравіреакцій бріофітів [5, 17, 20, 23, 25]. Гравітропізм є видоспецифічним, його прояв змінюється на різних стадіях розвитку гаметофіту та залежить від екологічних факторів і життєвої стратегії виду. Вивчення й аналіз морфофізіологічних властивостей гравічутливих видів мохів свідчить, що умови імітованої мікрогравітації і втрата векторної дії сили тяжіння модифікують метаболічні процеси та ініціюють поліфункціональні ростові реакції залежно від стадій онтогенезу.

© О. В. ЛОБАЧЕВСЬКА, Н. Я. КИЯК, Я. Д. ХОРКАВЦІВ, 2019

В умовах зміненої сили тяжіння відбуваються суттєві структурно-функціональні перебудови клітин, які призводять до порушень процесів внутрішньоклітинного обміну. Літературні дані щодо модифікацій метаболізму, зокрема вуглеводів, залежно від гравітації, неоднозначні. Так, в умовах реального космічного польоту у пагонах *Ipomoea batatas* (L.) Lam. зменшувалася кількість амілопластів, знижувався рівень нагромадження крохмалю та відбувалася дезорієнтація росту коренів [22], у *Brassica rapa* L. посилювався гідроліз полісахаридів та накопичення розчинних вуглеводів [31], тоді як у *Triticum aestivum* L. вміст крохмалю та водорозчинних вуглеводів не змінювався [38].

Беручи до уваги, що заселення Місяця або Марса у майбутньому можливе, надзвичайно актуальними є дослідження впливу таких стресових фак-

торів, як УФ-випромінювання та іонізаційна радіація, що модифікують дію мікрогравітації та істотно впливають на цикли росту рослин [2, 28, 40].

Ми поставили за мету проаналізувати взаємозв'язок між морфофункціональними властивостями диференціально різних клітин протонеми аридного виду *Weissia tortilis* Spreng., їхньою гравічутливістю та резистентністю до УФ-опромінення. На основі порівняльного аналізу різних за гравічутливістю видів мохів *W. tortilis* і *Ceratodon purpureus* Brid. визначити особливості вуглеводного обміну як визначальної ланки у сприйнятті та передачі гравісигналу.

МАТЕРІАЛ І МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Об'єктом дослідження були природні зразки та лабораторні культури видів мохів: *Weissia tortilis* Spreng., *Ceratodon purpureus* (Hedw.) Brid., *Funaria hygrometrica* Hedw. Зразки *C. purpureus* і *F. hygrometrica* відібрано в околицях м. Львова, в умовах достатнього зволоження та інтенсивності освітлення. Зразки моху *W. tortilis* зібрано у Запорізькій області на відкритій місцевості в умовах високої сонячної радіації та сухого піщаного субстрату. Лабораторну культуру протонеми мохів, отриману зі спор або шляхом регенерації листків гаметофітів, вирощували на 0.75 % агаризованому середовищі Кнопа II у фітотроні: фотоперіод — 16 год, освітлення $40 \text{ мкмоль} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, температура — 20 °С, вологість — 90 %. Гравістимуляцію і кліностатування протонеми проводили аналогічно як у попередній роботі [20].

Оскільки місцезростання досліджуваних видів мохів відрізнялися за рівнем УФ-фону, порівнювали чутливість клітин протонеми до УФ-випромінювання. Для цього 14-денну протонему *C. purpureus*, *F. hygrometrica* і 28-денну *W. tortilis* опромінювали УФ-променями, генерованими бактерицидною лампою OSRAM з інтенсивністю $1...4 \text{ кВт/м}^2$, і за відсотком протонемних дернин, що вижили, оцінювали ступінь толерантності клітин залежно від енергії випромінювання. Вікова різниця між культурою протонеми мохів залежала від швидкості її росту, яка у *W. tortilis* була малою.

Для аналізу розмірів ядер та їхнього положення у клітинах каулонемних столонів і дендродів протонеми використали методику флуоресцент-

ного фарбування барвником 4',6-діамідино-2-феніліндол — DAPI [24]. Препарати аналізували на флуоресцентному мікроскопі „Axio Image M1”.

Активність α -амілази визначали методом В. Б. Іванова [6] та модифікованим йодометричним методом відповідно до зниження інтенсивності забарвлення комплексу крохмаль-йод під дією амілази [39].

Сумарний вміст фенолів визначали фотометрично ($\lambda = 765 \text{ нм}$), використовуючи реактив Фоліна — Деніса та калібрувальну залежність за хлорогенною кислотою [37].

Загальний вміст вуглеводів визначали фенол-сульфатним методом [36]. Вміст водорозчинних вуглеводів та крохмалю оцінювали спектрофотометрично із застосуванням пікринової кислоти [19].

Досліди проводили у 3-кратній повторності, отримані дані опрацьовували статистично. Вірогідність різниці між середніми значеннями показників встановлювали за критерієм Стюдента [16].

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХНЕ ОБГОВОРЕННЯ

При вивченні поширення *W. tortilis* в аридних та субаридних умовах Середньої Азії та півдня України у роботі [1] було зроблено висновок про високу резистентність виду до УФ-опромінення. Відомо, що великі або кумулятивно малі дози радіації руйнують біологічні системи унаслідок змін в організації ДНК, які часто призводять до мутацій або загибелі організму. Окрім того, радіаційне опромінення високої енергії використовується для генерації нових мутантів рослин [2, 3]. Підставою для вивчення впливу іонізаційного випромінювання на рослини є з'ясування механізмів стійкості біологічних систем.

Чи є зв'язок між морфофункціональною організацією протонеми *W. tortilis* та її реакцією на гравітаційне подразнення і підвищеною стійкістю рослин моху до УФ-випромінювання? Раніше було встановлено, що УФ-мутанти *C. purpureus* зберігали негативний гравітропізм, а кінетика гравітропного згину була подібною до протонеми дикого типу [5]. У *W. tortilis* протонемна стадія зі специфічним диференціюванням клітин на каулонему і дендроді хлоронемного типу зберігається упродовж життєвого циклу. Таке диференціювання протонеми мохів роду *Weissia* на

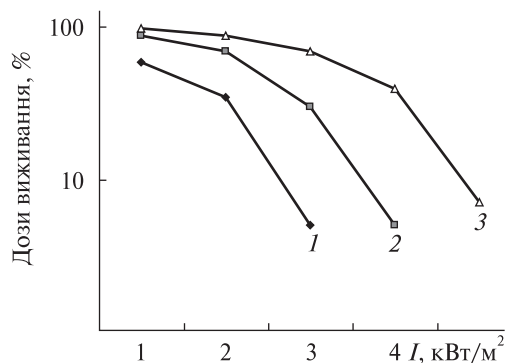


Рис. 1. Дози виживання клітин протонеми *Funaria hygrometrica* (крива 1), *Ceratodon purpureus* (2) і *Weissia tortilis* (3) залежно від інтенсивності I УФ-опромінення

каулонему і хлоронему в умовах аридних місцезростань призвело до різкої функціональної відмінності клітин та інтенсивнішого формування дендродів, наприклад, як у *W. papillosissima* [15]. Роль таких морфологічних особливостей, пов'язаних з фізіологічними функціями і екологічними умовами середовища, полягає у забезпеченні виживання гаметофіту у стресових кліматичних умовах [7, 14].

Бріофіти є домінантами серед вищих рослин за поширенням у локалітетах природного середовища з високим рівнем УФ-випромінювання (альпійські і полярні регіони), які проявляють специфічну стратегію захисту від його шкідливого впливу. Важливо й те, що мохи, пристосовані до місцезростань в умовах високого випромінювання, мають більші фотосинтетичні можливості та вищі пороги чутливості до надлишку освітлення, ніж ті, що адаптувалися до низьких інтенсивностей світла [32, 34].

Проаналізовано три види мохів — *F. hygrometrica*, *C. purpureus* і *W. tortilis* і встановлено, що за потужності УФ-випромінювання 3 кВт/м² ви-

жили 100 % апікальних клітин *W. tortilis*, 30 % — *C. purpureus* і 10 % — *F. hygrometrica*. Середнє значення доз, що спричинили загибель 90 % клітин у різних видів, істотно відрізнялися (рис. 1). Поріг виживання підтверджує локальну приуроченість цих видів мохів до місцезростань із високими дозами сонячної радіації і УФ-фону, серед яких *F. hygrometrica*, порівняно з двома іншими видами, виявилася найменш стійкою. У природних умовах мох утворює нещільні дернинки до 1 см заввишки, блідо-зелені, листки брунькоподібно складені з тонкостінних клітин, які надзвичайно чутливі до зміни екологічних умов місцезростань. Серед факторів, котрі можуть впливати на нижчу чутливість клітин *W. tortilis* до УФ-випромінювання, є морфологічна структура протонемної дернини, у якій хлоронемні дендроди екранують каулонемні столони. Подібну дендродну форму на високих інтенсивностях освітлення ($50\text{--}70 \text{ мкмоль}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{с}^{-1}$) утворює *C. purpureus* та інші види роду Pottiaceae, але у *F. hygrometrica* таких ростових реакцій не виявлено.

На високих ($4\text{--}5 \text{ кВт/м}^2$) дозах УФ-опромінення життєздатними залишалися найбільш щільно екрановані клітини каулонемою *W. tortilis*, а їхня регенерація значно підсилювала виживання протонемної дернинки. Тобто, формування щільної дернини із коротких нерозгалужених хлоронемних столонів як додаткової ростової форми протонеми забезпечувало екранування радіації. Не виключено, що специфіка такої функції призвела до морфологічних змін, які включають гравітропізм. Морфологічна організація клітин хлоронемою: малі розміри клітин, сповільнені темпи їхніх мітозів, обмежена довжина столонів і швидке завершення росту дендродів, порівняно з каулонемою не сприяли гравічутливості. Параметри клітин і столонів протонемної

Таблиця 1. Морфофункціональні показники клітин та ядер протонеми моху *Weissia tortilis*

Тип протонемних столонів	Розміри апікальних клітин, мкм		Довжина столонів, мкм (кількість клітин)	Об'єм ядер, мкм ³	Люмінесценція ДНК-ДАPI, відн. од.
	довжина	ширина			
Хлоронемні дендроди	34.7 ± 1.5	21.4 ± 0.9	166.4 ± 3.1 (4—5 клітин)	77.3 ± 8.9	56.8 ± 2.1
Каулонемні столони	182.3 ± 3.4	20.8 ± 1.1	2759.6 ± 16.7 (14—15 клітин)	199.0 ± 12.7	79.5 ± 4.9

дернини *W. tortilis* наведено у табл. 1. Ядра клітин дендроїдів і каулонами *W. tortilis* були меншими, ніж у інших видів мохів [4, 21], а як відомо, клітини з великими ядрами є радіочутливішими.

Резистентність *W. tortilis* до УФ-випромінювання сформувалася як адаптивна реакція на дію високих доз сонячної радіації, при цьому рівень стійкості зумовлений як морфофізіологічними особливостями, так й ефективністю функціонування репараційних систем в екологічних умовах поширення виду. Відомо, що характерною особливістю мохів є високий вміст фенолів. У *W. tortilis* фенольні сполуки з максимумом поглинання $\lambda = 310...410$ нм забарвлюють клітинні стінки каулономних столонів у червоно-коричневий колір і виконують фотозахисну функцію.

Вміст фенольних сполук у клітинах природних зразків і лабораторної культури відрізнявся та був більшим у каулономних столонах, ніж у дендроїдах (табл. 2). Окрім того, вміст фенольних сполук у *W. tortilis* значно перевищував показники, отримані для інших видів мохів [9]. Таким чином, у природних умовах поширення *W. tortilis* фенольні сполуки є одним із чинників захисту рослин від УФ-опромінення.

Отже, відмінні життєві форми протонемної дернини *W. tortilis* сформувалися залежно від умов середовища, зокрема високих доз сонячної радіації, унаслідок чого гравічутливість змінювалася упродовж онтогенезу, а гравітропізм розвинувся як важлива ланка екологічного диференціювання ростових реакцій моху.

Проаналізовано гравічутливість *W. tortilis* і встановлено, що довгі каулономні столони ростуть плагіотропно на незначній глибині і реагують на векторну дію гравітації, тоді як напрям росту дендроїдної наземної протонеми не залежить від сили тяжіння. Завдячуючи галуженню клітин і негативному гравітропному росту каулонами, на поверхню ґрунту підіймаються хлоронемні столони, які утворюють щільний покрив з ортотропних дендроїдів, що мають вигляд густих зелених асиміляційних куртин (рис. 2). Таке пристосування каулонами до підземного росту А. С. Лазаренко [14] оцінив як адаптацію до аридного клімату, що забезпечує виживання під час висихання наземних органів рослини. Варто

звернути увагу на високу здатність мохів до регенерації та дедиференціювання, унаслідок чого з поодиноких тотипотентних клітин відновлюється нова рослина. Подібну аналогію можна провести у *W. tortilis*, коли унаслідок галуження клітин каулономного столону, що росте у субстраті, на світло підіймаються гравічутливі клітини хлоронеми (їх 2-3), які розростаються у фотосинтектичну дендроїдну дернинку.

Спеціалізованою реакцією гаметофіту *W. tortilis* на аридні умови місцезростань є плагіотропний ріст підземної каулонами, який часто поєднаний з негативним гравітропізмом головного столону і бокових хлоронемних галузок. Галузка росте вертикально вгору завдяки чутливості клітин до поляризаційної дії гравітації під час перших 2—3 поділів, що значно скорочує шлях протонеми з-під ґрунту до світла. На відміну від інших видів мохів, переважно з гравічутливою хлоронемою, гравітропний згин *W. tortilis* відбувається в апікальних клітинах і заповнених амілопластами субапікальних клітинах каулонами. Аналогічно, як і під час гравітропного росту коренів чи протонеми мохів, амілопласти седиментують на нижню клітинну стінку, ініціюючи гравітропізм (рис. 3).

В умовах експериментального дефіциту води, імітованого 1...5 % концентраціями ПЕГу, спостерігали появу столонів *W. tortilis*, які росли позитивно гравітропно [17]. У дернинці моху із природного середовища також знаходили значну кількість позитивно гравітропних каулономних столонів. Тому мінливість гравізалежного росту протонеми *W. tortilis* слід розглядати як адаптивну ознаку, що розвинулася відповідно до кліматичних умов місцезростання моху. Це розширює різноманіття форм росту протонеми *W. tortilis* і підвищує ймовірність виживання гаметофіту в екосистемах з посушливими умовами (рис. 4).

Таблиця 2. Вміст фенольних сполук у дендроїдах і каулономних столонах *Weissia tortilis*

Тип протонемних столонів	Вміст фенолів, мг на 100 г сирої ваги	
	Природні зразки	Лабораторна культура
Хлоронемні дендроїди	87.6 ± 0.4	62.3 ± 0.7
Каулонома	120.3 ± 1.6	78.0 ± 0.5



Рис. 2. *Weissia tortilis*: а — поодинокі дендройди; б — суцільний асиміляційний покрив хлоронеми дендройдів; в — дернинка з гаметофорами (масштабний відрізок має довжину 100 мкм)



Рис. 3. Гравітутливі каулонемні столони і дендройдна протонемна дернина *Weissia tortilis*: а — амілопласти переважають у субапикальній клітині, б — протонема росте гравітропно, і амілопласти седиментують на нижню клітинну стінку, в — клітини каулонемного столону часто галузяться і у вигляді коротких ниток підіймаються над субстратом, утворюючи щільну дернину, г — дендройдна протонемна дернинка з пучками хлоронемних клітин на каулонемному столоні (масштабний відрізок має довжину 70 мкм)

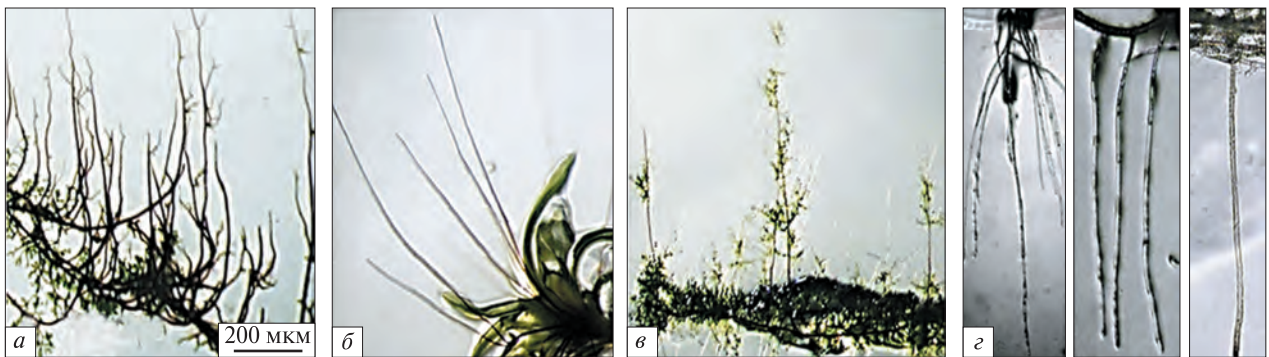


Рис. 4. Гравітропізм каулонеми *Weissia tortilis*: а — негативний гравітропний ріст, б, в — негативний гравітропний ріст регенеративної протонеми, г — позитивний гравітропний ріст бічних столонів каулонеми

Раніше встановлено, що гравітація може мінімізувати негативний вплив дефіциту води і бути важливим фактором для вегетативного розмноження та поширення рослин [18]. Так, у *Leptobryum pyriforme* фенотипна пластичність завдяки

гравітропізму протонеми в умовах водного стресу забезпечувала пришвидшений ріст і розвиток, що сприяло збільшенню чисельності спеціалізованих виводкових органів, вегетативному розмноженню та розселенню моху. Адаптація до

різко відмінних кліматичних умов двох форм *Bryum pseudotriquetrum* з Антарктики та України так само зумовлена підвищенням гравічутливості гаметофорів антарктичної форми та утворенням виводкових бульбочок на пагонах, що є надійним засобом для розмноження в умовах короткого вегетаційного періоду Антарктики.

В апікальній і субапікальній клітинах каулонемних столонів *W. tortilis* міститься значно більше амілопластів і виявляється нижча α -амілазна активність, ніж у хлоронемі (табл. 3). Відповідно полісахариди нагромаджуються у пластидах гравічутливих апікальних, часто й субапікальних клітин каулонемі, ініціюючи гравісенсорні процеси. Висока активність ферменту у клітинах каулонемі забезпечує біосинтез вуглеводів, необхідних для росту і галуження клітин столонів. Фотосинтез надземної дендроїдної дернини також є джерелом продуктів сонячної енергії для росту і галуження підземної каулонемі та розвитку бруньок гаметофорів.

Проведено порівняльні дослідження метаболізму вуглеводів двох різночутливих до гравітації видів мохів — *C. purpureus* і *W. tortilis* залежно від умов гравістимуляції. Апікальні клітини 7-ден-

ної хлоронемі *C. purpureus* вже через 0.5 год після гравістимуляції виявляли чітку гравітропну реакцію, тоді як у *W. tortilis* хлоронемні столони не реагували на дію гравітації, а гравічутливою була лише каулонема.

Для обох видів мохів визначено різний вміст загальних вуглеводів (табл. 4). Вміст карбогідратів у *Weissia tortilis* був удвічі більшим, ніж у *Ceratodon purpureus*, можливо унаслідок їхньої приуроченості до різко відмінних місцезростань. Висока концентрація цукрів як осмопротекторів є свідченням адаптації до дефіциту вологи *Weissia tortilis*. Їхнє нагромадження забезпечує внутрішню регуляцію водного потенціалу та сприяє активному поглинанню води, що важливо в умовах високих температур та недостатнього водопостачання у посушливих місцезростаннях рослин [11, 12, 27].

Для досліджених мохів найбільше вуглеводів визначено на денному освітленні. В умовах клиностаування їхня кількість зменшувалася у *C. purpureus* на 15.1 %, що зумовлено невеликим сповільненням фотосинтетичних процесів і швидкості росту в умовах зміненої сили тяжіння і темряви. У *W. tortilis* вміст вуглеводів після клиностаування, навпаки, підвищувався приблизно на 20 %.

Таблиця 3. Залежність розподілу амілопластів і функціональної активності гаметофіту *Weissia tortilis* від диференціації клітин протонеми

Тип протонемної дернини	Кількість амілопластів в апікальній клітині, шт.	Вміст крохмалю, мкг/г маси сирої речовини	Активність α -амілази, мкг крохмалю/хв/мг білка	Інтенсивність фотосинтезу, мг CO_2 /г маси с.р./год
Хлоронема	7 ± 3	29.7 ± 1.6	6.4 ± 0.02	5.48 ± 0.03
Каулонема	28 ± 2	48.7 ± 1.8	2.1 ± 0.07	1.13 ± 0.09

Таблиця 4. Вміст вуглеводів у дернинках мохів *Ceratodon purpureus* і *Weissia tortilis* в умовах зміненої гравітації (мкг/г маси сирої речовини)

Варіант досліді	Загальний вміст вуглеводів, мкг/г	Крохмаль, мкг/г	Водорозчинні вуглеводи, мкг/г	Моноцукри, мкг/г
<i>Ceratodon purpureus</i>				
Контроль	2269.1 ± 155.1	101.5 ± 8.4	483.5 ± 35.4	106.2 ± 10.2
Гравістимуляція	2215.6 ± 148.1	142.9 ± 11.5	282.2 ± 26.1	68.3 ± 7.2
Клиностат	1926.3 ± 164.2	105.6 ± 12.4	418.3 ± 52.6	124.8 ± 10.8
<i>Weissia tortilis</i>				
Контроль	4521.2 ± 265.4	250.1 ± 23.4	1077.5 ± 104.4	179.2 ± 15.6
Гравістимуляція	4342.4 ± 268.6	282.8 ± 18.6	816.4 ± 92.8	113.8 ± 11.4
Клиностат	5475.3 ± 328.7	195.4 ± 16.8	1395.2 ± 163.1	269.4 ± 16.8

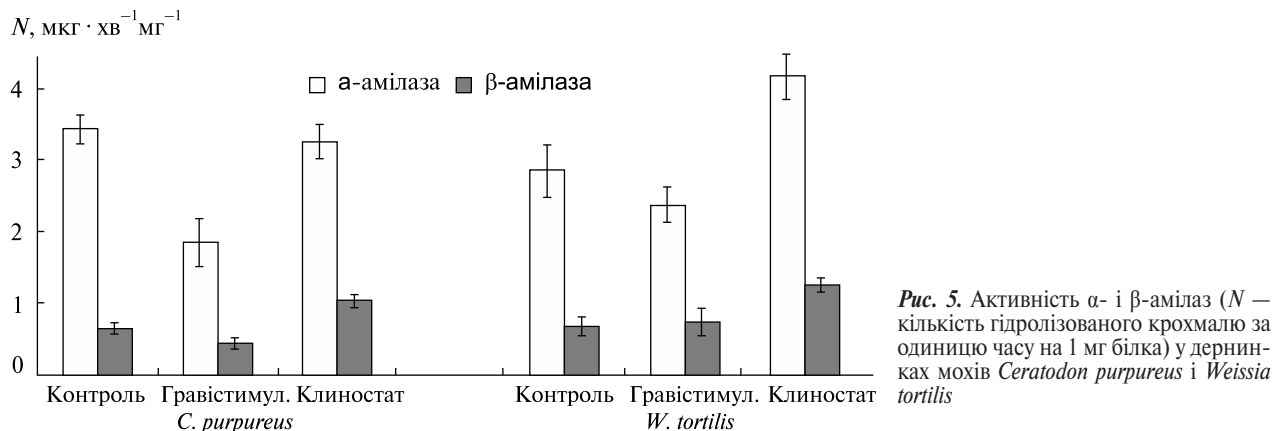


Рис. 5. Активність α - і β -амілаз (N — кількість гідролізованого крохмалю за одиницю часу на 1 мг білка) у дернинках мохів *Ceratodon purpureus* і *Weissia tortilis*

Відомо, що змінена сила тяжіння порушує прооксидантно-антиоксидантний статус клітин [13], а цукри перехоплюють активні форми кисню (АФК) і гальмують процеси вільнорадикального окислення [8]. Окрім того, вуглеводи виконують сигнальну функцію у стресових умовах, і зокрема в умовах мікрогравітації [35]. Очевидно, клиностакування *W. tortilis*, гаметофіт котрої негравітчувливий, за винятком каулонемної стадії, не впливає на обмін вуглеводів як сенсорної системи гравіподразнення, а ініціює біохімічні функції захисту від нагромадження вільних радикалів.

В умовах симульованої гравітації посилювався гідроліз полімерних форм вуглеводів, передусім крохмалю [31]. Для *C. purpureus* і *W. tortilis* також встановлено певні особливості вуглеводного обміну. У протонемі гравітчувливого *C. purpureus* вміст крохмалю становив 4.5...6.4 % від загальних вуглеводів, а після гравістимуляції кількість полісахариду підвищувалася на 40 %, очевидно унаслідок формування в апікальних клітинах амілохлоропластів. Під час клиностакування кількість крохмалю у клітинах протонемі зберігалася на рівні контролю.

У протонемі *W. tortilis* вміст крохмалю становив 3.1...5.4 % у загальному пулі карбогідратів, тобто не відрізнявся істотно від *C. purpureus*. В умовах гравістимуляції вміст крохмалю підвищувався на 11.3 %, а під час клиностакування істотно знижувався (табл. 4). Отже, клиностакування для першого виду виявилось більшим стресовим фактором, ніж для другого. Очевидно, у *C. purpureus* вуглеводний обмін прореагував

як специфічна система, що пов'язана з високою гравітчувливістю великої кількості апікальних клітин хлоронемі.

Оскільки кінцевими продуктами гідролізу крохмалю є низькомолекулярні вуглеводи, досліджено вплив зміненої гравітації на вміст розчинних цукрів і моноцукрів. В умовах клиностакування зафіксовано збільшення вуглеводів в 1.3...1.5 разів у протонемі обох видів. Це свідчить, що ранні реакції мохів на порушення векторної направленості сили тяжіння є подібними до впливу інших абіотичних чинників, оскільки вуглеводний обмін у стресових умовах змінювався в бік накопичення розчинних цукрів, задіяних у реакціях нейтралізації вільних радикалів [8, 10, 35]. Під час гравістимуляції *C. purpureus* істотно зменшувався пул водорозчинних вуглеводів, що корелювало із нагромадженням крохмалю. У *W. tortilis* відзначено таку ж залежність, однак менше виражену, ніж у *C. purpureus*.

Вміст моноцукрів у дернинці збільшувався під впливом зміненої сили тяжіння, а їхня частка від загального вмісту розчинних вуглеводів для *C. purpureus* становила 20.1...24.1 %, а *W. tortilis* — 13.5...19.2 %. Отже, достатньо високий вміст моноцукрів був характерним для обох видів, а їхнє нагромадження, очевидно, насамперед корелювало зі стійкістю до стресу [26, 33].

Проаналізовано активність амілаз у *C. purpureus* і *W. tortilis*, які каталізують гідроліз крохмалю (рис. 5). Виявлено, що α -амілазна активність у 3...5 разів перевищувала активність β -амілази, що підтверджує ключову роль цього ферменту у деградації крохмалю. Під час гравістимуляції

активність ферменту обох видів була найнижчою, і крохмаль нагромаджувався в амілопластах. Після клиностатування, а також на світлі крохмаль розпадався, відповідно активність α -амілазу була високою, що корелювало із даними про вміст розчинних карбогідратів у досліджених видів мохів (табл. 4).

Визначено, що у *W. tortilis* активність α -амілази у контролі (рослини росли на світлі) була нижчою, ніж у *C. purpureus*. Різниця між активністю ферменту у гравістимульованій дернинці і після клиностатування для обох мохів була істотною і збільшувалася під час клиностатування: у *C. purpureus* у 1.8 раза, а у *W. tortilis* — у 1.6 раза. Найімовірніше, висока активність α -амілази під час клиностатування означає, що у мохів посилюється гідроліз полісахаридів як захисна реакція на зміну гравітаційної сили, а у *W. tortilis* — ще й на збереження конститутивного захисту осморегуляції в умовах стресу.

Отже, можна підсумувати, що спрямованість метаболізму вуглеводів у протонемі мохів тісно пов'язана як з гравічутливістю, так і зі стійкістю до впливу стресових чинників. У *C. purpureus* крохмаль нагромаджувався під час гравістимуляції і розпадався на світлі та після клиностатування, що прямо корелювало із зниженням рівня α -амілазної активності. Водночас вплив гравістимуляції на вміст крохмалю у *W. tortilis*, у дернинці якої домінувала негравічутлива дендродна хлоронема, був менше вираженим. Для обох досліджених видів мохів виявлено залежність метаболізму вуглеводів від гравістимуляції і клиностатування. Однак різниця активності амілазу у контролі і після гравістимуляції дернин була меншою у *W. tortilis*, ніж у гравічутливішого *C. purpureus*. Очевидно, причиною є різна стійкість мохів до впливу стресових чинників: *C. purpureus* — космополітний, гравічутливий вид моху на усіх стадіях розвитку гаметофіту, тоді як *Weissia tortilis* — аридний вид, гравічутливий лише на стадії каулонемі.

ВИСНОВКИ

Встановлено залежність між морфологічною структурою дернини аридного моху *Weissia tortilis*, стійкістю до УФ-опромінення та граві-

тропізмом, яка є захисним пристосуванням до посушливих умов місцезростання виду і шкідливої дії сонячної радіації.

Модифікаційні зміни в онтогенезі моху *Weissia tortilis* та його клітинних системах захисту є адаптивними ознаками, що підвищують резистентність та можливість виживання рослин у стресових умовах.

Знайдено, що стійкість до екологічних чинників у двох видів мохів — *Weissia tortilis* і *Ceratodon purpureus* обумовлена специфічністю метаболізму вуглеводів і різною гравічутливістю на гаметофітній стадії розвитку.

Роботу виконано в рамках Цільової комплексної програми НАН України з наукових космічних досліджень на 2018—2022 рр.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бачуріна Г. Ф., Мельничук В. М. *Флора мохів Української РСР*. Київ: Наук. думка, 1988. Вип. 2. 180 с.
2. Гродзинский Д. М. *Адаптивная стратегия физиологических процессов растений*. Киев: Наук. думка, 2013. 310 с.
3. Гудков І. М. *Радіобіологія*. К.: НУБіП України, 2016. 485 с.
4. Демків О. Т., Сытник К. М. *Морфогенез архегоніат*. Київ: Наук. думка, 1985. 204 с.
5. Демків О. Т., Хоркавців Я. Д., Пундяк О. І. Гравітація як формотворчий фактор розвитку мохів. *Фізіологія рослин: проблеми та перспективи розвитку*. 2009. 2. С. 403—410.
6. Иванов В. Б. *Активные красители в биологии*. М.: Наука, 1982. 204 с.
7. Кардаш О. Р., Хоркавців Я. Д., Демків Л. О. Ріст і морфогенез *Weissia tortilis* (Schwaegr.) C. Müll. з різних місцезростань. *Укр. ботан. журн.* 1988. 45, № 2. С. 17—21.
8. Карпец Ю. В., Колупаев Ю. Е. Ответ растения на гипертермию: молекулярно-клеточные процессы. *Вісн. Харків. нац. аграрного ун-ту. Сер. Біологія*. 2009. 1. С. 19—39.
9. Кияк Н. Я. Вплив фенольних сполук на фізіолого-біохімічні показники у пагонах водного моху *Fontinalis antipyretica* Hedw. *Наук. зап. Терноп. держав. пед. ун-ту ім. Володимира Гнатюка. Сер. Біологія*. 2005. № 3. С. 81—87.
10. Кияк Н. Я. Особливості фізіологічних показників водного режиму у бріофітів із різною толерантністю до дефіциту вологи. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. біологічна*. 2015. Вип. 70. С. 245—255.

11. Кияк Н. Я., Баїк О. Л., Кіт Н. А. Морфофізіологічна адаптація бріофітів до екологічних факторів на девастованих територіях видобутку сірки. *ScienceRise: Biol. Sci.* 2017. 5, № 8. С. 33—38. doi: <https://doi.org/10.15587/2519-8025.2017.113540>.
12. Кияк Н. Я., Хоркавців Я. Д. Адаптація бріофітів до водного дефіциту на території відвалу в місцях видобутку сірки. *Укр. ботан. журн.* 2015. 72, № 6. С. 566—573.
13. Кияк Н. Я., Хоркавців Я. Д. Оцінка окиснювального стресу моху *Pohlia nutans* (Hedw.) Lindb. залежно від впливу гравітації. *Космічна наука і технологія*. 2016. 22, № 4. С. 58—66.
14. Лазаренко А. С. Спостереження над морфологією і екологією регенеративної протонеми у тортул — сільської (*Tortula ruralis* Hedw.) і пустельної (*T. desertorum* Broth.). *Укр. ботан. журн.* 1959. 16, № 5. С. 55—64.
15. Лазаренко А. С., Коваленко А. П., Пашук Х. Т. Деякі спіральні структури протонеми листяних мохів. *Укр. ботан. журн.* 1961. 18, № 6. С. 89—98.
16. Лакин Г. Ф. *Биометрия*. М.: Высш. школа, 1990. 352 с.
17. Лобачевська О. В., Кияк Н. Я., Хоркавців Я. Д., Кіт Н. А. Модифікація репродуктивного розвитку мохів під впливом гравітації. *Укр. ботан. журн.* 2017. 24, № 2. С. 94—101.
18. Лобачевська О. В., Хоркавців Я. Д., Кияк Н. Я., Кіт Н. А., Данилків І. С. Гравіморфогенез гаметофіту мохів. *Космічна наука і технологія*. 2015. 21, № 4. С. 94—102.
19. *Практикум по агрохімії*: Учеб. пособ. 2-е изд., перераб. и доп. В. Г. Минеева (ред.). М.: Изд-во МГУ, 2001. 689 с.
20. Хоркавців Я. Д., Кордюм Є. Л., Лобачевська О. В., Кияк Н. Я., Кіт Н. А. Галуження протонеми *Ceratodon purpureus* в умовах зміненої сили тяжіння. *Укр. ботан. журн.* 2015. 72, № 6. С. 588—595.
21. Braun M., Bohmer, H der D.-P., Hemmersbach R., Palme K. *Gravitational Biology. 1. Gravity sensing and graviorientation in microorganism and plants*. Springer, 2018. 122 p. doi 10.1007/978-3-319-93894-3_5.
22. Brown C. S., Tipathy B. C., Stutte G.W. Photosynthesis and carbohydrate metabolism in microgravity. *Plants in Space Biology*. H. Suge (Ed.). Sendai: Tohoku University Press, 1996. P. 127—134.
23. Chaban Ch. I., Kern V. D., Ripetsky R. T., Demkiv O. T., Sack F. Gravitropism in caulonemata of the moss *Pottia intermedia*. *J. Bryology*. 1998. 20. P. 287—299.
24. Chazotte B. *Labeling Nuclear DNA Using DAPI. Cold Spring Harbor Protocols*. 2011. P. 83—86.
25. Cove D., Benzanilla M., Harries P., Quatrano R. Mosses as model systems for the study of metabolism and development. *Ann. Rev. Plant Biol.* 2006. 57. P. 497—520.
26. Glime J. M. (2007 onwards). *Bryophyte Ecology. Volume 1. Physiological Ecology*. E-book sponsored by Michigan Technological University and the International Association of Bryologists. <http://www.bryoecol.mtu.edu/> (Last accessed: 15.08.2015).
27. Greenwood J. L., Stark L. R. Rate of drying determines extent of desiccation tolerance in *Physomitrella patens*. *Functional Plant Biol.* 2014. 41. P. 460—467.
28. Hasenstein K. H. Radiation effects on Brassica seeds and seedlings. *41st Cospar Scientific Assembly. Abstract*. 2016. P. 244.
29. Kordyum E. L. Plant cell gravisensitivity and adaptation to microgravity. *Plant Biol.* 2014. 16, № 1. P. 79—90.
30. Moullia B., Fournier M. The power and control of gravitropic movements in plants: a biochemical and systems biology view. *J. Exp. Bot.* 2009. 60, № 2. P. 461—486.
31. Musgrave M. E., Kuang A., Xia Y., Staut S. C., Bingham G. E., Briarty G., Levinskikh M. A., Sychev V. N., Podolski I. G. Gravity independence of seed-to-seed cycling in *Brassica rapa*. *Planta*. 2000. 210. P. 400—406.
32. Newsham K. K., Robinson S. A. Responses of plants in polar regions to UVB exposure: a meta-analysis. *Global Change Biol.* 2009. 15, № 11. P. 2574—2589. doi: 10.1111/j.1365-2486.2009.01944.x.
33. Phillips J., Oliver M., Bartels D. Molecular genetics of desiccation-tolerant systems. Desiccation and survival in plants: *Drying without dying* (Eds M. Black, H. W. Pritchard). Wallingford: CABI Publ., 2002. P. 319—341.
34. Robinson S. A., Waterman M. J. Sunsafe bryophytes: photoprotection from excess and damaging solar radiation. *Adv. Photosynthesis and Respiration*. 2014. 37. P. 113—130.
35. Rolland F. I., Sheen J. Sugar sensing and signalling networks in plants. *Biochem Soc. Trans.* 2005. 33, № 1. P. 269—271. doi:10.1042/BST0330269.
36. Sadasivam S., Manickam A. *Biochemical methods*. New Delhi: New Age International, 2007. 284 p.
37. Smirnoff N. Ascorbate, tocopherol and carotenoids: metabolism, pathway engineering and functions. *Antioxidants and Reactive Oxygen Species in Plants* (Ed. N. Smirnoff). Oxford: Blackwell Publishing Ltd., 2005. P. 53—86.
38. Stutte G. W., Monje O., Hatfield R. D., Paul A. L., Ferl R. J., Simone C. G. Microgravity effects on leaf morphology, cell structure, carbon metabolism and mRNA expression of dwarf wheat. *Planta*. 2006. 224. P. 1038—1049.
39. Xiao Z., Storms R., Tzang A.A. Quantitative starch-iodine method for measuring alpha-amylase and glucoamylase activities. *Anal. Biochem.* 2006. 351, № 1. P. 146—148.
40. Yatagai F., Honma M., Dohmae N., Ishioka N. Biological effect of Space environmental factors: A possible interaction between space radiation and microgravity. *Life Sci. in Space Res.* 2018.

Стаття надійшла до редакції 02.01.2019

REFERENCES

1. Bachurina H. F., Melnychuk V. M. (1988). *Flora of mosses of the Ukrainian SSR*. Kyiv: Naukova Dumka.

2. Hrodzynskiy D. M. (2013) *Adaptive strategy of physiological processes in plants*. Kyiv: Naukova Dumka.
3. Hudkov I. M. (2016). *Radiobiology*. Kyiv: NUBiP Ukrainy.
4. Demkiv O. T., Sytnyk K. M. (1985). *Morphogenesis of arhegoniate*. Kyiv: Naukova dumka.
5. Demkiv O. T., Khorkavtsiv Ya. D., Pundiak O. I. (2009). Gravitation as a form-forming factor of moss development. *Plant physiology: problems and prospects of development*, No. 2, 403—410.
6. Ivanov V. B. (1982). *Active dyes in biology*. Moscow: Science.
7. Kardash O. R., Khorkavtsiv Ya. D., Demkiv L. O. (1988). Growth and morphogenesis *Weissia tortilis* (Schwaegr.) C. Müll. from different locality. *Ukr. Botanical J.*, 45(2), 17—21.
8. Karpets Yu. V., Kolupaev Yu. E. (2009). Plant response to hyperthermia: molecular-cellular processes. *Bull. Kharkiv Nat. Agrarian Univ. Ser. Biology*, No. 1, 19—39.
9. Kyyak N. Ya. (2005). Influence of phenolic compounds on physiological and biochemical parameters in shoots of water moss *Fontinalis antipyretica* Hedw. *Sci. Notes Ternopil State Pedagogical Univ. named after Volodymyr Hnatyuk. Ser: Biol.*, No. 3, 81—87.
10. Kyyak N. Ya. (2015). Peculiarities of physiological indexes of water regime in the bryophytes with a different tolerance to water deficit. *Visnyk of Lviv Univ. Biol. ser.*, 70, 245—255.
11. Kyyak N. Ya., Baik O. L., Kit N. A. (2017). Morphophysiological adaptation of bryophytes to environmental factors on the devastated territories of sulphur extraction. *ScienceRise: Biol. Sci.*, 5(8), 33—38. doi.org/10.15587/2519-8025.2017.113540.
12. Kyyak N. Ya., Khorkavtsiv Ya. D. (2015). Adaptation of the bryophytes to water deficit in the dump area at sulfur deposit sites. *Ukr. Botan. J.*, 72(6), 566—573.
13. Kyyak N. Ya., Khorkavtsiv Ya. D. (2016). Estimation of the oxidative stress in moss *Pohlia nutans* (Hedw.) Lindb. depending on the influence of gravity. *Space Sci. and Technol.*, 22(4), 58—66. doi.org/10.15407/knit2016.04.058.
14. Lazarenko A. S. (1959). Observation of morphology and ecology of the regenerative protonemata in the tortilla rural (*Tortula ruralis* Hedw.) and desert (*T. desertorum* Broth.). *Ukr. Botan. J.*, 16(5), 55—64.
15. Lazarenko A. S., Kovalenko A. P. (1961). Some spiral structures of leafy mosses protonemata. *Ukr. Botan. J.*, 18 (6), 89—98.
16. Lakyn H. F. (1990). *Biometrics*. Moskva: Vysshaya Shkola.
17. Lobachevska O. V., Kyyak N. Ya., Khorkavtsiv Ya. D., Kit N. A. (2017). Gravity dependent modification of reproductive development of mosses. *Ukr. Botan. J.*, 74(5), 488—496.
18. Lobachevska O. V., Khorkavtsiv Ya. D., Kyyak N. Ya., Kit N. A., Danylkiv I. S. (2015). Gravimorphogenesis of the moss gametophyte. *Space Sci. and Technol.*, 21(4), 94—102.
19. *Workshop on Agrochemistry* (2001). Moskva: Izdatel'stvo MHU [in Russian].
20. Khorkavtsiv Ya. D., Kordium Ye. L., Lobachevs'ka O. V., Kyyak N. Ya., Kit N. A. (2015). Branching protonemata of *Ceratodon purpureus* in conditions of changed gravitation. *Ukr. Botan. J.*, 72(6), 588—595.
21. Braun M., Bohmer, H der D.-P., Hemmersbach R., Palme K. (2018). *Gravitational Biology. 1. Gravity sensing and graviorientation in microorganism and plants*. Berlin: Springer.
22. Brown C. S., Tipathy B. C., Stutte G. W. (1996). Photosynthesis and carbohydrate metabolism in microgravity. *Plants in Space Biol.*, Sendai: Tohoku University Press, 127—134.
23. Chaban Ch. I., Kern V. D., Ripetsky R. T., Demkiv O. T., Sack F. (1998). Gravitropism in caulonemata of the moss *Pottia intermedia*. *J. Bryol.*, 20, 287—299.
24. Chazotte B. (2011). *Labeling Nuclear DNA Using DAPI. Cold Spring Harbor Protocols*, 83—86.
25. Cove D., Benzanilla M., Harries P., Quatrano R. (2006). Mosses as model systems for the study of metabolism and development. *Ann. Rev. Plant Biol.*, 57, 497—520.
26. Glime J. M. (2017). *Bryophyte Ecology. Vol. 1. Physiological Ecology*. Houghton: Michigan Technol. Univ. URL: <http://www.bryoecol.mtu.edu/> (Last accessed: 10.04.2019).
27. Greenwood J. L., Stark L. R. (2014). Rate of drying determines extent of desiccation tolerance in *Physomitrella patens*. *Functional Plant Biol.*, 41, 460—467.
28. Hasenstein K. H., Deoli N. (2016). Radiation effects on Brassica seeds and seedlings. *41st COSPAR Scientific Assembly (was cancelled). Abstracts*. URL: <http://cospar2016.tubitak.gov.tr/en/> (Last accessed: 10.04.2019).
29. Kordyum E. L. (2014). Plant cell gravisensitivity and adaptation to microgravity. *Plant Biol.*, 16(1), 79—90.
30. Moulia B., Fournier M. (2009). The power and control of gravitropic movements in plants: a biochemical and systems biology view. *J. Exp. Bot.*, 60 (2), 461—486.
31. Musgrave M. E., Kuang A., Xia Y., Staut S. C., Bingham G. E., Briarty G., Levinskikh M. A., Sychev V. N., Podolski I. G. (2000). Gravity independence of seed-to-seed cycling in *Brassica rapa*. *Planta*, 210, 400—406.
32. Newsham K. K., Robinson S. A. (2009). Responses of plants in polar regions to UVB exposure: a meta-analysis. *Global Change Biol.*, 15(11), 2574—2589.
33. Phillips J., Oliver M., Bartels D. (2002). Molecular genetics of desiccation-tolerant systems. M. Black and H. W. Pritchard (eds.). *Desiccation and survival in plants: Drying without dying*. Wallingford: CABI Publishing.
34. Robinson S. A., Waterman M. J. (2014). Sunsafe bryophytes: photoprotection from excess and damaging solar radiation. *Adv. Photosynthesis and Respiration*, 37, 113—130.

35. Rolland F. I., Sheen J. (2005). Sugar sensing and signalling networks in plants. *Biochem Soc Trans.*, 33(1), 269—271.
36. Sadasivam S., Manickam A. (2007). Biochemical methods. New Delhi: New Age International.
37. Smirnoff N. (2005). Ascorbate, tocopherol and carotenoids: metabolism, pathway engineering and functions. Smirnoff N. (ed.). *Antioxidants and Reactive Oxygen Species in Plants*. Oxford: Blackwell Publishing Ltd.
38. Stutte G. W., Monje O., Hatfield R. D., Paul A. L., Ferl R. J., Simone C. G. (2006). Microgravity effects on leaf morphology, cell structure, carbon metabolism and mRNA expression of dwarf wheat. *Planta*, 224, 1038—1049.
39. Xiao Z., Storms R., Tzang A. A. (2006). Quantitative starch-iodine method for measuring alpha-amylase and glucoamylase activities. *Anal. Biochem*, 351(1), 146—148.
40. Yatagai F., Honma M., Dohmae N., Ishioka N. (2018). Biological effect of Space environmental factors: A possible interaction between space radiation and microgravity. *Life Sci. Space Res.*

Received 02.01.2019

О. В. Лобачевская, Н. Я. Кияк, Я. Д. Хоркавцев

Институт экологии Карпат Национальной академии наук Украины, Львов, Украина

МОРФОФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ КЛЕТОК ПРОТОНЕМЫ *WEISSIA TORTILIS* SPRENG., РАЗЛИЧАЮЩИХСЯ ГРАВИЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬЮ

Гравитропизм бриофитов является видоспецифическим, зависит от экологических факторов и жизненной стратегии вида. Цель исследований заключалась в определении взаимосвязи между морфологией клеток протонемы *Weissia tortilis* Spreng. в процессе дифференцировки, их резистентностью к УФ-облучения и изменчивостью гравитропизма. Установлено, что формирование плотной дерновинки из коротких неразветвленных хлоронемных столонов как дополнительной ростовой формы протонемы мха обеспечивает экранирование каулонемы от радиации. Показано, что вследствие особенностей роста и морфогенеза клеток протонемы *W. tortilis* только каулонематические столоны реагируют на действие гравитации. На основании проведенных сравнительных исследований гравичувствительности и метаболизма углево-

дов *Ceratodon purpureus* Brid. и *W. tortilis* в зависимости от условий гравистимуляции установлена специфичность биохимических реакций и устойчивость к экологическим факторам. Предполагается, что метаболизм углеводов обусловлен различной толерантностью мхов к воздействию стрессовых факторов: *C. purpureus* — космополитный вид мха, гравичувствительный на всех стадиях развития, тогда как *W. tortilis* — аридный вид, чувствительный к гравитации только на стадии каулонемы.

Ключевые слова: мхи, гравичувствительность, УФ-облучения, углеводный обмен.

O. V. Lobachevska, N. Ya. Kyiak, Ya. D. Khorkavtsiv

Institute of Ecology of the Carpathians of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine

MORPHO-FUNCTIONAL PECULIARITIES OF THE MOSS *WEISSIA TORTILIS* SPRENG. PROTONEMATA CELLS WITH DIFFERENT GRAVISENSITIVITY

Gravitropism of bryophytes is species-specific. It depends on the ecological factors and species life strategy. The purpose of the research is to determine the relationship between the morphology of *Weissia tortilis* Spreng. protonemata cells in the process of differentiation, their resistance to UV irradiation, and the variability of gravitropism. It has been established that the formation of a dense turf from short, unramified chloronematal stolons as an additional growth form of the moss protonemata provides screening of the caulonemata stolons from radiation. We have shown that due to peculiarities of morphogenesis and stolon growth only caulonemata cells of *W. tortilis* protonemata are gravisensitive. The environmental resistance and the specificity of biochemical reactions depending on the level of gravisensitivity have been determined on the basis of comparative investigations of gravisensitivity and carbohydrate metabolism of *Ceratodon purpureus* Brid and *Weissia tortilis* Spreng. It is assumed that the revealed specificity is due to the different tolerance of bryophytes to the influence of stress factors: *Ceratodon purpureus* is a cosmopolitan gravisensitive moss species, whereas *Weissia tortilis* is an arid species with gravitropism only at the caulonemata stage.

Keywords: bryophytes, gravisensitivity, UV irradiation, carbohydrate metabolism.

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2019.02.071>

УДК 377.5

А. В. Новиков, Т. А. Новикова

Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное»
им. М. К. Янгеля», Днепро, Украина

ДУАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ: ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ ДЛЯ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ОТРАСЛИ

Развитие ракетно-космической отрасли в значительной степени зависит от эффективности системы аэрокосмического образования, обеспечивающей подготовку инженерных и научных кадров высокой квалификации. В статье анализируются опыт и результаты многолетнего сотрудничества Государственного предприятия «Конструкторское бюро «Южное» им. М. К. Янгеля» с университетами по созданию интегрированной системы подготовки специалистов, дающей возможность рационально сочетать университетское техническое образование с отраслевой наукой и производством. Рассматриваются возможности использования накопленного опыта для реализации новой Концепции МОН Украины по подготовке специалистов с использованием дуальной формы образования.

Ключевые слова: дуальное образование, подготовка специалистов, система аэрокосмического образования.

Для создания такой сложной техники, как ракетно-космическая, необходимы специалисты высокой квалификации. В последние годы происходят значительные изменения в законодательстве Украины по вопросам подготовки таких специалистов. Министерство образования и науки Украины решением коллегии от 26.01.2018 г. сформулировало новую «Концепцию подготовки специалистов с использованием дуальной формы образования» [3]. Дуальная форма получения образования — это способ получения образования, который предусматривает объединение обучения лиц в образовательных учреждениях с обучением на рабочем месте на предприятии для получения определенной квалификации, как правило, на основе договора.

Концепция предполагает использование немецкого опыта дуальной формы образования. Система дуального образования (ДО) давно и

широко практикуется в Германии и охватывает около 350 видов профессиональной занятости [1, 6]. Она принята и в других европейских странах, например в Австрии, Швейцарии, Нидерландах и Франции, а также начала внедряться в Китае, Индии и других странах Азии. Модель ДО в Германии предполагает тесную связь между учебными центрами и сотрудничающими с ними предприятиями. Теоретический материал, преподаваемый в аудиториях, дополняется получением практического опыта на рабочем месте, так что эффективность полученных теоретических знаний сразу же проверяется в реальных профессиональных ситуациях.

Для обеспечения высокого уровня и конкурентоспособности своих разработок Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М. К. Янгеля» (КБ «Южное») всегда придавало большое значение сотрудничеству с университетами в области подготовки инженерных и научных кадров. Формы сотрудниче-

© А. В. НОВИКОВ, Т. А. НОВИКОВА, 2019

ства КБ «Южное» и университетов видоизменялись в зависимости от политических и экономических условий жизни предприятия. В Советском Союзе, и в частности в Украине был накоплен многолетний опыт объединения работы с обучением в формате вечернего и заочного образования (заводы — ВТУЗы), а также обучения на реальных рабочих местах при прохождении производственных практик при дневной форме обучения. Например, когда был создан физико-технический факультет Днепропетровского национального университета имени Олеса Гончара (ДНУ) с целью подготовки специалистов для ракетно-космической отрасли, то с самого начала учебный процесс на факультете был тесно увязан с научной и производственной деятельностью КБ «Южное» и Производственным объединением «Южный машиностроительный завод» (ЮМЗ):

- специальные курсы преподавали в университете руководители и ведущие специалисты промышленности, многие из них были по совместительству профессорами и доцентами ДНУ;
- все виды производственных практик и многие лабораторные работы студенты выполняли в КБ «Южное» и цехах ЮМЗ на современном оборудовании;
- темы курсовых и дипломных проектов брались из конкретных научно-исследовательских разработок предприятий, а их результаты внедрялись в производство;
- КБ «Южное» и ЮМЗ помогали университету создать собственную лабораторную базу.

Можно сказать, что многолетнее взаимодействие КБ «Южное», ЮМЗ, ДНУ — удачный пример творческого сотрудничества науки, промышленности и образования, когда ученые и специалисты активно участвуют в учебном процессе, а преподаватели и студенты — в решении актуальных научно-технических проблем предприятий. Подобная интегрированная система подготовки специалистов дает возможность сочетать университетское техническое образование с отраслевой наукой и производством, существенно улучшить качество подготовки инженеров. В итоге получен колоссальный результат — в ДНУ подготовлено более 20 тысяч специали-

стов, многие из которых заняли ключевые посты в ракетной промышленности [2, 4, 5, 7, 8].

В рамках независимой Украины резко сузился круг учебных заведений, поставляющих кадры для ракетно-космической отрасли, в основном это ДНУ, Национальный аэрокосмический университет «Харьковский авиационный институт» (НАУ «ХАИ»), Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт» (НТУУ «КПИ»). Это потребовало поиска новых форм подготовки специалистов. Для взаимодействия с университетами и научно-исследовательскими институтами в КБ «Южное» в 1998 г. был создан Ракетно-космический учебно-исследовательский центр (РКУ-ИЦ). В его состав вошли ряд филиалов кафедр ДНУ по основным специальностям: «Проектирование и конструирование», «Двигателестроение», «Системы автоматического управления» и кафедра «Новая техника» НАУ «ХАИ». В РКУ-ИЦ на кафедрах учеными и специалистами КБ «Южное» проводится обучение студентов старших курсов ДНУ и НАУ «ХАИ». Преподаватели КБ «Южное», помимо хорошей теоретической подготовки, владеют богатым опытом проектирования, конструирования и экспериментальной отработки ракетно-космической техники, чего обычно не хватает преподавателям высших учебных заведений. В результате студенты учатся передовым технологиям и адаптируются к условиям предприятия. Это способствует повышению качества инженерного образования и закреплению молодых специалистов на предприятии. В значительной степени благодаря работе РКУИЦ удалось преодолеть кризисные явления в обеспечении кадрами КБ «Южное» и значительно омолодить предприятие. В настоящее время более трети состава (более 1800 чел.) — сотрудники в возрасте до 35 лет, что позволяет с оптимизмом смотреть в будущее. Для улучшения подготовки специалистов, систематизации и развития научно-методического задела предприятия в рамках деятельности филиалов кафедр преподавателями КБ «Южное» совместно с университетами подготовлено более 20 учебно-методических пособий, издано шесть монографий и учебников, опубликовано более 150

статей по основным направлениям деятельности предприятия.

Одним из направлений совершенствования качества подготовки специалистов является развитие международного сотрудничества университетов и промышленных предприятий для обмена накопленным опытом, модернизации учебных программ, формирования общей стратегии подготовки и трудоустройства выпускников аэрокосмических учебных заведений. КБ «Южное» сотрудничает с ведущими украинскими и европейскими аэрокосмическими университетами в рамках программы TEMPUS Европейского Союза, где участвует как заказчик и эксперт разрабатываемых учебных программ, передает университетам свой опыт в области научной и инновационной деятельности.

Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М. К. Янгеля» участвовало совместно с ДНУ и Национальным центром аэрокосмического образования молодежи Украины им. А. Макарова в течение ряда лет в построении системы непрерывного аэрокосмического образования в Украине. Общая стратегия заключалась в том, чтобы объединить усилия средней школы, высших учебных заведений, НИИ и предприятий промышленности для раннего выявления наиболее способных учеников и вовлечения их в систему подготовки специалистов для ракетно-космической отрасли по схеме непрерывного образования: школа — вуз — предприятие. Это безусловно правильное и перспективное направление, которому необходимо придать сегодня дополнительный импульс.

Опыт работы КБ «Южное» в области подготовки специалистов позволяет сделать вывод, что системное взаимодействие университетов и предприятий промышленности дает возможность найти пути решения проблемы обеспечения квалифицированными кадрами предприятий такой наукоемкой и высокотехнологичной отрасли как ракетно-космическая промышленность, способствует скорейшей интеграции выпускников университетов в современное производство, в том числе для реализации крупных международных космических проектов.

В последние годы произошли существенные, можно сказать революционные изменения в за-

конодательстве Украины по подготовке специалистов. Закон Украины «О высшем образовании» № 1536-ХП от 01.07.2014 года упразднил филиалы кафедр на предприятиях. МОН Украины в 2018 г. сформулировало новую Концепцию о внедрении дуальной формы образования. В Концепции сформулированы основные сегодняшние проблемы подготовки специалистов. В период рыночной трансформации экономики произошло обесценивание традиций практической подготовки студентов, расширилась имитация и фальсификация практики и т. д. В результате для большинства выпускников вузов характерен недостаточный уровень готовности к самостоятельной профессиональной деятельности на соответствующих полученному образованию должностях. Необходимо также отличать дуальное образование от традиционного прохождения практики студентами. Дуальная форма получения образования предполагает обучение на рабочем месте с выполнением должностных обязанностей соответственно трудовому договору.

Решение проблем предполагается путем наработки моделей взаимовыгодных отношений университетов и работодателей, направленных на практическую подготовку студентов к самостоятельной профессиональной деятельности и их социальную адаптацию в производственных коллективах, их нормативно-правовое и организационное обеспечение. Предполагается апробация этих моделей, их доработка и рекомендации для широкого использования.

Следует отметить, что система дуального образования в Германии сформировалась на базе существующих традиций, педагогических принципов, юридических нормативов и т. д. При экспортировании ее в Украину необходимо провести анализ и определить стратегические цели, приоритеты, учебные и педагогические требования и т. д., а также максимально использовать собственный положительный опыт. Важно найти ту форму взаимоотношения университета и предприятия, которая должна обеспечить заданный результат — получение студентом компетенций для выполнения профессиональных обязанностей на первом рабочем месте. Задачи, которые должны достигаться:

- укрепление и совершенствование практической составляющей образовательного процесса при сохранении достаточного уровня теоретической подготовки;

- обеспечение взаимопроникновения различных систем: наука и образование, наука и производство и т. д.;

- усиление роли работодателей в системе подготовки квалифицированных кадров;

- сокращение периода адаптации выпускников к профессиональной деятельности;

- модернизация содержания образования в соответствии с содержанием профессиональной деятельности и др.

КБ «Южное» в соответствии с Концепцией МОН Украины перестраивает свою работу с учебными заведениями высшего образования с учетом уже накопленного опыта работы с университетами. В частности, система ДО предусматривает наличие центров обучения на предприятии. Как уже отмечалось, в КБ «Южное» Ракетно-космический учебно-исследовательский центр действует с 1998 г.

В 2017 г. КБ «Южное» подписало договор о сотрудничестве с НАУ «ХАИ» и совместным приказом Генерального директора КБ «Южное» и ректора НАУ «ХАИ» образовало Учебно-научно-производственный центр дуального образования (УНП-центр ДО) НАУ «ХАИ» при КБ «Южное». УНП-центр ДО НАУ «ХАИ» создан в КБ «Южное» как головной организации ракетно-космической отрасли с целью объединения научно-технического потенциала и материально-технической базы НАУ «ХАИ» и КБ «Южное» для организации качественной подготовки студентов НАУ «ХАИ» на старших курсах (9—12 семестры) и координации совместных научных исследований. УНП-центр ДО является структурным подразделением НАУ «ХАИ» в составе Ракетно-космического учебно-исследовательского центра КБ «Южное» (РКУИЦ). УНП-центр ДО должен обеспечивать поэтапную реализацию системы дуального образования в соответствии с рекомендациями МОН Украины при подготовке специалистов для КБ «Южное», а также координацию взаимодействия КБ «Южное» с НАУ «ХАИ» в области образовательной, научной и инновационной деятельности.

УНП-центр ДО осуществляет учебную, методическую, организационную, воспитательную работу по следующим основным специальностям

- «Авиационная и ракетно-космическая техника»;

- «Авионика»;

- «Прикладная механика»;

- «Компьютерные науки»;

- «Системный анализ» и др.

Теоретическую часть подготовки обеспечивает университет, практическую — КБ «Южное». Студенты старших курсов НАУ «ХАИ» в течение 1.5 лет (9—12 семестры) проходят обучение в УНП-центре ДО, одновременно работают на 0.5 ставки в основных подразделениях КБ «Южное». КБ «Южное» и НАУ «ХАИ» сотрудничают по следующим основным направлениям:

- подготовка и согласование учебных программ;

- создание условий для обеспечения учебного процесса по системе дуального образования;

- привлечение высококвалифицированных специалистов КБ «Южное» и НАУ «ХАИ» для обучения студентов;

- организация и проведение в КБ «Южное» производственной и преддипломной практик, дипломирование студентов НАУ «ХАИ»;

- организация работы Государственной экзаменационной комиссии и защиты дипломных проектов студентами НАУ «ХАИ»;

- совместная подготовка и издание монографий, учебников и учебных пособий для студентов.

«КБ «Южное» в 2018 г. также заключило серию договоров о сотрудничестве, предусматривающих создание центров дуального образования при «КБ «Южное» со следующими ведущими заведениями высшего образования:

- Днепропетровский национальный университет;

- Национальный технический университет «Днепропетровская политехника»;

- Национальная металлургическая академия Украины.

Таким образом, сформирована экспериментальная площадка для отработки моделей взаимовыгодных отношений между работодателем и

университетами с поэтапным внедрением системы дуального образования. На основе отработки моделей и внедрения элементов дуального образования планируется создать кластер, включающий КБ «Южное» и ряд университетов для подготовки специалистов по системе дуального образования по всем направлениям деятельности КБ «Южное». Сегодня процесс перехода на новую систему подготовки специалистов находится на начальной стадии. Мы надеемся, что результаты совместной работы КБ «Южное» и университетов будут использованы при разработке нормативно-правовой базы для внедрения дуального образования в Украине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аникеев А. А., Артухов Е. А. Современная структура образования в Германии. *Alma mater*. 2012. № 3. С. 67—68.
2. Григорьева Н. В., Швец Н. А. Модель подготовки специалистов в условиях дуального обучения. *Соврем. пробл. науки и образования*. 2016. № 6. URL: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=25763> (дата звернення 09.04.2019).
3. Дуальна освіта. Київ, 2017. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/profesijno-tehnichna-osvita/dualna-osvita> (дата звернення 09.04.2019).
4. Новиков А. В., Ткаченко В. Д. Подготовка инженерных кадров для ракетно-космической отрасли: системный подход и взаимодействие. *Космична наука і технологія*. 2015. 21, № 5. С. 122—125.
5. Edner F. *Die Berufsausbildung im Dual System*. München: GRIN Verlag GmbH, 2004.
6. Novykov O. *Universities and industrial enterprises cooperation*. LAMBERT Acad. Publ., 2017. 52 p.
7. Novykov O. V., Perlik V. I., Dzbur E. O. Experience of higher school cooperation with manufacturing enterprise while training rocket and space industry experts. *IAC* - 53. 2002.
8. Novykov O., Perlik V., Polyakov N., Khutorniy V. Continuous space education system and its role in increasing efficiency of engineering staff training for Ukraine space rocket industry. *Acta astronautica*. 2008. P. 33—35.

Стаття надійшла до редакції 25.02.2019

REFERENCES

1. Anikeev A. A., Artiukhov E. A. (2012). Contemporary structure of education in Germany. *Alma mater*, 3, 67—68 [in Russian].
2. Grigorieva N. V., Shvets H. A. (2016). Model of specialist training in dual education. *Contemporary probl. sci. and education*, 6. URL: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=25763> (Last accessed: 21.01.2019).
3. Dualna osvita. Kyiv, 2017. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/profesijno-tehnichna-osvita/dualna-osvita> (Last accessed: 21.01.2019).
4. Novykov A. V., Tkachenko V. D. (2015). Engineering staff training for space rocket industry: system approach and cooperation. *Space Sci. and Techno.*, 21, 5, 122—125 [in Ukrainian].
5. Edner F. (2004). *Die Berufsausbildung im Dual System*. München: GRIN Verlag GmbH.
6. Novykov O. (2017). *Universities and Industrial Enterprises Cooperation*. LAMBERT Academic Publishing.
7. Novykov O. V., Perlik V. I., Dzbur E. O. (2002). Experience of higher school cooperation with manufacturing enterprise while training rocket and space industry experts. *IAC* - 53.
8. Novykov O., Perlik V., Polyakov N., Khutorniy V. (2008). Continuous Space Education System and its Role in Increasing Efficiency of Engineering Staff Training for Ukraine Space Rocket Industry. *Acta astronautica*, 33—35.

Received 25.02.2019

О. В. Новиков, Т. О. Новикова

Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля», Дніпро, Україна

ДУАЛЬНА ОСВІТА: ПРОБЛЕМИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПІДГОТОВКИ ФАХІВЦІВ ДЛЯ РАКЕТНО-КОСМІЧНОЇ ГАЛУЗІ

Розвиток ракетно-космічної галузі значною мірою залежить від ефективної системи аерокосмічної освіти, що забезпечує підготовку інженерних і наукових кадрів високої кваліфікації. У статті аналізується досвід і результати багаторічної співпраці Державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля» з університетами зі створення інтегрованої системи підготовки спеціалістів, що дає можливість раціонально поєднувати університетську технічну освіту з галузевою наукою та виробництвом. Розглядаються можливості використання накопиченого досвіду для реалізації нової Концепції Мі-

ністерства освіти та науки України з підготовки спеціалістів з використанням дуальної форми освіти.

Ключові слова: дуальна освіта, підготовка спеціалістів, система аерокосмічної освіти.

O. V. Novykov, T. O. Novykova

State Design Office "Pivdenne", Dnipro, Ukraine

DUAL EDUCATION: PROBLEMS
AND PROSPECTS WHILE TRAINING
SPECIALISTS FOR AEROSPACE INDUSTRY

The development of space and rocket industry depends to a great extent on aerospace education efficiency that

provides the training of highly qualified engineers and researchers. We present the analysis and results of the long-lasting cooperation of «Pivdenne» State Design Office with the universities on an integrated system of specialists training. This system will make it possible to rationally combine the university technical education with the specialized science and production process. The possibilities are considered of using know-how for the implementation of a new Concept of the Ministry of Education and Science of Ukraine on the specialists training within the dual system of education.

Keywords: dual education, training specialists, aerospace education system.

АВРАМОВ Костянтин Віталійович — завідувач відділу надійності та динамічної міцності Інституту проблем машинобудування імені А. М. Підгорного Національної академії наук України, доктор технічних наук, професор.

Напрямок науки — прикладна механіка, ракетно-космічна техніка.

БАРАБАНОВ Микола Олексійович — старший викладач кафедри радіотехнічних пристроїв Одеського національного політехнічного університету.

Напрямок науки — радіотехнічні пристрої, засоби телекомунікації.

ВАСИЛЬЄВ Володимир Володимирович — головний директор з технічних питань Earth Observing System Data Analytics Ukraine.

Напрямок науки — динаміка космічних систем, теоретична механіка, теорія коливань, стійкість руху.

ВЕНЕДІКТОВ Олександр Юрійович — доцент кафедри радіотехнічних пристроїв Одеського національного політехнічного університету, кандидат технічних наук.

Напрямок науки — радіотехнічні пристрої, засоби телекомунікації.

ВЕНЕДІКТОВ Юрій Іванович — старший викладач кафедри радіотехнічних пристроїв Одеського національного політехнічного університету.

Напрямок науки — радіотехнічні пристрої, засоби телекомунікації.

КИЯК Наталія Ярославівна — старший науковий співробітник відділу екоморфогенезу рослин Інституту екології Карпат Національної академії наук України, кандидат біологічних наук.

Напрямок науки — фізіолого-біохімічна адаптація рослин до стресу.

КОЗАК Людмила Володимирівна — доцент кафедри астрономії та фізики космосу фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат фізико-математичних наук.

Напрямок науки — фізика навколоземного космічного простору.

КОХАНОВ Олександр Борисович — заступник завідувача кафедри радіотехнічних пристроїв Одеського національного політехнічного університету, доктор технічних наук.

Напрямок науки — стандартизація та метрологічне забезпечення, радіотехнічні пристрої.

КРОНБЕРГ Олена — науковий співробітник відділу Землі та навколишнього середовища Інституту дослідження Сонячної системи ім. Макса Планка, Геттінген, Німеччина.

ЛОБАЧЕВСЬКА Оксана Василівна — завідувачка відділу екоморфогенезу рослин Інституту екології Карпат Національної академії наук України, кандидат біологічних наук, старший науковий співробітник.

Напрямок науки — структурно-функціональна організація росту та розвитку бріофітів, вплив стресових чинників на особливості формування адаптивних морфофізіологічних реакцій, гравіморфогенез мохів, видове різноманіття та особливості репродуктивної стратегії мохоподібних.

МАСЛОВА Анна Іванівна — старший науковий співробітник відділу системного аналізу та проблем керування Інституту технічної механіки Національної академії наук України та Державного космічного агентства України, кандидат фізико-математичних наук.

Напрямок науки — динаміка космічних систем та їхня взаємодія з розрідженим середовищем, динаміка твердого тіла, теорія коливань.

НЕДІЛЬКО Олександр Миколайович — провідний науковий співробітник Національного університету оборони України імені Івана Черняхівського, кандидат технічних наук, доцент. ORCID ID 0000-0001-8080-0486

Напрямок науки — аеродинаміка літальних апаратів.

НОВИКОВА Тетяна Олександрівна — провідний спеціаліст Ракетно-космічного навчально-дослідного центру Державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля».

Напрямок науки — управління проектами в сфері освіти.

НОВИКОВ Олександр Васильович — заступник Генерального директора Державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля», директор Ракетно-космічного навчально-дослідного центру, кандидат технічних наук, професор, академік Міжнародної академії астронавтики, заслужений діяч науки і техніки України, нагороджений орденами.

Напрямок науки — динаміка польоту та управління ракетами.

ПИРОЖЕНКО Олександр Володимирович — провідний науковий співробітник відділу системного аналізу та проблем керування Інституту технічної механіки Національної академії наук України та Державного космічного агентства України, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник.

Напрямок науки — динаміка космічних систем, теоретична механіка, теорія коливань, стійкість руху, регулярна та хаотична динаміка, нелінійна механіка.

САФРОНОВ Олександр Васильович — старший науковий співробітник Національного університету оборони України імені Івана Черняховського, доктор технічних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України. ORCID ID 0000-0001-7420-0062

Напрямок науки — аеродинаміка літальних апаратів.

СЕМОН Богдан Йосипович — професор Національного університету оборони України імені Івана Черняховського, доктор технічних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України. ORCID ID 0000-0002-7449-8214

Напрямок науки — аеродинаміка літальних апаратів.

УСПЕНСЬКИЙ Борис Валерійович — науковий співробітник відділу надійності та динамічної міцності Інституту проблем машинобудування імені А. М. Підгорного Національної академії наук України, кандидат технічних наук.

Напрямок науки — прикладна механіка, ракетно-космічна техніка.

ХОРКАВЦІВ Ярослава Дмитрівна — старший науковий співробітник відділу екоморфогенезу рослин Інституту екології Карпат Національної академії наук України, кандидат біологічних наук.

Напрямок науки — морфофізіологічні властивості та морфогенез бріюфітів, клітинна біологія, роль гравітаційної сили в онтогенезі мохів — фенотипна мінливість і життєва стратегія.

ЧЕРЕМНИХ Олег Костянтинович — завідувач відділу космічної плазми Інституту космічних досліджень Національної академії наук України та Державного космічного агентства України, доктор фізико-математичних наук, професор.

Напрямок науки — фізика ближнього космосу, фізика плазми.

ЧЕРЕМНИХ Сергій Олегович — науковий співробітник Інституту космічних досліджень Національної академії наук України та Державного космічного агентства України, кандидат фізико-математичних наук.

Напрямок науки — фізика ближнього космосу, фізика плазми.

ЧЕРНОБРИВКО Марина Вікторівна — заступник завідувача відділу надійності та динамічної міцності Інституту проблем машинобудування імені А. М. Підгорного Національної академії наук України, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник.

Напрямок науки — прикладна механіка, ракетно-космічна техніка.