

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2019.02.043>

УДК 551.510; 533.93

**О. К. Черемных<sup>1</sup>, С. О. Черемных<sup>1</sup>, Л. В. Козак<sup>1,2</sup>, Е. А. Кронберг<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Институт космических исследований Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины, Киев, Украина

<sup>2</sup> Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина

<sup>3</sup> Институт Макса Планка, Геттинген, Германия

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КЕЛЬВИНА — ГЕЛЬМГОЛЬЦА И МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЫ НА ГРАНИЦЕ ГЕОМАГНИТНОГО ХВОСТА

*Описаны математические и теоретические методы исследования продольных и косых МГД-мод, генерируемых солнечным ветром и локализованных вблизи границы геомагнитного хвоста. Указанные моды, в отличие от МГД-мод, распространяющихся внутри замкнутой части магнитного поля Земли, практически не исследовались ни теоретически, ни экспериментально. Показано, что задача об МГД-колебаниях на границе раздела двух движущихся одна относительно другой плазменных сред сводится к нахождению и исследованию уравнения малых колебаний, а также нахождения для него граничных условий. Приведена процедура получения дисперсионного уравнения для МГД-мод, локализованных на границе раздела движущейся и покоящейся плазменных сред. Аналитически установлено, что одна из восьми возможных МГД-мод может быть неустойчивой из-за развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца как при слабом, так и при сильном магнитном полях. Продемонстрировано, что косые возмущения, распространяющиеся под углом к вектору скорости среды, играют доминирующую роль при развитии этой неустойчивости. Отмечено, что генерация большого количества устойчивых МГД-мод на границе раздела плазм может привести к реализации турбулентного состояния плазмы. Результаты работы могут быть использованы для описания волновых процессов на границе геомагнитного хвоста и для объяснения генерации УНЧ-возмущений на ночной стороне магнитосферы Земли.*

**Ключевые слова:** неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, продольные и косые МГД-моды, волны, сжимаемая замагниченная среда, хвост магнитосферы Земли.

### ВВЕДЕНИЕ

Неустойчивость Кельвина — Гельмгольца (КГ) возникает на границе раздела сплошных сред, в которой происходит резкое изменение их параметров. Она была открыта Гельмгольцем [44] и Кельвином [54] ещё в 19 веке. Эта неустойчивость встречается в газах [3], жидкостях [10, 11] и плазме [6], и её исследованию посвящено боль-

шое число работ (см. обзоры [25, 50]). Она играет важную роль в переносе энергии солнечного ветра в земную магнитосферу [4, 9, 50, 51, 55]. В частности, считается, что неустойчивость КГ играет доминирующую роль в механизме вязкого взаимодействия солнечного ветра с магнитопаузой Земли, передавая импульс в магнитосферу [29, 50] и вызывая формирование размытых пограничных слоёв. Неустойчивость КГ реализуется в магнитосфере Сатурна [39] и на границе магнитопаузы Земли [48] и Юпитера [59]. Также

---

© О. К. ЧЕРЕМНЫХ, С. О. ЧЕРЕМНЫХ,  
Л. В. КОЗАК, Е. А. КРОНБЕРГ, 2019

из-за разрыва поля скоростей она наблюдается в солнечном ветре [45, 53] и хвостах ионизованных комет [5]. Наблюдения со спутников Hinode/SOT и SDO/AIA свидетельствуют о развитии неустойчивости КГ в солнечных протуберанцах и других структурах солнечной короны [36, 56]. В природе обычно реализуются дозвуковые скачки скорости, на которых развитие неустойчивости проявляется в виде нарастающих колебаний на границе раздела сред, а на нелинейной стадии — приводит к образованию вихрей. Классический пример — неустойчивость КГ на поверхности воды [24]. Неустойчивость КГ на дозвуковых перепадах скорости приводит к образованию цепочек вихреобразных структур, наблюдаемых в форме облаков в земной атмосфере [2]. Такие же структуры характерны для атмосфер Юпитера и Сатурна [22, 57]. Поскольку на этих планетах наблюдается сильное дифференциальное вращение атмосфер, то эти вихревые структуры обычно интерпретируются как проявление неустойчивости КГ. Вихревые образования, обусловленные развитием неустойчивости КГ наблюдаются также в магнитосфере и полярных сияниях Земли [14, 21]. Образование магнитных «жгутов» в ионосфере Венеры связывают с нелинейной стадией развития неустойчивости КГ [58].

В настоящей работе неустойчивость КГ изучается на границе геомагнитного хвоста, обтекаемого солнечным ветром. Из обычной гидродинамики известно, что возмущения в сверхзвуковых течениях, совпадающие по направлению со скоростью, являются устойчивыми [12]. Поэтому считается, что сверхзвуковое течение плазмы на границе геомагнитного хвоста является устойчивым (см. работу [50]). Позднее С. И. Сыроватским [18, 19] было показано, что косые возмущения, распространяющиеся под углом  $\Theta$  к вектору скорости, неустойчивы на границе раздела сред даже в случае, когда продольные возмущения ( $\Theta = 0$ ) устойчивы. Их фазовая скорость может быть существенно меньше скорости течения, а значение инкремента больше, чем у продольных возмущений [50]. Известно, что магнитное поле уменьшает инкремент неустойчивости КГ в случае продольных сдвиговых те-

чений [20, 32]. Однако учёт даже небольшой сжимаемости среды снижает стабилизирующий эффект магнитных полей. Работа [40] была одной из первых работ, в которых исследовалась устойчивость косых возмущений на плоской границе раздела движущихся одна относительно другой плазм с учётом магнитного поля и сжимаемости среды. В этой работе было получено несколько упрощенных критериев устойчивости. Однако дальнейшего развития результаты [40] не получили, так как рассмотренные в ней случаи не совсем соответствовали реальной физической ситуации. Новые элементы в методику исследования косых возмущений внесли работы [31, 52]. В ряде случаев мы будем сравнивать полученные результаты с их результатами.

Хотя Л. Д. Ландау и С. И. Сыроватский внесли большой вклад в изучение неустойчивости КГ, вопрос об устойчивости косых возмущений на границе раздела плазменных сжимаемых сред при наличии магнитного поля и скачка скорости на границе остался ими не исследованным. Основное внимание в данной работе будет уделено теоретическим и математическим аспектам исследования как продольных, так и косых МГД-мод, генерируемых солнечным ветром и локализованных вблизи границы геомагнитного хвоста, которую мы будем отождествлять с границей раздела плазменных сред. Последние были обнаружены в рамках многоспутникового проекта «Cluster» [8, 43]. Отметим, что указанные моды, за редким исключением [1, 14, 26, 48, 50] практически не исследовались ни теоретически, ни экспериментально, в отличие от МГД-мод, распространяющихся внутри замкнутой части магнитного поля Земли [15, 28, 30, 33, 35, 37, 38, 41]. Можно ожидать, что эти моды связаны с неустойчивостью КГ. Они также должны зависеть от угла  $\Theta$  распространения возмущений по отношению к вектору скорости.

Мы будем анализировать МГД-моды, распространяющиеся вдоль плоской граничной поверхности между двумя движущимися одна относительно другой плазмами. В этом случае угол  $\Theta$  связывает продольную ( $\lambda_{\parallel}$ ) и поперечную ( $\lambda_{\perp}$ ) длины волн относительно вектора скорости среды соотношением  $\cos \Theta = 1/\sqrt{1 + \lambda_{\parallel}^2/\lambda_{\perp}^2}$ . Продоль-

ным возмущениям ( $\Theta=0$ ) соответствуют возмущения с  $\lambda_{\perp} \gg \lambda_{\parallel}$ , а поперечным ( $\Theta \approx \pi/2$ ) — возмущения с  $\lambda_{\parallel} \gg \lambda_{\perp}$ . В работах [42, 43] на основе наблюдательных данных с космических аппаратов было показано, что в пограничной области плазменного слоя хвоста магнитосферы Земли реализуются колебания силовых линий магнитного поля, распространяющиеся вдоль магнитного поля. При ширине поперечного размера потока порядка 3000 км наблюдаемые характерные длины волн этих колебаний соответствовали 5...20 радиусам Земли. Поэтому справедлива оценка  $\lambda_{\parallel} > \lambda_{\perp}$ . Это обстоятельство указывает на необходимость рассмотрения как продольных, так и косых МГД-мод вдоль границы раздела плазменных сред. В работе [1] на основе результатов работы [43] был сделан вывод о том, что эти колебания генерируются посредством возбуждения неустойчивости КГ из-за распространения ускоренного потока плазмы. В работе [47] отмечалось, что неустойчивость КГ в солнечном ветре генерируется на косых возмущениях.

Данная статья дополняет результаты, полученные нами в работе [34], и содержит их математическое обоснование. В работе последовательно изложена процедура теоретического анализа неустойчивости КГ и распространения МГД-мод на границе геомагнитного хвоста, а также кратко излагаются результаты работы [34].

## МОДЕЛЬ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматриваем течение невязкой и идеально проводящей плазмы вблизи участка поверхности, который можно считать плоским, так что можно ввести декартову систему координат ( $x, y, z$ ). Пусть плоскость  $x = 0$  нулевой толщины является границей раздела двух однородных плазменных потоков, движущихся с разными постоянными скоростями выше и ниже границы раздела. На этой границе, следуя методике [13, 16, 18], полагаем, что все параметры плазмы изменяются скачкообразно. Считаем, что векторы равновесных скоростей  $\vec{v}_0$  и магнитных полей  $\vec{B}_0$  параллельны плоскости ( $y, z$ ) и направлены вдоль оси  $y$ .

Задача об МГД-колебаниях в рамках рассматриваемой модели сводится к исследованию малых колебаний вблизи положения равновесия. Полагаем

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{v}', \\ \rho &= \rho_0 + \rho', \\ P &= P_0 + P', \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}', \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\vec{v}_0, \rho_0, P_0$  и  $\vec{B}_0$  — начальные стационарные значения скорости, плотности, давления и магнитного поля, а  $\vec{v}', \rho', P'$  и  $\vec{B}'$  — их малые отклонения от равновесных значений. Пренебрегая малыми величинами высших порядков, из уравнений идеальной магнитной гидродинамики [6,17] получаем исходные уравнения

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}' \right] = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}' - \nabla P', \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{B}' = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v}' - \vec{B}_0 \operatorname{div} \vec{v}', \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \rho' + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}' = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\Pi' = \rho' c_s^2 + \vec{B}_0 \cdot \vec{B}'$  — возмущение полного давления плазмы,  $c_s = \sqrt{(\partial P_0 / \partial \rho_0)_s}$  — адиабатическая скорость звука. Магнитное поле в (2), (3) и (5) масштабировано следующим образом:  $\vec{B} / \sqrt{4\pi} \rightarrow \vec{B}$ . Система уравнений (2)–(5) описывает поведение восьми неизвестных величин: трёх составляющих вектора скорости, трёх составляющих вектора магнитного поля, а также давления и плотности. Покажем, что эту систему можно свести к одному уравнению малых колебаний.

## УРАВНЕНИЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ

В силу линейности системы (2)–(5) и однородности сред по координатам  $y$  и  $z$  рассмотрим возмущения равновесных величин в виде

$$\exp [i(-\omega t + k_y y + k_z z)].$$

Здесь  $\omega = \omega_r + i\gamma$  — комплексная частота,

$\vec{k} = \{0, k_y, k_z\}$  — волновой вектор, который далее полагается действительной величиной. При  $\gamma > 0$  колебания неустойчивы, и их амплитуда увеличивается со временем по экспоненциальному закону. Зависимость возмущений от  $x$  определяется уравнениями (2)–(5). Из (2) и (3) находим

$$\begin{aligned} v'_x &= -\frac{1}{\rho_0(\omega - k_y v_0)} \left[ k_y B_0 B'_x + i \frac{\partial \Pi'}{\partial x} \right], \\ v'_y &= -\frac{1}{\rho_0(\omega - k_y v_0)} [k_y B_0 B'_y - k_y \Pi'], \\ v'_z &= -\frac{1}{\rho_0(\omega - k_y v_0)} [k_y B_0 B'_z - k_z \Pi'], \\ B'_x &= -\frac{k_y B_0}{\rho_0(\omega - k_y v_0)} v'_x, \\ B'_y &= -\frac{k_y B_0}{\rho_0(\omega - k_y v_0)} v'_y + \frac{\rho'}{\rho_0} B_0, \\ B'_z &= -\frac{k_y B_0}{\rho_0(\omega - k_y v_0)} v'_z. \end{aligned} \quad (6)$$

Исключая из выражений для возмущенного магнитного поля возмущенную скорость, получаем

$$\begin{aligned} B'_x &= i \frac{k_y B_0 \cdot \partial \Pi' / \partial x}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}, \\ B'_y &= \frac{(\omega - k_y v_0)^2 B_0 \rho' - k_y^2 B_0 \Pi'}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}, \\ B'_z &= -\frac{k_y k_z B_0 \Pi'}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнений (5) и (7) следует дифференциальное уравнение второго порядка, связывающее возмущение полного давления плазмы  $\Pi'$  и возмущение плотности  $\rho'$ :

$$\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x^2} - (k_y^2 + k_z^2) \Pi' + (\omega - k_y v_0) \rho' = 0.$$

Из определения  $\Pi'$  и выражения для  $B'_y$  находим еще одну связь возмущения плотности и возмущения полного давления плазмы:

$$\rho' = \frac{\Pi'}{c_s^2 + \frac{B_0^2}{\rho_0} - \frac{k_y^2 c_s^2 B_0^2}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2}}.$$

Из этих двух уравнений следует

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x^2} - (k_y^2 + k_z^2) \Pi' + \\ &+ \frac{(\omega - k_y v_0)^4 \Pi'}{(\omega - k_y v_0)^2 \left( c_s^2 + \frac{B_0^2}{\rho_0} \right) - \frac{k_y^2 c_s^2 B_0^2}{\rho_0}} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, уравнения (2)–(5) свелись к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка (8). Оно справедливо как в области  $x > 0$ , так и в области  $x < 0$ . Величины, относящиеся к области  $x > 0$ , будем в дальнейшем обозначать нижним индексом 1, а к области  $x < 0$  — индексом 2. Считаем, что компоненты волнового вектора  $k_y$  и  $k_z$  имеют одинаковые значения в обеих областях.

Заметим, что уравнение (8) может быть также получено из уравнения (4), если  $v'_x$ ,  $v'_y$  и  $v'_z$  выразить через  $\Pi'$  и  $\rho'$ . Действительно, запишем последнее в виде

$$i(\omega - k_y v_0) \rho' = \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}'.$$

С помощью уравнения (6) выразим компоненты возмущенной скорости через  $\Pi'$  и  $\rho'$ :

$$\begin{aligned} v'_x &= -i \frac{\partial \Pi'}{\partial x} \frac{(\omega - k_y v_0)}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}, \\ v'_y &= \frac{k_y \Pi' (\omega - k_y v_0) - k_y \frac{B_0^2}{\rho_0} \rho' (\omega - k_y v_0)}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}, \\ v'_z &= \frac{k_z \Pi' (\omega - k_y v_0)}{\rho_0(\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}. \end{aligned}$$

Из этих четырех уравнений и уравнения, связывающего возмущенную плотность с возмущенным полным давлением плазмы, прямыми расчетами получаем уравнение (8).

Из условия исчезновения возмущений на бесконечности по каждую сторону от поверхности разрыва из (8) находим

$$\begin{aligned} \Pi'_1 &= A_1 \exp[-\chi_1 x + i(k_y y + k_z z - \omega t)], \\ \Pi'_2 &= A_2 \exp[\chi_2 x + i(k_y y + k_z z - \omega t)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $A_1, A_2$  — произвольные постоянные, а  $\chi_1, \chi_2 > 0$  и определены выражением

$$\chi^2 = k^2 - \frac{(\omega - k_y v_0)^4}{(\omega - k_y v_0)^2 \left( c_s^2 + \frac{B_0^2}{\rho_0} \right) - \frac{k_y^2 c_s^2 B_0^2}{\rho_0}},$$

$$k^2 = k_y^2 + k_z^2.$$

Решения (9) описывают поверхностные возмущения, амплитуды которых экспоненциально быстро убывают от границы раздела сред в обеих областях.

### ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Для получения дисперсионного уравнения необходимо найти граничные условия. Первое граничное условие найдем из условия отсутствия потока вещества через границу раздела сред. Уравнение поверхности раздела сред можно записать в виде

$$f(x, y, z, t) = x - \zeta(y, z, t) = 0, \quad (10)$$

где  $\zeta$  — малое смещение границы раздела в результате возмущения, причем

$$\zeta \propto \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z).$$

Из (10) следует, что вектор нормали к возмущенной поверхности раздела имеет вид

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{1}{|\nabla f|} (\vec{e}_x - \vec{e}_y k_y \zeta - \vec{e}_z k_z \zeta). \quad (11)$$

Обозначим через  $\vec{D}$  скорость поверхности раздела. Для точек  $x_i$  этой поверхности справедливы уравнения

$$f(x_i, t) = 0, \quad \frac{dx_i}{dt} = D_i.$$

Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial t} + D_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \quad (12)$$

Из (11) и (12) получаем, что нормальная составляющая скорости  $D_n$  поверхности раздела равна

$$D_n = \vec{D} \cdot \vec{n} = D_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{|\nabla f|} = -\frac{\partial f / \partial t}{|\nabla f|},$$

или

$$D_n = -\frac{i\omega\zeta}{|\nabla f|}. \quad (13)$$

Нормальная составляющая скорости возмущенной среды на границе раздела равна

$$\vec{v} \cdot \vec{n} + \vec{v}' \cdot \vec{n} = (v_0 \vec{e}_y + \vec{v}') \cdot \frac{1}{|\nabla f|} (\vec{e}_x - \vec{e}_y k_y \zeta - \vec{e}_z k_z \zeta) = \frac{1}{|\nabla f|} (v'_x - ik_y v_0 \zeta - \vec{e}_z k_z \zeta). \quad (14)$$

Поскольку частицы среды не пересекают поверхности раздела, то нормальная к поверхности раздела скорость среды должна совпадать с нормальной составляющей самой поверхности. Приравнявая (13) и (14), получаем

$$-\frac{i\omega\zeta}{|\nabla f|} = \frac{1}{|\nabla f|} (v'_x - ik_y v_0 \zeta),$$

откуда

$$\zeta = \frac{iv'_x}{\omega - k_y v_0}. \quad (15)$$

Уравнение поверхности (10) справедливо как при  $x < 0$ , так и при  $x > 0$ , поэтому для «тонкой» границы раздела сред величина  $\zeta$  является непрерывной, т. е.

$$\{\zeta\} = \zeta|_{x=+0} - \zeta|_{x=-0} = 0.$$

Следовательно, первое граничное условие, которое обычно называют кинематическим граничным условием [23], можно записать в виде

$$\frac{v'_{1x}}{\omega - k_y v_{01}} \Big|_{x=+0} = \frac{v'_{2x}}{\omega - k_y v_{02}} \Big|_{x=-0}. \quad (16)$$

Это граничное условие совпадает с граничными условиями, приведенными в работах [13, 36].

В качестве второго граничного условия мы будем использовать уравнение

$$\Pi_1|_{x=+0} = \Pi_2|_{x=-0}, \quad (17)$$

которое описывает непрерывность возмущения полного давления на границе раздела сред и называется динамическим граничным условием [23]. Это уравнение получается интегрированием  $x$ -составляющей уравнения (2) поперёк сдвигового слоя конечной толщины  $2\varepsilon$ , от



$x = -\varepsilon$  до  $x = \varepsilon$  с последующим предельным переходом  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Учитывая (16) и пренебрегая членами порядка  $\varepsilon$ , получаем уравнение (17).

### ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Из (9) и (16) следует

$$A_1 = A_2.$$

Используя это равенство, выражая  $v'_x$  через  $\Pi'$  (см. Приложение) и подставляя получившееся выражение в (17), находим

$$\frac{1}{\rho_{01}(\omega - k_y v_{01})^2 - k_y^2 B_{01}^2} \frac{\partial \Pi'_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\rho_{01}(\omega - k_y v_{02})^2 - k_y^2 B_{02}^2} \frac{\partial \Pi'_2}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (18)$$

Из (9) и (18) получаем дисперсионное уравнение (см. Приложение)

$$\left\{ k^2 - (\omega - k \cos \Theta v_{01})^4 / \left[ (\omega - k \cos \Theta v_{01})^2 \times \left( c_{s1}^2 + \frac{B_{01}^2}{\rho_{01}} \right) - \frac{k^2 \cos^2 \Theta c_{s1}^2 B_{01}^2}{\rho_{01}} \right] \right\}^{1/2} \times \frac{1}{\rho_{01}(\omega - k \cos \Theta v_{01})^2 - k^2 \cos^2 \Theta B_{01}^2} + \frac{1}{\rho_{02}(\omega - k \cos \Theta v_{02})^2 - k^2 \cos^2 \Theta B_{02}^2} \times \left\{ k^2 - (\omega - k \cos \Theta v_{02})^4 / \left[ (\omega - k \cos \Theta v_{02})^2 \times \left( c_{s2}^2 + \frac{B_{02}^2}{\rho_{02}} \right) - \frac{k^2 \cos^2 \Theta c_{s2}^2 B_{02}^2}{\rho_{02}} \right] \right\}^{1/2} = 0. \quad (19)$$

Здесь  $\Theta$  — угол между волновым вектором и вектором скорости,  $\cos \Theta = k_y / k$ ,  $k = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ . Комплексные значения  $\omega$  соответствуют неустойчивому движению плазмы.

### ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Из уравнения (19) в частном случае несжимаемых сред ( $c_{s1}, c_{s2} \rightarrow \infty$ ) получаем уравнение, описывающее неустойчивость КГ для косых ( $\Theta \neq 0$ ) дозвуковых течений в магнитном поле [6, 20]

$$\rho_{01}(\omega - k \cos \Theta v_{01})^2 + \rho_{02}(\omega - k \cos \Theta v_{02})^2 = k^2 \cos^2 \Theta (B_{01}^2 + B_{02}^2). \quad (20)$$

Из уравнения (20) находим

$$\omega = k \cos \Theta \left\{ \frac{(\rho_{01} v_{01} + \rho_{02} v_{02})}{(\rho_{01} + \rho_{02})} \pm \frac{1}{(\rho_{01} + \rho_{02})} \times \left[ (\rho_{01} + \rho_{02})(B_{01}^2 + B_{02}^2) - \rho_{01} \rho_{02} (v_{01} - v_{02})^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (21)$$

При  $\Theta = 0$  уравнение (20) совпадает с уравнением (35) работы [20]. Уравнение (21) показывает, что при перепаде скорости  $|v_{01} - v_{02}|$ , удовлетворяющем условию

$$(v_{01} - v_{02})^2 > \left( \frac{1}{\rho_{01}} + \frac{1}{\rho_{02}} \right) (B_{01}^2 + B_{02}^2), \quad (22)$$

частота  $\omega$  имеет положительную мнимую часть. Это означает, что возмущения неустойчивы. Отметим, что условие неустойчивости (22) справедливо как для продольных, так и для косых возмущений, поскольку не зависит от угла. В случае  $\Theta = 0$ ,  $v_{01} = v_0$ ,  $v_{02} = 0$ ,  $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$  уравнения (21) и (22) совпадают с уравнениями (35) и (36) работы [20]. Если  $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$ , то из (22) получается критерий (37) указанной работы.

В случае обычной гидродинамики ( $B_{01} = B_{02} = 0$ ) из (19) получается дисперсионное уравнение

$$\frac{[k^2 c_{s1}^2 - (\omega - k \cos \Theta v_{01})^2]^{1/2}}{\rho_{01} c_{s1} (\omega - k \cos \Theta v_{01})^2} + \frac{[k^2 c_{s2}^2 - (\omega - k \cos \Theta v_{02})^2]^{1/2}}{\rho_{02} c_{s2} (\omega - k \cos \Theta v_{02})^2} = 0,$$

приведенное в работе [19]. Однако в указанной работе (в которой полагалось  $v_{01} = v_0$ ,  $v_{02} = 0$ ) в качестве дисперсионного уравнения использовалось не это уравнение, а эквивалентное ему

уравнение вида

$$\frac{k^2 c_{s1}^2 - (\omega - k v_0 \cos \Theta)^2}{\rho_{01}^2 c_{s1}^2 (\omega - k v_0 \cos \Theta)^4} = \frac{k^2 c_{s2}^2 - \omega^2}{\rho_{02}^2 c_{s2}^2 \omega^4}, \quad (23)$$

Отметим, что в уравнении (23) могут присутствовать дополнительные корни (см. Приложение), которые необходимо исключить из рассмотрения. Уравнение (23) при  $\Theta = 0$  полностью совпадает с уравнением, полученным в работе [12], где было показано, что при  $\Theta = 0$ ,  $c_{s1} = c_{s2} = c_s$ ,  $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$  и выполнении неравенства

$$v_0 > 2\sqrt{2}c_s \quad (24)$$

неустойчивость не реализуется. Однако позднее С. И. Сыроватский [19] показал, что даже при выполнении условия (24) возмущения с  $\Theta \neq 0$  могут быть неустойчивыми. В частности, им было отмечено, что при  $\Theta \neq 0$  устойчивость реализуется при выполнении условия

$$v_0 > v_{кр}, \quad v_{кр} = \frac{2\sqrt{2}c_s}{\cos \Theta}. \quad (25)$$

Неравенство (25) показывает, что если скорость  $v_0 < 2\sqrt{2}c_s$ , то движение неустойчиво для малых возмущений при любых значениях угла  $\Theta$ . Если же  $v_0 > 2\sqrt{2}c_s$ , то есть две области значений угла  $\Theta$ . Для одной из них выполняется неравенство (25), и возмущения являются устойчивыми. Для другой области углов это неравенство не выполняется, и возмущения неустойчивы. Поскольку вторая область существует всегда, то это означает, в противоположность выводу [12], что граница раздела сред всегда будет неустойчивой по отношению к бесконечно малым возмущениям, распространяющимся под углом к вектору скорости. Очевидно, что при  $\cos \Theta \rightarrow 0$  (перпендикулярные возмущения,  $\Theta \rightarrow \pi/2$ ) устойчивость в принципе невозможна, поскольку, как следует из (25),  $v_{кр} \rightarrow \infty$ .

#### РЕДУКЦИЯ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ (19)

Для решения задачи о распространении МГД-волн на границе геомагнитного хвоста необходимо из (19) найти зависимость  $\omega = \omega(k, \Theta, c_{si}, c_{Ai}, v_{0i} \cos \Theta)$ ,  $i = 1, 2$ . Такую задачу из-за большого количества свободных параметров трудно решить как аналитически, так и

численно. Это удаётся сделать только при некоторых упрощающих предположениях [1, 16, 25]. Поэтому мы упростим уравнение (19), для чего используем простейшую модель разрыва скорости в сжимаемой среде [25]. Считаем, что равновесные плотность  $\rho_0$ , давление  $p_0$  и магнитное поле  $\vec{B}_0$  одинаковы и постоянны по обе стороны от границы раздела потоков плазмы, так что скорость звука и альвеновская скорость являются постоянными величинами. Не ограничивая общности рассмотрения и следуя [19], будем считать, что при  $x > 0$  скорость равна  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$ , а при  $x < 0$  скорость равна нулю. Последнее предположение означает, что скачок скорости происходит в бесконечно тонком слое по сравнению с поперечным размером потока. При сделанных предположениях дисперсионное уравнение (19) существенно упрощается и принимает вид

$$\left[ k^2 - \frac{(\omega - k v_0 \cos \Theta)^4}{(\omega - k v_0 \cos \Theta)^2 (c_s^2 + c_A^2) - k^2 c_s^2 c_A^2 \cos^2 \Theta} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{1}{\rho_0 (\omega - k v_0 \cos \Theta)^2 - k^2 B_0^2 \cos^2 \Theta} + \\ + \frac{1}{\rho_0 \omega^2 - k^2 B_0^2 \cos^2 \Theta} \times \\ \times \left[ k^2 - \frac{\omega^4}{\omega^2 (c_s^2 + c_A^2) - k^2 c_s^2 c_A^2 \cos^2 \Theta} \right]^{1/2} = 0, \quad (26)$$

где

$$c_A^2 = B_0^2 / \rho_0.$$

В дальнейшем вместо (26), следуя [19], мы будем использовать уравнение

$$\left[ k^2 - \frac{(\omega - k v_0 \cos \Theta)^4}{(\omega - k v_0 \cos \Theta)^2 (c_s^2 + c_A^2) - k^2 c_s^2 c_A^2 \cos^2 \Theta} \right] \times \\ \times \frac{1}{[\rho_0 (\omega - k v_0 \cos \Theta)^2 - k^2 B_0^2 \cos^2 \Theta]^2} = \\ = \left[ k^2 - \frac{\omega^4}{\omega^2 (c_s^2 + c_A^2) - k^2 c_s^2 c_A^2 \cos^2 \Theta} \right] \times \\ \times \frac{1}{[\rho_0 \omega^2 - k^2 B_0^2 \cos^2 \Theta]^2}. \quad (27)$$

Уравнение (27) отличается от (26) дополнительным корнем  $\omega = kv_0 \cos \Theta / 2$  (см. Приложение). Далее мы исключим этот вещественный корень из рассмотрения.

В случае несжимаемых плазменных сред ( $c_s \rightarrow \infty$ ) из (27) получаем уравнение

$$\omega = \frac{kv_0}{2} \cos \Theta \pm k \cos \Theta \sqrt{c_A^2 - v_0^2 / 4},$$

из которого следует, что магнитное поле стабилизирует неустойчивость при условии

$$4c_A^2 \geq v_0^2,$$

что соответствует условию (22) и результатам работы [20].

При отсутствии магнитного поля уравнение (27) описывает четыре ветви колебаний с частотами

$$\omega = \frac{kv_0}{2} \cos \Theta \pm kc_s \left[ 1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \Theta}{4c_s^2} \pm \left[ 1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \Theta}{c_s^2} \right]^{1/2} \right]^{1/2}.$$

Одна из этих ветвей колебаний неустойчива. Для неё находим, что неустойчивость реализуется в интервале скоростей  $0 < v_0^2 \cos^2 \Theta < 8c_s^2$ . Условие устойчивости  $v_0 \geq v_{кр}$ ,  $v_{кр} = 2\sqrt{2}c_s / \cos \Theta$  в рассматриваемом случае согласуется с условием (25).

Таким образом, уравнение (27) сохраняет все качественные особенности неустойчивости Кельвина — Гельмгольца, однако имеет более простой вид. Ниже мы будем использовать это уравнение для рассмотрения МГД-возмущений, локализованных вблизи границы раздела движущейся и неподвижной плазменных сред.

Завершая данный раздел, покажем, что уравнение (27) допускает дальнейшее упрощение. С этой целью введём в рассмотрение величины

$$x = \Omega - \frac{kV}{2}, \quad y = \Omega + \frac{kV}{2},$$

$$\Omega = \omega - \frac{kV}{2}, \quad V = v_0 \cos \Theta$$

и представим уравнение (27) в виде

$$(y^2 - x^2) \{ [k^2 x^2 y^2 (c_s^2 + c_A^2)^2 -$$

$$-k^4 (x^2 + y^2) (c_s^2 + c_A^2) c_s^2 c_A^2 \cos^2 \Theta + k^6 c_s^4 c_A^4 \cos^4 \Theta] \times \\ \times [x^2 + y^2 - 2k^2 c_A^2 \cos^2 \Theta] k^4 x^2 y^2 c_s^2 c_A^4 \cos^4 \Theta - \\ -k^6 (x^2 + y^2) c_s^2 c_A^6 \cos^6 \Theta + \\ + k^4 x^2 y^2 (c_s^2 + c_A^2) c_A^4 \cos^4 \Theta - x^4 y^4 (c_s^2 + c_A^2) \} = 0.$$

Поскольку вещественный корень  $y^2 - x^2 = 2kv_0 \Omega \sim \omega - kv_0 \cos \Theta / 2$  исключается из рассмотрения, то в ноль обращается выражение в фигурных скобках. Разделив это выражение на  $k^8$ , и учитывая, что

$$xy = \Omega^2 - \frac{k^2 V^2}{4} = \left( \omega - \frac{kv_0}{2} \cos \Theta \right)^2 - \left( \frac{kv_0}{2} \cos \Theta \right)^2, \\ x^2 + y^2 = 2 \left( \Omega^2 + \frac{k^2 V^2}{4} \right) = \\ = 2 \left[ \left( \omega - \frac{kv_0}{2} \cos \Theta \right)^2 + \left( \frac{kv_0}{2} \cos \Theta \right)^2 \right],$$

получаем дисперсионное уравнение

$$2 \left[ \left( a^2 - \frac{b^2}{4} \right)^2 \beta^2 (1 + \beta)^2 - \right. \\ \left. - 2 \left( a^2 + \frac{b^2}{4} \right) \beta^2 (1 + \beta)^2 \cos^2 \Theta + \beta^2 \cos^4 \Theta \right] \times \\ \times \left[ \left( a^2 + \frac{b^2}{4} \right) \beta - \cos^2 \Theta \right] + \\ + 2 \left( a^2 - \frac{b^2}{4} \right)^2 \beta^3 \cos^4 \Theta - 2 \left( a^2 + \frac{b^2}{4} \right) \beta^2 \cos^6 \Theta + \\ + \left( a^2 - \frac{b^2}{4} \right)^2 \beta^2 (1 + \beta) \cos^4 \Theta - \\ - \left( a^2 - \frac{b^2}{4} \right)^4 \beta^4 (1 + \beta) = 0, \quad (28)$$

которое представляет собой алгебраическое уравнение четвёртой степени относительно переменных  $a^2$  и  $b^2$ , где

$$a = \frac{\omega}{k} - \frac{v_0}{2} \cos \Theta, \quad b = v_0 \cos \Theta.$$



Уравнение (28) было приведено без вывода в работе [34] и является записанным в другом виде аналогом уравнения (27). Оно использовалось в указанной работе для анализа продольных и косых возмущений. Это уравнение при заданных  $v_0$  и  $\Theta$  описывает восемь ветвей колебаний. В результате может получиться очень сложное и запутанное движение, близкое к турбулентному. Напомним простой пример такого движения — фигуры Лиссажу для двух частот [27]. В природных условиях скорость плазменного потока  $v_0$  постоянно изменяется. Поэтому можно ожидать, что должна постоянно происходить генерация большого количества МГД-мод, приводящая к появлению турбулентности на границе геомагнитного хвоста. Заметим, что вопрос турбулизации течения на границе геомагнитного хвоста изучался в работе [49], где было показано, что вследствие хаотизации фаз возмущённых колебаний происходит образование эффективной турбулентной вязкости и формирование широких пограничных слоёв.

Ниже мы кратко представим результаты, вытекающие из дисперсионного уравнения (28) для различных значений величины  $\beta = c_s^2/c_A^2$ , характеризующей отношение газодинамического давления плазмы к давлению магнитного поля. Мы рассмотрим два случая:  $\beta > 1$  и  $\beta < 1$ . Полный аналитический анализ этого уравнения приведен в работе [34].

#### СЛАБОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ( $\beta > 1$ )

При  $\beta > 1$  уравнение (28) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & 2 \left[ \left( A - \frac{B}{4} \right)^2 \beta^2 (1 + \beta)^2 - \right. \\
 & - 2 \left( A + \frac{B}{4} \right) \beta^2 (1 + \beta) \cos^2 \Theta + \beta^2 \cos^4 \Theta \left. \right] \times \\
 & \times \left[ \left( A + \frac{B}{4} \right) \beta - \cos^2 \Theta \right] + \\
 & + 2 \left( A - \frac{B}{4} \right)^2 \beta^3 \cos^4 \Theta - 2 \left( A + \frac{B}{4} \right) \beta^2 \cos^6 \Theta + \\
 & + \left( A - \frac{B}{4} \right)^2 \beta^2 (1 + \beta) \cos^4 \Theta - \left( A - \frac{B}{4} \right)^4 \beta^4 (1 + \beta) = 0,
 \end{aligned} \tag{29}$$

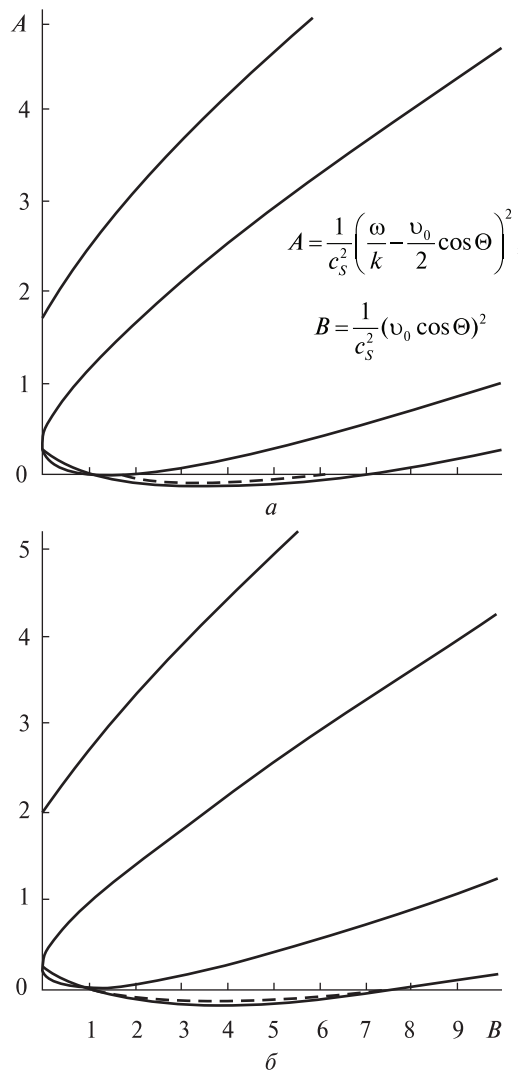
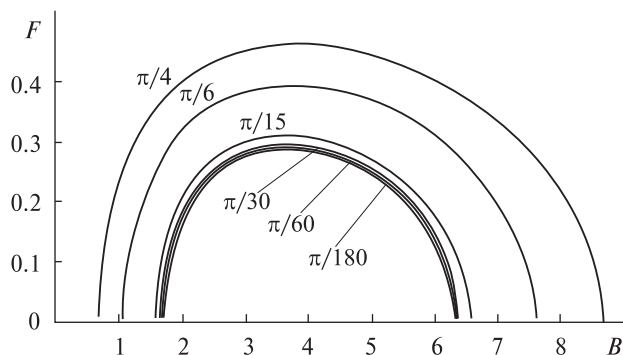


Рис. 1. Диаграмма магнитогидродинамических мод в плоскости  $A - B$  для  $\beta = 3$ :  $a$  — при  $\Theta = 0$ ,  $b$  — при  $\Theta = 30^\circ$

где

$$A = \frac{a^2}{c_s^2}, \quad B = \frac{b^2}{c_s^2}.$$

На рис. 1 представлены диаграммы поведения МГД-мод при  $\beta > 1$  ( $\beta = 5$ ), удовлетворяющие дисперсионному уравнению (29). Устойчивым возмущениям соответствует  $A \geq 0$ , а неустойчивым —  $A < 0$ . Из восьми ветвей колебаний шесть являются устойчивыми, одна ветвь затухает во времени и еще одна — неустойчива. Видно, что диаграмма косых возмущений ( $\Theta \neq 0$ ) на рис. 1,  $b$  качественно не отличается от диаграммы продольных возмущений ( $\Theta = 0$ ) на рис. 1,  $a$ .



Полагая  $\beta \gg 1$  и используя разложение по малому параметру  $1/\beta$ , из уравнения (29) для неустойчивой ветви колебаний получаем

$$\omega = \frac{k\nu_0}{2} \cos\Theta + ikc_s \left\{ \left[ \frac{\nu_0^2}{c_s^2} \cos^2\Theta \left( 1 + \frac{\sin^2\Theta}{\beta} \right) + 1 + \frac{2\sin^2\Theta}{\beta} - \frac{2\cos^2\Theta}{\beta} \right]^{1/2} - \frac{\nu_0^2}{4c_s^2} \cos^2\Theta - 1 - \frac{\sin^2\Theta}{\beta} \right\}^{1/2}. \quad (30)$$

Из (30) следует, что нарастающие во времени возмущения могут распространяться под любыми малыми углами, включая  $\Theta = 0$ , что согласуется с результатами [52].

На рис. 1 пунктиром отмечены кривые, соответствующие неустойчивости КГ, рассчитанные по формуле (30). Видно, что имеет место хорошее соответствие численных расчетов с аналитической формулой.

На рис. 2 представлены зависимости безразмерного инкремента  $F = \gamma/(kc_s)$  (см. (30)) от  $\nu_0 \cos\Theta$  при  $\beta = 3$  для различных значений угла  $\Theta$ . Видно, что величина инкремента и интервал скоростей, в котором развивается неустойчивость КГ, у косых возмущений больше, чем у продольных. Этот результат находится в полном соответствии с выводами работы [50].

### СИЛЬНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ( $\beta < 1$ )

В этом случае уравнение (28) удобно представить в виде

$$2 \left[ \left( C - \frac{D}{4} \right)^2 (1+\beta)^2 - 2(1+\beta)\beta \cos^2\Theta \left( C + \frac{D}{4} \right) + \beta^2 \cos^4\Theta \right] \times$$

Рис. 2. Зависимость функции  $F$  от углов  $\Theta \leq 45^\circ$  для  $\beta = 0.3$  на плоскости  $F - B$ , где

$$F = \left\{ \left[ \frac{\nu_0^2}{c_s^2} \cos^2\Theta \left( 1 + \frac{\sin^2\Theta}{\beta} \right) + 1 + \frac{2\sin^2\Theta}{\beta} - \frac{2\cos^2\Theta}{\beta} \right]^{1/2} - \frac{\nu_0^2}{4c_s^2} \cos^2\Theta - 1 - \frac{\sin^2\Theta}{\beta} \right\}^{1/2}, \quad B = \frac{1}{c_s^2} (\nu_0 \cos\Theta)^2$$

$$\times \left( C + \frac{D}{4} - \cos^2\Theta \right) + 2\beta \left( C - \frac{D}{4} \right) \cos^4\Theta - 2\beta \left( C + \frac{D}{4} \right) \cos^6\Theta + \left( C - \frac{D}{4} \right)^2 (1+\beta) \cos^4\Theta - \left( C - \frac{D}{4} \right)^4 (1+\beta) = 0. \quad (31)$$

Здесь

$$C = \frac{a^2}{c_A^2}, \quad D = \frac{b^2}{c_A^2}.$$

Диаграммы поведения МГД-мод при  $\beta < 1$  ( $\beta = 0.3$ ), удовлетворяющих дисперсионному уравнению (31), приведены на рис. 3. Неустойчивым возмущениям соответствует  $C < 0$ , устойчивым —  $C \geq 0$ . Диаграмма для косых мод (рис. 3, б) отличается от диаграммы для продольных возмущений, представленной на рис. 3, а, наличием неустойчивой ветви.

Полагая  $\beta \ll 1$ , из (31) разложением по малому параметру  $\beta$  находим, что частота и инкремент неустойчивой моды в случае сильного магнитного поля ( $\beta < 1$ ) имеют вид

$$\omega = \frac{k\nu_0}{2} \cos\Theta + ikc_A \left\{ \left[ \frac{\nu_0^2}{c_A^2} \cos^2\Theta (1 + \beta \sin^2\Theta) + 1 + 2\beta \sin^2\Theta + (1 + 2\beta) \cos^4\Theta - 2(1 + \beta) \cos^2\Theta \right]^{1/2} - \frac{\nu_0^2}{4c_A^2} \cos^2\Theta - 1 - \beta \sin^2\Theta \right\}^{1/2}. \quad (32)$$

Кривая инкремента, полученная с использованием формулы (32), на рис. 3, б практически неотличима от кривой, полученной из численных расчетов.

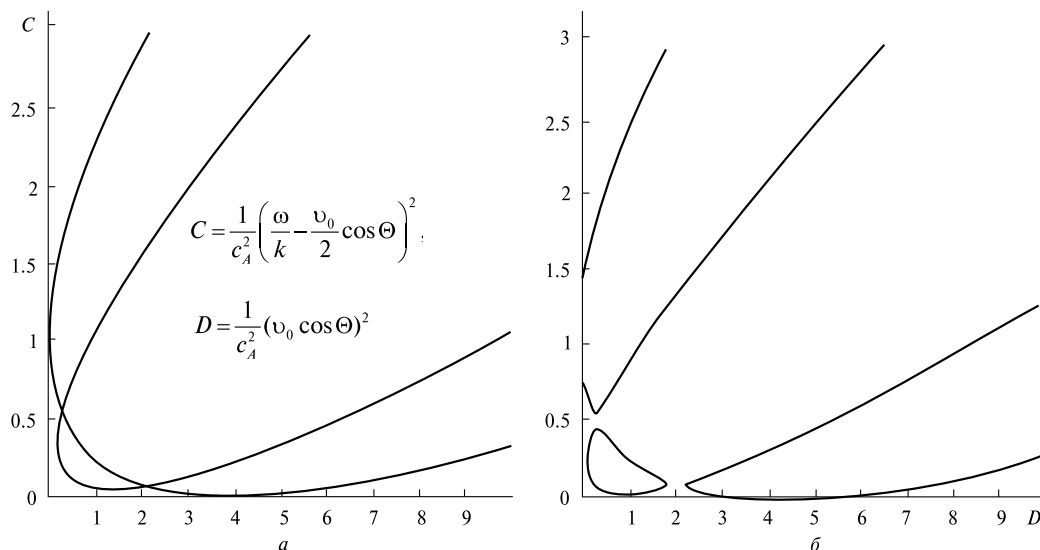


Рис. 3. Диаграмма магнитогидродинамических мод в плоскости  $C - D$  для  $\beta = 0.3$ :  $a$  — при  $\Theta = 0$ ,  $b$  — при  $\Theta = 30^\circ$  и  $\theta = 0^\circ$

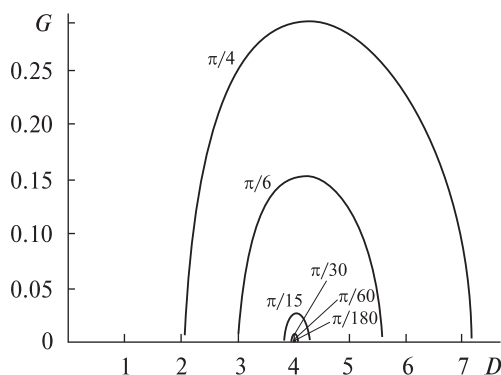


Рис. 4. Зависимость функции  $G$  от углов  $\Theta \leq 30^\circ$  для  $\beta = 0.3$  на плоскости  $G - D$ , где

$$G = \left\{ \left[ \frac{v_0^2}{c_A^2} \cos^2 \Theta (1 + \beta \sin^2 \Theta) + 1 + 2\beta \sin^2 \Theta + (1 + 2\beta) \cos^4 \Theta - 2(1 + \beta) \cos^2 \Theta \right]^{1/2} - \frac{v_0^2}{4c_A^2} \cos^2 \Theta - 1 - \beta \sin^2 \Theta \right\}^{1/2},$$

$$D = \frac{1}{c_A^2} (v_0 \cos \Theta)^2$$

На рис. 4 представлены зависимости функции безразмерного инкремента  $G = \gamma / (kc_A)$  от углов  $\Theta \leq 30^\circ$  при  $\beta = 0.3$ . Видно, что при таких углах величина  $\hat{\gamma}$  пренебрежимо мала и локализована вблизи точки  $v_0 = 2c_A$ , в которой при  $\Theta = 0$  она обращается в ноль. Этот результат свидетельствует о генерации при малых углах неустойчивых мод с исчезающе малыми инкрементами, что полностью согласуется с результатами работы [31].

Из (32) следует, что поперечные возмущения ( $\Theta \rightarrow \pi/2$ ), как и в случае слабого магнитного поля (30), будут устойчивыми для скоростей  $v_0^2 \leq 4c_A^2$ .

#### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Основные результаты работы следующие.

- Получено уравнение малых колебаний (8) для МГД-мод, распространяющихся по поверхности раздела двух однородных плазменных потоков, движущихся с разными скоростями выше и ниже поверхности раздела.
- Для этого уравнения получены граничные условия (16) и (17).
- Из уравнений (8), (16) и (17) найдено дисперсионное уравнение (19), учитывающее сжимаемость среды и магнитное поле. С помощью этого уравнения проанализирован ряд предель-

ных случаев. Для несжимаемых сред из этого уравнения получено дисперсионное уравнение (20), обобщающее результаты работы [20] на случай косых волн. Было продемонстрировано, что в случае обычной гидродинамики уравнение (19) совпадает с дисперсионным уравнением работы [19], в которые впервые была отмечена особая роль косых возмущений.

- Для аналитического и численного анализа МГД-мод в рамках модели потоков с одинаковыми параметрами, уравнение (19) было редуцировано к уравнению (27). Было показано, что это уравнение описывает все основные особенности неустойчивости КГ.

- Уравнение (27) было сведено к уравнению (28), которое описывает восемь ветвей колебаний при фиксированной скорости потока  $v_0$  и угла  $\Theta$ . Отмечено, что в результате получается сложное и запутанное движение плазмы, близкое к турбулентному. Это уравнение проанализировано для различных значений величины  $\beta$ , характеризующей отношение газодинамического давления к давлению магнитного поля.

- Анализ уравнения (28) показал, что из восьми ветвей колебаний шесть являются устойчивыми, одна ветвь затухает во времени и ещё одна является неустойчивой. Продемонстрировано, что условие возникновения неустойчивости КГ зависит от отношения газодинамического давления плазмы к давлению магнитного поля, т.е. от величины  $\beta$ , и от угла  $\Theta$  распространения возмущений относительно вектора скорости. При слабом магнитном поле ( $\beta > 1$ ) неустойчивость реализуется как на продольных ( $\Theta = 0$ ), так и на косых возмущениях ( $\Theta \neq 0$ ). Их фазовая скорость меньше скорости течения ( $\omega/k \sim v_0 \cos \Theta / 2$ ), а инкремент существенно больше, чем для продольных возмущений (рис. 2, 4). В случае сильного магнитного поля ( $\beta < 1$ ) неустойчивость развивается только на косых возмущениях.

- Отмечено, что интервалы скоростей, на которых развивается неустойчивость КГ, для косых возмущений существенно больше, чем такие же интервалы для продольных возмущений (см. рис. 2, 4). Это справедливо как для случая  $\beta > 1$ , так и в случае  $\beta < 1$ . Из (30) и (32) при  $\Theta \rightarrow \pi/2$  следует, что косые возмущения могут быть не-

стойчивыми даже при больших сверхзвуковых скоростях.

Таким образом, косые возмущения играют доминирующую роль в генерации неустойчивости КГ. Несмотря на преобладающую роль косых возмущений при возбуждении неустойчивости КГ, в большинстве современных работ при аналитическом и численном анализе указанной неустойчивости их влияние практически не учитывается (см. замечание в работе [50]).

*Работа выполнялась при поддержке гранта 90312 фонда Фольксваген («VW-Stiftung») и Международного института космических исследований ISSI-BJ, Пекин, Китай, а также при частичной поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по физике плазмы.*

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Вывод дисперсионных уравнений (19) и (27)

Из уравнений (6) и (7) находим

$$v'_x = -i \frac{\partial \Pi'}{\partial x} \frac{(\omega - k_y v_0)}{\rho_0 (\omega - k_y v_0)^2 - k_y^2 B_0^2}. \quad (П1)$$

Комбинация выражений (16) и (П1) дает (18). Из (9) и (18) следует

$$\frac{\chi_1}{\rho_{01} (\omega - k_y v_{01})^2 - k_y^2 B_{01}^2} + \frac{\chi_2}{\rho_{02} (\omega - k_y v_{02})^2 - k_y^2 B_{02}^2} = 0, \quad (П2)$$

где  $\chi_1$  и  $\chi_2$  определяются выражениями (9). Полагаем, что имеет место условие

$$\frac{\chi_1}{\rho_{01} (\omega - k_y v_{01})^2 - k_y^2 B_{01}^2} \neq \frac{\chi_2}{\rho_{02} (\omega - k_y v_{02})^2 - k_y^2 B_{02}^2}. \quad (П3)$$

Умножив уравнение (П2) на выражение

$$\frac{\chi_1}{\rho_{01} (\omega - k_y v_{01})^2 - k_y^2 B_{01}^2} - \frac{\chi_2}{\rho_{02} (\omega - k_y v_{02})^2 - k_y^2 B_{02}^2}, \quad (П4)$$

получаем дисперсионное уравнение (19).

Заметим, что условие (П3) может нарушаться, например, в системе с параметрами

$$\begin{aligned} \rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0, \quad c_{s1} = c_{s2} = c_s, \\ B_{01} = B_{02} = B_0, \quad v_{01} \neq v_{02}. \end{aligned} \quad (П5)$$

В этом случае при частоте

$$\omega = \frac{k_y}{2} (v_{01} + v_{02}) \quad (\text{П6})$$

выражение (П4) обращается в ноль, а уравнение (П2) в ноль не обращается. Поэтому для равновесных параметров (П5) корень (П6) должен быть исключен из рассмотрения при анализе уравнения (27).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Буринская Т. М. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца для потока плазмы, ограниченного в пространстве. *Физика плазмы*. 2008. 14, № 11. С. 1013—1020.
2. Госсард Э., Хук У. *Волны в атмосфере*. М.: Мир, 1978. 532 с.
3. Григорьев Ю. Н., Ершов И. В., Зырянов К. И. Численное моделирование волн Кельвина-Гельмгольца в слабо неравновесном молекулярном газе. *Вычисл. техн.* 2008. 13, № 5. С. 25—38.
4. Гульельми А. В., Потапов А. С., Клайн Б. И. Комбинированная неустойчивость Релея-Тейлора-Кельвина-Гельмгольца на магнитопаузе. *Солнечно-земная физ.* 2010. Вып.15. С. 24—27.
5. Ершкович А. И., Нусинов А. А, Черников А. А. О неустойчивости Кельвина — Гельмгольца в кометных хвостах I типа. *Астрон. журн.* 1972. 49. С. 866—871.
6. Загородний А. Г., Черемных О. К. *Введение в физику плазмы*. Киев: Наук. думка, 2014. 695 с.
7. Зеленый Л. М., Веселовский И. С. (ред.). *Плазменная геологофизика*. Москва: Физматлит, 2008. Т. 2. 672 с.
8. Зеленый Л. М., Григоренко Е. Е., Федоров А. О. Пространственно-временные ионные структуры в хвосте магнитосферы Земли: бимлеты, как результат неадиабатического импульсного ускорения плазмы. *Письма в ЖЭТФ*. 2004. 80. С. 771—783.
9. Кременецкий И. А., Черемных О. К. *Космическая погода: механизмы и проявления*. Киев: Наук. думка, 2009. 144 с.
10. Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К. *Математические модели сплошных сред*. Киев: Наук. думка, 2010. 552 с.
11. Ламб Г. *Гидродинамика*. Москва: ОГИЗ, 1947. 929 с.
12. Ландау Л. Д. Устойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде. *Докл. АН СССР*. 1944. 44. С. 339—342.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Н. М. *Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика*. Москва: Наука, 1986. 736 с.
14. Леонович А. С., Мазур В. А., Козлов Д. А. МГД-волны в геомагнитном хвосте: Обзор. *Солнечно-земная физ.* 2015. 1, № 1. С. 4—42.
15. Леонович А. С., Мазур В. А., Сенаторов В. Н. Альфвеновский волновод. *ЖЭТФ*. 1983. 85, № 1(7). С. 141—145.
16. Михайловский А. Б. *Теория плазменных неустойчивостей. Т.1. Неустойчивости однородной плазмы*. Москва: Атомиздат, 1970. 294 с.
17. Половин Р. В., Демущий В. П. *Основы магнитной гидродинамики*. Москва: Энергоатомиздат, 1987. 208 с.
18. Сыроватский С. И. Магнитная гидродинамика. *Успехи физ. наук*. 1957. 62, № 3. С. 247—303.
19. Сыроватский С. И. Неустойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде. *ЖЭТФ*. 1954. 27. С. 121—123.
20. Сыроватский С. И. Об устойчивости тангенциальных разрывов в магнитогидродинамической среде. *ЖЭТФ*. 1953. 24. С. 622—630.
21. Троицкая В. А., Гульельми А. В. Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы. *Успехи физ. наук*. 1969. 97. С. 453—494.
22. Трунев А. П. Моделирование атмосферных вихревых течений на Юпитере и Сатурне. *Науч. журн. Куб. ГАУ*. 2017. № 126 (02). 25 с. DOI: 10.21515/1990-4665-126-050.
23. Уизем Д. *Линейные и нелинейные волны*. Москва: Мир, 1977. 622 с.
24. Фабер Т. Е. *Гидроаэродинамика*. Москва: Постмаркет, 2001. 560 с.
25. Фридман А. М. Модифицированный критерий Ландау стабилизации неустойчивости тангенциального разрыва скорости в сжимаемой среде. *Успехи физ. наук*. 1990. 160, вып. 10. С. 179—183.
26. Шевелёв М. М., Буринская Т. М. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца для цилиндрического потока плазмы с произвольной температурой. *Физ. плазмы*. 2011. 37. С. 1081—1095.
27. Яворский Б. М., Детлаф А. А. *Справочник по физике*. Москва: Наука, 1985. 512 с.
28. Agapitov A. V., Cheremnykh O. K. Natural oscillations of the Earth magnetosphere associated with solar wind sudden impulses. *Ukr. Phys. J.* 2008. 53, № 5. P. 506—510.
29. Axford W. I. Viscous interaction between the solar wind and the Earth's magnetosphere. *Planet. Space Sci.* 1964. 12. P. 45—51.
30. Burdo O. S., Cheremnykh O. K., Verkhoglyadova O. P. Study of ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth. *Izv. Akad. Nauk. Fiz.* 2000. 64, № 9. P. 1896—1900.
31. Burinskaya T. M., Shevelev M. M., Rauch I.-L. Kelvin-Helmholtz instability for a bounded plasma flow in a longitudinal magnetic field. *Plasma Phys. Repts.* 2011. 37, № 1. P. 43—55.
32. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Cambridge: Univ. Press, 1961. 652 p.
33. Cheremnykh O. K. Transversally small-scale perturbations in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces. *Plasma Phys. and Contr. Fusion*. 2010. 52(9). 095006.
34. Cheremnykh O., Cheremnykh S., Kozak L., Kronberg E. Magneto-hydrodynamic waves and the Kelvin-Helmholtz instability at the boundary of plasma mediums. *Phys. Plasmas*. 2018. 25, № 10. id. 102119.
35. Cheremnykh O. K. Danilova V. V. Transverse small-scale MHD disturbances in space plasma with magnetic



- surfaces. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2011. 27, № 2. P. 98—108.
36. Cheremnykh O., Fedun V., Ladikov-Roev Yu., Verth G. On the Stability of Incompressible MHD Modes in Magnetic Cylinder with Twisted Magnetic Field and Flow. *Astrophys. J.* 2018. 866, № 2. P. 86—98.
  37. Cheremnykh O. K., Klimushkin D. Y., Kostarev D. V. On the structure of azimuthally small-scale UKF oscillations of hot space plasma in a curved magnetic field. Modes with continuous spectrum. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2014. 30, № 5. P. 209—222.
  38. Dai L., Takahashi K., Lysak R., et al. Storm time occurrence and spatial distribution of Pc4 poloidal ULF waves in the inner magnetosphere: A Van Allen Probes statistical study. *J. Geophys. Res.* 2015. 120. P. 4748—4762.
  39. Delamere P. A., Wilson R. J., Masters A. Kelvin-Helmholtz instability at Saturn's magnetosphere: Hybrid simulations. *J. Geophys. Res.* 2011. 116. A10222 (16 p).
  40. Fejer J. A. Hydromagnetic stability at fluid velocity discontinuity between compressible fluids. *Phys. Fluids*. 1964. 7, № 4. P. 499—503.
  41. Foullon C., Farrugia C. I., Fazakerley A. N., et al. Evolution of Kelvin-Helmholtz activity on the dusk flank magnetopause. *J. Geophys. Res.* 2008. 113. A11203 (12 p).
  42. Grigorenko E. E., Burinskaya T. M., Shevelev M., et al. Large-scale fluctuations of PBSL magnetic flux tubes induced by the field-aligned motion of highly accelerated ions. *Ann. géophys.* 2010. 28. P. 1273—1288.
  43. Grigorenko E. E., Sauvaud J. A., Zelenyi L. M. Spatial-Temporal characteristics of ion beamlets in the plasma sheet boundary layer of magnetotail. *J. Geophys. Res.* 2007. 112. A05218. doi: 10.1029/2006 JA 011986.
  44. Helmholtz H. L. F. On the discontinuous movement of fluids. *Mon. Rept. Roy. Prussian Acad. Phil. in Berlin*. 1868. 28. P. 215—218.
  45. Jokipii J. R., Davis L. Long-wavelength turbulence and heating of the solar wind. *Astrophys. J.* 1969. 156. P. 1101—1106.
  46. Kelling A. Alfvén waves and their roles in the dynamics of the Earth's magnetotail: A review. *Space Sci. Revs.* 2009. 142. P. 73—156.
  47. Korzhov N. P., Mishin V. V., Tomozov V. M. On the role of plasma parameters and the Kelvin-Helmholtz instability in a viscous interaction of solar wind streams. *Planet and Space Sci.* 1984. 32, N 9. P. 1169—1178.
  48. Kyoung-Joo Hwang. Magnetopause Waves Controlling the Dynamics of Earth's Magnetosphere. *J. Astron. and Space Sci.* 2015. 32, № 1. P. 1—11.
  49. Mishin V. V. Velocity boundary layers in the distant geotail and Kelvin-Helmholtz instability. *Planet. and Space Sci.* 2005. 53. P. 157—160.
  50. Mishin V. V., Tomozov V. M. Kelvin-Helmholtz Instability in the Solar Atmosphere, Solar Wind and Geomagnetosphere. *Solar Phys.* 2016. 291, № 11. P. 3165—3184.
  51. Miura A. Kelvin-Helmholtz instability at the magnetospheric boundary: Dependence on the magnetosheath sonic Mach number. *J. Geophys. Res.* 1992. 97. P. 10655—10675.
  52. Miura A., Pritchett P. L. Nonlocal stability analysis of MHD Kelvin-Helmholtz instability in a compressible plasma. *J. Geophys. Res.* 1982. 87. P. 7431—7444.
  53. Parker E. N. Dynamical Properties of Stellar Coronas and Stellar Winds. *Astrophys. J.* 1964. 139. P. 690—709.
  54. Thompson W. Hydrokinetic solution and observations. *Phil. Mag.* 1871. 42. P. 362—377.
  55. Rankin R., Fenrich F., Tikhonchuk V. T. Shear Alfvén waves on stretched magnetic field lines near midnight in Earth's magnetosphere. *Geophys. Res. Lett.* 2000. 27. P. 3265—3268.
  56. Ryutova M., Berger T., Frank Z., et al. Observation of plasma instabilities in quiescent prominences. *Solar Phys.* 2010. 267. P. 75—94.
  57. Smith B. A., Saderlom L. A., Beeber R., et al. The Jupiter system through the eyes of Voyager-1. *Science*. 1979. 204, № 4396. P. 951—971.
  58. Wolff R. S., Goldstein B. E., Yeates C. M. The onset and development of Kelvin-Helmholtz instability at the Venus ionosphere. *J. Geophys. Res.* 1980. 85A, № 12. P. 76—97.
  59. Zhang B., Delamere P. A., Ma X., Burkholder B., Wiltberger M., Lyon J. G., Merkiv V. G., Sorathia K. A. Asymmetric Kelvin-Helmholtz Instability at Jupiter's Magnetopause Boundary: Implications for Corotation-Dominated Systems. *Geophys. Res. Lett.* 2017. 45. P. 56—63.

Стаття надійшла до редакції 30.10.2018

#### REFERENCES

1. Burinskaya T. M. (2008). Kelvin-Helmholtz Instability in a Bounded Plasma Flow. *Plasma Phys. Reports*, 34(11), 936—943.
2. Gossard E. E., Hooke W. H. (1975). *Waves in the Atmosphere: Atmospheric Infrasound and Gravity Waves, Their Generation and Propagation*. Elsevier Science Ltd., 472 p.
3. Grigoriev Yu. N., Ershov I. V., Zyryanov K. I. (2008). Numerical modeling of Kelvin — Helmholtz waves in a weakly nonequilibrium molecular gas. *Computational technol.*, 13(5), 25—38 (In Russian).
4. Guglielmi A. V., Potapov A. S., Klein B. I. (2010). The combined Rayleigh — Taylor — Kelvin — Helmholtz instability on a magnetopause. *Solar-Terrestrial phys.*, 15, 24—27 (In Russian).
5. Ershkovich A. I., Nusinov A. A., Chernikov A. A. (1972). On the Kelvin — Helmholtz instability in cometary tails of type I. *Astron. J.*, 49, 866—871 (In Russian).
6. Zagorodniy A. G., Cheremnykh O. K. (2014). *Introduction to plasma physics*. Kyiv: Naukova Dumka.
7. Zelenyi L. M., Veselovskiy I. S. (Ed.). (2008). *Cosmic geoheliophysic*. Physmatlit (Moscow), 2, 672 p. (In Russian).
8. Zelenyi L. M., Grigorenko E. E., Fedorov A. O. (2004). Spatial-Temporal Ion Structures in the Earth's Magneto-

- tail: Beamlets as a Result of Nonadiabatic Impulse Acceleration of the Plasma. *JETP Lett.*, 80(10), 663–673.
9. Kremenetsky I. A., Cheremnykh O. K. (2009). *Space weather: mechanisms and manifestations*. Kyiv: Naukova Dumka.
  10. Ladikov-Roev Yu. P., Cheremnykh O. K. (2010). *Mathematical models of continuum*. Kyiv: Naukova Dumka.
  11. Lamb H. (1932). *Hydrodynamics* (6<sup>th</sup> ed.). Cambridge: Univ. Press.
  12. Landau L. D. (1944). Stability of tangential discontinuities in a compressible medium. *Repts Acad. Sci. USSR*, 44, 339–342.
  13. Landau L. D., Lifshits N. M. (1986). *Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics*. M.: Science.
  14. Leonovich A. S., Mazur V. A., Kozlov D. A. (2015). MHD waves in the geomagnetic tail: A Review. *Solar-Terrestrial Phys.*, 1(1), 4–42 (In Russian).
  15. Leonovich A. S., Mazur V. A., Senatorov V. N. (1983). Alfvén waveguide. *JETP*, 58(1), 83–85.
  16. Mikhailovsky A. B. (1970). *Theory of plasma instabilities Vol. 1. Homogeneous plasma instabilities*. Moscow: Atomizdat (In Russian).
  17. Polovin R. V., Demutsky V. P. (1987). *The basics of magnetic hydrodynamics*. Moscow: Energoatomizdat.
  18. Syrovatsky S. I. (1957). Magnetic fluid dynamics. *UFN*, 62(3), 247–303 (In Russian).
  19. Syrovatsky S. I. (1954). Instability of tangential discontinuities in a compressible medium. *JETP*, 27, 121–123 (In Russian).
  20. Syrovatsky S. I. (1953). On the stability of tangential discontinuities in a magnetohydrodynamic medium. *JETP*, 24, 622–630 (In Russian).
  21. Troitskaya V. A., Guglielmi A. V. (1969). Geomagnetic pulsations and diagnostics of the magnetosphere. *UFN*, 12, 195–218.
  22. Trunev A. P. (2017). *Simulation of atmospheric vortex flows on Jupiter and Saturn*. Krasnodar: KubGAU (In Russian).
  23. Whitham G. (1999). *Linear and nonlinear waves*. Pub. Wiley-Interscience.
  24. Faber T. E. (2001). *Hydroaerodynamics*. Moscow: Postmarket (In Russian).
  25. Friedman A. M. (1990). Modified criterion for the Landau stabilization of the instability of a tangential velocity discontinuity in a compressible medium. *UFN*, 33(10), 865–867.
  26. Shevelev M. M., Burinskaya T. M. (2011). Kelvin–Helmholtz instability of a cylindrical plasma flow with an arbitrary temperature. *Plasma Phys. Repts*, 37(12), 1006–1019.
  27. Yavorsky B. M., Detlaf A. A. (1985). *Handbook of physics*. Moscow: Science.
  28. Agapitov A. V., Cheremnykh O. K. (2008). Natural oscillations of the Earth magnetosphere associated with solar wind sudden impulses. *Ukr. Phys. J.*, 53(5), 506–510.
  29. Axford W. I. (1964). Viscous interaction between the solar wind and the Earth’s magnetosphere. *Planet. and Space Sci.*, 12, 45–51.
  30. Burdo O. S., Cheremnykh O. K., Verkhoglyadova O. P. (2000). Study of ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth. *Izv. Akad. Nauk. Fiz.*, 64 (9), 1896–1900.
  31. Burinskaya T. M., Shevelev M. M., Rauch I.-L. (2011). Kelvin — Helmholtz instability for a bounded plasma flow in a longitudinal magnetic field. *Plasma Phys. Repts*, 37(1), 43–55.
  32. Chandrasekhar S. (1961). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Cambridge: Univ. Press.
  33. Cheremnykh O. K. (2010). Transversally small-scale perturbations in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces. *Plasma Phys. and Contr. Fusion.*, 52(9), 095006.
  34. Cheremnykh O., Cheremnykh S., Kozak L., Kronberg E. (2018). Magnetohydrodynamic waves and the Kelvin-Helmholtz instability at the boundary of plasma mediums. *Phys. Plasmas*, 25(10), 102119. <https://doi.org/10.1063/1.5048913>.
  35. Cheremnykh O. K., Danilova V. V. (2011). Transverse small-scale MHD disturbances in space plasma with magnetic surfaces. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*, 27(2), 98–108.
  36. Cheremnykh O., Fedun V., Ladikov-Roev Yu., Verth G. (2018). On the stability of incompressible MHD modes in magnetic cylinder with twisted magnetic field and flow. *Astrophys. J.*, 866(2), 86–98.
  37. Cheremnykh O. K., Klimushkin D. Y., Kostarev D. V. (2014). On the structure of azimuthally small-scale UKF oscillations of hot space plasma in a curved magnetic field. Modes with continuous spectrum. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*, 30(5), 209–222.
  38. Dai L., Takahashi K., Lysak R., et al. (2015). Storm time occurrence and spatial distribution of Pc4 poloidal ULF waves in the inner magnetosphere: A Van Allen Probes statistical study. *J. Geophys. Res.*, 120, 4748–4762.
  39. Delamere P. A., Wilson R. J., Masters A. (2011). Kelvin — Helmholtz instability at Saturn’s magnetosphere: Hybrid simulations. *J. Geophys. Res.*, 116, A10222 (16 p).
  40. Fejer J. A. (1964). Hydromagnetic stability at fluid velocity discontinuity between compressible fluids. *Phys. Fluids*, 7(4), 499–503.
  41. Foullon C., Farrugia C. I., Fazakerley A. N., et al. (2008). Evolution of Kelvin — Helmholtz activity on the dusk flank magnetopause. *J. Geophys. Res.*, 113, A11203 (12 p).
  42. Grigorenko E. E., Burinskaya T. M., Shevelev M., et al. (2010). Large-scale fluctuations of PBSL magnetic flux tubes induced by the field-aligned motion of highly accelerated ions. *Ann. Geophys.*, 28, 1273–1288.
  43. Grigorenko E. E., Sauvaud J. A., Zelenyi L. M. (2007). Spatial-Temporal characteristics of ion beamlets in the

- plasma sheet boundary layer of magnetotail. *J. Geophys. Res.*, 112, A05218. doi: 10.1029/2006 JA 011986.
44. Helmholtz H. L. F. (1868). On the discontinuous movement of fluids. *Mon. Rept. Roy. Prussian Acad. Phil. in Berlin*, 28, 215–218.
45. Jokipii J. R., Davis L. (1969). Long-wavelength turbulence and heating of the solar wind. *Astrophys. J.*, 156, 1101–1106.
46. Kelling A. (2009). Alfvén waves and their roles in the dynamics of the Earth's magnetotail: A review. *Space Sci. Rev.*, 142, 73–156.
47. Korzhov N. P., Mishin V. V., Tomozov V. M. (1984). On the role of plasma parameters and the Kelvin — Helmholtz instability in a viscous interaction of solar wind streams. *Planet and Space. Sci.*, 32(9), 1169–1178.
48. Kyoung-Joo Hwang. (2015). Magnetopause waves controlling the dynamics of Earth's magnetosphere. *J. Astron. Space Sci.*, 32(1), 1–11.
49. Mishin V. V. (2005). Velocity boundary layers in the distant geotail and Kelvin — Helmholtz instability. *Planet. and Space Sci.*, 53, 157–160.
50. Mishin V. V., Tomozov V. M. (2016). Kelvin — Helmholtz Instability in the Solar Atmosphere, Solar Wind and Geomagnetosphere. *Solar Phys.*, 291(11), 3165–3184.
51. Miura A. (1992). Kelvin — Helmholtz instability at the magnetospheric boundary: Dependence on the magnetosheath sonic Mach number. *J. Geophys. Res.*, 97, 10655–10675.
52. Miura A., Pritchett P. L. (1982). Nonlocal stability analysis of MHD Kelvin — Helmholtz instability in a compressible plasma. *J. Geophys. Res.*, 87, 7431–7444.
53. Parker E. N. (1964). Dynamical properties of stellar coronas and stellar winds. *Astrophys. J.*, 139, 690–709.
54. Thompson W. (1871). Hydrokinetic solution and observations. *Phil. Mag.*, 42, 362–377.
55. Rankin R., Fenrich F., Tikhonchuk V. T. (2000). Shear Alfvén waves on stretched magnetic field lines near midnight in Earth's magnetosphere. *Geophys. Res. Lett.*, 27, 3265–3268.
56. Ryutova M., Berger T., Frankz Z., et al. (2010). Observation of plasma instabilities in quiescent prominences. *Solar Phys.*, 267, 75–94.
57. Smith B. A., Saderlom L. A., Beeber R., et. al. (1979). The Jupiter system through the eyes of Voyager-1. *Science*, 204(4396), 951–971.
58. Wolff R. S., Goldstein B. E., Yeates C. M. (1980). The onset and development of Kelvin — Helmholtz instability at the Venus ionosphere. *J. Geophys. Res.*, 85A(12), 76–97.
59. Zhang B., Delamere P. A., Ma X., Burkholder B., Wiltberger M., Lyon J. G., Merliv V. G., Sorathia K. A. (2017). Asymmetric Kelvin — Helmholtz instability at Jupiter's magnetopause boundary: Implications for corotation-dominated systems. *Geophys. Res. Lett.*, 45, 56–63.

Received 30.10.2018

О. К. Черемных<sup>1</sup>, С. О. Черемных<sup>1</sup>,  
Л. В. Козак<sup>1,2</sup>, Кронберг Е. О.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Інститут космічних досліджень  
Національної академії наук України  
і Державного космічного агентства України,  
Київ, Україна

<sup>2</sup> Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

<sup>3</sup> Інститут Макса Планка, Геттінген, Німеччина

### НЕСТІЙКІСТЬ КЕЛЬВІНА — ГЕЛЬМГОЛЬЦА І МАГНІТОГІДРОДИНАМІЧНІ МОДИ НА МЕЖІ ГЕОМАГНІТНОГО ХВОСТА

Описано математичні і теоретичні методи дослідження поздовжніх і похилих МГД-мод, що генеруються сонячним вітром і локалізовані поблизу границі геомагнітного хвоста. Зазначені моди, на відміну від МГД-мод, що поширюються всередині замкнутої частини магнітного поля Землі, практично не досліджувалися ні теоретично, ні експериментально. Показано, що задача про МГД-коливання на межі розділу двох середовищ, що рухаються одне відносно іншого, зводиться до побудови і дослідження рівняння малих коливань, а також формулювання для нього граничних умов. Наведено процедуру отримання дисперсійного рівняння для МГД-мод, локалізованих на межі розділу рухомих та нерухомих плазмових середовищ. Аналітично встановлено, що одна з восьми можливих МГД-мод може бути нестійкою через розвиток нестійкості Кельвіна — Гельмгольца як при слабкому, так і при сильному магнітному полі. Продемонстровано, що похилі збурення, що поширюються під кутом до вектора швидкості середовища, відіграють домінуючу роль при розвитку цієї нестійкості. Відзначено, що генерація великої кількості стійких МГД-мод на межі розділу плазми може призвести до реалізації турбулентного стану плазми. Результати роботи можуть бути використані для опису хвильових процесів на границі геомагнітного хвоста і для пояснення генерації УНЧ-збурень на нічній стороні магнітосфери Землі.

**Ключові слова:** нестійкість Кельвіна — Гельмгольца, поздовжні та похилі МГД-моди, хвилі, нестискуване замагнічене середовище, хвіст магнітосфери Землі.

O. K. Cheremnykh<sup>1</sup>, S. O. Cheremnykh<sup>1</sup>,  
L. V. Kozak<sup>1,2</sup>, E. A. Kronberg<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Space Research Institute of the National Academy  
of Science of Ukraine and the National Space Agency  
of Ukraine, Kyiv, Ukraine

<sup>2</sup> Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine

<sup>3</sup> Max Planck Institute, Göttingen, Germany

#### INSTABILITY OF KELVIN-HELMHOLTZ AND MAGNETOHYDRODYNAMIC MODES ON THE BOUNDARY OF GEOMAGNETIC TAIL

The paper focuses on the description of mathematical and theoretical methods for studying the longitudinal and oblique MHD modes generated by the solar wind, which are localized near the boundary of the geomagnetic tail. On the contrary to the MHD modes propagating in the inner part of the Earth's magnetic field, these modes have hardly been studied either theoretically or experimentally. It is shown that the problem of MHD oscillations on the boundary between two relatively

moving plasma media is reduced to finding and studying the equation of small variations, as well as finding its boundary conditions. We present the procedure for obtaining the dispersion equation for MHD modes localized on the boundary between moving and stationary plasma media. The analysis revealed that one of the eight possible MHD modes could be unstable due to the development of the Kelvin-Helmholtz instability for both weak and strong magnetic field. It is shown that oblique perturbations propagating at an angle to the velocity vector of the medium play a dominant role in the development of this instability. Moreover, the generation of a large number of stable MHD modes at the plasma boundary can lead to the realization of a turbulent plasma state. The results of the work can be applied in the description of wave processes at the boundary of the geomagnetic tail and in the explanation of the generation of ULF disturbances on the night side of the Earth's magnetosphere.

**Keywords:** Kelvin-Helmholtz instability, longitudinal and oblique MHD modes, waves in a compressible magnetized medium, the tail of the Earth's magnetosphere.