

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2019.02.023>

УДК 539.3+624.074

К. В. Аврамов, М. В. Чернобривко, Б. В. Успенський

Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного
Національної академії наук України, Харків, Україна

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ НАНОАРМОВАНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Останнім часом у світовому ракетобудуванні все частіше на заміну металам та їхнім сплавам приходять полімерні композитні матеріали, що армовані вуглецевими нанотрубками, так звані нанокомпозити. Це пов'язано з тим, що в умовах робочих високоінтенсивних навантажень при однаковій вазі нанокомпозити мають значну перевагу над алюмінієвими сплавами за своїми механічними характеристиками міцності. Циліндричні нанокомпозитні корпусні елементи ракет можуть бути армовані вуглецевими нанотрубками з різним розподілом їх по товщині матриці. В даний час існує п'ять основних типів наноармування, які призводять до виникнення функціонально-градієнтного матеріалу по товщині оболонки. При аналізі коливань елементів ракетно-космічної техніки необхідно розглядати можливість резонансу між конструкцією та аеродинамічними навантаженнями. Невід'ємною частиною такого аналізу є аналіз вільних коливань оболонки, який проводиться з метою визначення та запобігання небезпечних резонансних режимів. Класичні моделі коливань циліндричних оболонок не дозволяють враховувати зміну властивостей матеріалу по товщині. У даній роботі запропоновано метод аналізу вільних коливань функціонально-градієнтних нанокомпозитних циліндричних оболонок, які можуть бути складовою частиною ракетних комплексів і конструкцій літаків. Розглянуто залежності параметрів коливань від типу наноармування, об'ємної частки нанотрубок в композиті та товщини оболонки. Результати аналітичного дослідження порівнюються з чисельним моделюванням методом скінченних елементів. Запропонована модель враховує зміну властивостей матеріалу по товщині оболонки для кожного з п'яти випадків наноармування. Показано, що відбудова нанокомпозитних оболонок від резонансних режимів може здійснюватися шляхом раціонального вибору типу армування вуглецевими нанотрубками.

Ключові слова: нанокомпозит, нанотрубка, функціонально-градієнтний матеріал, циліндрична оболонка, вільні коливання, власні частоти.

ВСТУП

Стрімкий прогрес передових технологій виробництва в останні роки призвів до виникнення функціонально градуїтованих композитів зі включеннями нанотрубок (нанокомпозитів). Ці матеріали мають високі перспективи для використання в аерокосмічній, енергетичній, машинобудівній та багатьох інших галузях. Тому властивості нанокомпозитів стали темою багатьох сучасних досліджень. Для повноцінного використання цих матеріалів необхідно розвивати аналітичні та чисельні методи, які дозволять проводити аналіз поведінки нанокомпозитних оболонок у різному середовищі.

При розробці нанокомпозитних конструкцій значну роль відіграє обчислювальний підхід,

який дозволяє проводити симуляції для їхнього аналізу та синтезу. Ефективні пружні властивості вуглецевих нанотрубок обчислено за допомогою методів мікромеханіки в роботі [36]. Ці ефективні властивості використано у методі Морі — Танака для обчислення ефективних пружних властивостей нанокомпозиту. У роботі [21] властивості нанокомпозитів обчислено методом скінченних елементів з використанням тривимірного об'ємного елемента на базі методів механіки суцільних середовищ. У цій роботі для перевірки результатів застосовується розширене правило змішування, яке базується на теорії міцності матеріалів для оцінки ефективного модуля Юнга у поздовжньому напрямі. У роботі [31] запропоновано метод розробки конструктивних моделей полімерного композиту з наноармуванням.

© К. В. АВРАМОВ, М. В. ЧЕРНОБРИВКО, Б. В. УСПЕНСЬКИЙ, 2019

Метод базується на методі еквівалентного континууму для наноструктурованих матеріалів. Побудовано модель еквівалентного континууму, в якій механічні властивості визначаються за допомогою силових констант, які описують зв'язані та незв'язані міжатомні взаємодії у молекулярній моделі.

У серії статей експериментально досліджувались механічні характеристики нанокompозитів. Результати випробувань на розтягнення зразків описано у роботі [2]. Виявлено, що модуль Юнга та міцність зсуву змінюються в два та чотири рази відповідно для композитів з 1 % та 4 % часткою нанотрубок відносно резинових зразків. У роботі [7] досліджено вплив типу нанокompозиту на жорсткість епоксидної матриці, армованої вуглецевими нанотрубками. Це армування значно зміцнює композит без зниження деформації руйнування. Експериментальні результати армування епоксидної матриці вуглецевими нановолокнами описано в роботі [35]. Армування підвищило напруження руйнування. У роботі [15] описано, що модуль Юнга нанокompозиту з орієнтованим армуванням може перевищувати модуль Юнга нанокompозиту з довільно орієнтованим армуванням у п'ять разів. Модифікована форма правила змішування використовується для обчислення модуля Юнга. Показано, що експериментальні та розрахункові значення для модуля Юнга є близькими. У роботі [5] показано, що експериментально отриманий модуль пружності на розтягнення нанокompозиту збільшується за лінійним законом при підвищенні концентрації нанотрубок у композиті. У роботі [32] було досліджено механічні властивості композитів з епоксидною матрицею, армованих багат шаровими вуглецевими нанотрубками, шляхом проведення випробувань на розтягнення. Експериментальні результати свідчать, що модуль Юнга та міцність на розтягнення можуть бути значно підвищені шляхом додавання малої кількості багат шарових вуглецевих нанотрубок. У роботі [29] запропоновано правило змішування, що суттєво відрізняється від того, яке використовується у більшості досліджень. У оглядовій роботі [13] наведено різні мікромеханічні моделі для оцінки механічних властивостей нанокompозитів.

Серію робіт присвячено статичі та динаміці оболонки з нанокompозитів на базі їхніх лінійних моделей. Статика та динаміка циліндричних оболонки з наноармованого матеріалу розглядається в роботах [14, 22, 39, 40, 45]; лінійні коливання пластин з наноармованих композитів — у роботах [11, 17, 18], а вільні коливання подвійно-криволінійних пологих оболонки з функціонально градуйованого композиту з нановключеннями графенових нанопластинок з урахуванням трьох різних видів армування — у роботах [42, 43]. Математичну модель шарнірно опертої подвійно-криволінійної пологої оболонки побудовано на базі принципу Гамільтона та теорії зсуву високого порядку. Динамічний аналіз нанокompозитних циліндрів, армованих одношаровими вуглецевими нанотрубками під дією ударного навантаження зроблено в роботі [28]. Також аналізувались вільні коливання та поширення хвиль у конструкції.

Нелінійне деформування тонкостінних конструкцій з нанокompозитів досліджувалось неодноразово. Так, у роботах [30, 37, 38] розглядається нелінійний згин шарнірно опертих функціонально градуйованих нанокompозитних пластин та циліндричної оболонки, армованих одношаровими вуглецевими нанотрубками. Рівняння руху базуються на зсувній теорії деформації пластин високого порядку з нелінійністю типу фон Кармана. У роботі [20] наведено аналіз надлишкових прогинів функціонально градуйованих циліндричних панелей, армованих вуглецевими нанотрубками, під дією осьового стиснення з урахуванням геометричної нелінійності. У роботах [23—25] отримано нелінійну динамічну модель функціонально градуйованих нанокompозитних кінцевих панелей за допомогою нелінійної теорії оболонки Новожилова. Принцип Гамільтона застосовано для побудови трьох диференціальних рівнянь руху системи у частинних похідних та досліджено явище динамічної нестійкості. У роботі [9] запропоновано розширення теорії оболонки Кірхгофа для нелінійного аналізу функціонально градуйованих нанокompозитних тонких оболонки. Розглянуто нелінійну втрату стійкості гіперболічними та циліндричними оболонками.

У роботі [12] розглянуто багат шарову функціонально градуїовану прямокутну пластину, армовану графеновими нанопластинками. Кожний шар пластини складається з суміші ізотропної полімерної матриці та графенових нанопластинок. Для обчислення властивостей матеріалу застосовано модифіковану модель Халпіна — Тсая та правило змішування. Робота [10] містить дослідження вільних коливань функціонально градуїованих пористих нанокомпозитних пластин, армованих малою кількістю графенових нанопластинок на двопараметричному пружному фундаменті з різноманітними крайовими умовами.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ
ТА ВЛАСТИВОСТІ МАТЕРІАЛУ**

Розглядається циліндрична оболонка постійної товщини h . Динамічний напружено-деформований стан оболонки досліджується у криволінійній системі координат x, θ, z . Основними невідомими задачі є три проекції переміщень середньої поверхні оболонки та кути обертання нормалі до середньої поверхні (рис. 1). Деформації точок оболонки вважаються малими, а проекції трьох переміщень u, v, w — помірними. Оскільки деформації точок оболонки малі, зв'язок між напруженнями та деформаціями є лінійним та описується законом Гука.

Оболонку створено з функціонально градієнтного матеріалу з наноармуванням. Вважається, що при наноармуванні всі вуглецеві нанотрубки розташовано у матеріалі матриці паралельно у повздовжньому напрямі оболонки. При цьому створюється ортотропний функціонально градієнтний матеріал.

Є п'ять основних типів наноармування (рис. 2). Тип UD-CNT відповідає рівномірному наноармуванню у поперечному напрямку циліндричної оболонки, всі інші (FGV, FGL, FGX та FGO) характеризуються нерівномірним армуванням у поперечному напрямку та відповідають функціонально градієнтним композитним матеріалам. Якщо V_{CNT}^* — сукупна об'ємна частка вуглецевих нанотрубок у композиті, об'ємну частку нанотрубок у заданому перерізі $V_{CNT}(z)$ можна знайти за виразами, які представлено у табл. 1 [11, 37, 43].

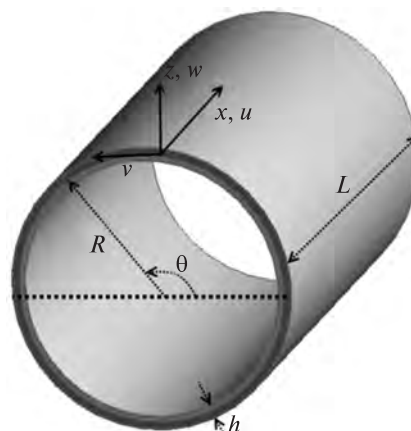


Рис. 1. Схема оболонки

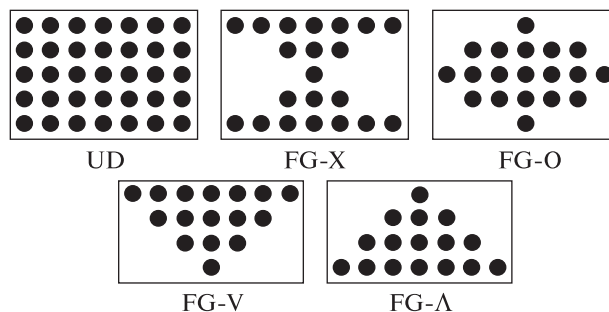


Рис. 2. Типи наноармування

Механічні характеристики функціонально-градієнтного композитного матеріалу циліндричної оболонки також залежать від поперечної координати z та визначаються за допомогою правила змішування так [37, 43]:

$$\begin{aligned}
 E_{11}(z) &= \eta_1 V_{CNT}(z) E_{11}^{CNT} + V_m(z) E^m, \\
 E_{22}(z) &= \frac{\eta_2 E_{22}^{CNT} E^m}{V_{CNT}(z) E^m + V_m(z) E_{22}^{CNT}}, \\
 G_{12}(z) &= \frac{\eta_3 G_{12}^{CNT} E^m}{V_{CNT}(z) G^m + V_m(z) G_{12}^{CNT}}, \\
 \mu_{12}(z) &= V_{CNT}(z) \mu_{12}^{CNT} + V_m(z) \mu^m, \\
 \mu_{21}(z) &= \frac{\mu_{12}(z)}{E_{11}(z)} E_{22}(z), \\
 \rho(z) &= V_{CNT}(z) \rho^{CNT} + V_m(z) \rho^m, \\
 V_m(z) &= 1 - V_{CNT}(z),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Таблиця 1. Залежність об'ємної частки нанотрубок від поперечної координати оболонки z при різних типах армування

Тип армування	Об'ємна частка нанотрубок
UD-CNT	$V_{CNT}(z) \equiv V_{CNT}^*$
FGV-CNT	$V_{CNT}(z) = \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^*$
FGL-CNT	$V_{CNT}(z) = \left(1 - \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^*$
FGX-CNT	$V_{CNT}(z) = \frac{4 z }{h} V_{CNT}^*$
FGO-CNT	$V_{CNT}(z) = 2 \left(1 - \frac{2 z }{h}\right) V_{CNT}^*$

де E_{11} , E_{22} , G_{12} — модулі Юнга та зсуву композитного матеріалу, μ_{12} , μ_{21} — коефіцієнти Пуассона композитного матеріалу, ρ — питома маса композитного матеріалу, E_{11}^{CNT} , E_{22}^{CNT} , G_{12}^{CNT} — модулі Юнга та зсуву нанотрубок, μ_{12}^{CNT} — коефіцієнт Пуассона вуглецевих нанотрубок, η_1 , η_2 , η_3 — параметри ефективності наноармування для заданої пари «нанотрубки — матриця» та сукупної об'ємної частки нанотрубок у композиті, E^m , G^m — модулі Юнга та зсуву матеріалу матриці, ρ^{CNT} , ρ^m — питома маса нанотрубок та матриці.

Оскільки матеріал оболонки є композитним та градієнтним, модель конструкції повинна враховувати зсув [33, 34, 44]. Окрім описаних вище пружних констант, необхідно визначити модулі зсуву матеріалу. Згідно з правилом змішування [43] вони розраховуються з формул

$$G_{13}(z) = \frac{\eta_3 G_{13}^{CNT} E^m}{V_{CNT}(z) G^m + V_m(z) G_{13}^{CNT}},$$

$$G_{23}(z) = \frac{\eta_3 G_{23}^{CNT} E^m}{V_{CNT}(z) G^m + V_m(z) G_{23}^{CNT}},$$

де G_{13} , G_{23} — модулі зсуву композитного матеріалу, G_{13}^{CNT} , G_{23}^{CNT} — модулі зсуву вуглецевих нанотрубок.

Закон Гука для композитного матеріалу оболонки має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{XX} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(z) & Q_{12}(z) \\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{XX} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta z} = G_{23}(z) \gamma_{\theta z},$$

$$\sigma_{XZ} = G_{23}(z) \gamma_{XZ},$$

$$\sigma_{X\theta} = G_{12}(z) \gamma_{X\theta},$$

де

$$\begin{aligned} Q_{11}(z) &= \frac{E_{11}(z)}{1 - \mu_{12}(z)\mu_{21}(z)}, \\ Q_{22}(z) &= \frac{E_{22}(z)}{1 - \mu_{12}(z)\mu_{21}(z)}, \\ Q_{12}(z) &= \frac{\mu_{21}(z)E_{11}(z)}{1 - \mu_{12}(z)\mu_{21}(z)}, \end{aligned} \quad (3)$$

γ_{XZ} , $\gamma_{\theta z}$ — деформації зсуву, ε_{XX} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\gamma_{\theta z}$, γ_{XZ} , $\gamma_{X\theta}$ — елементи тензора зсуву Гріна, σ_{XZ} , $\sigma_{\theta z}$ — напруження зсуву, σ_{XX} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{X\theta}$ — елементи тензора напружень.

РІВНЯННЯ РУХУ

Проекції переміщень довільної точки оболонки, яка перебуває на відстані z від серединної поверхні, на осі x , θ та z позначимо як $u_x(x, \theta, t, z)$, $u_\theta(x, \theta, t, z)$ та $u_z(x, \theta, t, z)$ відповідно. Як описано в роботах [3, 4], ці проекції подаються у вигляді

$$u_x(x, \theta, t, z) = u(x, \theta, t) + z\varphi_1(x, \theta, t) + z^2\psi_1(x, \theta, t) + z^3\gamma_1(x, \theta, t), \quad (4)$$

$$u_\theta(x, \theta, t, z) = \left(1 + \frac{z}{R}\right)v(x, \theta, t) + z\varphi_2(x, \theta, t) +$$

$$+ z^2\psi_2(x, \theta, t) + z^3\gamma_2(x, \theta, t),$$

$$u_z(x, \theta, t, z) = w(x, \theta, t),$$

де R — радіус циліндричної оболонки, φ_1 та φ_2 — кути обертання нормалі до серединної поверхні відносно осей θ та x відповідно.

П'ять змінних $u(x, \theta, t)$, $v(x, \theta, t)$, $w(x, \theta, t)$, $\varphi_1(x, \theta, t)$, $\varphi_2(x, \theta, t)$ характеризують нелінійну динаміку оболонки. Ці функції обираються як основні невідомі задачі. Функції $\psi_1(x, \theta, t)$, $\gamma_1(x, \theta, t)$, $\psi_2(x, \theta, t)$, $\gamma_2(x, \theta, t)$ розкладення (4) визначаються з крайових умов

$$\gamma_{XZ} \Big|_{z=\pm 0.5h} = 0, \quad \gamma_{\theta z} \Big|_{z=\pm 0.5h} = 0, \quad (5)$$

де

$$\gamma_{XZ} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x},$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{1+zR^{-1}} \left(\frac{\partial u_z}{R\partial\theta} - \frac{u_{\theta}}{R} \right). \quad (6)$$

Введення розкладень (4) у (5) та (6) приводить до таких співвідношень:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 0, \\ \psi_2 &= \frac{1}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{\phi_2}{2R} \left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \gamma_1 &= -\frac{4}{3h^2} \left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \gamma_2 &= \frac{h^2 - 8R^2}{6R^3 h^2} \frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{h^2 + 8R^2}{6R^2 h^2} \phi_2 - \frac{v}{3R^3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Кінетична енергія циліндричної оболонки представляється у вигляді

$$T = 0.5 \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} \rho(z) (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_{\theta}^2 + \dot{u}_z^2) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz dx R d\theta, \quad (8)$$

де $\dot{u}_x = \frac{\partial u_x}{\partial t}$, $\dot{u}_{\theta} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial t}$, $\dot{u}_z = \frac{\partial u_z}{\partial t}$, L — довжина оболонки вздовж твірної лінії.

Підстановка проєкцій (4), з урахуванням формул (7), у вираз (8) дозволяє записати кінетичну енергію у формі

$$\begin{aligned} T &= 0.5 \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} \rho(z) \left[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + 2z \left(\frac{\dot{v}^2}{R} + \dot{u}\dot{\phi}_1 + \dot{v}\dot{\phi}_2 \right) + \right. \\ &+ z^2 \left(\frac{\dot{v}^2}{R^2} + \dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \frac{2}{R} \dot{v}\dot{\phi}_2 + 2\dot{v}\dot{\psi}_2 \right) + \\ &+ 2z^3 \left(\dot{u}\dot{\gamma}_1 + \frac{\dot{v}\dot{\psi}_2}{R} + \dot{\gamma}_2\dot{v} + \dot{\phi}_2\dot{\psi}_2 \right) + \\ &+ z^4 \left(2\dot{\phi}_1\dot{\gamma}_1 + \dot{\psi}_2^2 + \frac{2}{R} \dot{\gamma}_2\dot{v} + 2\dot{\phi}_2\dot{\gamma}_2 \right) + \\ &\left. + z^5 2\dot{\psi}_2\dot{\gamma}_2 + z^6 (\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2) \right] \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz dx R d\theta. \quad (9) \end{aligned}$$

Аналогічно дослідженню [34], у виразі (9) будемо вважати $1 + z/R \approx 1$. Тоді вираз для кінетичної енергії набуває вигляду

$$\begin{aligned} T &= 0.5 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[r_0 (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + 2r_1 \left(\frac{\dot{v}^2}{R} + \dot{u}\dot{\phi}_1 + \dot{v}\dot{\phi}_2 \right) + \right. \\ &\left. + r_2 \left(\frac{\dot{v}^2}{R^2} + \dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \frac{2}{R} \dot{v}\dot{\phi}_2 + 2\dot{v}\dot{\phi}_2 \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 2r_3 \left(\dot{u}\dot{\gamma}_1 + \frac{\dot{v}\dot{\psi}_2}{R} + \dot{\gamma}_2\dot{v} + \dot{\phi}_2\dot{\psi}_2 \right) + \\ &+ r_4 \left(2\dot{\phi}_1\dot{\gamma}_1 + \dot{\psi}_2^2 + \frac{2}{R} \dot{\gamma}_2\dot{v} + 2\dot{\phi}_2\dot{\gamma}_2 \right) + \\ &\left. + r_5 2\dot{\psi}_2\dot{\gamma}_2 + r_6 (\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2) \right] dx R d\theta, \quad (10) \end{aligned}$$

де

$$r_i = \int_{-0.5h}^{0.5h} z^i \rho(z) dz, \quad i = 0, \dots, 6.$$

Таким чином, кінетичну енергію (10) представлено подвійним інтегралом.

Потенціальна енергія оболонки представляється у вигляді

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{\theta z} \gamma_{\theta z} + \\ &+ \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{x\theta} \gamma_{x\theta}) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz R d\theta dx. \quad (11) \end{aligned}$$

Підставляючи у вираз (11) співвідношення (2) та враховуючи формули (1) і (3), отримуємо вираз

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} (Q_{11} \varepsilon_{xx}^2 + 2Q_{12} \varepsilon_{\theta\theta} \varepsilon_{xx} + Q_{22} \varepsilon_{\theta\theta}^2 + \\ &+ G_{23} \gamma_{\theta z}^2 + G_{13} \gamma_{xz}^2 + G_{12} \gamma_{x\theta}^2) \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz R d\theta dx. \quad (12) \end{aligned}$$

Оскільки оболонка здійснює геометрично нелінійне деформування, елементи тензора деформацій ε_{xx} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\gamma_{x\theta}$ пов'язані з проєкціями переміщень u_x , u_{θ} , u_z таким чином [43]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + 0.5 \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R(1+zR^{-1})} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\theta} + u_z \right) + \frac{1}{2R^2(1+zR^{-1})^2} \times \\ &\times \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial\theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\theta} + u_z \right)^2 + \left(-\frac{\partial u_z}{\partial\theta} + u_{\theta} \right)^2 \right], \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R(1+zR^{-1})} \frac{\partial u_x}{\partial\theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R(1+zR^{-1})} \times \\ &\times \left[\frac{\partial u_x}{\partial\theta} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial\theta} + u_z \right) \frac{\partial u_{\theta}}{\partial x} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \left(-\frac{\partial u_z}{\partial\theta} + u_{\theta} \right) \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Отже, елементи тензора деформацій задовольняють співвідношення (13) та (6). Підстановка співвідношень (4) у (6) та (13) дозволяє отримати розклад елементів тензора деформацій за степенями z :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{XX} &= \varepsilon_{XX,0} + zk_{XX}^{(0)} + z^2k_{XX}^{(1)} + z^3k_{XX}^{(2)}; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \varepsilon_{\theta\theta,0} + zk_{\theta\theta}^{(0)} + z^2k_{\theta\theta}^{(1)} + z^3k_{\theta\theta}^{(2)}; \\ \gamma_{X\theta} &= \gamma_{X\theta,0} + zk_{X\theta}^{(0)} + z^2k_{X\theta}^{(1)} + z^3k_{X\theta}^{(2)}; \\ \gamma_{XZ} &= \gamma_{XZ,0} + zk_{XZ}^{(0)} + z^2k_{XZ}^{(1)} + z^3k_{XZ}^{(2)}; \\ \gamma_{\theta Z} &= \gamma_{\theta Z,0} + zk_{\theta Z}^{(0)} + z^2k_{\theta Z}^{(1)} + z^3k_{\theta Z}^{(2)}, \end{aligned} \quad (14)$$

де коефіцієнти розкладення задовольняють співвідношення

$$\varepsilon_{XX,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + 0.5 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (15)$$

$$k_{XX}^{(0)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad k_{XX}^{(1)} = 0, \quad k_{XX}^{(2)} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial x} = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta,0} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \\ &+ \frac{1}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

$$k_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{w}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta},$$

$$k_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{2R^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial v}{\partial \theta},$$

$$k_{\theta\theta}^{(2)} = -\frac{4R^2 + h^2}{3R^4 h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} -$$

$$-\frac{4R^2 + 2h^2}{3R^3 h^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - \frac{1}{3R^4} \frac{\partial v}{\partial \theta},$$

$$\gamma_{X\theta,0} = \frac{\partial u}{R\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right],$$

$$k_{X\theta}^{(0)} = \frac{\partial \varphi_1}{R\partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{R\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x},$$

$$k_{X\theta}^{(1)} = -\frac{\partial \varphi_1}{R^2 \partial \theta} + \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{2R\partial x},$$

$$k_{X\theta}^{(2)} = -\frac{4}{3h^2 R} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{h^2 + 8R^2}{6R^2 h^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} -$$

$$-\frac{1}{3R^3} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2 - 16R^2}{6R^3 h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta},$$

$$\gamma_{XZ,0} = \varphi_1 + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad k_{XZ}^{(0)} = 0,$$

$$k_{XZ}^{(1)} = -\frac{4}{h^2} \left(\varphi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad k_{XZ}^{(2)} = 0,$$

$$\gamma_{\theta Z,0} = \varphi_2 + \frac{\partial w}{R\partial \theta}, \quad k_{\theta Z}^{(0)} = 0,$$

$$k_{\theta Z}^{(1)} = -\frac{4}{Rh^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{4}{h^2} \varphi_2,$$

$$k_{\theta Z}^{(2)} = \frac{4R^2 + h^2}{3R^4 h^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{4R^2 + 2h^2}{3R^3 h^2} \varphi_2 + \frac{v}{3R^4}.$$

Співвідношення (14) описують розподіл деформацій по товщині оболонки. Величини $\varepsilon_{XX,0}$, $\varepsilon_{\theta\theta,0}$, $\gamma_{X\theta,0}$ нелінійно залежать від проекцій переміщень. Саме ці складові описують геометрично нелінійне деформування конструкції. Деформації зсуву γ_{XZ} і $\gamma_{\theta Z}$ лінійно залежать від проекцій переміщень конструкції.

Параметри $k_{XX}^{(0)}, \dots, k_{XX}^{(2)}, k_{\theta\theta}^{(0)}, \dots, k_{\theta\theta}^{(2)}, k_{X\theta}^{(0)}, \dots, k_{X\theta}^{(2)}$ описують зміни в кривизні та кутах обертання оболонок. У співвідношеннях для цих величин враховуються тільки лінійні залежності щодо проекцій переміщень, оскільки нелінійні додатки практично не впливають на зміни кривизни [33, 43].

Введення співвідношень (14) й (15) у вираз (12) та інтегрування за змінною z дозволяє отримати вираз для потенціальної енергії:

$$\Pi = 0.5 \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\sum_{v=0}^6 \tilde{\Pi}_v \right) dx R d\theta, \quad (16)$$

де

$$\tilde{\Pi}_0 = Q_{11}^{(0)} \varepsilon_{XX,0}^2 + 2Q_{12}^{(0)} \varepsilon_{\theta\theta,0} \varepsilon_{XX,0} + Q_{22}^{(0)} \varepsilon_{\theta\theta,0}^2 +$$

$$+ G_{23}^{(0)} \gamma_{\theta Z,0}^2 + G_{12}^{(0)} \gamma_{X\theta,0}^2 + G_{13}^{(0)} \gamma_{XZ,0}^2,$$

$$\tilde{\Pi}_1 = 2Q_{11}^{(1)} \varepsilon_{XX,0} k_{XX}^{(0)} + 2Q_{22}^{(1)} \varepsilon_{\theta\theta,0} k_{\theta\theta}^{(0)} +$$

$$+ 2Q_{12}^{(1)} \varepsilon_{\theta\theta,0} k_{XX}^{(0)} + 2Q_{12}^{(1)} k_{\theta\theta}^{(0)} \varepsilon_{XX,0} + 2G_{12}^{(1)} \gamma_{X\theta,0} k_{X\theta}^{(0)},$$

$$\tilde{\Pi}_2 = 2Q_{12}^{(2)} k_{\theta\theta}^{(0)} k_{XX}^{(0)} + 2G_{12}^{(2)} \gamma_{X\theta,0} k_{X\theta}^{(0)} + Q_{22}^{(2)} k_{\theta\theta}^{(0)2} +$$

$$\begin{aligned}
 &+2G_{13}^{(2)}\gamma_{XZ,0}k_{XZ}^{(1)}+2G_{23}^{(2)}\gamma_{\theta Z,0}k_{\theta Z}^{(1)}+Q_{11}^{(2)}k_{XX}^{(0)2}+ \\
 &+2Q_{22}^{(2)}\varepsilon_{\theta\theta,0}k_{\theta\theta}^{(1)}+2Q_{12}^{(2)}k_{\theta\theta}^{(1)}\varepsilon_{XX,0}+G_{12}^{(2)}k_{X\theta}^{(0)2}, \\
 \tilde{\Pi}_3 &=2G_{12}^{(3)}\gamma_{X\theta,0}k_{X\theta}^{(2)}+2G_{12}^{(3)}k_{X\theta}^{(0)}k_{X\theta}^{(1)}+ \\
 &+2G_{23}^{(3)}\gamma_{\theta Z,0}k_{\theta Z}^{(2)}+2Q_{12}^{(3)}k_{\theta\theta}^{(2)}\varepsilon_{XX,0}+2Q_{22}^{(3)}\varepsilon_{\theta\theta,0}k_{\theta\theta}^{(2)}+ \\
 &+2Q_{22}^{(3)}\varepsilon_{\theta\theta,0}k_{\theta\theta}^{(2)}+2Q_{22}^{(3)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{\theta\theta}^{(1)}+2Q_{12}^{(3)}\varepsilon_{\theta\theta,0}k_{XX}^{(2)}+ \\
 &+2Q_{11}^{(3)}\varepsilon_{XX,0}k_{XX}^{(2)}+2Q_{12}^{(3)}k_{\theta\theta}^{(1)}k_{XX}^{(0)}, \\
 \tilde{\Pi}_4 &=Q_{22}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(1)2}+G_{23}^{(4)}k_{\theta Z}^{(1)2}+2Q_{12}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(2)}k_{XX}^{(0)}+ \\
 &+2G_{12}^{(4)}k_{X\theta}^{(0)}k_{X\theta}^{(2)}+2Q_{22}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{\theta\theta}^{(2)}+G_{13}^{(4)}k_{XZ}^{(1)2}+ \\
 &+G_{12}^{(4)}k_{X\theta}^{(1)2}+2Q_{12}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{XX}^{(2)}+2Q_{11}^{(4)}k_{XX}^{(0)}k_{XX}^{(2)}, \\
 \tilde{\Pi}_5 &=2G_{23}^{(5)}k_{\theta Z}^{(1)}k_{\theta Z}^{(2)}+2Q_{12}^{(5)}k_{\theta\theta}^{(1)}k_{XX}^{(2)}+ \\
 &+2G_{12}^{(5)}k_{X\theta}^{(1)}k_{X\theta}^{(2)}+2Q_{22}^{(5)}k_{\theta\theta}^{(1)}k_{\theta\theta}^{(2)}, \\
 \tilde{\Pi}_6 &=2Q_{12}^{(6)}k_{\theta\theta}^{(2)}k_{XX}^{(2)}+Q_{11}^{(6)}k_{XX}^{(2)2}+ \\
 &+Q_{22}^{(6)}k_{\theta\theta}^{(2)2}+G_{23}^{(6)}k_{\theta Z}^{(2)2}+G_{12}^{(6)}k_{X\theta}^{(2)2}
 \end{aligned}$$

Механічні характеристики нанокомпозиту, які входять у вираз для потенційної енергії (16), визначаються таким чином:

$$\begin{aligned}
 &\{Q_{11}^{(i)}, Q_{12}^{(i)}, Q_{22}^{(i)}, G_{23}^{(i)}, G_{13}^{(i)}, G_{12}^{(i)}\} = \\
 &= \int_{-0.5h}^{0.5h} z^i \{Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, G_{23}, G_{13}, G_{12}\} dz.
 \end{aligned}$$

Отже, вирази для кінетичної та потенціальної енергій циліндричної нанокомпозитної оболонки отримано.

Надалі розглядатиметься шарнірно-оперта циліндрична оболонка, для якої граничні умови набувають вигляду

$$w|_{x=0} = v|_{x=0} = \varphi_2|_{x=0} = w|_{x=L} = v|_{x=L} = \varphi_2|_{x=L} = 0,$$

$$N_X|_{x=0} = M_X|_{x=0} = N_X|_{x=L} = M_X|_{x=L} = 0,$$

де N_X — поздовжнє напруження на одиницю довжини, M_X — осьовий момент напруження на одиницю довжини.

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНКИ

Для дослідження лінійних коливань оболонки скористаємося методом Релея — Рітца. Тоді шу-

кані рішення повинні задовольняти тільки граничні умови (15). Лінійні коливання оболонки представимо у вигляді [16, 27, 41]:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_n(x) \cos(n\theta) \\ V_n(x) \sin(n\theta) \\ W_n(x) \cos(n\theta) \\ X_n(x) \cos(n\theta) \\ Y_n(x) \sin(n\theta) \end{bmatrix} \cos(\omega t), \quad (17)$$

де функції $U_n(x)$, $V_n(x)$, $W_n(x)$, $X_n(x)$, $Y_n(x)$ наближено представляються так:

$$U_n(x) = \sum_{m=1} A_m^{(U)} \cos(\lambda_m x),$$

$$V_n(x) = \sum_{m=1} A_m^{(V)} \sin(\lambda_m x),$$

$$W_n(x) = \sum_{m=1} A_m^{(W)} \sin(\lambda_m x),$$

$$X_n(x) = \sum_{m=1} A_m^{(X)} \cos(\lambda_m x),$$

$$Y_n(x) = \sum_{m=1} A_m^{(Y)} \sin(\lambda_m x),$$

де $\lambda_m = m\pi/L$.

Використання методу Релея — Рітца [41] для аналізу параметрів лінійних коливань оболонки дозволяє перейти до проблеми власних значень.

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

Для розрахунку механічних характеристик функціонально-градієнтного композитного матеріалу з наноармуванням використовуються параметри ефективності армування, описані в роботах [6, 8, 23]. Значення цих параметрів наведено у табл. 2. Було використано такі значення механічних характеристик:

$$E_{11}^{CNT} = 5.6466 \text{ ТПа}, E_{22}^{CNT} = 7.08 \text{ ТПа},$$

$$G_{12}^{CNT} = G_{13}^{CNT} = 1.9445 \text{ ТПа},$$

$$G_{23}^{CNT} = 2.3334 \text{ ТПа},$$

$$\mu_{12}^{CNT} = 0.175, \rho^{CNT} = 1400 \text{ кг/м}^3,$$

$$E^m = 2.5 \text{ ГПа}, \mu^m = 0.34, \rho^m = 1150 \text{ кг/м}^3.$$

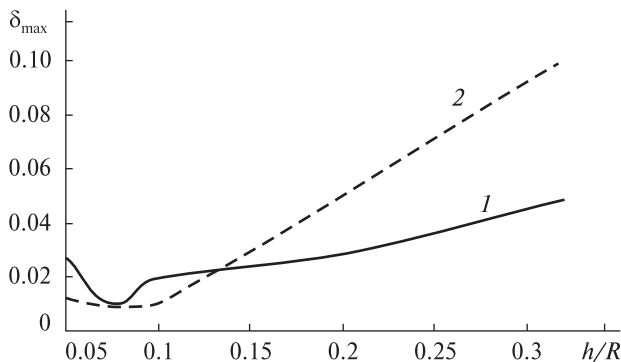


Рис. 3. Максимальні відносні похибки δ_{\max} власних частот, отримані методом скінченних елементів та методом Релея — Рітца в залежності від параметра h/R : 1 — для оболонки довжиною $L = 1$ м, 2 — для оболонки довжиною $L = 0.5$ м

Результати розрахунку лінійних коливань циліндричної оболонки, отримані методом Релея — Рітца, порівнювались з даними, отриманими за допомогою скінченно-елементного аналізу. Для розрахунку лінійних коливань скінченно-елементними методами було використано тривимірні скінченні елементи. Розрахунки проведено для нанокompозиту з типом армування FGV з об'ємною часткою нанотрубок $V_{CNT}^* = 0.12$. Значення параметрів оболонки дорівнювали

$$R = 0.25 \text{ м}, h = 5 \text{ см}, h/R = 0.02, L = 1 \text{ м}. \quad (18)$$

Оболонка, яку описують параметри (18), є тонкою.

Розрахунки методом Релея — Рітца було проведено для трьох видів розкладень переміщень (4).

1. У розкладенні (4) використано лише лінійні складові за z . У виразі для потенціальної енергії (16) було враховано складові до z^3 , а у кінетичній енергії (10) — до z^2 .

2. У розкладенні (4) в кінетичній та потенційній енергіях враховано складові до z^2 .

3. У розкладенні (4) враховано всі складові, а кінетична та потенціальна енергії мали повні форми (9) та (16).

Для аналізу результатів використано систематизацію оболонок, представлену у роботі [1]. Оболонка вважається тонкою, якщо $h/R < 0.05$, і товстою — при $0.05 < h/R < 0.33$.

Розраховані значення власних частот коливань оболонки з параметрами (18) представлено

у табл. 3, де приведено: номер варіанта розрахунку, величину n , яка вводиться рівнянням (17), власні частоти f , отримані методом скінченних елементів, оцінки власних частот f', f'', f''' , отримані на основі розкладів, описаних у п.п. 1, 2, 3 відповідно, відносну різницю δ частот f' та f . Видно, що власні частоти f', f'', f''' близькі між собою, тобто лінійного по z розкладу переміщень у (4) цілком достатньо для розрахунків.

Слід зазначити, що всі частоти, представлені в табл. 3, є парними, тобто є такі самі частоти з іншою формою розв'язку (17). У цьому розв'язку $\cos(n\theta)$ змінюється на $\sin(n\theta)$ та навпаки. Ця властивість притаманна всім розглянутим тут власним частотам.

Таким чином, результати розрахунків з урахуванням лише лінійних по z членів у виразах (4) та результати скінченно-елементних розрахунків є близькими. Результати, отримані за уточненими теоріями (п.п. 2 та 3), є близькими до результатів, отриманих з урахуванням лише лінійних по z складових у виразах для переміщень. Така ситуація зумовлена тонкістю оболонки, що призводить до малого внеску квадратичних та кубічних по z складових у вирази для переміщень.

Таблиця 2. Значення параметрів ефективності армування

V_{CNT}^*	η_1	η_2	η_3
0.12	0.137	1.022	0.715
0.17	0.142	1.626	1.138
0.28	0.141	1.585	1.109

Таблиця 3. Оцінки власних частот f, f', f'', f''' коливань оболонки з параметрами (18), отримані методом скінченних елементів або з використанням розкладів 1—3 відповідно

Варіант	n	$f, \text{Гц}$	$f', \text{Гц}$	$f'', \text{Гц}$	$f''', \text{Гц}$	δ
1	4	131.01	128.1	128.17	128.1	0.02
2	3	134.66	132.21	132.22	132.20	0.018
3	5	160.9	158.19	158.32	158.15	0.017
4	2	176.93	176.86	176.87	176.87	0.0004
5	6	216.26	212.2	212.42	212.12	0.019

Таблиця 4. Власні частоти оболонки при значеннях параметрів $R = 0.25$ м, $V_{CNT}^* = 0.12$ і 0.28 , $L = 0.5$ і 1 м та при різних товщинах оболонки

h , см	h/R	n	f , Гц	f' , Гц	f'' , Гц	f''' , Гц	δ		
$V_{CNT}^* = 0.28, R = 0.25$ м, $L = 1$ м									
0.0125	0.05	3	248.4	243.54	244.16	243.41	0.017		
		2	259.68	259.29	259.38	259.24	0.0012		
		4	342.29	331.27	332.88	330.9	0.027		
0.015	0.06	1	386.54	388.98	388.98	388.96	0.0063		
		3	264.7	268.84	269.81	268.63	0.019		
		2	268.9	265.80	265.93	265.72	0.011		
0.017	0.06	4	387.1	386.60	388.98	385.98	0.0048		
		1	387.7	390.51	390.51	390.48	0.007		
		2	269.6	271.56	271.76	271.44	0.007		
0.02	0.08	3	289.2	290.08	291.39	289.76	0.002		
		1	387.0	391.87	391.88	391.83	0.012		
		4	430.1	431.01	434.10	430.10	0		
0.025	0.10	2	279.1	281.03	281.34	280.81	0.006		
		3	322.0	323.03	324.95	322.52	0.0016		
		1	389.4	394.14	394.14	394.06	0.01		
0.050	0.20	4	496.1	497.33	501.667	495.92	0.00040		
		2	300.88	298.61	299.18	298.16	0.006		
		3	390.33	379.50	382.65	378.51	0.02		
0.08	0.032	1	394.65	398.44	398.44	398.27	0.009		
		4	627.56	605.96	612.78	603.35	0.02		
		2	395.56	401.34	404.61	398.01	0.006		
0.013	0.052	1	412.67	426.09	426.11	424.46	0.028		
		3	647	652.88	666.21	647.09	0		
		1	433.96	460.78	460.83	455.34	0.049		
0.015	0.06	2	504.18	518.22	527.59	509.49	0.01		
		3	904.92	917.75	949.36	904.44	0.00053		
		$V_{CNT}^* = 0.28, R = 0.25$ м, $L = 0.5$ м							
0.013	0.052	3	474.84	468.54	468.96	467.39	0.012		
		4	507.82	501.46	502.76	499.95	0.009		
		2	543.24	539.89	539.96	539.11	0.006		
0.015	0.06	5	626.02	620.58	623.18	618.52	0.004		
		1	751.23	753.93	753.93	753.55	0.003		
		6	811.75	806.16	810.31	803.077	0.002		
0.017	0.06	3	507.17	500.48	501.09	498.68	0.01		
		4	560.66	554.26	556.06	551.98	0.008		
		2	561.58	558.03	558.13	556.78	0.006		
0.02	0	5	705.14	699.99	703.50	696.93	0.002		
		1	759.09	762.76	762.76	762.14	0.005		
		6	921.75	916.54	922.09	911.98	0.0004		
0.025	0.1	3	538.65	533.43	534.25	530.80	0.008		
		2	578.76	577.24	577.37	575.34	0.002		
		4	611.72	607.38	609.75	604.14	0.003		
0.05	0.2	1	764.48	772.32	772.32	771.35	0.01		
		5	780	778.57	783.12	774.27	0.004		
		6	1023	1024	1031.8	1018.31	0.008		
0.08	0.32	3	589.11	583.68	584.89	579.50	0.007		
		2	609.67	607.34	607.54	604.19	0.003		
		4	690.74	686.58	689.96	681.57	0.001		
0.005	0.02	1	780.38	787.70	787.70	786.03	0.009		
		5	895.97	894.00	900.34	887.41	0.005		
		2	656.82	658.79	659.14	652.79	0.006		
0.010	0.04	3	667.98	666.95	668.98	659.41	0.01		
		1	801.4	814.93	814.94	811.58	0.01		
		4	814.24	814.81	820.21	806.04	0.01		
0.015	0.06	5	1074.8	1077.90	1087.79	1066.48	0.008		
		2	831.92	876.78	878.54	850.29	0.02		
		1	875.94	938.09	938.12	921.22	0.05		
0.025	0.1	3	974.97	1013.28	1022.43	984.16	0.009		
		4	1303	1340	1361.5	1307.3	0.003		
		5	1766.7	1808.62	1844.23	1764.9	0.001		
0.05	0.2	1	901.25	1020.6	1020.65	992.6	0.1		
		2	936.2	1025.81	1030.88	984.56	0.05		
		3	1205.6	1277.42	1300.84	1234.56	0.02		
0.08	0.32	4	1679	1745.88	1793.89	1695.03	0.009		
		$V_{CNT}^* = 0.12, R = 0.25$ м, $L = 1$ м							
		0.005	0.02	4	131.01	128.1	128.17	128.10	0.02
3	134.66			132.206	132.22	132.20	0.018		
5	160.9			158.19	158.32	158.15	0.017		
0.010	0.04	2	176.93	176.86	176.87	176.87	0.0004		
		6	216.26	212.2	212.42	212.12	0.019		
		3	158.91	159.60	159.69	159.55	0.004		
0.015	0.06	2	182.53	183.25	183.26	183.24	0.004		
		4	195.54	201.22	201.56	201.11	0.028		
		1	274.66	279.64	279.65	279.64	0.018		
0.025	0.1	3	190.17	195.29	195.61	195.15	0.026		
		2	190.74	192.22	192.26	192.17	0.007		
		4	266.03	281.56	282.49	281.15	0.05		
0.05	0.2	1	276.14	281.72	281.72	281.70	0.02		
		2	215.25	216.034	216.21	215.77	0.0024		
		3	274.08	276.36	277.602	275.72	0.006		
0.08	0.32	1	281.52	287.23	287.24	287.14	0.02		
		4	434.9	442.41	445.74	440.65	0.013		

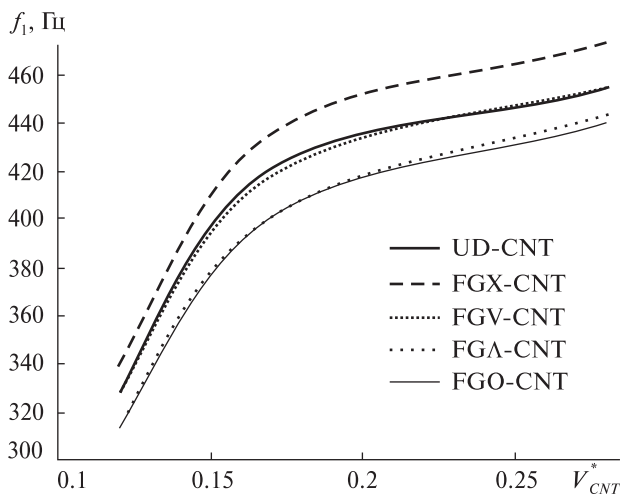


Рис. 4. Залежність першої власної частоти від об’ємної частки нанотрубок для різних типів армування

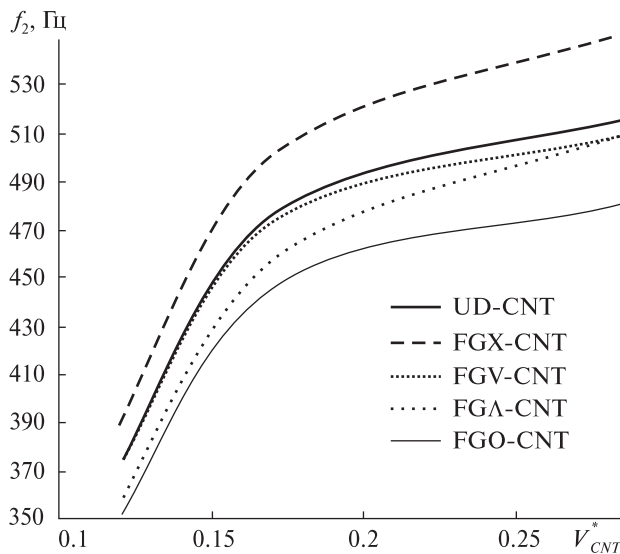


Рис. 5. Залежність другої власної частоти від об’ємної частки нанотрубок для різних типів армування

Проведено розрахунки власних частот коливань оболонок з різними товщинами h і довжинами L , FGV-армуванням нанокомпозиту при двох значеннях параметра об’ємної частки нанотрубок V_{CNT}^* . У табл. 4 приведено власні частоти f , отримані методом скінченних елементів, власні частоти f', f'', f''' , отримані методом Релея — Рітца з розкладаннями рішень, як описано вище (п.п. 1, 2, 3) і відносну різницю δ між значеннями частоти, отриманими методом Релея — Рітца та методом скінченних елементів.

На рис. 3 приведено результати аналізу максимальної похибки δ_{max} власних частот товстих оболонок, отримані на основі аналізу розкладів, описаних у п. 3. Суцільна лінія 1 відповідає результатам, які отримано для оболонки довжиною $L = 1$ м, а штрихова лінія 2 — для оболонки довжиною $L = 0.5$ м. Для оболонки $L = 1$ м відносна похибка власних частот, які було отримано методом Релея — Рітца, є допустимою навіть для дуже товстої оболонки $h/R = 0.35$. Для коротших оболонок $L = 0.5$ м при $0.25 \leq h/R \leq 0.35$ метод Релея — Рітца призводить до помилкових результатів, і для розрахунку власних частот слід використовувати тривимірну теорію.

Досліджено поведінку власних частот при різних видах наноармування для найтовстішої з розглянутих оболонок з розмірами $h/R = 0.32$, $R = 0.25$ м, $h = 0.08$ м. У табл. 5 приведено: значення об’ємної частки V_{CNT} нанотрубок у композиті, вид армування з наведених на рис. 2 та у табл. 1, першу, другу та третю власну частоти f_1, f_2, f_3 , параметр n , фізичний сенс якого описано рівняннями (17). Поведінку перших та других власних частот наведено на рис. 4 та 5 відповідно.

Як видно з рис. 4, найвища перша власна частота спостерігається при FGX-армуванні. Пер-

Таблиця 5. Власні частоти оболонки з параметрами $h/R = 0.32$, $L = 1$ м, $h = 0.08$ м при різних видах армування

V_{CNT}	Вид наноармування	$f_1, \text{Гц}, n = 1$	$f_2, \text{Гц}, n = 2$	$f_3, \text{Гц}, n = 2$
0.28	UD-CNT	454.32	515.51	907.408
0.17	UD-CNT	420.73	477.18	858.78
0.12	UD-CNT	329.58	374.11	667.18
0.28	FGX-CNT	473.63	551.806	975.17
0.17	FGX-CNT	435.73	501.84	892.17
0.12	FGX-CNT	340.71	390.77	685.80
0.28	FGV-CNT	455.34	509.49	904.44
0.17	FGV-CNT	418.86	474.44	857.82
0.12	FGV-CNT	327.22	371.87	666.41
0.28	FGL-CNT	443.94	508.84	934.02
0.17	FGL-CNT	402.09	458.41	862.07
0.12	FGL-CNT	314.01	357.25	664.58
0.28	FGO-CNT	440.21	480.41	865.48
0.17	FGO-CNT	401.54	446.80	831.51
0.12	FGO-CNT	313.01	350.95	649.23

ша власна частота для UD-армування є близькою до першої власної частоти для армування FGV. Ці частоти є меншими за частоти при армуванні FGX. Найнижчі перші власні частоти спостерігаються при типах армування FGL та FGO. Вони також є близькими між собою. Зазначимо, що мінімальне значення першої власної частоти при $V_{CNT}^* = 0.28$ дорівнює 440.21 Гц, а максимальне — 473.64 Гц.

Таким чином, перші власні частоти суттєво різні при різних типах армування.

Поведінка другої власної частоти (рис. 5) якісно близька до поведінки першої власної частоти. Виключення складають значення f_2 при типах армування FGL та FGO. Перші власні частоти в цих випадках збігаються, а друга власна частота композиту FGL є більшою за аналогічну частоту композиту FGO. Максимальна власна частота при $V_{CNT}^* = 0.28$ та армуванні FGX складає 551.8 Гц, а для FGO армування — 480.41 Гц. Таким чином, другі власні частоти суттєво залежать від типу армування. Цю особливість можна використати для відстроювання оболонки від резонансу без суттєвої зміни її міцності та статичного відгуку.

ВИСНОВКИ

У роботі запропоновано метод аналізу вільних лінійних коливань нанокompозитних циліндричних оболонок, які можуть бути складовою частиною об'єктів ракетно-космічної техніки. Порівняння результатів аналізу зі скінченноелементними тривимірними моделями дозволяє стверджувати, що запропонований метод дозволяє досліджувати коливання тонких нанокompозитних оболонок з великою точністю. Досліджено поведінку власних частот та форм коливань від типу наноармування, товщини оболонки та об'ємної частки нанотрубок у композиті. Показано, що відстроювання коливань нанокompозитної оболонки може здійснюватися шляхом раціонального обиравання типу армування вуглецевими нанотрубками.

Роботу виконано за підтримки Цільової комплексної програми НАН України з наукових космічних досліджень на 2018—2022 рр.

ЛІТЕРАТУРА

1. Галишин А. К. Расчет пластин и оболочек по уточенным теориям. *Исследование по теории пластин и оболочек*. 1967. Т. V. С. 66—92.
2. Allaoui A., Bai S., Cheng H. M., Bai J. B. Mechanical and electrical properties of a MWNT/epoxy composite. *Composites Sci. and Technol.* 2002. 62. P. 1993—1998.
3. Amabili M. A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. *Int. J. Non-Linear Mech.* 2010. 45. P. 409—418.
4. Amabili M. Nonlinear vibrations of laminated circular cylindrical shells: Comparison of different shell theories. *Composite Struct.* 2011. 94. P. 207—220.
5. Andrews R., Jacques D., Minot M., Rantell T. Fabrication of carbon multiwall nanotube/polymer composites by shear mixing. *Macromol. Mater. Eng.* 2002. 287. P. 395—403.
6. Asadi H. Numerical simulation of the fluid-solid interaction for CNT reinforced functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Acta Astronautica*. 2017. 138. P. 214—224.
7. Ci L., Bai J. B. The reinforcement role of carbon nanotubes in epoxy composites with different matrix stiffness. *Composites Sci. and Technol.* 2006. 66. P. 599—603.
8. Duc N. D., Cong P. H., Tuan N. D., Tran P., Thanh N. V. Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations. *Thin-Walled Struct.* 2017. 115. P. 300—310.
9. Frikha A., Zghal S., Dammak F. Finite rotation three and four nodes shell elements for functionally graded carbon nanotubes-reinforced thin composite shells analysis. *Computer Meth. Appl. Mech. and Eng.* 2014. 358. P. 569—584.
10. Gao K., Gao W., Chen D., Yang J. Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation. *Composite Struct.* 2018. 204. P. 831—846.
11. García-Macías E., Rodríguez-Tembleque L., Sáez A. Bending and free vibration analysis of functionally graded graphene vs. carbon nanotube reinforced composite plates. *Composite Struct.* 2018. 186. P. 123—138.
12. Gholami R., Ansari R. Nonlinear harmonically excited vibration of third-order shear deformable functionally graded graphene platelet-reinforced composite rectangular plates. *Eng. Struct.* 2018. 156. P. 197—209.
13. Hu H., Onyebueke L., Abatan A. Characterizing and Modeling Mechanical Properties of Nanocomposites. Review and Evaluation. *J. Miner. & Mater. Character. & Eng.* 2010. 9(4). P. 275—319.
14. Kaser Y. D., Rossana T. F. Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew cylindrical shells using the Chebyshev-Ritz formulation. *Composites Part B: Eng.* 2012. 62. P. 231—241.

15. Kanagaraj S., Varanda F. R., Zhil'tsova T. V., Oliveira M., Simoes A.O. Mechanical properties of high density polyethylene/carbon nanotube composites. *Composites Sci. and Technol.* 2007. 67. P. 3071—3077.
16. Khdeir A. A., Reddy J. N., Frederick D. A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories. *J. Eng. Sci.* 1989. 27(11). P. 1337—1351.
17. Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L. Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment. *Composite Struct.* 2013. 106. P. 128—138.
18. Lei Z. X., Zhang L. W., Liew K. M. Elastodynamic analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded plates. *Int. J. Mech. Sci.* 2015. 99. P. 208—217.
19. Leissa A. W., Nordgren R. P. Vibration of Shells. *J. Appl. Mech.* 1974. 41(2). P. 544—562.
20. Liew K. M., Lei Z. X., Yu J. L., Zhang L. W. Postbuckling of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels under axial compression using a meshless approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2014. 268. P. 1—17.
21. Liu Y. J., Chen X. L. Evaluations of the effective material properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element. *Mech. of Mater.* 2003. 35. P. 69—81.
22. Mehrabadi S. J., Aragh B. S. Stress analysis of functionally graded open cylindrical shell reinforced by agglomerated carbon nanotubes. *Thin-Walled Struct.* 2014. 80. P. 130—141.
23. Mehri M., Asadi H., Wang Q. On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow. *Composite Struct.* 2016. 153. P. 938—951.
24. Mehri M., Asadi H., Kouchakzadeh M. A. Computationally efficient model for flow-induced instability of CNT reinforced functionally graded conical curved panels subjected to axial compression. *Computer Meth. Appl. Mech. and Eng.* 2015. 932. P. 163—172.
25. Mehri M., Asadi H., Wang Q. On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow. *Composite Struct.* 2016. 153. P. 938—951.
26. Mehri M., Asadi H., Wang Q. Buckling and vibration analysis of a pressurized CNT reinforced functionally graded truncated conical shell under an axial compression using HDQ method. *Computer Meth, Appl. Mech. and Eng.* 2009. 59. P. 1164—1176.
27. Messina A., Soldatos K. P. Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions. *J. Sound and Vibration.* 1999. 227(4). P. 749—768.
28. Moradi-Dastjerdi R., Foroutan M., Pourasghar A. Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method. *Mater. and Design.* 2013. 44. P. 256—266.
29. Nejati M., Asanjarani A., Dimitri R., Tornabene F. Static and Free Vibration Analysis of Functionally Graded Conical Shells Reinforced by Carbon Nanotubes. *Int. J. Mech. Sci.* 2011. 95. P. 1221—1237.
30. Ninh D. G., Bich D. H. Characteristics of nonlinear vibration of nanocomposite cylindrical shells with piezoelectric actuators under thermo-mechanical loads. *Aerospace Sci. and Technol.* 2018. 77. P. 595—609.
31. Odegard G. M., Gates T. S., Wise K. E., Park C., Siochi E. J. Constitutive modeling of nanotube-reinforced polymer composites. *Composites Sci. and Technol.* 2003. 63. P. 1671—1687.
32. Omidi M., Rokni H., Milani A. S., Seethaler R. J., Arasteh R. Prediction of the mechanical characteristics of multi-walled carbon nanotube/epoxy composites using a new form of the rule of mixtures. *Carbon.* 2010. 48. P. 3218—3228.
33. Reddy J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *ASME J. Appl. Mech.* 1984. 51. P. 745—752.
34. Reddy J. N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Int. J. Solids and Struct.* 1984. 20(9/10). P. 881—896.
35. Richard P., Prasse T., Cavaille J. Y., Chazeau L., Gauthier C., Duchet V. Reinforcement of rubbery epoxy by carbon nanofibres. *Mater. Sci. and Eng.* 2003. 352. P. 344—348.
36. Seidel G. D., Lagoudas D. C. Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites. *Mech. Mater.* 2006. 38. P. 884—907.
37. Shen H. S. Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments. *Composite Struct.* 2009. 91. P. 9—19.
38. Shen H. S., Xiang Y. Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2012. 57. P. 196—205.
39. Sobhaniaragh V., Batra R. C., Mansur W. J., Peters F. C. Thermal response of ceramic matrix nanocomposite cylindrical shells using Eshelby-Mori-Tanaka homogenization scheme. *Composites Part B. Eng.* 2017. 118. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.02.032.
40. Song Z. G., Zhang L. W., Liew K. M. Vibration analysis of CNT-reinforced functionally graded composite cylindrical shells in thermal environments. *Int. J. Mech. Sci.* 2014. 264. P. 289—302.
41. Timarci T., Soldatos K. P. Comparative dynamic studies for symmetric cross — ply circular cylindrical shells on the basis of a unified shear deformable shell theory. *J. Sound and Vibration.* 1995. 187(4). P. 609—624.
42. Wang A., Chen H., Hao Y., Zhang W. Vibration and bending behavior of functionally graded nanocomposite doubly-curved shallow shells reinforced by graphene nanoplatelets. *Results in Phys.* 2018. 9. P. 550—559.
43. Wang Q., Cui X., Qin B., Liang Q. Vibration analysis of the functionally graded carbon nanotube reinforced com-

posite shallow shells with arbitrary boundary conditions. *Composite Struct.* 2003. 132. P. 60–82.

44. Wang Q., Qin B., Shi D., Liang Q. A semi-analytical method for vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite doubly-curved panels and shells of revolution. *Composite Struct.* 2015. 28. P. 2574–2591.
45. Zhang L. W., Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L. Static and dynamic of carbon nanotube reinforced functionally graded cylindrical panels. *Composite Struct.* 2014. 111. P. 205–212.

Стаття надійшла до редакції 21.12.2018

REFERENCES

1. Galishin A. K. (1967). Calculation of plates and shells according to specified theories. *Studies in the theory of plates and shells*, V, 66–92 [in Russian].
2. Allaoui A., Bai S., Cheng H. M., Bai J. B. (2002). Mechanical and electrical properties of a MWNT/epoxy composite. *Composites Sci. and Technol.*, 62, 1993–1998.
3. Amabili M. (2010). A new non-linear higher-order shear deformation theory for large-amplitude vibrations of laminated doubly curved shells. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 45, 409–418.
4. Amabili M. (2011). Nonlinear vibrations of laminated circular cylindrical shells: Comparison of different shell theories. *Composite Struct.*, 94, 207–220.
5. Andrews R., Jacques D., Minot M., Rantell T. (2002). Fabrication of carbon multiwall nanotube/polymer composites by shear mixing. *Macromol. Mater. Eng.*, 287, 395–403.
6. Asadi H. (2017). Numerical simulation of the fluid-solid interaction for CNT reinforced functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Acta Astronautica*, 138, 214–224.
7. Ci L., Bai J. B. (2006). The reinforcement role of carbon nanotubes in epoxy composites with different matrix stiffness. *Composites Sci. and Technol.*, 66, 599–603.
8. Duc N. D., Cong P. H., Tuan N. D., Tran P., Thanh N. V. (2017). Thermal and mechanical stability of functionally graded carbon nanotubes (FG CNT)-reinforced composite truncated conical shells surrounded by the elastic foundations. *Thin-Walled Struct.*, 115, 300–310.
9. Frikha A., Zghal S., Dammak F. (2014). Finite rotation three and four nodes shell elements for functionally graded carbon nanotubes-reinforced thin composite shells analysis. *Computer Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 358, 569–584.
10. Gao K., Gao W., Chen D., Yang J. (2018). Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation. *Composite Struct.*, 204, 831–846.
11. García-Macías E., Rodríguez-Tembleque L., Sáez A. (2018). Bending and free vibration analysis of functionally graded graphene vs. carbon nanotube reinforced composite plates. *Composite Struct.*, 186, P. 123–138.
12. Gholami R., Ansari R. (2018). Nonlinear harmonically excited vibration of third-order shear deformable functionally graded graphene platelet-reinforced composite rectangular plates. *Eng. Struct.*, 156, 197–209.
13. Hu H., Onyebueke L., Abatan A. (2010). Characterizing and Modeling Mechanical Properties of Nanocomposites. Review and Evaluation. *J. Miner. & Mater. Character. & Eng.*, 9 (4), 275–319.
14. Kaser Y. D., Rossana T. F. (2012). Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew cylindrical shells using the Chebyshev-Ritz formulation. *Composites Part B: Eng.*, 62, 231–241.
15. Kanagaraj S., Varanda F. R., Zhil'tsova T. V., Oliveira M., Simoes A. O. (2007). Mechanical properties of high density polyethylene/carbon nanotube composites. *Composites Sci. and Technol.*, 67, 3071–3077.
16. Khdeir A. A., Reddy J. N., Frederick D. (1989). A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories. *J. Eng. Sci.*, 27 (N 11), 1337–1351.
17. Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L. (2013). Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment. *Composite Struct.*, 106, 128–138.
18. Lei Z. X., Zhang L. W., Liew K. M. (2015). Elastodynamic analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded plates. *Int. J. Mech. Sci.*, 99, 208–217.
19. Leissa A. W., Nordgren R. P. (1974). Vibration of Shells. *J. Appl. Mech.*, 41 (N 2), 544–562.
20. Liew K. M., Lei Z. X., Yu J. L., Zhang L. W. (2014). Postbuckling of carbon nanotube-reinforced functionally graded cylindrical panels under axial compression using a meshless approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 268, 1–17.
21. Liu Y. J., Chen X. L. (2003). Evaluations of the effective material properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element. *Mech. Mater.*, 35, 69–81.
22. Mehrabadi S. J., Aragh B. S. (2014). Stress analysis of functionally graded open cylindrical shell reinforced by agglomerated carbon nanotubes. *Thin-Walled Struct.*, 80, P. 130–141.
23. Mehri M., Asadi H., Wang Q. (2016). On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow. *Composite Struct.*, 153, 938–951.
24. Mehri M., Asadi H., Kouchakzadeh M. A. (2015). Computationally efficient model for flow-induced instability of CNT reinforced functionally graded conical curved panels subjected to axial compression. *Computer Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 322, 163–172.

25. Mehri M., Asadi H., Wang Q. (2016). On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow. *Composite Struct.*, 153, 938—951.
26. Mehri M., Asadi H., Wang Q. (2009). Buckling and vibration analysis of a pressurized CNT reinforced functionally graded truncated conical shell under an axial compression using HDQ method. *Computer Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 59, 1164—1176.
27. Messina A., Soldatos K. P. (1999). Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions. *J. Sound and Vibration*, 227(4), 749—768.
28. Moradi-Dastjerdi R., Foroutan M., Pourasghar A. (2013). Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method. *Mater. and Design*, 44, 256—266.
29. Nejati M., Asanjarani A., Dimitri R., Tornabene F. (2011). Static and free vibration analysis of functionally graded conical shells reinforced by carbon nanotubes. *Int. J. Mech. Sci.*, 95, 1221—1237.
30. Ninh D. G., Bich D. H. (2018). Characteristics of nonlinear vibration of nanocomposite cylindrical shells with piezoelectric actuators under thermo-mechanical loads. *Aerospace Sci. and Technol.*, 77, 595—609.
31. Odegard G. M., Gates T. S., Wise K. E., Park C., Siochi E. J. (2003). Constitutive modeling of nanotube—reinforced polymer composites. *Composites Sci. and Technol.*, 63, 1671—1687.
32. Omidi M., Rokni H., Milani A. S., Seethaler R. J., Arasteh R. (2010). Prediction of the mechanical characteristics of multi-walled carbon nanotube/epoxy composites using a new form of the rule of mixtures. *Carbon*, 48, 3218—3228.
33. Reddy J. N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *ASME J. Appl. Mech.*, 51, 745—752.
34. Reddy J. N. (1984). A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Int. J. Solids and Struct.*, 20(9/10), 881—896.
35. Richard P., Prasse T., Cavaille J. Y., Chazeau L., Gauthier C., Duchet V. (2003). Reinforcement of rubbery epoxy by carbon nanofibres. *Mater. Sci. and Eng.*, 352, 344—348.
36. Seidel G. D., Lagoudas D. C. (2006). Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites. *Mech. Mater.*, 38, 884—907.
37. Shen H. S. (2009). Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments. *Composite Struct.*, 91, 9—19.
38. Shen H. S., Xiang Y. (2012). Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 57, 196—205.
39. Sobhaniragh V., Batra R. C., Mansur W. J., Peters F. C. (2017). Thermal response of ceramic matrix nanocomposite cylindrical shells using Eshelby-Mori-Tanaka homogenization scheme. *Composites Part B. Eng.*, 118. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.02.032.
40. Song Z. G., Zhang L. W., Liew K. M. (2014). Vibration analysis of CNT-reinforced functionally graded composite cylindrical shells in thermal environments. *Int. J. Mech. Sci.*, 264, 289—302.
41. Timarci T., Soldatos K. P. (1995). Comparative dynamic studies for symmetric cross — ply circular cylindrical shells on the basis of a unified shear deformable shell theory. *J. Sound and Vibration*, 187(4), 609—624.
42. Wang A., Chen H., Hao Y., Zhang W. (2018). Vibration and bending behavior of functionally graded nanocomposite doubly-curved shallow shells reinforced by graphene nanoplatelets. *Results in Phys.*, 9, 550—559.
43. Wang Q., Cui X., Qin B., Liang Q. (2003). Vibration analysis of the functionally graded carbon nanotube reinforced composite shallow shells with arbitrary boundary conditions. *Composite Struct.*, 132, 60—82.
44. Wang Q., Qin B., Shi D., Liang Q. (2015). A semi-analytical method for vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite doubly-curved panels and shells of revolution. *Composite Struct.*, 28, 2574—2591.
45. Zhang L. W., Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L. (2014). Static and dynamic of carbon nanotube reinforced functionally graded cylindrical panels. *Composite Struct.*, 111, 205—212.

Received 21.12.2018

К. В. Аврамов, М. В. Чернобрышко, Б. В. Успенский

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного Национальной
академии наук Украины, Харьков, Украина

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ НАНОАРМИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В настоящее время в мировом ракетостроении на смену металлам и их сплавам приходят полимерные композитные материалы, армированные углеродными нанотрубками. Это связано с тем, что в условиях высокоинтенсивных нагрузок при одинаковом весе нано-композиты значительно превосходят алюминиевые сплавы по своим прочностным механическим характеристикам. Цилиндрические нанокомпозитные корпусные элементы ракет могут быть армированы углеродными нанотрубками с различным распределением их по толщине матрицы. В настоящее время существует пять основных типов наноармирования, которые приводят к возникновению функционально-градиентного материала по толщине оболочки. При анализе колебаний элементов ракетно-космической техники необходимо рассматривать возможность резонанса между конструкцией и аэродинамическими нагрузкам. Неотъемлемым элементом этого анализа является анализ свободных колебаний оболочки, который проводится с целью определения и предотвращения опасных резонансных режимов. Клас-

сические модели колебаний цилиндрических оболочек не позволяют учитывать изменяющиеся по толщине свойства материала. В данной работе предложен метод анализа свободных колебаний функционально-градиентных нанокомпозитных цилиндрических оболочек, которые могут быть составной частью ракетных комплексов и конструкций самолетов. Рассмотрены зависимости параметров колебаний от типа наноармирования, объемной доли нанотрубок в композите и толщины оболочки. Результаты аналитического исследования сравниваются с численным моделированием методом конечных элементов. Предложенная модель учитывает изменяющиеся по толщине свойства материала для пяти случаев наноармирования. Показано, что отстройка нанокомпозитных оболочек от резонансных режимов может осуществляться путем рационального выбора типа армирования углеродными нанотрубками.

Ключевые слова: нанокомпозит, нанотрубка, функционально-градиентный материал, цилиндрическая оболочка, свободные колебания, собственные частоты.

K. V. Avramov, M. V. Chernobryvko, B. V. Uspensky

A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

FREE VIBRATIONS OF FUNCTIONALLY GRADIENT CNT-INFUSED CYLINDRICAL SHELLS

Currently, in the world aerospace industry, metals and their alloys are widely replaced by polymer composite materials reinforced with carbon nanotubes (CNT). This is due to the

much higher durability of the nanocomposites compared to aluminum alloys under high-intensity loads. Cylindrical nanocomposite rocket body elements can be reinforced with carbon nanotubes using different distribution across the matrix thickness. Currently, there are five main types of CNT-reinforcement, which lead to the formation of a functional-graded material through the thickness of the shell. Analysis of vibrations in aerospace units' elements must be conducted considering the possibility of a resonance between the structure and aerodynamic loads. An integral part of this analysis is the analysis of free oscillations of the shell, which is carried out to determine and prevent dangerous resonant modes. Classical oscillation models of cylindrical shells do not allow taking into consideration material properties varying within shell thickness. This paper proposes a technique of analysis of free vibrations in functionally graded nanocomposite cylindrical shells, which can be an integral part of rocket complexes and aircraft structures. The dependencies of the vibration parameters on the type of the reinforcement, a volume fraction of carbon nanotubes in the composite, and the shell thickness are considered. The results of the analytical study are compared with numerical simulation based on the finite element method. The proposed model takes into consideration the material properties varying within shell thickness for five common cases of CNT-reinforcement. It is shown that detuning of nanocomposite shells from resonant modes can be carried out by a rational choice of the type of the CNT-reinforcement.

Keywords: CNT-infused composite, nanotube, functionally gradient material, cylindrical shell, free vibrations, eigen frequencies.