

---

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2019.02.012>

УДК 629.735.33.015.4:533.6.013.422:629.7.025.1

**О. В. Сафронов, Б. Й. Семон, О. М. Неділько**

Національний університет оборони України імені Івана Черняхівського, Київ, Україна

## **ЗГИНАЛЬНО-КРУТИЛЬНИЙ ФЛАТЕР АЕРОДИНАМІЧНОГО ПРОФІЛЮ ЗІ СТРИБКАМИ УЩІЛЬНЕННЯ**

*Пропонується одна з можливих математичних моделей оцінки впливу стрибків ущільнення на величину критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера прямого аеродинамічного профілю у трансзвуковому потоці повітря. Математична модель базується на традиційних методах класичного (двоступеневого) флатера, на спільному аналізі рівнянь Бернуллі для стисливого газу, характеристик надзвукового потоку газу у течії Прандтля — Майєра і на застосуванні гіпотези «динамічного викривлення профілю». На базі лінеаризації рівнянь Бернуллі для стисливого газу, а саме для повітря, отримано умову формування стрибків ущільнення на поверхні аеродинамічного профілю у трансзвуковому діапазоні чисел Маха. На базі цієї умови, враховуючи характер зміни параметрів місцевого надзвукового потоку при обтіканні дифузорної частини поверхні аеродинамічного профілю, і на базі гіпотези «динамічного скривлення профілю» отримано наближені закономірності взаємодії стрибків ущільнення з згинально-крутильними коливаннями аеродинамічного профілю. Отримані закономірності використано для формування математичних моделей оцінки величини дестабілізаційних та збуджувальних сил і моментів, зумовлених особливостями взаємодії стрибків ущільнення із згинально-крутильними коливаннями аеродинамічного профілю. Оцінювання критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю зі стрибками ущільнення виконувалось шляхом розв'язування системи двох диференціальних рівнянь другого порядку, на основі якого отримано наближені аналітичні залежності величини критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю, як в однорідному потоці повітря, так і у потоці зі стрибками ущільнення. Порівнянням отриманих результатів показано, що величина критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера типових аеродинамічних профілів зі стрибками ущільнення завжди менша, ніж величина критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера в однорідному потоці повітря.*

**Ключові слова:** аеродинамічний профіль, математична модель, згинально-крутильний флатер, стрибки ущільнення, трансзвуковий потік, число Маха, стисливість повітря, швидкісний напір, тиск.

### **ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ**

Коливання аеродинамічних поверхонь надзвукових літаків та аерокосмічних систем, які спостерігаються у трансзвуковому діапазоні чисел  $M$  польоту, досі не мають достатньо чіткого фізичного пояснення причин їхнього виникнення. Не розроблені математичні методи, якими можна описати процеси, що відбуваються при ви-

никненні коливань аеродинамічних поверхонь на цих режимах польоту [3, 12].

Доцільність розробки теоретичних методів оцінки аеропружних характеристик літаків, і у першу чергу критичної швидкості флатера аеродинамічних поверхонь, важко переоцінити, оскільки оцінка цих характеристик прямими методами безпосередньо у льотному експерименті неможлива.

**Аналіз основних досліджень і публікацій.** Теоретичним та експериментальним дослідженням цього явища присвячено багато публікацій, в

---

© О. В. САФРОНОВ, Б. Й. СЕМОН, О. М. НЕДІЛЬКО, 2019

яких запропоновано різноманітні підходи для обґрунтування причин виникнення інтенсивних коливань аеродинамічних поверхонь сучасних надзвукових літаків, умови їхнього виникнення, вплив різноманітних факторів на рівень коливань [3—5, 8, 10—13].

Відмічено, що рівень цих коливань залежить від великої кількості параметрів, основними з яких є число  $M$  потоку повітря, геометричні характеристики аеродинамічних поверхонь, частота їхніх власних пружних коливань та масово-інерційні характеристики [3, 12].

У деяких працях відмічено вплив стрибків ущільнення на виникнення коливань аеродинамічних поверхонь у трансзвуковому потоці повітря.

Так, у праці [8] відмічено, що стрибок ущільнення є основною причиною різкого зниження межі флатера на режимі трансзвукових швидкостей, але теоретичного обґрунтування цього припущення не наведено. У роботі [5] отримано висновок, що ударні хвилі не виникають у якійсь визначеній точці профілю, вони коливаються з великою частотою між двома можливими положеннями рівноваги. У роботі [4] прямо вказано, що розрахувати це явище за допомогою класичної аеродинамічної теорії неможливо, хоча коливання аеродинамічної поверхні керування є простим гармонічним коливанням. Нарешті, в огляді [3] також відмічено, що дійсний механізм цих коливань залишається до кінця не з'ясованим.

Тобто, досі немає загальноприйнятої математичної моделі взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічних поверхонь і, як наслідок, немає моделі оцінки впливу стрибків ущільнення на величину критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю.

З цієї причини виникнення цих коливань спостерігалось, як правило, лише на етапі льотних випробувань і не прогнозувалось ні теоретичними розрахунками, ні результатами продувок аеродинамічних моделей в аеродинамічних трубах. Тому експериментальні дослідження залишаються основним методом оцінки характеристик флатера літаків на трансзвукових швидкостях польоту. Емпіричними методами залишаються і методи зменшення рівня цих коливань.

Пошук ефективних методів зменшення рівня коливань аеродинамічних поверхонь керування на цій стадії доводки літака не завжди досягає позитивних результатів і безпека польотів літаків на трансзвукових швидкостях забезпечується лише додатковим обмеженням льотних характеристик. Так, на надзвукових літаках F-14 швидкість польоту на висотах нижче 3 км обмежена числом Маха  $M = 0.85$  [11]. Аналогічні обмеження режимів польоту мають і деякі інші надзвукові літаки.

**Мета роботи** — розробити математичну модель оцінки впливу стрибків ущільнення на величину критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю.

## ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо згинально-крутильні коливання тонкого аеродинамічного профілю, розташованого у трансзвуковому потоці під нульовим кутом атаки.

Обтікання аеродинамічного профілю трансзвуковим потоком повітря вважаємо безвідривним. Швидкість трансзвукового потоку відповідає таким значенням  $M$ , при яких стрибки ущільнення розташовані у дифузійній частині аеродинамічного профілю, тобто поблизу задньої кромки.

Аеродинамічний вплив трансзвукового потоку на коливання аеродинамічного профілю визначається сумою аеродинамічних сил і моментів, зумовлених як однорідним потоком повітря, так і наявністю стрибків ущільнення. Ці сили і моменти, як правило, є нелінійними функціями характеристик аеродинамічних профілів та трансзвукового потоку, але при малих амплітудах коливань аеродинамічних профілів їх можна уявити лінійними функціями.

Крім того, у нашій роботі оцінка критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю з урахуванням впливу стрибків ущільнення розглядається як самостійне явище аеропружності, яке вирішується за допомогою математичного апарату класичного (двоступеневого) флатера аеродинамічних профілів, а також базується на спільному аналізі закономірностей зміни параметрів над-

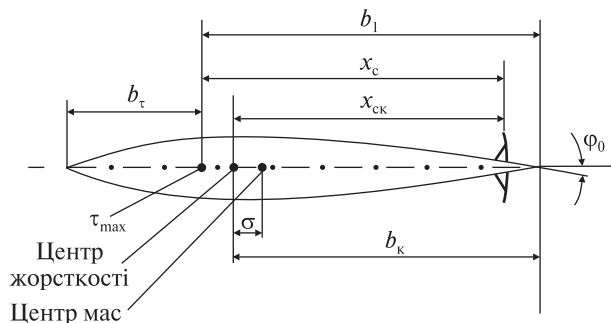


Рис. 1. Аеродинамічний профіль у трансзвуковому потоці зі стрибками ущільнення (див. текст)

звукового потоку у течії Прандтля — Майера [5], рівнянь Бернуллі для стисливого газу [1] та на використанні гіпотези «динамічного скривлення» аеродинамічного профілю [9].

З урахуванням цих зауважень та користуючись підходами [4, 14], систему диференціальних рівнянь згинально-крутильних коливань аеродинамічного профілю у трансзвуковому потоці повітря зі стрибками ущільнення можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \ddot{Y}(t) + \omega_y^2 Y(t) - \sigma \ddot{\theta}(t) &= \frac{1}{\bar{m}} (\bar{F}_a + \bar{F}_c), \\ \ddot{\theta}(t) + \omega_k^2 \theta(t) - \frac{\bar{m}}{\bar{J}} \sigma \ddot{Y}(t) &= \frac{1}{\bar{J}} (\bar{M}_a + \bar{M}_c), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $Y(t)$  — згинальні коливання аеродинамічного профілю,  $\omega_y$  — кутова частота власних згинальних коливань аеродинамічного профілю,  $\sigma$  — відстань осі жорсткості аеродинамічного профілю від його центра мас,  $\theta(t)$  — крутильні коливання аеродинамічного профілю,  $\bar{m}$  — розподілена маса аеродинамічного профілю,  $\bar{F}_a$  — розподілена аеродинамічна сила, зумовлена однорідним потоком повітря,  $\bar{F}_c$  — розподілена аеродинамічна сила, зумовлена впливом стрибків ущільнення,  $\omega_k$  — кутова частота власних крутильних коливань аеродинамічного профілю,  $\bar{J}$  — розподілений масовий момент інерції аеродинамічного профілю,  $\bar{M}_a$  — розподілений аеродинамічний момент, зумовлений однорідним потоком повітря,  $\bar{M}_c$  — розподілений аеродинамічний момент, зумовлений впливом стрибків ущільнення.

На рис. 1 наведено основні геометричні параметри аеродинамічного профілю у трансзвуковому потоці. Тут  $b_{\tau}$  — відстань від носка профілю до перерізу максимальної його товщини,  $b_1$  — відстань від задньої кромки профілю до перерізу максимальної його товщини,  $\tau_{\max}$  — точка максимальної товщини профілю,  $x_c$  — відстань від перерізу стрибка ущільнення до максимальної товщини профілю,  $x_{ck}$  — відстань від перерізу стрибка ущільнення до центра жорсткості профілю,  $\sigma$  — відстань між центром жорсткості і центром мас,  $\varphi_0$  — максимальний кут нахилу дифузornoї частини профілю.

Розподілені аеродинамічні сили та моменти, зумовлені однорідним потоком повітря, можна подати відомими залежностями [14]:

$$\begin{aligned} \bar{F}_a &= C_y^{\alpha} q b \left[ \theta(t) + \left( \frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) \frac{b}{V} \dot{\theta}(t) - \frac{\dot{Y}(t)}{V} \right], \quad (2) \\ \bar{M}_a &= C_y^{\alpha} q b^2 \left\{ \left( \frac{x_0 - x_F}{b} \right) \left[ \theta(t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) \frac{b}{V} \dot{\theta}(t) - \frac{\dot{Y}(t)}{V} \right] - \frac{\pi b \dot{\theta}(t)}{8 C_y^{\alpha} V} \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

де  $C_y^{\alpha}$  — похідна коефіцієнта піднімальної сили по куту атаки профілю,  $q$  — швидкісний напір потоку повітря,  $b$  — хорда аеродинамічного профілю,  $x_0$  — відстань осі жорсткості від передньої кромки аеродинамічного профілю,  $x_F$  — відстань аеродинамічного фокуса від передньої кромки аеродинамічного профілю,  $V$  — швидкість потоку повітря.

Основні труднощі теоретичного дослідження цього явища зумовлені необхідністю аналітичного представлення впливу стисливості повітря та стрибків ущільнення на зміну характеристик аеродинамічних поверхонь у трансзвуковому діапазоні швидкостей польоту. Звичайно в аналітичних дослідженнях вплив стисливості повітря враховується за допомогою поправок, наприклад поправки Прандтля — Глауєрта [5]

$$\bar{C}_{cp} = \frac{P_1 - P_{\infty}}{q} \approx \frac{\bar{C}_p}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}}, \quad (4)$$

де  $\bar{C}_{cp}$  — коефіцієнт тиску місцевого потоку на поверхні аеродинамічного профілю з урахуванням стисливості повітря,  $P_1$  — тиск місцевого

надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю,  $P_\infty$  — тиск дозвукового потоку повітря,  $q$  — швидкісний напір дозвукового потоку повітря,  $C_p$  — коефіцієнт тиску місцевого потоку на поверхні аеродинамічного профілю без урахування стисливості повітря,  $M_\infty$  — число Маха дозвукового потоку повітря.

Але необхідно зауважити, що при визначенні впливу стисливості повітря на величину коефіцієнта тиску за допомогою поправки (4), при числах  $M_\infty \rightarrow 1$  виникають значні похибки.

Додаткові труднощі при оцінці характеристик місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю надзвукових літаків на трансзвукових швидкостях польоту виникають у випадку, коли на поверхні аеродинамічного профілю формуються стрибки ущільнення.

Зауважимо також і те, що у трансзвуковому діапазоні чисел  $M$  польоту значні похибки виникають і при оцінці аеропружних характеристик числовими методами[2].

У роботі [11] замість коефіцієнту тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю було запропоновано іншу безрозмірну величину, а саме

$$\Delta \bar{P}_1 = \frac{P_\infty - P_1}{P_\infty} = 1 - \frac{P_1}{P_\infty} = 1 - \bar{P}_1, \quad (5)$$

де  $\Delta \bar{P}_1$  — відносна величина зміни тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю,  $\bar{P}_1$  — відносна величина тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю.

Використання відношення (5) збільшує точність оцінки визначення зміни тиску місцевого надзвукового потоку. Дійсно, у трансзвуковому діапазоні чисел  $M$  можлива лінеаризація рівняння Бернуллі для стисливого газу, а саме для повітря:

$$\bar{P}_1 = \frac{P_1}{P_\infty} = \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \approx 1 + M_\infty - M_1, \quad (6)$$

де  $M_1$  — число Маха місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю,  $k$  — показник адіабати (для повітря  $k = 1.405$ ).

З рівняння (6) отримаємо

$$\Delta \bar{P}_1 = 1 - \bar{P}_1 \approx M_1 - M_\infty. \quad (7)$$

Крім того, якщо у рівнянні (7) покласти  $M_\infty = M_{кр}$ , то:

$$\Delta P_1 = \Delta P_{кр} = 1 - P_{кр} \approx 1 - M_{кр}, \quad (8)$$

де  $\Delta \bar{P}_{кр}$  — відносна величина зміни критичного тиску місцевого потоку на поверхні аеродинамічного профілю,  $\bar{P}_{кр}$  — відносна величина критичного тиску місцевого потоку на поверхні аеродинамічного профілю,  $M_{кр}$  — критичне число Маха аеродинамічного профілю.

З рівняння (8) випливає

$$\bar{P}_{кр} \approx M_{кр}. \quad (9)$$

Зауважимо, що похибка наближеної залежності (9) для тонких аеродинамічних поверхонь надзвукових літаків з відносною товщиною аеродинамічного профілю  $\bar{\tau} = 0.04 \dots 0.08$  не перевищує 1.0 %.

Враховуючи, що розширення надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю розпочинається з величини  $\bar{P}_1 = \bar{P}_{кр}$ , рівняння (6) можна представити і іншим чином, а саме:

$$\bar{P}_1 = \left( \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_{кр}^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_\infty^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} - (1 - \bar{P}_{кр}). \quad (10)$$

Зауважимо, що при  $M_\infty = 1$  з рівняння (10) отримаємо точну залежність

$$\bar{P}_{1min} = 2\bar{P}_{кр} - 1, \quad (11)$$

де  $\bar{P}_{1min}$  — мінімальна відносна величина тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю при повному адіабатичному розширенні, тобто при  $M_\infty = 1$ .

Перетворимо залежність (11) до виду

$$\Delta \bar{P}_{1max} = 1 - \bar{P}_{1min} = 2(1 - \bar{P}_{кр}) = 2\Delta \bar{P}_{кр}, \quad (12)$$

де  $\Delta \bar{P}_{1max}$  — максимальна відносна величина зміни тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю при повному адіабатичному розширенні.

Рівність (12) вказує, що при повному адіабатичному розширенні місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю

максимальна відносна величина зміни тиску місцевого надзвукового потоку удвічі більша, ніж відносна величина зміни критичного тиску.

На підставі рівності (12) залежність величини зміни тиску місцевого надзвукового потоку за хордою аеродинамічного профілю від  $x_c = 0$  до перетину розташування стрибків ущільнення можна подати наближеною залежністю

$$\Delta P(x) = \frac{1}{2} \Delta P_0 \left( 1 + \frac{x_c}{b_1} \right), \quad (13)$$

де  $\Delta P_0$  — максимальна величина зміни тиску місцевого надзвукового потоку на поверхні сталого аеродинамічного профілю при таких числах  $M$  дозвукового потоку, коли стрибки ущільнення досягають задньої кромки профілю,  $x_c$  — відстань перетину розташування стрибків ущільнення від перетину максимальної товщини аеродинамічного профілю,  $b_1$  — відстань перетину максимальної товщини аеродинамічного профілю від його задньої кромки.

Враховуючи, що зміна тиску місцевого надзвукового потоку після стрибків ущільнення до тиску незбуреного потоку повітря здійснюється за законом, близьким до лінійного, величини розподілених сил та моментів, зумовлених особливостями взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічного профілю, можна подати такими наближеними залежностями:

$$\bar{F}_c(x) \approx -\frac{1}{2} \Delta P(x) \Delta l(x) \approx -\frac{1}{4} \Delta P_0 \left( 1 + \frac{x_c}{b_1} \right) \Delta l(x), \quad (14)$$

$$\bar{M}_c(x) \approx \bar{F}_c(x) x_c \approx \frac{1}{4} \Delta P_0 \left( 1 + \frac{x_c}{b_1} \right) \Delta l(x) x_c, \quad (15)$$

де  $\Delta l(x)$  — сумарна величина переміщень стрибків ущільнення при згинально-крутильних коливаннях аеродинамічного профілю.

З метою визначення сумарної величини переміщень стрибків ущільнення при згинально-крутильних коливаннях аеродинамічного профілю запишемо залежність (10) з урахуванням рівності (9) у наближеному вигляді:

$$\bar{P}_1 \approx 2M_{кр} - M_\infty. \quad (16)$$

З порівняння залежностей (6) і (16) отримаємо

$$M_1 - 1 \approx 2(M_\infty - M_{кр}). \quad (17)$$

Рівняння (17) визначає зв'язок числа  $M_1$  місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю, числа  $M_\infty$  незбуреного дозвукового потоку повітря та критичного числа  $M_{кр}$  аеродинамічного профілю. Це рівняння визначає умови адіабатичного розширення місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю. А саме, при адіабатичному розширенні місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю його число  $M_1$  збільшується удвічі швидше, ніж число  $M_\infty$  незбуреного дозвукового потоку повітря.

Саме залежність (17) визначає умови формування стрибків ущільнення на поверхні аеродинамічного профілю або умови перетворення місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю у дозвуковий потік.

З іншого боку, оскільки місцевий надзвуковий потік у дифузійній частині профілю можна представити течією Прандтля — Майєра, тобто течією надзвукового потоку навколо тупого випуклого кута, є і геометричне обмеження числа  $M$  місцевого надзвукового потоку на поверхні профілю.

Звичайно зміна параметрів надзвукового струму у течії Прандтля — Майєра подається у вигляді таблиць [1], використовувати які в аналітичних розрахунках не завжди зручно. З метою спрощення оцінки зміни параметрів надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю, враховуючи, що розширення надзвукового потоку на поверхні профілю починається з числа  $M_1 = 1$ , у праці [11] було запропоновано таку наближену залежність:

$$M_1 \approx \sqrt[3]{1 + 11.5\varphi(x)}, \quad (18)$$

де  $\varphi(x)$  — кут відхилення надзвукового струму у дифузійній частині аеродинамічного профілю, або характер зміни кута нахилу дотичної до поверхні дифузійної частини профілю.

Зауважимо, що похибка визначення числа  $M_1$  місцевого надзвукового струму на поверхні аеродинамічного профілю згідно із залежністю (18) при  $\varphi(x) \leq 10^\circ$  не перевищує 1 %. Така похибка значно менша від похибок обробки експериментальних даних ( $\approx 5\%$  [10]).

Як вказано вище, залежність (18) визначає геометричне обмеження числа  $M_1$  місцевого над-

звукового струму на поверхні аеродинамічного профілю. Дійсно, якщо дифузorna частина аеродинамічного профілю є плоскою пластиною, тобто  $\varphi(x) = 0^\circ$ , то число Маха має значення  $M_1 = 1$  навіть при прискоренні дозвукового потоку від  $M_\infty = M_{кр}$  до  $M_\infty = 1$ .

Залежності (17) і (18) дозволяють визначити закономірності взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічного профілю, але, як впливає з умови (18), для цього необхідно додатково знати характер зміни поверхні профілю за хордою у дифузорної частини. Для типових профілів, наприклад, типу ЦАГІ, зміну кута нахилу дотичної до поверхні дифузорної частини профілю можна подати наближеною залежністю [2]

$$\varphi(x) = \varphi_0 \frac{x_c}{b_1}, \quad (19)$$

де  $\varphi_0$  — максимальний кут нахилу дотичної до поверхні дифузорної частини профілю, або максимальний кут відхилення надзвукового струму у дифузорній частині аеродинамічного профілю.

Залежності (17)—(19) дозволяють обґрунтувати закономірності взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічних профілів та кількісно оцінити деякі характеристики аеродинамічних профілів у трансзвуковому потоці повітря.

Дійсно, з аналізу залежностей (17)—(19) впливає, що при малих коливаннях аеродинамічного профілю стрибки ущільнення переміщуються від початкового розташування у ті перетини профілю, де кут відхилення надзвукового потоку на поверхні профілю дорівнює куту відхилення надзвукового потоку у перетині початкового розташування стрибків ущільнення.

Ці закономірності взаємодії стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічних профілів, наприклад з кутовим відхиленням аеродинамічного профілю, можна записати у вигляді:

$$\varphi(x) = \varphi_0 \frac{x_c}{b_1} \approx \varphi_0 \frac{x_c - \Delta x_y(\theta)}{b_1} + \theta(t), \quad (20)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 \frac{x_c}{b_1} \approx \varphi_0 \frac{x_c + \Delta x_n(\theta)}{b_1} - \theta(t), \quad (21)$$

де  $\Delta x_y(\theta)$  — величина переміщення стрибків ущільнення при кутовому відхиленні аеродинамічного профілю уперед від початкового розта-

шування,  $\Delta x_n(\theta)$  — величина переміщення стрибків ущільнення при кутовому відхиленні аеродинамічного профілю назад від початкового розташування,  $\theta(t)$  — характер крутильних коливань аеродинамічного профілю.

З аналізу рівнянь (20) і (21) випливає

$$\Delta x_n(\theta) = \Delta x_y(\theta) \approx \frac{b_1}{\varphi_0} \theta(t). \quad (22)$$

А сумарне переміщення стрибків ущільнення уперед та назад, згідно з рівнянням (22) дорівнює

$$\Delta l(\theta) = \Delta x_y(\theta) + \Delta x_n(\theta) \approx 2 \frac{b_1}{\varphi_0} \theta(t). \quad (23)$$

Аналогічно можна визначити і характер взаємодії стрибків ущільнення зі швидкістю згинальних коливань аеродинамічного профілю.

У цьому випадку кут атаки аеродинамічного профілю зменшується на величину

$$\Delta \theta(\dot{Y}) = - \frac{\dot{Y}(t)}{V}. \quad (24)$$

Тому, як і при аналізі рівнянь (20) і (21), отримаємо:

$$\Delta x_n(\dot{Y}) = \Delta x_y(\dot{Y}) \approx \frac{b_1}{\varphi_0 V} \dot{Y}(t), \quad (25)$$

$$\Delta l(\dot{Y}) = \Delta x_y(\dot{Y}) + \Delta x_n(\dot{Y}) \approx 2 \frac{b_1}{\varphi_0 V} \dot{Y}(t). \quad (26)$$

Тут  $\Delta x_y(\dot{Y})$  — переміщення стрибків ущільнення, зумовлене швидкістю згинальних коливань аеродинамічного профілю, уперед від початкового розташування,  $\Delta x_n(\dot{Y})$  — переміщення стрибків ущільнення, зумовлене швидкістю згинальних коливань аеродинамічного профілю, назад від початкового розташування,  $\Delta l(\dot{Y})$  — сумарне переміщення стрибків ущільнення уперед та назад, зумовлене швидкістю згинальних коливань аеродинамічного профілю.

Для оцінки закономірностей взаємодії стрибків ущільнення з кутовою швидкістю коливань аеродинамічного профілю скористаємося гіпотезою «динамічного скривлення» аеродинамічного профілю [9].

Згідно з цією гіпотезою характеристики сталого аеродинамічного профілю не відрізняються від характеристик профілю, який коливається, якщо сталий профіль скривлений таким чином, що місцеві кути його обтікання потоком повітря

змінюються за законом

$$\Delta\alpha(\dot{\theta}) = \frac{x_{\text{ск}}}{V} \dot{\theta}(t), \quad (27)$$

де  $x_{\text{ск}}$  — відстань перетину хорди профілю, в якому розташований стрибок ущільнення, від осі жорсткості профілю.

Переміщення стрибків ущільнення вперед і назад від початкового розташування, зумовлені закономірностями їхньої взаємодії з кутовою швидкістю коливань аеродинамічного профілю, можна визначити з рівнянь

$$\varphi(x) = \varphi_0 \frac{x_c}{b_1} \approx \varphi_0 \frac{x_c - \Delta x_y(\dot{\theta})}{b_1} + \frac{x_{\text{ск}} - \Delta x_y(\dot{\theta})}{V} \dot{\theta}(t); \quad (28)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 \frac{x_c}{b_1} \approx \varphi_0 \frac{x_c + \Delta x_n(\dot{\theta})}{b_1} - \frac{x_{\text{ск}} + \Delta x_n(\dot{\theta})}{V} \dot{\theta}(t). \quad (29)$$

З рівнянь (27) і (28) отримаємо переміщення стрибків ущільнення вперед від початкового розташування:

$$\Delta x_y(x_{\text{ск}}; \dot{\theta}) \approx \frac{x_{\text{ск}} b_1}{\varphi_0 V + b_1 \dot{\theta}(t)} \dot{\theta}(t). \quad (30)$$

З рівнянь (27) і (29) отримаємо переміщення стрибків ущільнення назад від початкового розташування:

$$\Delta x_n(x_{\text{ск}}; \dot{\theta}) \approx \frac{x_{\text{ск}} b_1}{\varphi_0 V - b_1 \dot{\theta}(t)} \dot{\theta}(t). \quad (31)$$

З рівнянь (30) і (31) отримаємо сумарне переміщення стрибків ущільнення уперед і назад від початкового розташування, зумовлене їхньою взаємодією з кутовою швидкістю коливань аеродинамічного профілю:

$$\Delta l(x_{\text{ск}}; \dot{\theta}) \approx 2 \frac{x_{\text{ск}} b_1 \varphi_0 V}{\varphi_0^2 V^2 - b_1^2 \dot{\theta}^2(t)} \dot{\theta}(t). \quad (32)$$

З рівняння (32) випливає, що сумарне переміщення стрибків ущільнення вперед і назад, зумовлене їхньою взаємодією з кутовою швидкістю коливань аеродинамічного профілю, збільшується з переміщенням стрибків ущільнення до задньої кромки аеродинамічного профілю. Але при деяких значеннях числа  $M_\infty$  незбуреного трансзвукового потоку або при збільшенні амплітуди коливань аеродинамічного профілю переміщення стрибків ущільнення назад від початкового розташування обмежується задньою кромкою аеродинамічного профілю, і сумарне

переміщення стрибків ущільнення починає зменшуватися.

Це обмеження можна подати умовою

$$x_{\text{ск}} = b_k - \Delta x_n(\dot{\theta}), \quad (33)$$

де  $b_k$  — відстань осі жорсткості профілю до його задньої кромки.

Підставляючи залежність (31) в умову (33), отримаємо умову, при якій сумарне переміщення стрибків ущільнення, зумовлене їхньою взаємодією з кутовою швидкістю коливань аеродинамічного профілю, досягає максимальної величини

$$x_{\text{ск}} \approx \frac{b_k}{\varphi_0 V} [\varphi_0 V - b_1 \dot{\theta}(t)]. \quad (34)$$

А підставляючи умову (34) у залежність (32), отримаємо максимальну величину сумарного переміщення стрибків ущільнення, зумовлену їхньою взаємодією з кутовою швидкістю коливань аеродинамічного профілю

$$\Delta l(\dot{\theta}) \approx 2 \frac{b_k b_1}{\varphi_0 V + b_1 \dot{\theta}(t)} \dot{\theta}(t). \quad (35)$$

Обмеження (33) є основною причиною нелінійного характеру сил і моментів, зумовлених взаємодією стрибків ущільнення з коливаннями аеродинамічних поверхонь. Але необхідно нагадати, що критична швидкість флатера визначається, як правило, при  $\theta(t) \rightarrow 0$ , тобто характер залежності сил і моментів від різноманітних параметрів вважається лінійним.

З урахуванням цих зауважень залежність (34) перетворюється у рівність  $x_{\text{ск}} \approx b_k$ , а у рівняннях (14) і (15)  $x_c = b_1$ .

При цих умовах залежність (35) можна подати у вигляді

$$\Delta l(\dot{\theta}) \approx 2 \frac{b_k b_1}{\varphi_0 V} \dot{\theta}(t). \quad (36)$$

З рівнянь (23), (26) і (36) отримаємо сумарну величину переміщень стрибків ущільнення, зумовлених згинально-крутильними коливаннями аеродинамічного профілю:

$$\Delta l(\theta; \dot{\theta}) \approx 2 \frac{b_k}{\varphi_0} \left[ \theta(t) + \frac{b_1}{V} \dot{\theta}(t) - \frac{b_1}{b_k V} \dot{Y}(t) \right]. \quad (37)$$

Зауважимо, що розглянутий характер взаємодії стрибків ущільнення зі згинально-крутильними коливаннями аеродинамічного профілю викликають виникнення дестабілізаційних та збурювальних сил і моментів.

Підставляючи залежність (37) у рівняння (14) і (15) та прийнявши у цих рівняннях  $x_c = b_1$ , отримуємо розподілені величини сил і моментів, зумовлених взаємодією стрибків ущільнення зі згинально-крутильними коливаннями:

$$\bar{F}_c \approx -\Delta P_0 \frac{b_k}{\varphi_0} \left[ \theta(t) + \frac{b_1}{V} \dot{\theta}(t) - \frac{b_1}{b_k V} \dot{Y}(t) \right], \quad (38)$$

$$\bar{M}_c \approx \Delta P_0 \frac{b_k^2}{\varphi_0} \left[ \theta(t) + \frac{b_1}{V} \dot{\theta}(t) - \frac{b_1}{b_k V} \dot{Y}(t) \right]. \quad (39)$$

Як вказано вище та доведено експериментальними дослідженнями, коливання аеродинамічних поверхонь при виникненні флатера близькі до гармонічних, тому згідно з рекомендаціями [4, 6] розв'язок системи рівнянь (1) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_0 e^{i\omega t}, \\ \theta(t) &= \theta_0 e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (40)$$

де  $Y_0$  — амплітуда згинальних коливань аеродинамічного профілю,  $\theta_0$  — амплітуда крутильних коливань аеродинамічного профілю,  $\omega$  — кругова частота згинально-крутильних коливань аеродинамічного профілю при виникненні флатера.

Підставляючи розв'язок (40) і рівняння (2), (3), (38) та (39) у систему (1), отримуємо характеристичне рівняння згинально-крутильних коливань аеродинамічного профілю:

$$Y_0(a_{11} + i\omega b_{11} - \omega^2) + \theta_0(\sigma\omega^2 + a_{12} + i\omega b_{12}) = 0, \quad (41)$$

$$Y_0 \left( \frac{\bar{m}}{J} \sigma\omega^2 + i\omega b_{21} \right) + \theta_0(a_{21} + i\omega b_{22} - \omega^2) = 0,$$

де

$$a_{11} = \omega_y^2, \quad a_{12} = -C_y^\alpha q \frac{b}{\bar{m}} + \Delta P_0 \frac{b_1}{\varphi_0},$$

$$a_{22} = \omega_0^2 - C_y^\alpha q \frac{b^2}{J} \left( \frac{x_0 - x_F}{b} \right) - \Delta P_0 \frac{b_1 b_k}{J \varphi_0},$$

$$b_{11} = \frac{1}{\bar{m}V} \left( C_y^\alpha q b - \Delta P_0 \frac{b_1}{\varphi_0} \right), \quad (42)$$

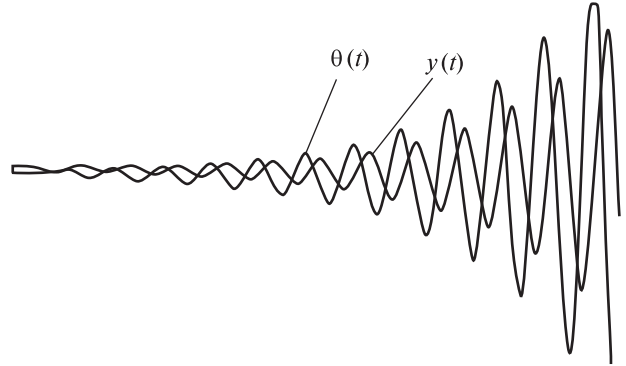


Рис. 2. Характер згинально-крутильних коливань при  $q \geq q_\phi$  ( $f = 16.5$  Гц)

$$b_{12} = -\frac{1}{\bar{m}V} \left[ C_y^\alpha q b^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) - \Delta P_0 \frac{b_1^2}{\varphi_0} \right],$$

$$b_{21} = \frac{1}{JV} \left[ C_y^\alpha q b^2 \left( \frac{x_0 - x_F}{b} \right) + \Delta P_0 \frac{b_1 b_k}{\varphi_0} \right],$$

$$b_{22} = -\frac{1}{JV} \left[ C_y^\alpha q b^3 \left( \frac{x_0 - x_F}{b} \right) \left( \frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) - \frac{\pi}{8} q b^3 - \Delta P_0 \frac{b_1^2}{\varphi_0} \right].$$

Задавши детермінант системи (41) рівним нулю, отримуємо частотне рівняння, аналіз якого може бути покладений в основу дослідження стійкості згинально-крутильних коливань аеродинамічного профілю як в однорідному потоці повітря, так і у потоці зі стрибками ущільнення.

Запишемо це частотне рівняння у вигляді

$$A_4 \omega^4 + iA_3 \omega^3 + A_2 \omega^2 + iA_1 \omega + A_0 = 0, \quad (43)$$

де

$$A_0 = a_{11} a_{22}, \quad A_1 = a_{11} b_{22} - a_{12} b_{21} + a_{22} b_{11},$$

$$A_2 = -\left( a_{11} + \frac{\bar{m}}{J} \sigma a_{12} + a_{22} + b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} \right), \quad (44)$$

$$A_3 = -\left( b_{11} + \frac{\bar{m}}{J} \sigma b_{12} + \sigma b_{21} + b_{22} \right), \quad A_4 = 1 - \frac{\bar{m}}{J} \sigma^2.$$

Розділяючи дійсні та уявні частини рівняння (43), отримуємо

$$A_4 \omega^4 + A_2 \omega^2 + A_0 = 0, \quad (45)$$

$$A_3 \omega^2 + A_1 = 0. \quad (46)$$

Рівняння (45) та (46) дозволяють оцінити стійкість згинально-крутильних коливань аеродинамічного профілю у потоці повітря.



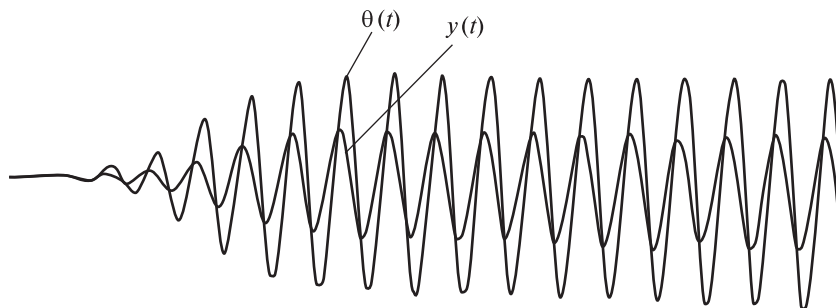


Рис. 3. Характер згинально-крутильних коливань аеродинамічного профілю при  $q_{\text{фс}} < q < q_{\text{ф}} (f = 19.8 \text{ Гц})$

У відповідності з рекомендаціями роботи [6] флатер аеродинамічного профілю може виникати при умові

$$A_2 = 0. \quad (47)$$

Умова (47) відповідає мінімально можливій величині критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю.

Підставляючи в умову (47) позначення (42) і (44) та опускаючи величини малого порядку, а саме задавши  $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \approx 0$ , отримаємо

$$A_2 = \omega_y^2 + \omega_\theta^2 - C_y^\alpha q \frac{b}{J} (x_0 - x_F + \sigma) - \Delta P_0 \frac{b_1}{J \varphi_0} (b - x_0 - \sigma) = 0. \quad (48)$$

Величину критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю в однорідному потоці повітря, тобто без урахування впливу стрибків ущільнення, отримаємо з рівняння (48), прийнявши  $\Delta P_0 = 0$ :

$$q_{\text{ф}} \approx \frac{(\omega_y^2 + \omega_\theta^2) \bar{J}}{C_e^\alpha b (x_0 - x_F + \sigma)}. \quad (49)$$

Типовий характер коливань аеродинамічного профілю при виникненні флатера показано на рис. 2.

Для визначення величини критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю з урахуванням впливу стрибків ущільнення нагадаємо, що згідно із залежністю (7) величина  $\Delta P_0$  у рівнянні (48) може бути подана у вигляді

$$\Delta P_0 \approx P_\infty (M_{10} - M_{\infty 0}), \quad (50)$$

де  $M_{10}$  — число Маха місцевого надзвукового потоку на поверхні сталого аеродинамічного

профілю, при якому стрибки ущільнення досягають задньої кромки,  $M_{\infty 0}$  — число Маха незбудованого трансзвукового потоку, при якому стрибки ущільнення досягають задньої кромки сталого аеродинамічного профілю.

Крім того, нагадаємо відому залежність [5]

$$q = \frac{k}{2} M_\infty^2 P_\infty. \quad (51)$$

З урахуванням залежності (51) перетворимо залежність (50) до виду

$$\Delta P_0 \approx 2q \frac{M_{10} - M_{\infty 0}}{k M_\infty^2}. \quad (52)$$

Підставляючи залежність (52) у рівняння (48), отримаємо величину критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю з урахуванням впливу стрибків ущільнення:

$$q_{\text{фс}} \approx \frac{(\omega_y^2 + \omega_\theta^2) \bar{J}}{C_e^\alpha b (x_0 - x_F + \sigma) + 2 \frac{M_{10} - M_{\infty 0}}{k \varphi_0 M_\infty^2} b_1 (b - x_0 - \sigma)}. \quad (53)$$

З порівняння залежностей (49) і (53) випливає, що величина критичного швидкісного напору згинально-крутильного флатера аеродинамічного профілю з урахуванням впливу стрибків ущільнення завжди менша, ніж величина критичного швидкісного напору флатера в однорідному потоці повітря.

Але необхідно зауважити таке. У дійсності згинально-крутильні коливання аеродинамічних поверхонь у трансзвуковому потоці повітря, які спостерігаються у лабораторних і льотних дослідженнях, при величинах швидкісного напору  $q_{\text{фс}} \leq q_{\text{ф}}$  є автоколиваннями системи «аеродинамічна поверхня — стрибки ущільнення», амплі-

літуда яких залежить від різноманітних параметрів аеродинамічних профілів та трансзвукового потоку. Типовий характер цих коливань показано на рис. 3.

## ВИСНОВКИ

У статті запропоновано одну з можливих математичних моделей оцінки впливу стрибків ущільнення на критичний швидкісний напір згинально-крутильного флатера аеродинамічних профілів у трансзвуковому потоці повітря. Модель може бути використана для попередньої оцінки аеропружних характеристик аеродинамічних поверхонь надзвукових літаків і аерокосмічних систем та їхньої залежності від характеристик аеродинамічних профілів та параметрів трансзвукового потоку. Чому і доцільно присвятити наступні дослідження.

## ЛІТЕРАТУРА

- Абрамович Г. Н. *Прикладная газовая динамика*. Москва: Наука, 1976. 888 с.
- Аэродинамика летательных аппаратов при трансзвуковых скоростях*. Москва: ЦАГИ, 1974. Ч. II. 161 с.
- Аэродинамическое исследование колеблющейся поверхности управления при трансзвуковых скоростях*. Москва: ЦАГИ, 1975. 105 с.
- Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфман Р. Л. *Аэроупругость*. Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. 800 с.
- Гошек И. *Аэродинамика больших скоростей*. Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. 547 с.
- Ден-Гартог Дж. П. *Механические колебания*. Москва: Физматгиз, 1960. 560 с.
- Иностранная военная техника. *Зарубеж. военное обозрение*. 1996. № 5. С. 58—62.
- Исогаи К. *О механизме резкого снижения границы флаттера крыла прямой стреловидности на режиме трансзвукового полета*. Москва: РТК, 1981. Ч. II. С. 169—171.
- Келдыш М. В. *Избранные труды. Механика*. Москва: Наука, 1985. 568 с.
- Левкин В. Ф. Экспериментальные исследования нестационарных аэродинамических характеристик поверхностей управления при трансзвуковых скоростях. *Тр. Центр. аэро-гидродинам. ин-та*. 1982. Вып. 2132. 16 с.
- Сафронов А. В. Аэродинамическое воздействие скачков уплотнения на колеблющийся в околосзвуковом потоке на элерон. *Уч. зап. Центр. аэро-гидродинам. ин-та*. 1991. 22, № 3. С. 110—117.
- Сафронов О. В., Семон Б. Й., Неділько О. М. Математична модель оцінки впливу аеродинамічної компенсації поверхонь керування на рівень їх коливань при виникненні трансзвукового флатера. *Космічна наука і технологія*. 2018. 24, № 4. С. 14—23.
- Свищев Г. П. Эффективность руля и шарнирные моменты его при больших скоростях. *Тр. Центр. аэро-гидродинам. ин-та*. 1975. Вып. 1722. 10 с.
- Стрелков С. П. *Введение в теорию колебаний*. Москва: Наука, 1964. 440 с.

Стаття надійшла до редакції 10.12.2018

## REFERENCES

- Abramovich G. N. (1976). *Applied gas dynamics*. Moscow: Science.
- Aerodynamics of aircraft at transonic speeds. Part II. (1974). *САИ*, No. 442, 161 p.
- Aerodynamic study of an oscillating control surface at transonic velocities (1975). *ТsAGI*, No. 456, 105 p.
- Bisplinghoff R. L., Ashley H., Halfman R. L. (1958). *Aeroelasticity*. Moscow: Foreign Literature Publishing House.
- Goschek I. (1954). *Aerodynamics of high speeds*. Moscow: IL.
- Den-Hartog J. P. (1960). *Mechanical Oscillations*. Moscow: Fizmatgiz.
- Foreign military equipment (1996). *Foreign military review*, No. 5, 58—62.
- Isogai K. (1981). On the mechanism of a sharp decrease in the flutter boundary of a straight sweep in a transonic flight mode. Part II. *РТК*, 19, No. 10, 169—171.
- Keldisch M. V. (1985). *Selected works. Mechanics*. Moscow: Science.
- Levkin V. F. (1982). Experimental studies of non-stationary aerodynamic characteristics of control surfaces at transonic speeds. *Papers of TsAGI*, No. 2132, 16 p.
- Safronov A. V. (1991). Aerodynamic impact of shock waves on aileron oscillating in a transonic flow on aileron. *САИ Notes*, 21(3), 110—117.
- Safronov A. V., Semon B. Y., Nedilko A. N. (2018). Mathematical model to estimate the effect of aerodynamic aircraft control surfaces compensation on the level of their vibrations in case of transonic flutter. *Kosm. nauka tehnol.*, 24(4), 14—23.
- Svyshech G. P. (1975). Efficiency of the steering wheel and its hinge moments at high speeds. *Works of САИ*, No. 1722, 10 p.
- Strelkov C. P. (1964). *Introduction to the theory of oscillations*. Moscow: Nauka.

Received 10.12.2018

А. В. Сафронов, Б. Й. Семон, А. Н. Неділько

Национальный университет обороны Украины  
имени Ивана Черняховского, Киев, Украина

### ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЙ ФЛАТТЕР АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ СО СКАЧКАМИ УПЛОТНЕНИЯ

Предлагается одна из возможных математических моделей оценки влияния скачков уплотнения на величину критического скоростного напора изгибно-крутильного флаттера прямого аэродинамического профиля в трансзвуковом потоке воздуха. Математическая модель базируется на традиционных методах классического (двухстепенного) флаттера, на совместном анализе уравнений Бернулли для сжимаемого газа, характеристик сверхзвукового потока газа в течении Прандтля — Майера и на применении гипотезы «динамического искривления профиля». На базе линеаризации уравнений Бернулли для сжимаемого газа, а именно для воздуха, получено условие формирования скачков уплотнения на поверхности аэродинамического профиля в трансзвуковом диапазоне чисел Маха. На базе этого условия, учитывая характер изменения параметров местного сверхзвукового потока при обтекании диффузорной части поверхности аэродинамического профиля, и на базе гипотезы «динамического искривления профиля» получены приближенные закономерности взаимодействия скачков уплотнения с изгибно-крутильными колебаниями аэродинамического профиля. Полученные закономерности использованы для формирования математических моделей оценки величин дестабилизирующих и возмущающих сил и моментов, обусловленных особенностями взаимодействия скачков уплотнения с изгибно-крутильными колебаниями аэродинамического профиля. Оценка критического скоростного напора изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля со скачками уплотнения выполнялась путем решения системы двух дифференциальных уравнений второго порядка, на основании которого получены приближенные аналитические зависимости величин критического скоростного напора изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля, как в однородном потоке воздуха, так и в потоке со скачками уплотнения. Сравнением полученных результатов показано, что величина критического скоростного напора изгибно-крутильного флаттера типовых аэродинамических профилей со скачками уплотнения всегда меньше, чем величина критического скоростного напора изгибно-крутильного флаттера в однородном потоке воздуха.

**Ключевые слова:** аэродинамический профиль, математическая модель, изгибно-крутильный флаттер, скачки уплотнения, трансзвуковой поток, число Маха, сжимаемость воздуха, скоростной напор, давление.

О. V. Safronov, B. Y. Semon, O. M. Nedilko

The National Defence University of Ukraine  
named after Ivan Cherniakhovsyi, Kyiv, Ukraine

### FLEXURAL-TORSIONAL FLUTTER OF AN AERODYNAMIC PROFILE WITH IRREGULAR COMPACTION

The article proposes one of the possible mathematical models for estimating the effect of shock waves on the value of the critical velocity head of a bending-torsional flutter of a direct aerodynamic profile in transonic air flow. The mathematical model is based on the traditional methods of classical (two-degree) flutter, on a joint analysis of the Bernoulli equations for compressible gas, on the characteristics of the supersonic gas flow in the Prandtl-Meier flow, and on the application of the “dynamic profile curvature” hypothesis. On the basis of the linearization of the Bernoulli equations for a compressible gas, namely for air, the condition for the formation of shock waves on the airfoil surface in the transonic range of Mach numbers is obtained. Using this condition and the “dynamic profile curvature” hypothesis as a basis and taking into account the nature of changes in the parameters of the local supersonic flow when flowing around the diffuser part of the surface of an aerodynamic profile, approximate laws of interaction of shock waves with flexural-torsional oscillations of the airfoil are obtained. The patterns obtained are used to form mathematical models for estimating the values of destabilizing and perturbing forces and moments caused by the peculiarities of the interaction of shock waves with flexural-torsional oscillations of the airfoil. The estimation of the critical velocity head of a flexural-torsional flutter of an aerodynamic profile with shock waves was performed by solving a system of two differential equations of the second order. The result of the estimation formed the basis for determining approximate analytical dependences of the values of the above mentioned critical velocity head. They were obtained both in uniform air flow and the flow with irregular seals. A comparison of the obtained results shows that the magnitude of the critical velocity head of a flexural-torsional flutter of typical aerodynamic profiles with shock waves is always less than the magnitude of the critical velocity head of the flexural-torsional flutter in uniform air flow.

**Keywords:** aerodynamic profile, mathematical model, flexural-torsional flutter, shock waves, transonic flow, Mach number, air compressibility, velocity head, pressure.