

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2019.02.003>

УДК 629.78

А. В. Пироженко¹, А. И. Маслова¹, В. В. Васильев²

¹ Институт технической механики Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины, Днепро, Украина

² Earth Observing System Data Analytics

О ВЛИЯНИИ ВТОРОЙ ЗОНАЛЬНОЙ ГАРМОНИКИ НА ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА ПО ПОЧТИ КРУГОВЫМ ОРБИТАМ

Воздействия на движение спутника, вызванные второй зональной гармоникой разложения потенциала притяжения Земли в ряд по сферическим функциям, во многих случаях на порядки превосходят воздействия других возмущающих сил. Для низких околоземных орбит воздействия второй зональной гармоники являются определяющими в отклонении траектории движения спутника от кеплеровой орбиты. Рассматривается задача определения краткочастотных изменений траектории движения спутника по почти круговым орбитам под воздействием второй зональной гармоники. Это далеко не новая задача, решение которой дано во многих фундаментальных исследованиях небесной механики и механики космического полета. Вместе с тем при проектировании спутников и их систем, в частности спутников дистанционного зондирования Земли, есть потребность в простых инженерных оценках отличия возмущенной траектории движения от кеплеровой орбиты. Нужно получить ответы на следующие вопросы: какие закономерности возмущенной траектории, как выбрать кеплерову орбиту сравнения, какие изменения радиуса, скорости, углового положения в возмущенной траектории, какое отклонение возмущенной орбиты от плоскости орбиты сравнения? В статье использованы новые переменные, описывающие отклонение возмущенной траектории от круговой кеплеровой орбиты сравнения. Введение новых параметров для почти круговых орбит позволило более просто получить линеаризованные уравнения движения и построить аналитические оценки отклонения траектории от орбиты сравнения. Построены и проанализированы оценки изменения радиуса, скорости, углового положения в возмущенной траектории, и ее отклонение от орбиты сравнения на временном интервале порядка одного витка. Определены условия существования орбит с минимальным изменением их радиуса под действием второй зональной гармоники. Показана принципиальная возможность орбит, которые испытывают только вынужденные колебания радиуса от второй зональной гармоники, амплитуда которых составляет единицы километров. Например, при высоте орбиты 675 км амплитуда этих колебаний не превосходит 3.5 км.

Ключевые слова: изменения траектории спутника, вторая зональная гармоника, новые переменные.

ВВЕДЕНИЕ

Воздействия на движение спутника, вызванные второй зональной гармоникой разложения потенциала притяжения Земли в ряд по сферическим функциям, во многих случаях на порядки превосходят воздействия других возмущающих сил и определяют отклонения траектории движения спутника от кеплеровой орбиты. Ниже

© А. В. ПИРОЖЕНКО, А. И. МАСЛОВА, В. В. ВАСИЛЬЕВ, 2019

рассматривается задача определения короткочастотных изменений траектории движения спутника по почти круговым орбитам под воздействием второй зональной гармоники. Это далеко не новая задача, решение которой дано во многих фундаментальных исследованиях небесной механики и механики космического полета [1, 3, 8—10]. Однако, как представляется, стремление ранее проведенных исследований к более точному прогнозированию движения спутника

затрудняло краткость и ясность изложений методик построения оценок и полученных результатов. Часто ранее проведенные исследования заканчивались достаточно громоздкими формулами оценок изменения оскулирующих элементов орбиты [1, 3, 9].

Вместе с тем проектирование спутников и их систем, в частности спутников дистанционного зондирования Земли, обнаруживает дополнительную потребность в простых инженерных оценках отличия возмущенной траектории движения от кеплеровой орбиты. Нужно получить ответы на следующие вопросы: Какие закономерности возмущенной траектории? Как выбрать кеплерову орбиту сравнения? Какие изменения радиуса, скорости, углового положения в возмущенной траектории? Какое отклонение возмущенной орбиты от плоскости орбиты сравнения? Использование новых переменных, учитывающих особенности движения по почти круговым орбитам, позволяет достаточно просто вывести уравнения возмущенного движения по почти круговым орбитам и получить ответы на поставленные вопросы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение центра масс спутника Земли с учетом его возмущений второй зональной гармоникой гравитационного поля Земли.

Уравнение движения центра масс спутника имеет вид

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{\mu \vec{R}}{R^3} + \vec{F}, \quad (1)$$

где \vec{R} — радиус-вектор центра масс спутника относительно притягивающего центра, μ — постоянная гравитационного поля, \vec{F} — возмущающее ускорение, точками обозначаются производные по времени.

Введем инерциальную и орбитальную правые системы координат (СК) с началом в притягивающем центре O : $OXYZ$ и $Oxuz$ соответственно. Плоскость OXY инерциальной СК лежит в плоскости экватора, ось OX направлена в точку весны, ось OZ — по оси вращения Земли, ось Ox орбитальной СК направлена вдоль \vec{R} , ось Oy — в

плоскости мгновенной орбиты в сторону движения спутника, ось Oz — по бинормали к орбите.

Ориентацию $Oxuz$ в $OXYZ$ будем описывать эйлеровыми углами i, Ω, u — наклоном, долготой восходящего узла и аргументом широты соответственно.

Возмущающие ускорения второй зональной гармоники в проекциях на оси $Oxuz$ имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{3c_{20} \mu R_3^2}{2R^4} (3\sin^2 u \sin^2 i - 1), \\ F_2 &= -\frac{3c_{20} \mu R_3^2}{2R^4} \sin 2u \sin^2 i, \\ F_3 &= -\frac{3c_{20} \mu R_3^2}{2R^4} \sin u \sin 2i, \end{aligned} \quad (2)$$

где c_{20} — безразмерный коэффициент второй зональной гармоники, $c_{20} = 1.0826 \cdot 10^{-3}$, R_3 — средний экваториальный радиус Земли, индексами 1, 2, 3 обозначаются проекции на оси Ox , Oy и Oz соответственно.

УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Умножая уравнение (1) слева векторно на \vec{R} , получим

$$\frac{d(\vec{R} \times \dot{\vec{R}})}{dt} = \vec{R} \times \vec{F}, \text{ или } \dot{\vec{L}} = \vec{M}, \quad (3)$$

где $\vec{L} = \vec{R} \times \dot{\vec{R}}$ — вектор удельного кинетического момента; $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$ — удельный момент возмущающих сил.

На основании леммы об абсолютной производной вектора по времени запишем (3) в виде

$$\vec{L}' + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M}, \quad (4)$$

где \vec{L}' — относительная производная приведенного кинетического момента в орбитальной СК (ОСК), $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения ОСК относительно инерциальной СК (ИСК).

Проектируя (4) на оси ОСК, получим

$$\dot{L} = M_3, \quad \omega_2 L = M_1 = 0, \quad \omega_1 L = -M_2. \quad (5)$$

Так как $\vec{L} = L\vec{e}_3 = \vec{R} \times \dot{\vec{R}} = R^2 \omega_3 \vec{e}_3$, то

$$\omega_3 = L / R^2. \quad (6)$$

Таким образом, ОСК совершает вращательное движение относительно ИСК, вращаясь относительно двух взаимно перпендикулярных осей Ox (\vec{R}) и Oz (\vec{L}). Последнее равенство в (5) означает, что гироскопический момент $\omega_1 L$ (момент двух вращений [1]) уравнивает момент внешних сил, стремящийся «опрокинуть» систему, т. е. вывести материальную точку из плоскости ее вращения.

Соотношения (5), (6) полностью решают задачу динамики в вопросе изменения ориентации плоскости орбиты. Определение законов изменения углов ориентации кинетического момента (плоскости орбиты) в ИСК есть задача кинематики.

Уравнения изменения углов i, Ω, u легко получить из кинематических соотношений для углов Эйлера:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\Omega} \sin i \sin u + \frac{di}{dt} \cos u, \\ \omega_2 &= \dot{\Omega} \sin i \cos u - \frac{di}{dt} \sin u, \\ \omega_3 &= \dot{\Omega} \cos i + \dot{u}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \frac{R}{p} \cos u \tilde{F}_3, \\ \dot{p} &= 2R\tilde{F}_2, \\ \dot{\Omega} &= \frac{R \sin u}{p \sin i} \tilde{F}_3, \\ \dot{u} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{R^2} - \frac{R}{p} \sin u \operatorname{ctg} i \tilde{F}_3,\end{aligned}\quad (7)$$

где $\tilde{F}_i = \sqrt{p/\mu} F_i$ ($i=1, 2, 3$), и из соотношения $L = \sqrt{\mu p}$ введена новая переменная p — фокальный параметр орбиты.

Уравнение изменения R получим, проектируя (1) на Ox с учетом, что $\vec{R}\vec{e}_1 = \vec{R} - \omega_3^2 R$, где \vec{e}_1 — орт оси Ox

$$\ddot{R} - \frac{L^2}{R^3} = -\frac{\mu}{R^2} + F_1. \quad (8)$$

Для описания отличия возмущенной орбиты от кеплеровой круговой орбиты введем новые переменные

$$\begin{aligned}R &= R_0(1 + b_1), \quad \dot{R} = b_2 \sqrt{\mu/R_0}, \\ p &= R_0(1 + \gamma),\end{aligned}\quad (9)$$

где R_0 — радиус невозмущенной круговой орбиты, параметры b_1 и γ — отклонения текущего радиуса и фокального параметра возмущенной орбиты от радиуса невозмущенной орбиты соответственно, отнесенные к R_0 , параметр b_2 — радиальная скорость на возмущенной орбите, отнесенная к скорости движения по невозмущенной круговой орбите.

Дифференцируя (9), получим

$$\dot{R} = R_0 \dot{b}_1, \quad \ddot{R} = b_2 \sqrt{\mu/R_0}, \quad \dot{p} = R_0 \dot{\gamma}. \quad (10)$$

С учетом (7) — (10) уравнения возмущенного движения можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= z \cos u F_3^*, \quad \dot{\Omega} = \frac{R \sin u}{p \sin i} \tilde{F}_3, \\ \Delta \dot{u} &= \sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}} \left(\frac{s^{1/2}}{z^2} - 1 \right) - \dot{\Omega} \cos i, \quad \dot{\gamma} = 2zsF_2^*, \\ \dot{b}_1 &= \sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}} b_2, \quad \dot{b}_2 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}} \frac{\gamma - b_1}{z^3} + F_1^*,\end{aligned}\quad (11)$$

где введены следующие обозначения: $z = 1 + b_1$ — безразмерный радиус орбиты, равный отношению радиуса орбиты к радиусу орбиты сравнения, $s = 1 + \gamma$ — безразмерный фокальный параметр орбиты, равный отношению фокального параметра орбиты к фокальному параметру орбиты сравнения (поскольку орбита сравнения — круговая, то ее фокальный параметр равен радиусу, т. е. R_0), $\Delta u = u - u_0$, u_0 — аргумент широты невозмущенной орбиты, $\dot{u}_0 = \sqrt{\mu/R_0^3}$, $F_{2,3}^* = \sqrt{R_0/(\mu s)} F_{2,3}$, $F_1^* = \sqrt{R_0/\mu} F_1$.

Отметим удобство использования уравнений (11) для численного расчета возмущенного движения спутника по орбитам, близким к круговым [7]: переходя к новой независимой переменной u_0 , получаем компактную форму уравнений возмущенного кеплерова движения, в которой переход к реальному времени задается простейшим соотношением $\Delta t = \Delta u_0 / \sqrt{\mu/R_0^3}$.

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ

Переходя к дифференцированию по u_0 и подставляя возмущающие ускорения (2), получим

$$\begin{aligned}
 i' &= -\frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{z^3 s^{1/2}} \sin 2u \sin 2i, \\
 \Omega' &= -2\varepsilon \frac{1}{z^3 s^{1/2}} \cos i \sin^2 u, \\
 \Delta u' &= \left(\frac{s^{1/2}}{z^2} - 1 \right) - \Omega' \cos i, \\
 \gamma' &= -2\varepsilon \frac{s^{1/2}}{z^3} \sin^2 i \sin 2u, \\
 b_1' &= b_2, \\
 b_2' &= \frac{\gamma - b_1}{z^3} + \varepsilon \frac{1}{z^4} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1),
 \end{aligned} \tag{12}$$

где штрихом обозначена производная по u_0 , $\varepsilon = \frac{3}{2} c_{20} \frac{R_3^2}{R_0^2}$ (для $R_0 = 7000$ км, $\varepsilon = 1.35 \cdot 10^{-3}$).

Поскольку $\varepsilon \ll 1$, и учитывая, что для почти круговых орбит b_1, b_2, γ — также малые величины, перепишем уравнения (12) с сохранением величин только первого порядка малости:

$$\begin{aligned}
 i' &= -\frac{\varepsilon}{2} \sin 2u_0 \sin 2i, \\
 \Omega' &= -2\varepsilon \cos i \sin^2 u_0, \\
 \Delta u' &= 0.5\gamma - 2b_1 - \Omega' \cos i, \\
 \gamma' &= -2\varepsilon \sin^2 i \sin 2u_0, \\
 b_1' &= b_2, \\
 b_2' &= \gamma - b_1 + \varepsilon (3 \sin^2 i \sin^2 u_0 - 1).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь предполагается, что в начальный момент времени $u = u_0$ ($u_n = u_{0n}$). Погрешность уравнений (13) составляет $\varepsilon^* \Delta u_0$, где $\varepsilon^* = \max\{\varepsilon, b_1, b_2, \gamma\}$, Δu_0 — интервал интегрирования.

ОЦЕНКА ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ

Уравнения (13) легко решаются.

$$\text{tgi} = \text{tgi}_n \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} (\cos 2u_0 - \cos 2u_{0n})\right). \tag{14}$$

Или, с учетом, что изменение наклона мало, из (13) или (14) получим

$$\Delta i = \frac{\varepsilon}{4} \sin 2i_n (\cos 2u_0 - \cos 2u_{0n}).$$

Это известное выражение кратко периодических изменений i для почти круговых орбит [9,

10]. Из него следует, что под действием притяжения экваториального горба спутник на каждом полувитке отклоняется от невозмущенной орбиты в сторону экватора. Здесь предполагается, что невозмущенная орбита имеет такое же наклонение, как исходная при пересечении плоскости экватора.

С той же точностью получим

$$\Omega = \Omega_n - \frac{\varepsilon}{2} \cos i_n (2(u_0 - u_{0n}) - \sin 2u_0 + \sin 2u_{0n}).$$

Полученные оценки изменения i и Ω позволяют оценить отклонение траектории движения спутника от плоскости невозмущенной орбиты, т. е. в направлении, перпендикулярном к плоскости орбиты. Для этого надо вычислить $(\vec{R} - \vec{R}_0) \cdot \vec{e}_{30}$, где индексом «0» обозначены параметры невозмущенной орбиты, \vec{e}_{30} — орт оси Oz ОСК невозмущенной орбиты. Следовательно, отклонение траектории от плоскости невозмущенной орбиты равно $\zeta = \vec{R} \cdot \vec{e}_{30} = R(\vec{e}_1, \vec{e}_{30})$. Для вычисления последнего выражения надо перейти в ИСК. Нетрудно получить, что с рассматриваемой точностью

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_{30}) = \frac{\varepsilon}{2} \sin 2i_0 (u_0 \cos u_0 - \sin u_0),$$

где предполагается, что при $u_0 = 0$ траектории совпадают.

Тогда оценка отклонения возмущенной траектории от плоскости орбиты равна

$$\zeta = R_0 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2i_0 (u_0 \cos u_0 - \sin u_0). \tag{15}$$

Интересно отметить, что значительно проще соотношение (15) получается при рассмотрении уравнений относительного движения — уравнений изменения $\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}_0$, где \vec{R}_0 — радиус невозмущенной кеплеровой орбиты $\ddot{\vec{R}}_0 = -\mu \vec{R}_0 / R_0^3$. Вычитая из (1) уравнение для \vec{R}_0 и проектируя на оси ОСК невозмущенной орбиты, получим, в предположении малости r / R_0 , известные уравнения относительного движения двух тел на круговой орбите [2]. В англоязычной литературе эти уравнения носят названия уравнений Хилла, или уравнений Клохесси — Вилтшира [10]. Уравнение отклонения \vec{r} от плоскости невозмущенной орбиты имеет вид

$$\zeta'' + \zeta = \frac{R_0^3}{\mu} F_3, \tag{16}$$

где $\zeta = \vec{r} \cdot \vec{e}_{30}$, F_3 — нормальное возмущающее ускорение из (2); штрихом, как и ранее, отмечена производная по u_0 . Интегрируя (16) при $\zeta_n = 0$, $\zeta'_n = 0$, сразу получим оценку (15).

Если учесть вековое движение Ω в опорной орбите, то оценка отклонений возмущенной траектории от плоскости орбиты примет вид

$$\zeta = -R_0 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2i_0 \sin u_0.$$

То есть, в первом приближении отклонения от плоскости орбиты описываются гармоническими колебаниями с амплитудой $|R_0 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2i_0|$. В качестве примера будем рассматривать спутник, движущийся на орбите высотой $h = 675$ км и наклоном $i = 98.1^\circ$. Для такой орбиты амплитуда колебаний ζ приблизительно равна 1.3 км, а при $u_0 = 60^\circ$ отклонение приблизительно равно 1.13 км.

ОЦЕНКИ ИЗМЕНЕНИЙ ДВИЖЕНИЙ ПО ОРБИТЕ

Из уравнений (13) легко находится уравнение, описывающее изменение фокального параметра

$$\gamma = \gamma_n + \varepsilon \sin^2 i_n (\cos 2u_{0n} - \cos 2u_{0n}).$$

Точность этого решения такая же, как и решения для i и Ω .

Изменения радиуса траектории можно описать уравнением второго порядка

$$b_1'' = \gamma - b_1 + \varepsilon(3 \sin^2 i \sin^2 u_0 - 1),$$

или, подставляя оценку для γ и выделяя периодическую часть

$$b_1'' + b_1 = -\frac{\varepsilon}{2} \sin^2 i \cos 2u_0 + \gamma_n + \varepsilon \left(\sin^2 i \left(\frac{3}{2} - \cos 2u_{0n} \right) - 1 \right).$$

Это линейное уравнение легко решается аналитически. Однако общее его решение достаточно громоздко и содержит в себе все случаи, анализ которых выходит за рамки данной статьи.

Как известно, общее решение этого линейного уравнения будет содержать постоянное смещение b_1 , свободные (обусловленные эллиптичностью орбиты) колебания и вынужденные колебания. Сообразуясь с целью статьи, заключающейся в анализе влияния собственно второй

зональной гармоники, рассмотрим только вынужденные колебания.

Эти вынужденные колебания радиуса будут присутствовать при любых орбитах. Конечно, их сочетания с колебаниями, обусловленными эллиптичностью орбиты, могут давать разные эффекты. Но, учитывая и ограниченность изложения, в данной статье будем считать это темой дополнительных исследований.

Итак, рассмотрим задачу оценки изменений радиуса траектории, обусловленных собственно воздействием второй зональной гармоники, т. е. оценки вынужденных колебаний b_1 . Покажем, что существуют орбиты, которые испытывают только вынужденные колебания от второй зональной гармоники.

Для произвольного R_n положим $b_{1n} = 0$ и $b_{2n} = 0$, т. е. в начальный момент времени траектория касается круговой кеплеровой орбиты сравнения ($R_n = R_0$, $\dot{R}_n = 0$). Потребуем также, чтобы среднее значение b_1 равнялось нулю.

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \varepsilon - \varepsilon \sin^2 i (1.5 - \cos 2u_{0n}), \\ \gamma &= \varepsilon(1 - 1.5 \sin^2 i) + \varepsilon \sin^2 i \cos 2u_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Следовательно, орбита, заданная в произвольной точке старта R_n трансверсальной скоростью $\sqrt{\mu(1 + \gamma_n)/R_n}$, будет испытывать только вынужденные колебания от второй зональной гармоники.

Из последнего равенства (17) следует, что для таких орбит кинетический момент траектории в среднем больше (меньше) кинетического момента на орбите сравнения, если в среднем на этой орбите сила притяжения Земли больше (меньше) силы притяжения центрального поля, т. е. если $1 - 1.5 \sin^2 i > 0$ ($1 - 1.5 \sin^2 i < 0$).

Из первого равенства в (17) следует, что только для траекторий с $\sin^2 i \geq 0.4$ существуют «точки старта», т. е. u_{0n} такие, что $\gamma_n = 0$. Иными словами, только при условии $\sin^2 i \geq 0.4$ существуют возмущенные траектории с начальными радиусом R_0 и трансверсальной скоростью $\sqrt{\mu/R_0}$ (т. е. как для кеплеровых орбит), такие, что интегрально среднее отклонение радиуса траектории от R_0 равно нулю (R периодически колеблется относительно R_0). Для этого эти начальные условия траектории

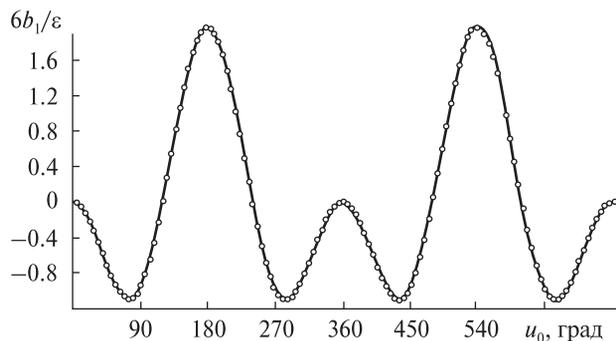


Рис. 1. Изменение b_1 для $u_{0n} = 0$ для $h = 675$ км, $i = 98.1^\circ$ (сплошная линия — численное интегрирование нелинеаризованных уравнений (12), кружки — аналитическое решение (18))

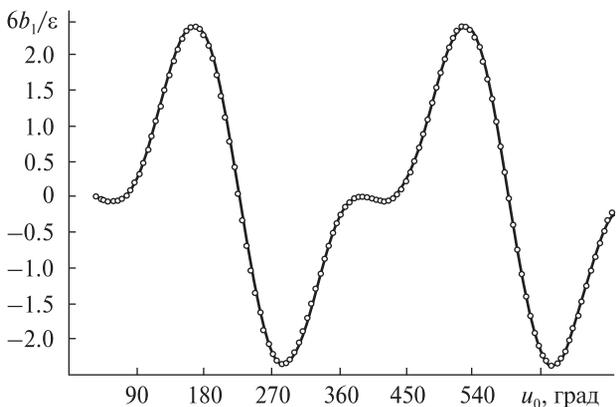


Рис. 2. Изменение b_1 для изначально круговой траектории $u_{0n} = 0.5 \arccos(1.5 - \sin^2 i_n) \approx 30^\circ$ для $h = 675$ км, $i = 98.1^\circ$ (сплошная линия — численное интегрирование нелинеаризованных уравнений (12), кружки — аналитическое решение (18))

должны быть заданы в определенной ее точке $u_{0n} = 0.5 \arccos(1.5 - \sin^2 i_n)$. Такие траектории можно назвать изначально круговыми.

При принятых предположениях изменение b_1 описывается уравнением

$$b_1'' + b_1 = -0.5 \varepsilon \sin^2 i \cos 2u_0$$

с начальными условиями $b_{1n} = 0$, $b_{2n} = 0$. Его решение есть

$$b_1 = \frac{1}{6} \varepsilon \sin^2 i [\cos 2u_{0n} \cos(u_0 - u_{0n}) - 2 \cos(u_0 + u_{0n}) + \cos 2u_0]. \quad (18)$$

Величина, стоящая в скобках, двояко периодична. Ее можно охарактеризовать максималь-

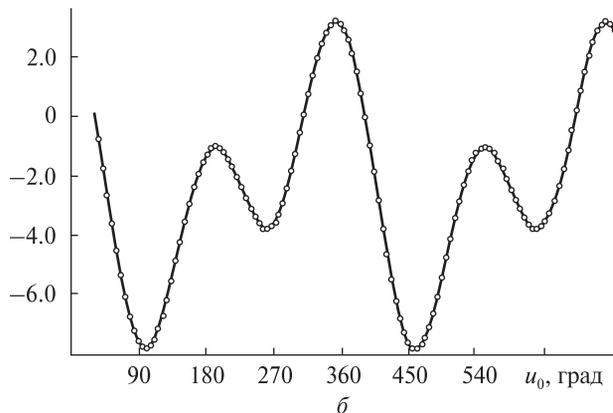
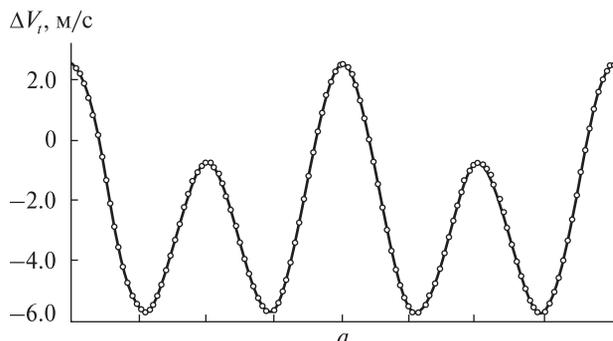


Рис. 3. Отклонение ΔV_i трансверсальной скорости от скорости движения по круговой орбите сравнения для $h = 675$ км, $i = 98.1^\circ$: а — $u_{0n} = 0$, б — $u_{0n} \approx 30^\circ$ (сплошная линия — численное интегрирование нелинеаризованных уравнений (12), кружки — использовано аналитическое решение (19))

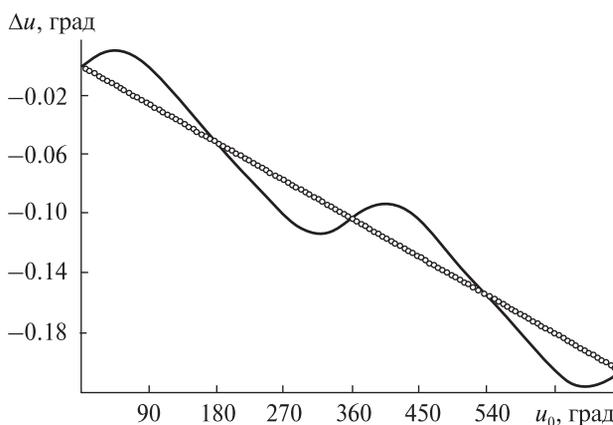


Рис. 4. Изменение Δu при $u_{0n} = 0$ для $h = 675$ км, $i = 98.1^\circ$ (сплошная линия — численное интегрирование нелинеаризованных уравнений (12), кружки — линейное изменение Δu)

ным отклонением от нуля. Анализ показывает, что максимальные значения достигают приблизительно величины 2.6 при $u_{0n} \approx 45^\circ$. В любом случае сохраняется понятная закономерность движения: при приближении к экваториальному горбу скорость движения растет и повышается радиус траектории; при удалении от горба скорость снижается и снижается высота орбиты.

На рис. 1 для рассматриваемого примера орбиты ($h = 675$ км, $i = 98.1^\circ$) показано изменение b_1 для $u_{0n} = 0$, рассчитанное численным интегрированием уравнений (12) (сплошная линия), и решение (18) $b_1 = \frac{1}{6} \varepsilon \sin^2 i (\cos 2u_0 - \cos u_0)$ (кружки).

Соответствующие изменения радиуса возмущенной траектории составят около 4.6 км. Максимальные отклонения траектории от невозмущенной орбиты под действием второй зональной гармоник можно оценить величиной 3.5 км, а следовательно, максимальные изменения радиуса траектории за период обращения вокруг Земли составит приблизительно 7 км. Для полярной орбиты эти оценки примут значения 4 км и 8 км соответственно.

На рис. 2 для $h = 675$ км, $i = 98.1^\circ$ показано изменение b_1 изначально круговой траектории, для которой $u_{0n} = 0.5 \arccos(1.5 - \sin^2 i_0) \approx 30^\circ$.

Анализ траекторий показывает (см. рис. 1, 2), что максимальные значения радиус достигает в окрестностях, близких к экватору, а минимальные — вблизи полюсов. Вместе с тем, как видно из рис. 2, радиус орбиты вблизи полюса (на рис. 2 северный полюс, $u_0 = 90^\circ$) может быть больше радиуса над экватором (на рис. 2 в восходящем узле $u_0 = 360^\circ$). Поэтому утверждение: «что происходит как бы частичное «отслеживание» поверхности Земли высотой полета» [4] не представляется корректным.

Отметим, что эллиптичность орбит и длительная их эволюция под влиянием зональных гармоник [5] могут в разы увеличить отклонения высоты от круговой орбиты сравнения.

Изменения трансверсальной скорости движения спутника можно оценить следующим образом:

$$V_i = \frac{\sqrt{\mu p}}{R} = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}} \frac{s^{1/2}}{z} \approx \sqrt{\frac{\mu}{R_0}} (1 + 0.5\gamma - b_1). \quad (19)$$

На рис. 3 аналогично рис. 1, 2, показано отклонение трансверсальной скорости от скорости движения по круговой орбите сравнения ($\Delta V_i = V_i - \sqrt{\mu/R_0}$).

Максимальные отклонения составляют около 8 м/с, а максимальные изменения скорости при движении по траектории — около 11 м/с.

Отметим, что для кеплеровых орбит на рассматриваемых высотах изменение скорости на 1 м/с соответствует изменению радиуса круговой орбиты приблизительно на 1.9 км (грубая оценка).

Поскольку средняя скорость движения по возмущенной орбите отличается от скорости движения по орбите сравнения, то и изменение аргумента широты имеет вековую составляющую. В среднем $\Delta u = 0.25\varepsilon(6 - 7\sin^2 i_0)u_0$. К этому линейному изменению добавляются гармонические колебания с орбитальной и удвоенной орбитальной частотой. На рис. 4 для $h = 675$ км, $i = 98.1^\circ$ показано изменение Δu при $u_{0n} = 0$. Сплошной линией изображено численное решение уравнений (12), кружками — среднее изменение Δu .

Как видно, движение по возмущенной траектории отстает от движения по орбите сравнения приблизительно на 0.1° за виток. При этом колебания отклонений широты относительно среднего движения достигают амплитуды около 0.03° .

ВЫВОДЫ

В статье рассмотрена модельная задача движения спутника Земли по почти круговым орбитам с учетом возмущений только от второй зональной гармоник гравитационного поля Земли. Построены линейные уравнения, позволяющие достаточно просто получить аналитические выражения, которые с высокой точностью описывают отклонения траектории от кеплеровой орбиты сравнения на одном витке движения. В рамках рассмотренной задачи получены следующие результаты.

1. Использование новой формы уравнений возмущенного кеплерова движения позволило более кратко и просто получить оценки влияния второй зональной гармоник на движение спутника по почти круговым орбитам.

2. Для движений в плоскости орбиты определены круговые кеплеровы орбиты сравнения, позволяющие оценить влияние на изменение траекторий собственно второй зональной гармоника.

3. Построены и проанализированы оценки отклонений возмущенной траектории от орбиты сравнения: отклонений от плоскости орбиты сравнения и изменений фокального параметра орбиты построены для произвольных почти круговых орбит; отклонений радиуса и скорости — в предположении равенства нулю среднего изменения радиуса орбиты за виток, т. е. только вынужденных их колебаний.

4. Показано существование орбит, которые испытывают только вынужденные колебания радиуса от второй зональной гармоника, амплитуда которых составляет единицы километров. Например, при высоте орбиты 675 км амплитуда этих колебаний не превосходит 3.5 км.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П. *Теория движения искусственных спутников Земли*. М.: Наука, 1977. 360 с.
2. Белецкий В. В. *Очерки о движении космических тел*. (3-е изд.) М.: Изд-во ЛКИ, 2009. 432 с.
3. Дубошин Г. Н. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*. М.: Наука, 1976. 864 с.
4. Иванов Н. М., Лысенко Л. Н. *Баллистика и навигация космических аппаратов*. М.: Дрофа, 2004. 544 с.
5. Кугаенко Б. В., Эльясберг П. Е. Эволюция почти круговых орбит ИСЗ под влиянием зональных гармоник. *Космич. исслед.* 1968. 6, № 2. С. 186—202.
6. Пироженко А. В. К построению новых форм уравнений возмущенного кеплерова движения. *Космична наука і технологія*. 1999. 5, № 2/3. С. 103—107.
7. Пироженко А. В., Маслова А. И. К динамике твердого тела. Моменты центробежных ускорений. *Техн. мех.* 2013. № 3. С. 63—71.
8. Эльясберг П. Е. *Введение в теорию полета искусственных спутников Земли*. М.: Наука, 1965. 540 с.
9. Beutler G. *Methods of celestial mechanics V. II: Application to Planetary System, Geodynamics and Satellite Geodesy*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. 468 p.
10. Vallado D. A. *Fundamentals of astrodynamics and applications*. McGraw-Hill Primis Custom Publ., 1997. 950 p.

Стаття надійшла до редакції 29.10.2018

REFERENCES

1. Aksenov E. G. (1977). *Theory of motion of artificial Earth satellites*. Moscow: Nauka.
2. Beletskii V. V. (2009). *Essays on the motion of cosmic bodies*. Moscow: Izd-vo LKI.
3. Duboshin H. N. (1976). *Reference guide to celestial mechanics and astrodynamics*. Moscow: Nauka.
4. Ivanov N. M., Lysenko L. N. (2004). *Ballistics and navigation of space vehicles*. Moscow: Drofa.
5. Kuhaenko B. V., Eliasberh P. E. (1968). Evolution of almost circular orbits of satellites under the influence of zonal harmonics. *Cosmic res.*, 6(2), 186—202.
6. Pirozhenko A. V. (1999). To the construction of new forms of the equations of perturbed Keplerian motion. *Space science and technology*, 5(2/3), 103—107.
7. Pirozhenko A. V., Maslova A. I. (2013). To the dynamics of a rigid body. Moments of centrifugal acceleration. *Technical mechanics*, 3, 63—71.
8. Eliasberh P. E. (1965). *Introduction to the theory of flight of artificial Earth satellites*. Moscow: Nauka.
9. Beutler G. (2005). *Methods of celestial mechanics V. II: Application to Planetary System, Geodynamics and Satellite Geodesy*. Berlin Heidelberg: Springer.
10. Vallado D. A. (1997). *Fundamentals of astrodynamics and applications*. McGraw-Hill Primis Custom Publ.

Received 29.10.2018

О. В. Пироженко¹, А. И. Маслова¹, В. В. Васильев²

¹ Інститут технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України, Дніпро, Україна

² Earth Observing System Data Analytics

ПРО ВПЛИВ ДРУГОЇ ЗОНАЛЬНОЇ ГАРМОНІКИ НА РУХ СУПУТНИКА ПО МАЙЖЕ КРУГОВИХ ОРБИТАХ

Вплив другої зональної гармоніки розкладу потенціалу тяжіння Землі в ряд по сферичних функціях на рух супутників у багатьох випадках на порядки перевершує вплив інших збурювальних сил. Для низьких навколоземних орбіт вплив другої зональної гармоніки є основним при визначенні відмінностей між реальною траєкторією руху супутника та кеплеровою орбітою. У статті розглядається задача визначення короткоперіодичних змін траєкторії руху супутника по майже кругових орбітах під впливом другої зональної гармоніки. Це далеко не нова задача, рішення якої наведено у багатьох фундаментальних дослідженнях небесної механіки і механіки космічного польоту. Разом з тим при проектуванні супутників і їхніх систем, зокрема супутників дистанційного зондування Землі, є потреба у простих інженерних оцінках відмінності збуреної траєкторії руху від кеплерової орбіти. Потрібно отримати відповіді на такі питання:

які закономірності збуреної траєкторії, як вибрати кеплерову орбіту порівняння, які зміни радіуса, швидкості, кутового положення на збуреній траєкторії, яке відхилення збуреної орбіти від площини орбіти порівняння? У статті використано нові змінні, що описують відхилення збуреної траєкторії від кругової кеплерової орбіти порівняння. Введення нових параметрів для майже кругових орбіт дозволило простіше отримати лінеаризовані рівняння руху і побудувати аналітичні оцінки відхилення траєкторії від орбіти порівняння. Побудовано та проаналізовано оцінки зміни радіуса, швидкості, кутового положення на збуреній траєкторії і її відхилення від орбіти порівняння на часовому інтервалі порядку одного витка. Визначено умови існування орбіт з мінімальною зміною їхнього радіуса під дією другої зональної гармоніки. Показано принципову можливість орбіт, які зазнають лише вимушених коливань радіуса від другої зональної гармоніки, амплітуда яких складає декілька кілометрів. Наприклад, при висоті орбіти 675 км амплітуда цих коливань буде не більшою ніж 3.5 км.

Ключові слова: зміни траєкторії супутника, друга зональна гармоніка, нові змінні.

A. V. Pirozhenko ¹, A. I. Maslova ¹, V. V. Vasilyev ²

¹ The Institute of Technical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine and the State Space Agency of Ukraine, Dnipro, Ukraine

² Earth Observing System Data Analytics

ABOUT THE INFLUENCE OF SECOND ZONAL HARMONIC ON THE MOTION OF SATELLITE IN ALMOST CIRCULAR ORBITS

Impacts on satellite motion, caused by the second zonal harmonic of the expansion of the Earth's gravitation potential in a series, in many cases exceed by far the impacts caused by

other perturbing forces. For low near-earth orbits, the effects of the second zonal harmonic are crucial, in distinctions between perturbed trajectory and Kepler orbit. The article deals with the problem of determining the short-period changes in the satellite's trajectory in almost circular orbits under the influence of the second zonal harmonic. This is not a new task. Its solution is given in many fundamental studies of celestial mechanics and space flight mechanics. At the same time, the design of satellites and their systems, in particular, Earth remote sensing satellites, reveals an additional need for simple engineering estimates of distinctions between perturbed trajectory and Kepler orbit. It is necessary to get answers to the following questions: What are the regularities of the perturbed trajectory? How to choose a Keplerian orbit of comparison? What are the changes in radius, velocity, angular position in a perturbed trajectory? What is the deviation of the perturbed orbit from the plane of the comparison orbit? We use new variables that describe the deviation of the perturbed trajectory from the circular Kepler orbit of comparison. The introduction of new parameters for almost circular orbits made it possible to obtain linearized equations of motion more simply, and to construct analytical estimates of the deviation of the trajectory from the comparison orbit. The estimates of changes in the radius, velocity, angular position in a perturbed trajectory, and its deviation from the comparison orbit have been constructed and analysed. The conditions for the existence of orbits with a minimum change of radius under the influence of the second zonal harmonic have been determined for one rotation of satellite in orbit. The existence of orbits, which experience only forced oscillations of the radius from the second zonal harmonic, the amplitude of which is a few kilometres, is shown. For example, with an orbit altitude of 675 km, the amplitude of these oscillations does not exceed 3.5 km.

Keywords: satellite trajectory changes, second zonal harmonic, new variables.