

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2018.04.003>.

УДК 629.7.705

В. В. Волосов, В. Н. Шевченко

Институт космических исследований Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины, Киев, Украина

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕНИЙ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

Работа посвящена решению задач синтеза управления ориентацией орбитального космического аппарата (КА) на основе известных обобщений Зубова — Красовского прямого метода Ляпунова отдельных решений дифференциальных уравнений на исследование устойчивости замкнутых ограниченных множеств в их фазовом пространстве. Кинематические уравнения углового движения КА представлены дифференциальными уравнениями в векторно-матричной форме с вектором состояния в вещественном евклидовом пространстве. Элементами этого пространства являются векторы параметров Родрига — Гамильтона. Данные уравнения имеют следующие известные особенности. Одна из них состоит в том, что одной и той же заданной физической ориентации КА соответствуют два вектора состояния, компоненты которых отличаются друг от друга только знаками. Второй особенностью является наличие у дифференциальных уравнений геометрического интеграла движения — сохранения нормы вектора параметров ориентации. Отмечено, что вследствие этого решения уравнений не могут быть асимптотически устойчивыми по Ляпунову. Они могут иметь только свойство условной устойчивости. С учетом этих особенностей впервые сформулирована соответствующая постановка задачи синтеза управления ориентацией КА как задачи об условной асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений или устойчивости на многообразиях. Более конкретно — как задачи об устойчивости двухточечных множеств в фазовом пространстве. Для решения задачи предложена новая негладкая кусочно-квадратичная функция Ляпунова. Получены решения задач синтеза управлений, обеспечивающих достижение и стабилизацию заданных ориентаций КА в инерциальной и орбитальной системах координат. Эффективность предложенных алгоритмов иллюстрируется компьютерным моделированием.

Ключевые слова: космический аппарат, ориентация, синтез управления, функции Ляпунова.

Введение. Математический аппарат кватернионов находит применение в программно-математическом обеспечении систем навигации и управления многими подвижными объектами, и в первую очередь объектами аэрокосмического профиля и морского флота. Их преимущества по сравнению с углами Крылова — Эйлера подробно изложены в монографии [3]. Число публикаций, посвященных применению кватернионов в различных задачах управления, постоянно воз-

растает. Отметим здесь лишь работы, содержания которых в той или иной мере посвящены исследованию устойчивости систем управления ориентацией и наиболее близки к содержанию данной статьи [6, 20, 25—27, 34].

Исследование задач управления угловым движением твердого тела при его описании дифференциальными уравнениями, вектор состояния которых составлен из компонентов кватернионов — параметров Эйлера — Родрига — Гамильтона (ЭРГ), имеет следующие особенности. Первая из них состоит в том, что одной и

© В. В. ВОЛОСОВ, В. Н. ШЕВЧЕНКО, 2018

той же его ориентации соответствуют два кватерниона и соответственно два вектора состояния (BC), отличающиеся друг от друга только знаками своих компонентов. Учет этой особенности был частично рассмотрен в работах [25, 26]. Второй особенностью является наличие у дифференциальных уравнений интеграла движения – сохранения нормы BC. Вследствие этого никакие решения уравнений не могут быть асимптотически устойчивыми по Ляпунову. Они могут иметь форму устойчивости, называемую условной асимптотической устойчивостью или устойчивостью на многообразиях [17, 22, 29]. Обе эти особенности впервые отмечались в работе [12]. Настоящая работа является ее дальнейшим развитием.

Математические модели управляемого углового движения орбитального космического аппарата. Постановка задачи исследования. Для формулировки постановки задачи и ее последующего решения будем использовать следующие правые ортогональные системы координат: связанную систему координат (ССК) $Oxyz$ с началом в точке O — центре масс космического аппарата (КА), рассматриваемого как твердое тело, и орбитальную систему координат (ОСК) $Ox_0y_0z_0$. Следуя [28], примем, что ось Oy_0 направлена по текущему радиусу-вектору с началом в центре Земли (местной вертикали). Ось Ox_0 расположена в плоскости орбиты с положительным направлением в сторону движения КА. Предполагается, что орбита КА является круговой, при этом ОСК вращается относительно инерциального пространства (относительно инерциальной системы координат (ИСК)) с постоянной угловой скоростью ω_* (орбитальной угловой скоростью), проекции которой на ее же оси имеют вид $\omega_* = (0, 0, \omega_{*3})^T$, $\omega_{*3} = -\sqrt{\mu/R^3}$ [1], где $\mu = 398600.4 \text{ км}^3/\text{с}^2$ — гравитационная постоянная Земли, R — радиус орбиты. Символом T здесь и далее обозначается операция транспонирования. В качестве ИСК можно, например, выбрать ОСК, «остановленную» в некоторый момент времени $t = t_*$.

Под ориентацией КА понимается ориентация ССК относительно ОСК, в частности относительно ИСК. В качестве параметров ориента-

ции здесь используются компоненты кватернионов, равные параметрам ЭРГ.

Математическая модель управляемого углового движения КА с учетом [3, 11–13] может быть записана в виде

$$2\dot{\Lambda} = B(\Lambda)\tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega} = \omega - S(\Lambda)\omega_*, \quad (1)$$

$$J\dot{\omega} = M_C + M_g - \tilde{\omega}J\omega. \quad (2)$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ — вектор угловой скорости КА (ССК) относительно ИСК, заданный проекциями $\omega_j, j = 1, 2, 3$ на оси ССК, $\tilde{\omega} = \omega - S(\Lambda)\omega_*$ — вектор угловой скорости КА относительно ОСК, заданный проекциями на ССК, J — симметрическая положительно определенная матрица $J = J^T > 0$ представления тензора инерции КА относительно центра масс O в ССК, удовлетворяющая условиям физической реализуемости [4]; M_C и M_g — искомый момент управления и гравитационный момент с проекциями на оси ССК соответственно.

В уравнении (1) под символом Λ понимается элемент 4-мерного евклидова векторного пространства R^4 , $\Lambda \in R^4$. Рассматривается случай, когда вектор $\Lambda^T = (\lambda_0, \lambda^T)$, $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ состоит из компонентов нормированного кватерниона (параметров ЭРГ). При этом $\lambda_0 = \cos(\vartheta/2)$, $\lambda_i = \gamma_i \sin(\vartheta/2)$, $i = 1, 2, 3$, где γ_i — направляющие косинусы мгновенной оси вращения ССК $Oxyz$ относительно ОСК $Ox_0y_0z_0$ с их координатными осями ($\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$), $\|\Lambda\|^2 = 1$ [3, 5], ϑ — угол поворота ССК относительно ОСК вокруг этой оси, $S(\Lambda)$ — ортогональная матрица $S^{-1}(\Lambda) = S^T(\Lambda)$ направляющих косинусов осей ССК с осями ОСК, $Z_1 = S(\Lambda)Z_0$, где Z_0 и Z_1 — векторы проекций произвольного вектора Z на оси ОСК и ССК соответственно. С учетом [3, 7] матрица $S(\Lambda)$ приводится к виду

$$S(\Lambda) = \{s_1(\Lambda), s_2(\Lambda), s_3(\Lambda)\} = I_3 - 2\lambda_0 \tilde{\lambda} + 2\tilde{\lambda} \tilde{\lambda}, \quad (3)$$

где I_3 — единичная матрица, под символом $\tilde{\lambda}$ понимается кососимметричная ($\tilde{\lambda}^T = -\tilde{\lambda}$) матрица

$$\tilde{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } \tilde{\lambda} = 2 \quad \forall \|\lambda\| \neq 0.$$

Тогда

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Заметим, что, вообще говоря, на КА действует еще возмущающий момент M_p аэродинамических сил и солнечного давления. Однако их учет привел бы к ненужному здесь загромождению изложения. Поэтому момент M_p в правой части уравнения (2) опущен. Согласно [2, 28], формулу для вычисления гравитационного момента можно представить в виде

$$M_g = 3 \frac{\mu}{R^3} \tilde{s}_2(\Lambda) J S_2(\Lambda) = 3 \omega_{*3}^2 \tilde{s}_2(\Lambda) J S_2(\Lambda), \quad (5)$$

где $\tilde{s}_2(\Lambda)$ — кососимметричная матрица вектор-столбца $s_2(\Lambda)$ матрицы $S(\Lambda)$.

Обозначению $B(\Lambda)$ соответствует 4×3 -матрица полного ранга

$$B(\Lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda^T \\ \lambda_0 I_3 + \tilde{\lambda} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\text{rank } B(\Lambda) = 3 \forall \|\Lambda\| \neq 0.$$

Заметим, что кинематическое уравнение углового движения КА наряду с видом (1) может быть представлено в виде

$$\dot{\Lambda} = 0.5A(\omega, \omega_*)\Lambda, \quad (7)$$

где $A(\omega, \omega_*)$ — кососимметрическая матрица

$$A(\omega, \omega_*) = -A^T(\omega, \omega_*) = \begin{pmatrix} 0 & -(\omega - \omega_*)^T \\ (\omega - \omega_*) & -(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}_*) \end{pmatrix}.$$

Сделаем необходимое для последующего изложения замечание об одном свойстве решений уравнения (1) [12]. Вычисляя производную функции $\Lambda^T \Lambda = \|\Lambda\|^2$, в силу уравнения (1) убеждаемся, что она тождественно равна нулю. Поэтому уравнение (1) имеет первый интеграл $\|\Lambda(t)\| \equiv c$, где $c \neq 0$ — произвольное положительное число. Ему соответствует семейство концентрических сфер с центром в $\Lambda = 0$, радиусы которых определяются нормой $\|\Lambda(t_0)\|$ начальных условий решений уравнения (1) и не зависят от угловых скоростей ω , а следовательно, и от управлений M_C в уравнении (2). Из семейства сфер параметрам ЭРГ $\lambda_j(t)$, $j = 0, 1, 2, 3$ соответствует только сфера единичного радиуса $\|\Lambda\| = 1$.

Из формулы (3) непосредственно видно, что заданием вектора параметров ЭРГ $\Lambda = \Lambda_S$ полностью определяется матрица направляющих косинусов $S(\Lambda_S)$, т. е. ориентация КА относительно ОСК. При этом одной и той же матрице $S(\Lambda_S)$, а следовательно, одной и той же ориентации КА соответствуют два значения вектора параметров ориентации $\Lambda = \pm \Lambda_S$. Случаю совмещения осей ССК с осями ОСК $\vartheta = 0^\circ$ и $\vartheta = 360^\circ$, при котором $S(\Lambda_S) = I_3$, соответствуют векторы $\Lambda_S = (\pm 1, 0, 0, 0)$.

Уравнения (1), (2) математической модели углового движения КА при заданном моменте управления M_C полностью определяют эволюцию его ориентации относительно опорной системы координат, а именно ОСК или, в частности, ИСК, если в (1) формально положить $\omega_* = 0$.

Поставим задачу синтеза управления $M_C(\Lambda, \omega, \Lambda_S)$ такого, что при произвольном начальном состоянии $\Lambda_0 = \Lambda(t_0)$, $\|\Lambda_0\| = 1$, $\omega_0 = \omega(t_0)$ реализуется достижение и стабилизация произвольной ориентации, заданной матрицей $S(\Lambda_S)$, т. е. $\|S(\Lambda(t)) - S(\Lambda_S)\| \rightarrow 0$, $\|\omega(t) - \omega_S\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что в зависимости от начальных условий при этом могут реализоваться случаи $\Lambda(t) \rightarrow \Lambda_S$ или $\Lambda(t) \rightarrow -\Lambda_S$.

Под символом ω_S понимается установившееся значение угловой скорости КА, соответствующее его постоянной ориентации $\Lambda(t) \equiv \Lambda_S$, при которой в уравнении (1) $\dot{\Lambda}(t) = 0$. При этом для отыскания значения ω_S получаем систему уравнений $B(\Lambda_S)[\omega_S - S(\Lambda_S)\omega_*] = 0$. Так как $B(\Lambda)$ — матрица полного ранга, то эта переопределенная система четырех уравнений относительно вектора ω_S совместная и имеет единственное решение $\omega_S = S(\Lambda_S)\omega_*$.

Заметим, что в постановке задачи речь идет не об асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений в смысле классических определений [19, 21]. В отличие от этих определений в постановке задачи рассматриваются не произвольные начальные условия $\Lambda_0 \in \mathbb{R}^4$, а начальные условия Λ_0 , расположенные на сфере единичного радиуса $\|\Lambda\| = 1$. Для характеристики свойств решений дифференциальных уравнений при начальных условиях, расположенных на некоторых многообразиях

их фазовых пространств, используется понятие условной асимптотической устойчивости [17, 22, 29]. В соответствии с этим в дальнейшем под устойчивостью подразумевается условная асимптотическая устойчивость, т. е. устойчивость на многообразии $\|\Lambda\|=1$.

Решение задачи. Найдем алгоритмы управления, реализующие достижение произвольной установившейся ориентации КА $S(\Lambda_S)$ относительно ИСК при его произвольном начальном состоянии $\|\Lambda(t_0)\|=1$, $\omega(t_0) \in R^3$. Предварительно напомним, что одной и той же ориентации КА соответствуют кватернионы $\pm\Lambda_S$, так как $S(\Lambda_S)=S(-\Lambda_S)$.

Введем в фазовом пространстве системы уравнений (1), (2) при $\omega_* = 0$ множество

$$\Omega_1 = \{ \Lambda, \omega : \Lambda = \Lambda_S, \Lambda = -\Lambda_S, \|\Lambda_S\|=1, \omega = \omega_S = 0 \}, \quad (8)$$

соответствующее установившейся произвольно заданной ориентации КА $S(\Lambda_S) = S(-\Lambda_S)$ относительно ИСК, и выберем функцию Ляпунова (ФЛ) в виде

$$V_1(\Lambda, \omega) = \alpha [(\|\Lambda_S^T P_S \Lambda\| - 1)^2 + \Lambda^T (I - P_S) \Lambda] + 0.5 \omega^T J \omega, \quad (9)$$

где $\alpha > 0$ и $P_S = \Lambda_S (\Lambda_S^T \Lambda_S)^{-1} \Lambda_S^T = \Lambda_S \Lambda_S^T$ — оператор ортогонального проектирования векторов Λ на подпространство (прямую), порожденное вектором Λ_S [8, 14]. Эта функция положительно определена относительно множества Ω_1 : $V_1(\Lambda, \omega) = 0$ при $\Lambda, \omega \in \Omega_1$ и $V_1(\Lambda, \omega) > 0$ при $\Lambda, \omega \notin \Omega_1$. Нетрудно убедиться, что выражение в квадратных скобках в (9) представляет собой квадрат наименьшего расстояния от произвольной точки Λ до точек $\pm\Lambda_S$. Отметим также, что ФЛ (9) — негладкая функция по переменной Λ . Негладкие ФЛ использовались в работе [32] для исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений. Там же приведено обобщение понятия производных для таких функций. В частности, для обобщенной производной от $|x(t)|$ приводится формула

$$\frac{d|x(t)|}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \text{sign} x, \quad (10)$$

в которой условимся считать, что $\text{sign} x = 1$ при $x \geq 0$ и $\text{sign} x = -1$ при $x < 0$. Негладкая ФЛ, со-

держащая $|\lambda_0|$, использовалась для синтеза алгоритма управления ориентацией КА относительно ИСК в [26], являющегося частным случаем $\Lambda_S = (\pm 1, 0, 0, 0)$ рассматриваемой здесь общей постановки задачи $\Lambda_S^T \Lambda_S = 1$. Краткая библиография работ, в которых используются негладкие ФЛ, содержится в работе [31].

Производная согласно [32] от ФЛ (9), вычисленная по уравнениям (1), (2) с использованием формулы (10), имеет вид

$$\dot{V}_1(\Lambda, \omega) = \omega^T [-\alpha B^T(\Lambda) \Lambda_S \text{sign}(\Lambda_S^T \Lambda) + M_C + M_g - \check{\omega} J \omega]. \quad (11)$$

Выберем момент управления

$$M_C = \alpha B^T(\Lambda) \Lambda_S \text{sign}(\Lambda_S^T \Lambda) - M_g + \rho \check{\omega} J \omega - K \omega, \quad (12)$$

где ρ — коэффициент компенсации гироскопического момента $\check{\omega} J \omega$, $\rho \in [0, 1]$; K — симметричная положительно определенная матрица $K = K^T > 0$. При этом $\dot{V}_1(\Lambda, \omega) = -\omega^T K \omega$ — отрицательная знакопостоянная функция переменных Λ, ω , причем множество $N = \{ \omega, \Lambda : \omega = 0, \Lambda \neq \pm\Lambda_S \}$, на котором $\dot{V}_1(\Lambda, \omega) = 0$, не содержит целых траекторий системы уравнений (1), (2), так как при этом $J\dot{\omega} = \alpha B^T(\Lambda) \Lambda_S \text{sign} \Lambda_S^T \Lambda \neq 0$. Поэтому из дополнения Барбашина — Красовского к теореме об асимптотической устойчивости [21] следует, что множество Ω_1 условно асимптотически устойчиво.

Заметим, что в алгоритме управления вместо постоянной матрицы K может использоваться симметричная матрица $K(\Lambda, \omega)$, удовлетворяющая условию $\omega^T [K(\Lambda, \omega) - K] \omega \geq 0 \forall \Lambda, \omega$.

Сопоставим свойства полученного алгоритма управления ориентацией (12) и свойства алгоритма из работы [6], основанного на непосредственном использовании прямого метода Ляпунова исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений. Для полноты и наглядности сопоставления кратко воспроизведем соответствующий фрагмент из работы [6], где рассматривалась задача синтеза алгоритма управления ориентацией КА относительно ИСК при заданной ориентации $\Lambda_S = (1, 0, 0, 0)$ (в используемых тут обозначениях). В работе [6] выбиралась ФЛ вида

$$V_0(\Lambda, \omega) = \alpha (\Lambda - \Lambda_S)^T (\Lambda - \Lambda_S) + 0.5 \omega^T J \omega, \quad (13)$$

$$\Lambda_S = (1, 0, 0, 0).$$

В отличие от ФЛ $V_1(\Lambda, \omega)$, положительно определенной относительно множества Ω_1 из (8), ФЛ $V_0(\Lambda, \omega)$ положительно определена относительно решения $\Lambda(t) \equiv \Lambda_S$, $\omega(t) \equiv 0$ системы уравнений (1), (2), т. е. «одноточечного» множества $\Lambda = \Lambda_S$, $\omega = 0$ ее фазового пространства. Прделав выкладки, аналогичные для ФЛ $V_1(\Lambda, \omega)$, получим для рассматриваемого в работе [6] значения $\Lambda_S = (1, 0, 0, 0)$ управление

$$M_C = -\alpha\lambda - M_g + \rho\ddot{\omega}J\omega - K\omega. \quad (14)$$

Полученные результаты сформулируем в следующем утверждении.

Утверждение 1. При произвольных начальных условиях $\Lambda_0 = \Lambda(t_0)$, $\omega_0 = \omega(t_0)$, $\|\Lambda_0\| = 1$ и произвольных Λ_S , $\|\Lambda_S\| = 1$, управление M_C в виде (12) обеспечивает получение заданных свойств устойчивости решений уравнений (1), (2) $\|S(\Lambda(t)) - S(\Lambda_S)\| \rightarrow 0$, $\|\omega(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. достижение и стабилизацию произвольной заданной матрицей $S(\Lambda_S)$ ориентации КА относительно ИСК.

Для решения задачи синтеза управления ориентацией КА относительно ОСК по аналогии с [3, 9] проведем ее декомпозицию на кинематическую и динамическую задачи. При этом в кинематической задаче угловая скорость ω в уравнении (1) рассматривается как управление.

Введем в рассмотрение «двухточечное» множество

$$\Omega_2 = \{ \Lambda : \Lambda = \Lambda_S, \Lambda = -\Lambda_S, \|\Lambda_S\| = 1 \} \quad (15)$$

и выберем «кинематическую» ФЛ

$$V_C(\Lambda) = \Lambda^T (I - P_S) \Lambda. \quad (16)$$

Функция $V_C(\Lambda) = 0$ при $\Lambda = \pm\Lambda_S$, $V_C(\Lambda) > 0$ при $\Lambda \neq \pm\Lambda_S$, т. е. является положительно определенной относительно множества Ω_2 . Производная ФЛ (16) в силу уравнения (1)

$$\begin{aligned} \dot{V}_C &= (\omega - S(\Lambda)\omega_*)^T B^T(\Lambda)(\Lambda - P_S)\Lambda = \\ &= -(\omega - S(\Lambda)\omega_*)^T B^T(\Lambda)P_S\Lambda. \end{aligned} \quad (17)$$

Полагая в (17) «управление» ω_C в виде

$$\omega_C = S(\Lambda)\omega_* + B^T(\Lambda)P_S\Lambda, \quad (18)$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_C(\Lambda) &= -\Lambda^T P_S B(\Lambda) B^T(\Lambda) P_S \Lambda = \\ &= -\Lambda^T P_S (I_4 - P_\Lambda) P_S \Lambda, \end{aligned} \quad (19)$$

где $P_\Lambda = \Lambda(\Lambda^T \Lambda)^{-1} \Lambda^T = \Lambda \Lambda^T$ — оператор проектирования на подпространство, образованное вектором Λ , а $(I_4 - P_\Lambda)$ — оператор проектирования на подпространство, ортогональное вектору Λ [8, 14]. Нетрудно убедиться, что производная ФЛ $\dot{V}_C(\Lambda) = 0$ при $\Lambda = \pm\Lambda_S$ и $\dot{V}_C(\Lambda) < 0 \forall \Lambda \neq \pm\Lambda_S$, т. е. является функцией, отрицательно определенной относительно множества Ω_2 . Поэтому ФЛ $V_C(\Lambda)$ монотонно убывает $\forall \Lambda \notin \Omega_2$, $\|\Lambda\| = 1$ и множество Ω_2 системы (1) при «управлении» (18) условно асимптотически устойчиво [19, 24].

Соотношением (18) в фазовом пространстве Λ, ω системы (1), (2) определяется многомерная поверхность $\omega = \omega_C(\Lambda)$ [18], двигаясь по которой изображающая точка в асимптотике придет к требуемому положению $\omega_S = S(\Lambda_S)\omega_*$, $\Lambda = \Lambda_S$ или $\Lambda = -\Lambda_S$, т. е. к требуемой ориентации, однозначно определяемой матрицей $S(\Lambda_S)$.

Найдем теперь управляющий момент M_C , при котором может реализоваться «управление» (18), для чего выберем «динамическую» ФЛ

$$V_d(\omega, \Lambda) = 0.5(\omega - \omega_C)^T J(\omega - \omega_C), \quad (20)$$

где ω_C определяется формулой (18). Дифференцируя ФЛ, в силу системы (1), (2) находим

$$\dot{V}_d(\omega, \Lambda) = (\omega - \omega_C)^T (M_C + M_g - \ddot{\omega}J\omega - J\dot{\omega}_C). \quad (21)$$

Полагая в (21) управляющий момент

$$M_C = -M_g + \ddot{\omega}J\omega + J\dot{\omega}_C - \tau^{-1}J(\omega - \omega_C), \quad (22)$$

получим

$$\dot{V}_d = -\tau^{-1}(\omega - \omega_C)^T J(\omega - \omega_C) = -\tau^{-1}V_d, \quad (23)$$

$$\tau \dot{V}_d + V_d = 0. \quad (24)$$

Из (24) с учетом (23) непосредственно следует, что $\|\omega - \omega_C\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а следовательно, уменьшается и ФЛ (16). Этот же результат можно получить и иначе. Подставив значение M_C из (22) в уравнение (2), получим $\tau\dot{\sigma} + \sigma = 0$, $\sigma = \omega - \omega_C$, из которого также следует, что $\|\omega - \omega_C\| \rightarrow 0$. Заметим, что пренебрегая в алгоритме (22) слагаемым $J\dot{\omega}_C$, отсюда непосредственно получаем $\tau\dot{\omega} + \omega = \omega_C$. Это уравнение с точностью до при-

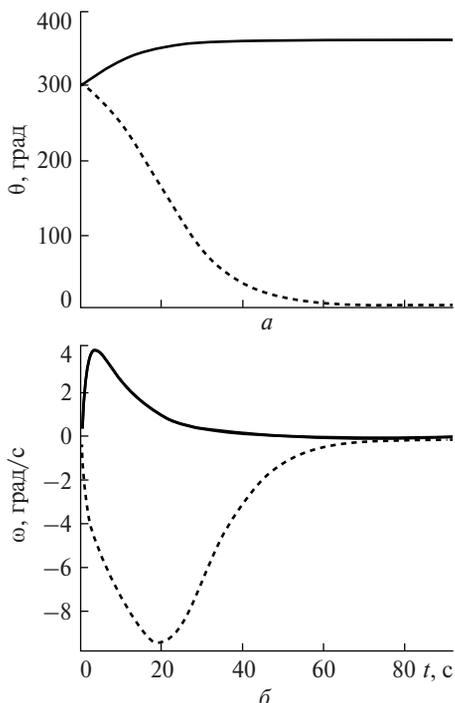


Рис. 1. Переходный процесс установления ориентации: а — по углу ϑ , б — по угловой скорости $\omega_3(t) \rightarrow 0$

нятых тут предположений и обозначений совпадает с уравнением (5) из работы [30], в которой исследуются алгоритмы управления ориентацией орбитального комплекса «Мир».

Для завершения решения задачи нужно найти значение производной $\dot{\omega}_c$, входящей в (22). Формула (18) может быть представлена в виде

$$\dot{\omega}_c = S(\Lambda)\omega_* + B^T(\Lambda)\Lambda_S\Lambda_S^T\Lambda. \quad (25)$$

Из (25) последовательно получаем

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_c = & [-\dot{\omega}S(\Lambda) + S(\Lambda)\dot{\omega}_*]\omega_* - \\ & - B^T(\Lambda_S)[\dot{\Lambda}\Lambda_S^T\Lambda + \Lambda\Lambda_S^T\dot{\Lambda}], \end{aligned} \quad (26)$$

где $\dot{\omega}_c = f(\omega, \Lambda)$,

$$\begin{aligned} f(\omega, \Lambda) = & -\dot{\omega}S(\Lambda)\omega_* - 0.5B^T(\Lambda_S) \cdot [B(\Lambda)\dot{\omega}\Lambda_S^T\Lambda + \\ & + \Lambda\Lambda_S^TB(\Lambda)\dot{\omega}], \quad \dot{\omega} = \omega - S(\Lambda)\omega_* . \end{aligned}$$

При получении формулы (26) использовалось легко непосредственно проверяемое равенство $B^T(\Lambda)\Lambda_S = -B^T(\Lambda_S)\Lambda$ и известное обобщенное уравнение Пуассона для производной матрицы направляющих косинусов $\dot{S}(\Lambda) = -\dot{\omega}S(\Lambda) + S(\Lambda)\dot{\omega}_*$ [23].

В итоге получаем следующий результат.

Утверждение 2. При произвольных начальных условиях Λ_0 , ω_0 , $\|\Lambda_0\|=1$ и Λ_S , $\|\Lambda_S\|=1$ уп-

равление M_c в виде (22) с учетом (18), (26) обеспечивает достижение и стабилизацию заданной ориентации КА относительно ОСК, однозначно определяемой матрицей $S(\Lambda_S)$.

Очевидно, что при $\omega_* = 0$ в уравнениях (1), (2) управление (22) обеспечивает достижение и стабилизацию заданной ориентации КА относительно ИСК.

Техническая реализация предложенных алгоритмов формирования управляющих моментов M_c может быть осуществлена с помощью произвольных гиросиловых систем с непосредственным использованием способов, предложенных, например, в [10].

Компьютерное моделирование. Эффективность полученных алгоритмов управления иллюстрируется результатами компьютерного моделирования процессов ориентации. Матрица инерции полагалась равной $J = \text{diag}\{40, 20, 40\}$. Интегрирование уравнений (1), (2) выполнялось методом Рунге—Кутты с шагом $\Delta t = 0.05$ с.

Был выполнен эксперимент по сопоставлению предложенного алгоритма (12) с алгоритмом (14) из работы [6] при параметрах алгоритмов $\alpha = 5$, $K = \text{diag}\{30, 30, 30, 30\}$, $\rho = 1$ и начальных условиях при $t_0 = 0$, $\omega^T(t_0) = (0, 0, 0)$, $\Lambda^T(t_0) = (-\sqrt{3}/2, 0, 0, 1/2)$. Начальное условие $\Lambda^T(t_0)$ соответствует совпадению осей Oz и Oz_0 ССК и ИСК и отклонению оси Ox от Ox_0 на угол $\vartheta(t_0) = 300^\circ$, $(\lambda_0(t_0) = \cos(\vartheta(t_0)/2) = -\sqrt{3}/2$, $\lambda_3(t_0) = \sin(\vartheta(t_0)/2) = 1/2)$. Рассматривался случай совмещения осей ССК с осями ИСК. При этом установившаяся ориентация КА для алгоритма (14) определялась вектором Λ_S^T , а для алгоритма (12) матрицей $S(\Lambda_S) = I_3$.

На рис. 1 показаны переходные процессы установления ориентации по углам $\vartheta(t)$ и угловым скоростям $\omega(t)$. При этом текущие значения $\vartheta(t)$ определялись по полученным значениям $\lambda_0(t) = \cos(\vartheta(t)/2)$, $\lambda_3(t) = \sin(\vartheta(t)/2)$ с использованием обратных тригонометрических функций.

Алгоритму (12) соответствуют сплошные линии, алгоритму (14) — пунктирные. Видно, что предложенный алгоритм (12) реализует установление заданной ориентации, т. е. совмещение ССК с ИСК по кратчайшему пути — поворот от 300° на

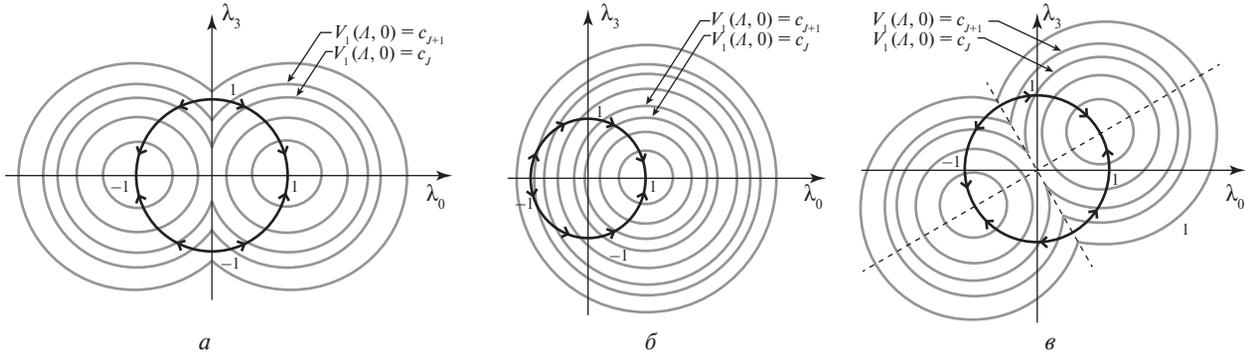


Рис. 2. Сечения плоскостью $\omega_3 = 0$ поверхностей: *a* – уровни ФЛ $V_1(\Lambda, \omega)$ и многообразия M при $\Lambda_S = (\pm 1, 0, 0, 0)$, *б* – уровни ФЛ $V_1(\Lambda, \omega)$ и многообразия M ФЛ $V_2(\Lambda, \omega)$ и многообразия M при $\Lambda_S = (\pm 1, 0, 0, 0)$ при $\Lambda_S = (+1, 0, 0, 0)$, *в* – уровни ФЛ и многообразия M при $\Lambda_S = (\pm 0.5\sqrt{3}, 0, 0, \pm 0.5)$

60° до $\vartheta = 360^\circ$, $\Lambda^T = (-1, 0, 0, 0)$. Алгоритм (14) выполняет поворот на 300° до $\vartheta = 0^\circ$, $\Lambda^T = (1, 0, 0, 0)$. Напомним, что одной и той же ориентации соответствуют кватернионы Λ и $-\Lambda$.

Свойства алгоритмов (12) и (14) наглядно иллюстрируются топологиями фазовых траекторий систем (1), (2), приведенными на рис. 2, *a, б*.

Здесь показаны сечения поверхностей уровней ФЛ $V_1(\Lambda, \omega)$ (9), $V_0(\Lambda, \omega)$ (13) и интегрального многообразия M системы (1), (2) – цилиндрической поверхности $M = \{\lambda_0, \lambda_3, \omega_3 : \lambda_0^2 + \lambda_3^2 = 1, -\infty < \omega_3 < \infty\}$ плоскостью $\omega_3 = 0$. Стрелками показаны направления движения, соответствующие убыванию ФЛ. На рис. 2, *a* стрелки в зависимости от начальной ориентации $\|\Lambda(t_0)\| = 1$ указывают направления кратчайшего движения к требуемой установившейся ориентации $S(\Lambda_S) = I_3$, при которой $\Lambda_S = (1, 0, 0, 0)$ или $\Lambda_S = (-1, 0, 0, 0)$. Стрелки на рис. 2, *б* иллюстрируют, что при алгоритме (14) независимо от начальной ориентации $\|\Lambda(t_0)\| = 1$, даже соответствующей достаточно близкому требуемому совмещению осей Ox и Ox_0 , движение всегда направлено к $\Lambda_S = (1, 0, 0, 0)$.

На рис. 2, *в* приведена структура фазовых траекторий системы (1), (2) при алгоритме (12), соответствующая заданной ориентации $S(\Lambda_S)$ при $\Lambda_S = (\pm 0.5\sqrt{3}, 0, 0, \pm 0.5)$.

Был выполнен дополнительный вычислительный эксперимент для иллюстрации работоспособности алгоритма (12). Требуемая ориентация Λ_S задавалась следующими значениями углов Крылова – Эйлера $\vartheta_S = 90^\circ$, $\gamma_S = 60^\circ$,

$\psi_S = 120^\circ$, где ϑ, γ, ψ – углы тангажа, крена и рыскания. Пересчет в соответствующие значения компонентов кватерниона $\Lambda_S^T = (\lambda_{0S}, \lambda_{1S}^T)$, $\lambda_{1S}^T = (\lambda_{1S}, \lambda_{2S}, \lambda_{3S})$ выполнялся по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \\ \lambda_1 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \\ \lambda_3 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \end{aligned} \quad (27)$$

полученным по аналогии с [3] для последовательности поворотов при переходе от ОСК к ССК $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ($\vartheta \rightarrow \gamma \rightarrow \psi$). При этом $\Lambda_S^T = \frac{1}{4}(0, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{6})$, $\|\Lambda_S\| = 1$. Начальные значения для системы (1), (2) при $t_0 = 0$ полагались равными $\omega(t_0) = 0$, $\Lambda^T(t_0) = (1, 0, 0, 0)$.

На рис. 3, *a* показаны переходные процессы установления ориентации по компонентам кватерниона λ_j , $j = 0, 1, 2, 3$, при параметрах $\alpha = 3$, $K = \text{diag}\{30, 30, 30, 30\}$, $\rho = 1$ алгоритма (12). Соответствующие переходные процессы по угловым скоростям $\omega_j(t) \rightarrow 0$, $j = 1, 2, 3$ показаны на рис. 3, *б*. Приведенный на рис. 3 вид переходных процессов установления требуемой ориентации иллюстрирует эффективность алгоритма (12) при выполнении произвольных пространственных эволюций.

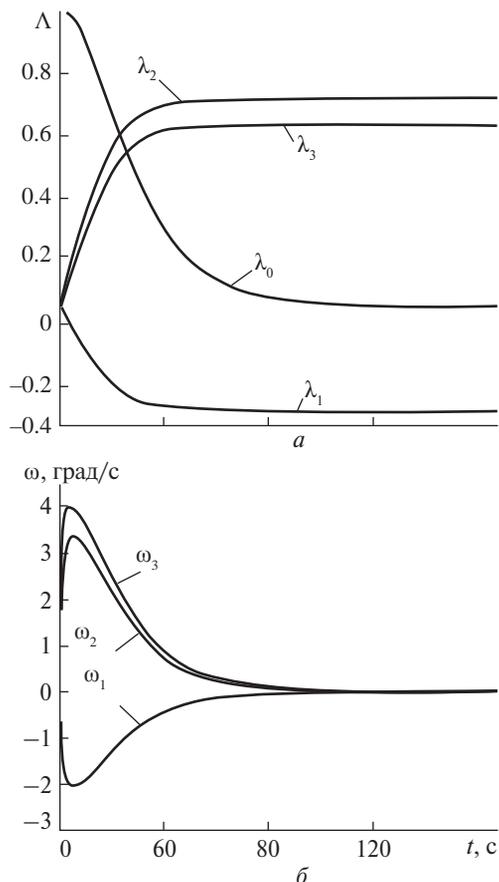


Рис. 3. Переходные процессы, полученные с использованием алгоритма (12): а — по компонентам кватерниона, б — по угловым скоростям

Выполнен вычислительный эксперимент по проверке эффективности алгоритма (22), (26) управления ориентацией относительно ОСК при $\tau = 40$ с и радиусе орбиты $R = 7070$ км. Рассматривался вариант $S(\Lambda_S) = I_3$, т. е. совмещение в установившемся режиме ССК с ОСК. Начальные условия полагались следующими: $\omega^T(t_0) = (0, 0, 0)$, $\vartheta(t_0) = 90^\circ$, $\gamma(t_0) = -90^\circ$, $\psi(t_0) = 120^\circ$, где ϑ, γ, ψ — углы тангажа, крена и рыскания. Пересчет начальных условий, заданных в углах Эйлера — Крылова, в начальные условия в компонентах кватерниона выполнялся по формулам (27).

Переходные процессы установления ориентации $\lambda_j(t)$, $j = 0, 1, 2, 3$ и $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ показаны на рис. 4. Рисунки иллюстрируют процесс устойчивого совмещения ССК с ОСК $\lambda_0(t) \rightarrow 1$, $\lambda_j(t) \rightarrow 0$, $j = 1, 2, 3$, $\omega_1(t) \rightarrow 0$, $\omega_2(t) \rightarrow 0$, $\omega_3(t) \rightarrow \omega_{*3} = -\sqrt{\mu/R^3} \approx -0.061^\circ/\text{с}$.

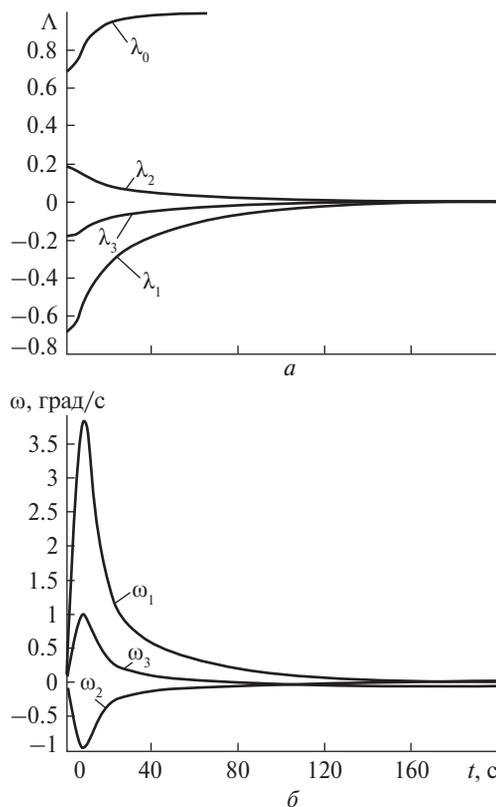


Рис. 4. Переходные процессы, полученные с использованием алгоритма (22): а — по компонентам кватерниона, б — по угловым скоростям

Выполненные вычислительные эксперименты иллюстрируют эффективность использования предложенных алгоритмов управления для получения и стабилизации требуемой ориентации КА относительно инерциальной и орбитальной систем координат.

При компьютерном моделировании динамики системы управления с использованием предложенных алгоритмов процессы ориентации характеризуются текущими значениями компонентов кватернионов. При необходимости получения соответствующих углов Эйлера — Крылова можно воспользоваться, например, алгоритмами [15, 16, 33].

ВЫВОДЫ

С использованием единого методологического подхода, основанного на известных обобщениях прямого метода Ляпунова, на исследование ус-

тойчивости инвариантных множеств динамических систем получены следующие результаты.

Получено обобщение алгоритмов управления ориентацией КА, обеспечивающих совмещение связанной системы координат с инерциальной системой координат, на достижение и стабилизацию произвольно заданной ориентации КА.

Получены новые алгоритмы управления, обеспечивающие достижение и стабилизацию произвольно заданной ориентации КА относительно орбитальной системы координат.

Проведенное компьютерное моделирование проиллюстрировало эффективность полученных алгоритмов управления ориентацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А. и др. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. — М.: Наука, 1971. — 584 с.
2. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 1975. — 308 с.
3. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973. — 320 с..
4. Бутенин Н. В., Луиц Ю. Я., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1979. — Т. 2. — 544 с.
5. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. — М.: Наука, 1969. — Ч. II. — 332 с.
6. Ви Б., Уэйс Х., Эрэптасис Э. Управление поворотом космического аппарата вокруг собственной оси с обратной связью по компонентам кватерниона // Аэрокосмическая техника. — 1990. — № 3. — С. 3—11.
7. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. — М.: Мир, 1990. — 292 с.
8. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
9. Волосов В. В. Об управлении ориентацией космического аппарата в орбитальной системе координат с использованием эллипсоидальных оценок его вектора состояния // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 5. — С. 31—41.
10. Волосов В. В., Куценко И. А., Попадинец В. И. Математические модели вращательного движения космических аппаратов с избыточными системами гироскопов и маховиков и задачи управления их ориентацией // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 1. — Ч. I. — С. 101—116; № 3. — Ч. II. — С. 109—116.
11. Волосов В. В., Куценко И. А., Селиванов Ю. А. Разработка и исследование робастных алгоритмов эллипсоидального оценивания инерционных характеристик космического аппарата, управляемого силовыми гироскопами // Проблемы управления и информатики. — 2005. — № 4. — С. 124—139.
12. Волосов В. В., Тютюнник Л. И. Синтез законов управления ориентацией космического аппарата с использованием кватернионов // Космічна наука та технологія. — 1999. — 5, № 4. — С. 61—69.
13. Волосов В. В., Хлебников М. В., Шевченко В. Н. Алгоритм прецизионного управления ориентацией космического аппарата при действии неконтролируемого возмущения // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 2. — С. 114—121.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.
15. Голубев Ю. Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2013. — 23 с. (Препринт № 39).
16. Гордеев В. Н. Кватернионы и трехмерная геометрия. — Киев, 2012. — 60 с.
17. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
18. Ефимов Н. В., Розендорн Е. А. Линейная алгебра и многомерная геометрия. — М.: Наука, 1970. — 528 с.
19. Зубов В. И. Устойчивость движения. — М.: Высш. шк., 1973. — 272 с.
20. Кириченко Н. Ф., Матвиенко В. Т. Алгоритмы асимптотической, терминальной и адаптивной стабилизации вращательных движений твердого тела // Проблемы управления и информатики. — 2003. — № 1. — С. 5—15.
21. Красовский Н. Н. Обобщение теорем второго метода Ляпунова // Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. — М.: Наука, 1966. — С. 463—467.
22. Крыжевич С. Г. Обобщение теоремы Ляпунова об условной устойчивости на случай неаналитичности // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 1998. — № 3. — С. 43—55. — URL: <http://www.neva.ru/journal>
23. Кузовков Н. Т., Салычев О. С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. — М.: Машиностроение, 1982. — 216 с.
24. Ла-Салль Ж., Левшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964. — 168 с.
25. Лебедев Д. В., Ткаченко А. И., Штепа Ю. П. Магнитная система управления угловым движением микроспутника // Космічна наука і технологія. — 1996. — 2, № 5-6. — С. 17—25.
26. Лебедев Д. В. Керування орієнтацією твердого тіла з використанням параметрів Родрига — Гамільтона // Автоматика. — 1974. — № 4. — С. 29—32.
27. Онищенко С. М. Оптимальная стабилизация искусственного спутника Земли избыточной системой маховиков // Проблемы управления и информатики. — 2016. — № 6. — С. 133—143.
28. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974. — 600 с.

29. Рябова А. В., Тертычный-Даури В. Ю. Элементы теории устойчивости. — С.-Пб.: Изд-во ИТМО, 2015. — 208 с.
30. Сарычев В. А., Беляев М. Ю., Зайков С. Г., Сазонов В. В., Тесленко Б. П. Математическое моделирование эйлеровых разворотов орбитального комплекса «Мир» гиродинами // Космич. исслед. — 1991. — 29, вып. 4. — С. 532—543.
31. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Негладкий анализ и синтез систем регулирования на основе прямого метода Ляпунова // Приборостроение. — 1994. — 37, № 7—8. — С. 5—15.
32. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
33. Филиппов Ю. И. Эффективный алгоритм преобразования кватерниона в систему углов Эйлера-Крылова // Полет. — 2009. — № 6. — С. 32—35.
34. Челноков Ю. Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. — М.: Физматлит, 2011. — 560 с.
11. Volosov V. V., Kutsenko I. A., Selivanov Yu. A. Development and investigation of the robust algorithms of ellipsoidal estimation of the inertia characteristics of a spacecraft controlled by powered gyroscopes. *J. Automation and Information Sciences*, 2005, Vol. 37, N 4. — P. 44—57.
12. Volosov V. V., Tyutyunnik L. I. Synthesis of spacecraft attitude control algorithms using quaternions. *Space Science and Technology*, 1999, Vol. 5, N 4. — P. 61—69 [in Russian].
13. Volosov V. V., Khlebnikov M. V., Shevchenko V. N. Algorithm of precision control of spacecraft orientation under action of uncontrollable disturbance. *J. Automation and Information Sciences*, 2011, Vol. 43, N 3. — P. 59—66.
14. Gantmacher F. R. Matrix theory. — М.: Nauka, 1967. — 575 p. [in Russian].
15. Golubev Yu. F. Quaternion algebra in rigid body kinematics. — М. V. Keldysh. Institute of Applied Mathematics Press, 2013, N 39. — 23 p. [in Russian].
16. Gordeyev V. N. Quaternions and three-dimensional geometry. — Kiev, 2012. — 60 p. [in Russian].
17. Demidovich B. P. Lectures on the mathematical stability theory. — М.: Nauka, 1967. — 472 p. [in Russian].
18. Efimov N. V., Rozendorn Ye. A. Linear algebra and multidimensional geometry. — М.: Nauka, 1970. — 528 p. [in Russian].
19. Zubov V. I. Motion stability. — Vysshaya shkola, 1973. — 272 p. [in Russian].
20. Kirichenko N. F., Matviyenko V. T. Algorithms of asymptotic, terminal and adaptive stabilization of rotary motions of a rigid body. *J. Automation and Information Sciences*, 2003, Vol. 35, N 1. — P. 1—9.
21. Krasovsky N. N. Generalization of the theorems of the Lyapunov second method. In Malkin I. G. Theory of motion stability. — М.: Nauka, 1966. — P. 463—467 [in Russian].
22. Kryzhevich S. G. The generalization of the Lyapunov theorem on conditional stability for non-analytic case. *Differential equations and control processes*, 1998, N 3. — P. 43—55. — <http://www.neva.ru/journal> [in Russian].
23. Kuzovkov N. T., Salychev O. S. Inertial navigation and optimal filtrations. — М.: Mashinostroyeniye, 1982. — 216 p. [in Russian].
24. La Salle J., Lefschetz S., Stability by Liapunov's direct method. — М.: Mir, 1964. — 168 p. [in Russian].
25. Lebedev D. V., Tkachenko A. I., Shtepa Yu. P. Magnetic system for controlling the angular motion of a micro-satellite. *Space science and technology*, 1996, Vol. 2, N 5-6. — P. 17—25 [in Russian].
26. Lebedev D. V. Attitude control of a rigid body utilizing Rodrigues-Hamilton parameters. *Avtomatika*, 1974, N 4. — P. 29—32 [in Russian].
27. Onishchenko S. M. Optimal stabilization of the Earth artificial satellite with redundant system of fly-wheels. *J. Automation and Information Sciences*, 2016, Vol. 48, N 12. — P. 1—12.

Стаття надійшла до редакції 24.01.18

REFERENCES

1. Abalakin V. K., Aksenov Ye. P., Grebennikov Ye. A., et al. Reference Guide on celestial mechanics and astrodynamics. Ed. 2. — М.: Nauka, 1971. — 584 p. [in Russian].
2. Beletsky V. V. Satellite motion relative to the center of mass in a gravitational field. — М.: Lomonosov MGU Press, 1975. — 308 p. [in Russian].
3. Branets V. N., Shmyglevsky I. P. The use of quaternions in problems of solid-state orientation, 320 p. (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
4. Butenin N. V., Lunts Yu. Ya., Merkin D. R. Course of the theoretical mechanics. — М.: Nauka, 1979. Vol. 2. — 544 p. [in Russian].
5. Bucholtz N. N. Basic course of theoretical mechanics. — М.: Nauka, 1969. P. II. — 332 p. [in Russian].
6. Vi B., Ueys Kh., Erepostasis E. Control of the rotation of the spacecraft around its own axis with feedback on the components of the quaternion. *Aerokosmicheskaya tekhnika*. — 1990. — N 3. — P. 3—11 [in Russian].
7. Wittenburg Y. Dynamics of systems of rigid bodies. — М.: Mir, 1990. — 292 p. [in Russian].
8. Voyevodin V. V., Kuznetsov Yu. A. Matrices and calculations. — М.: Nauka, 1984. — 320 p. [in Russian].
9. Volosov V. V. Attitude control of a spacecraft in the orbital coordinate system using ellipsoidal estimates of its state vector. *J. Automation and Information Sciences*, 1999, Vol. 31, N 4-5. — P. 24—32.
10. Volosov V. V., Kutsenko I. A., Popadinets V. I. Mathematical models of rotational motion of spacecrafts with superfluous systems of gyrodins and flywheels and problems of control of their attitude. Ph. I, II. *J. Automation and Information Sciences*, 2003, Vol. 35, N 2. — P. 101—116, Vol. 35, N 6. — P. 109—116.

28. Raushenbakh B. V., Tokar Ye. N. Spacecraft attitude control. — М.: Nauka, 1974. — 600 p. [in Russian].
29. Ryabova A. V., Tertychny-Dauri V. Yu. Elements of stability theory. — ИТМО S.-Pb, 2015. — 208 p. [in Russian].
30. Sarychev V. A., Belyaev M. Yu., Zaykov S. G., Sazonov V. V., Teslenko B. P. Mathematical modeling of Eulerian turns of the Mir orbital complex by using gyroclines. *Cosmic Research*, 1991, Vol. 29, N 4. — P. 458—468.
31. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Non-smooth analyses and synthesis of regulation systems based on the direct Lyapunov method. *Pribozrostroyeniye*, 1994, Vol. 37, N 7—8. — P. 5—15 [in Russian].
32. Filippov A. F. Differential equations with discontinuous right-hand side. — М.: Nauka, 1985. — 224 p. [in Russian].
33. Filippov Yu. I. Effective algorithm of transformation of a quaternion to the system of Euler-Krylov angles. *Polet*, 2009, N 6. — P. 32—35 [in Russian].
34. Chelnokov Yu. N. Quaternion models and methods in dynamics, navigation, and motion control. — М.: Fizmatlit, 2011. — 560 p. [in Russian].

Received 24.01.18

В. В. Волосов, В. М. Шевченко

Інститут космічних досліджень Національної академії наук України і Державного космічного агентства України, Київ, Україна

СИНТЕЗ КЕРУВАННЯ КУТОВИМ РУХОМ КОСМІЧНОГО АПАРАТА НА ОСНОВІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ПРЯМОГО МЕТОДУ ЛЯПУНОВА

Роботу присвячено розв'язанню задач синтезу керування орієнтацією орбітального космічного апарата (КА) на основі відомих узагальнень Зубова — Красовського прямого методу Ляпунова окремих розв'язків диференціальних рівнянь на дослідження стійкості множин в їхньому фазовому просторі. Кінематичні рівняння кутового руху КА представлено диференціальними рівняннями у векторно-матричній формі з вектором стану в реальному евклідовому просторі. Елементами цього простору є вектори параметрів Родрига — Гамільтона. Дані рівняння мають такі відомі особливості. Одна з них полягає в тому, що одній і тій самій заданій орієнтації КА відповідають два вектора стану, компоненти яких відрізняються один від одного тільки знаками. Другою особливістю є наявність для диференціальних рівнянь геометричного інтеграла руху — збереження норми вектора параметрів орієнтації. Відзначено, що внаслідок цього розв'язки рівнянь не можуть бути асимптотично стійкими по Ляпунову. Вони можуть мати тільки властивість умовної стійкості. З урахуванням цих особливостей вперше сформульовано відповідну постановку задачі синтезу керування орієнтацією КА як задачі про умовну асимптотичну стійкість рішень диференціальних рівнянь або стійкості на множинах. Конкретніше — як задачі про

стійкість двоточкових множин у фазовому просторі. Для розв'язування задач запропоновано нову негладку кусково-квадратичну функцію Ляпунова. Отримано розв'язки задач синтезу керувань, що забезпечують досягнення і стабілізацію заданих орієнтацій КА в інерціальній та орбітальних системах координат. Ефективність запропонованих алгоритмів проілюстровано комп'ютерним моделюванням.

Ключові слова: космічний апарат, орієнтація, синтез керування, функція Ляпунова.

V. V. Volosov, V. M. Shevchenko

Space Research Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine and the National Space Agency of Ukraine, Kyiv, Ukraine

SYNTHESIS OF CONTROL OF THE ANGULAR MOTION OF A SPACECRAFT ON THE BASIS OF GENERALIZATION OF THE DIRECT LYAPUNOV METHOD

The work deals with solving the problems of attitude control synthesis for an orbital spacecraft based on the known Zubov-Krasovskii generalizations of the direct Lyapunov method for studying the stability of individual solutions of differential equations to analyze the stability of closed bounded sets in their phase space. The kinematic equations of the angular motion of a spacecraft are represented by differential equations in the vector-matrix form with a state vector in the real Euclidean space. The elements of this space are the vectors of Rodrigues-Hamilton parameters. The given equations are characterized by the following generally known peculiarities. One of them lies in the fact that the same specified physical orientation of a spacecraft corresponds to two state vectors whose components differ only in sign. The second peculiarity of the differential equations is the presence of the geometrical motion integral — conservation of the norm of the vector of orientation parameters. It is noted that, as a consequence, solutions of the equations cannot be asymptotically stable by Lyapunov. They can be characterized only by conditional stability. With regard for these peculiarities, the corresponding problem of control synthesis for spacecraft orientation is for the first time formulated as a problem of the conditional asymptotic stability of the solutions of the differential equations or stability on manifolds. More precisely, it is a problem of stability of two-point sets in the phase space. A new non-smooth piecewise-quadratic Lyapunov function is proposed to solve the problem. The obtained solutions of the problems of control synthesis provide the achievement and stabilization of the given orientations of a spacecraft in the inertial and orbital coordinate systems. The effectiveness of the proposed algorithms is illustrated by computer simulation.

Keywords: spacecraft, orientation, control synthesis, Lyapunov function.