

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2017.01.018>

УДК 539.3; 624.074

**М. В. Чернобрышко¹, К. В. Аврамов¹, П. Г. Дегтяренко²,
А. М. Тонконоженко², Ю. В. Меша³, Е. В. Тишковец⁴, О. В. Жолос⁴**

¹Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного Национальной академии наук Украины, Харьков

²Государственное предприятие «Конструкторское бюро «Южное» им. М. К. Янгеля», Днепро

³НПП ХАРТРОН-АРКОС ЛТД, Харьков

⁴Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков

ДИНАМИКА КОМПОЗИТНОГО КОРПУСА ТВЕРДОТОПЛИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ РАКЕТЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗОК, ОПИСЫВАЮЩИХ РАБОЧИЕ ПРОЦЕССЫ В ДВИГАТЕЛЕ

Представлена динамическая модель деформирования композитного корпуса твердотопливного двигателя ракеты под действием внутреннего импульсного давления, которое описывает рабочие процессы двигателя. Корпус является тонкостенной конструкцией, которая состоит из цилиндрической оболочки и двух днищ в виде усеченных полусфер. Модель динамического деформирования учитывает сдвиг и инерцию вращения, физико-механические свойства композиционного материала. Для исследования динамического поведения конструкции в работе разработан полуаналитический метод. Проведены численные исследования динамической прочности корпуса твердотопливного двигателя.

Ключевые слова: *твердотопливный двигатель, композитный корпус, импульсное давление, динамическая прочность, полуаналитический метод.*

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия элементы корпуса твердотопливных ракет-носителей изготавливают из композитных материалов. Один из критериев работоспособности твердотопливной ракеты — ее прочность, связанная с нестационарными динамическими процессами в корпусе двигателя. В этой статье исследована динамика композитного корпуса твердотопливной ракеты-носителя. Проведено численное моделирование НДС для характерных импульсных нагрузок в топливном двигателе, определяющих их прочность.

Рассмотрим публикации, посвященные механике твердотопливных двигателей. В работе [11]

представлены результаты экспериментальных исследований динамики цилиндра из композитного материала для стартового двигателя космической системы «Спейс Шаттл». В работе [12] отмечается, что одной из важных задач, которую приходится решать, является задача определения предельных нагрузок, при которых двигатель может работать без разрушения. В работе [10] подчеркивается, что вибрации твердотопливного двигателя играют определяющую роль в нестационарности процессов горения зерен ракетного топлива. В работе [14] отмечается, что давление, возникающее вследствие работы твердотопливного двигателя, могут вызывать значительные напряжения корпуса, которые могут привести к его разрушению. В работе [9] исследуются температурные напряжения, возникаю-

© М. В. ЧЕРНОБРЫШКО, К. В. АВРАМОВ, П. Г. ДЕГТЯРЕНКО, А. М. ТОНКОНОЖЕНКО, Ю. В. МЕША, Е. В. ТИШКОВЕЦ, О. В. ЖОЛОС, 2017

щие в твердотопливном двигателе. Проблемы прочности твердотопливных двигателей рассмотрены в монографиях [3, 6, 7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается оболочечная конструкция (рис. 1), которая состоит из трех частей: левого днища, центральной цилиндрической части и правого днища. Днища имеют форму усеченных полушфер радиуса R . Высоты левого и правого днища равны H_1 и H_2 соответственно. Днища жестко закреплены по внешним краям. Цилиндрическая часть конструкции имеет длину L и радиус R . Вне зоны крепления с днищами цилиндрическая часть оболочки имеет постоянную толщину h . На участке соединения цилиндра с днищами толщина конструкции линейно изменяется от h до $2h$. Толщина днищ вне зоны закрепления также постоянна и равна h .

Внутреннее импульсное давление действующее на корпус, возникает вследствие протекания рабочих процессов в твердотопливном двигателе. Давление представим так:

$$P_z = \begin{cases} \frac{P_{\max}}{t^*} t, & t < t^*; \\ P_{\max}, & t^* \leq t < t^{**}; \\ P_{\max} e^{-\frac{t}{\theta}}, & t \geq t^{**}, \end{cases} \quad (1)$$

где P_{\max} – максимальное значение давления, θ – коэффициент затухания давления.

При протекании рабочих процессов в твердотопливном двигателе выделяется большое количество теплоты. Скорость протекания тепловых процессов в композитном материале твердотопливного ракетного двигателя очень мала. Поэтому корпус двигателя нагревается медленно [2].

В нашей статье рассматривается динамический отклик тонкостенной конструкции на импульсное воздействие на временном интервале, исчисляемом миллисекундами. За этот промежуток времени корпус оболочки не успевает нагреться, поэтому тепловые процессы не будут учитываться.

В модели динамического деформирования оболочечной конструкции предполагается, что попереч-

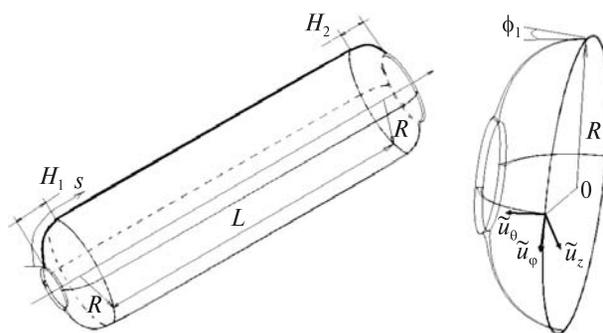


Рис. 1. Эскиз корпуса твердотопливного двигателя и срединная поверхность левого днища

ные перемещения значительно меньше толщины оболочки, поэтому связь между деформациями и перемещениями точек срединной поверхности является линейной. Материал конструкции предполагается упругим, а связь между напряжениями и деформациями предполагается линейной. В модели композитной конструкции учтем сдвиги и инерцию вращения. Динамическое поведение оболочки рассмотрим в компонентах перемещений срединной поверхности. Положения точек срединной поверхности оболочки опишем продольной координатой x и окружной координатой φ . Тогда перемещения точек срединной поверхности оболочки опишем компонентами перемещений $\tilde{u}_x(x, \varphi, t), \tilde{u}_\varphi(x, \varphi, t), \tilde{u}_z(x, \varphi, t)$. Перпендикулярно к срединной поверхности оболочки введем ось z . Цилиндрическая оболочка имеет переменную толщину, которая зависит только от продольной координаты оболочки $h(x)$ и не зависит от φ . Координатные линии оболочки удовлетворяют условиям $0 \leq x \leq L, 0 \leq \varphi < 2\pi; -h(x)/2 \leq z \leq h(x)/2$.

Срединные поверхности днищ являются полусферами; рассмотрим их в сферических координатах θ, φ . Тогда компоненты перемещений точек срединной поверхности обозначим так $\tilde{u}_\theta, \tilde{u}_\varphi, \tilde{u}_z$. Эти компоненты перемещений показаны на рис.1. Днища имеют переменную толщину, которая зависит от координаты θ . Материал оболочечной конструкции ортотропный. Упругие свойства цилиндрической части описываются модулями Юнга $E_{xx}, E_{\varphi\varphi}$; модулями сдвига $G_{x\varphi}, G_{xz}, G_{\varphi z}$ и коэффициентами Пуассона $\mu_{x\varphi}, \mu_{\varphi x}$. Упругие свойства ортотропных днищ описы-

ваются модулями Юнга $E_{\theta\theta}$, $E_{\varphi\varphi}$; модулями сдвига $G_{\theta\varphi}$, $G_{\theta z}$, $G_{\varphi z}$ и коэффициентами Пуассона $\mu_{\theta\varphi}$, $\mu_{\varphi\theta}$.

Перемещения произвольной точки x, φ, z срединной поверхности цилиндрической части u_x, u_φ, u_z представим так [2, 5, 13]:

$$\begin{aligned} u_x(x, \varphi, z, t) &= \tilde{u}_x(x, \varphi, t) + z \tilde{\beta}_x(x, \varphi, t), \\ u_\varphi(x, \varphi, z, t) &= \tilde{u}_\varphi(x, \varphi, t) + z \tilde{\beta}_\varphi(x, \varphi, t), \\ u_z(x, \varphi, z, t) &= \tilde{u}_z(x, \varphi, t), \end{aligned}$$

где $\tilde{\beta}_x, \tilde{\beta}_\varphi$ – углы поворота нормали к срединной поверхности.

Компоненты тензора деформаций удовлетворяют следующим соотношениям [5, 13]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \tilde{\varepsilon}_{xx} + z \tilde{k}_{xx}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + z \tilde{k}_{\varphi\varphi}, \quad \varepsilon_{x\varphi} = \tilde{\varepsilon}_{x\varphi} + z \tilde{k}_{x\varphi}, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial x} + \tilde{\beta}_x, \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{u}_\varphi}{R} + \tilde{\beta}_\varphi, \end{aligned}$$

где $\tilde{\varepsilon}_{xx}, \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi}, \tilde{\varepsilon}_{x\varphi}, \tilde{k}_{xx}, \tilde{k}_{\varphi\varphi}, \tilde{k}_{x\varphi}$ – деформации точек срединной поверхности; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{x\varphi}$ – деформации произвольных точек оболочки.

Деформации срединной поверхности вычисляются из выражений

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x}, \quad \tilde{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_z}{R}, \quad \tilde{\varepsilon}_{x\varphi} = \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \varphi}, \\ \tilde{k}_{xx} &= \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial x}, \quad \tilde{k}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi}, \quad \tilde{k}_{x\varphi} = \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Удельные усилия и моменты [4] удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \frac{E_{xx} h(x)}{1 - \mu_{x\varphi} \mu_{\varphi x}} \left[\frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \mu_{x\varphi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_z}{R} \right) \right], \\ N_{\varphi\varphi} &= \frac{E_{\varphi\varphi} h(x)}{1 - \mu_{x\varphi} \mu_{\varphi x}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_z}{R} + \mu_{\varphi x} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} \right], \\ N_{x\varphi} &= G_{x\varphi} h(x) \left[\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \varphi} \right], \\ M_{xx} &= \frac{E_{xx} h^3(x)}{12(1 - \mu_{x\varphi} \mu_{\varphi x})} \left[\frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial x} + \mu_{x\varphi} \cdot \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} \right], \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\varphi\varphi} &= \frac{E_{\varphi\varphi} h^3(x)}{12(1 - \mu_{x\varphi} \mu_{\varphi x})} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \mu_{\varphi x} \cdot \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial x} \right], \\ M_{x\varphi} &= \frac{G_{x\varphi} h^3(x)}{12} \left[\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned}$$

Уравнения движения цилиндрической части тонкостенной конструкции представим в виде [13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} &= \rho h(x) \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{Q_{\varphi z}}{R} &= \rho h(x) \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\varphi z}}{\partial \varphi} - \frac{N_{\varphi\varphi}}{R} + P_z &= \rho h(x) \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial t^2}, \quad (3) \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} - Q_{xz} &= \frac{\rho h^3(x)}{12} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - Q_{\varphi z} &= \frac{\rho h^3(x)}{12} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

где ρ – плотность материала конструкции.

Соотношения (2) введем в (3) и получим систему уравнений в частных производных, описывающую динамику цилиндрической части конструкции относительно $\tilde{u}_x, \tilde{u}_\varphi, \tilde{u}_z, \tilde{\beta}_x, \tilde{\beta}_\varphi$:

$$\begin{aligned} \frac{E_{xx}}{1 - \mu_{x\varphi} \mu_{\varphi x}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial x^2} + \frac{\mu_{x\varphi}}{R} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial x} \right) \right] + \\ + \frac{G_{x\varphi}}{R} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial \varphi^2} \right] &= \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial t^2}, \\ G_{x\varphi} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial x \partial \varphi} \right] + \frac{1}{R^2} \frac{E_{\varphi\varphi}}{1 - \mu_{x\varphi} \mu_{\varphi x}} \times \\ \times \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \varphi} + \mu_{\varphi x} \frac{\partial^2 \tilde{u}_x}{\partial x \partial \varphi} \right] + \\ + \frac{\kappa G_{\varphi z}}{R^2} \left[\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \varphi} - \tilde{u}_\varphi + R \tilde{\beta}_\varphi \right] &= \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial t^2}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \kappa G_{xz} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial x} \right] + \frac{\kappa G_{\varphi z}}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} \right] - \\ & - \frac{E_{\varphi\varphi}}{(1 - \mu_{x\varphi} \mu_{\varphi x}) R^2} \left[\frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \tilde{u}_z + R \mu_{\varphi x} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} \right] + P_z = \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial t^2}, \\ & \frac{E_{xx}}{1 - \mu_{x\varphi} \mu_{\varphi x}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\beta}_x}{\partial x^2} + \frac{\mu_{x\varphi}}{R} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial x \partial \varphi} \right] + \frac{G_{x\varphi}}{R} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial x \partial \varphi} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_x}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{12 \kappa G_{xz}}{h^2} \left[\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial x} + \tilde{\beta}_x \right] = \rho \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_x}{\partial t^2}, \\ & G_{x\varphi} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_x}{\partial x \partial \varphi} \right] + \frac{E_{\varphi\varphi}}{R^2 (1 - \mu_{x\varphi} \mu_{\varphi x})} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi^2} + \right. \\ & \left. + R \mu_{\varphi x} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_x}{\partial x \partial \varphi} \right] - \frac{12 \kappa G_{\varphi z}}{R h^2} \left[\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \varphi} - \tilde{u}_\varphi + R \tilde{\beta}_\varphi \right] = \rho \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим уравнения движения днищ в сферической системе координат θ, φ, z . Компоненты вектора перемещений u_θ, u_φ, u_z днищ с учетом поперечного сдвига и инерции вращения представим так [1, 5, 13]:

$$\begin{aligned} u_\theta(\theta, \varphi, z, t) &= \tilde{u}_\theta(\theta, \varphi, t) + z \tilde{\beta}_\theta(\theta, \varphi, t), \\ u_\varphi(\theta, \varphi, z, t) &= \tilde{u}_\varphi(\theta, \varphi, t) + z \tilde{\beta}_\varphi(\theta, \varphi, t), \\ u_z(\theta, \varphi, z, t) &= \tilde{u}_z(\theta, \varphi, t), \end{aligned}$$

где $\tilde{\beta}_\theta, \tilde{\beta}_\varphi$ – углы поворота нормали к срединной поверхности.

Компоненты тензора деформаций днищ связаны с перемещениями так:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}_z}{R} + \frac{z}{R} \frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta}, \\ \tilde{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_\theta}{R \operatorname{tg} \theta} + \frac{\tilde{u}_z}{R} + \\ & + z \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{\beta}_\theta}{R \operatorname{tg} \theta} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{\theta\varphi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}_\varphi}{R \operatorname{tg} \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi} + \\ & + z \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\beta}_\varphi}{R \operatorname{tg} \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \varphi} \right), \\ \tilde{\epsilon}_{\theta z} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}_\theta}{R} + \tilde{\beta}_\theta, \quad \tilde{\epsilon}_{\varphi z} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{u}_\varphi}{R} + \tilde{\beta}_\varphi. \end{aligned}$$

Удельные силовые факторы [4] в днищах связаны с компонентами перемещений зависимостями

$$\begin{aligned} N_{\theta\theta} &= \frac{E_{\theta\theta} h(\theta)}{1 - \mu_{\theta\varphi} \mu_{\varphi\theta}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}_z}{R} + \right. \\ & \left. + \mu_{\theta\varphi} \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_\theta}{R \operatorname{tg} \theta} + \frac{\tilde{u}_z}{R} \right) \right], \\ N_{\varphi\varphi} &= \frac{E_{\varphi\varphi} h(\theta)}{1 - \mu_{\theta\varphi} \mu_{\varphi\theta}} \left[\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_\theta}{R \operatorname{tg} \theta} + \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{u}_z}{R} + \mu_{\varphi\theta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tilde{u}_z}{R} \right) \right], \\ M_{\theta\theta} &= \frac{E_{\theta\theta} h^3(\theta)}{12(1 - \mu_{\theta\varphi} \mu_{\varphi\theta})} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + \mu_{\theta\varphi} \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R \operatorname{tg} \theta} \tilde{\beta}_\theta \right) \right], \\ M_{\varphi\varphi} &= \frac{E_{\varphi\varphi} h^3(\theta)}{12(1 - \mu_{\theta\varphi} \mu_{\varphi\theta})} \left[\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{\beta}_\theta}{R \operatorname{tg} \theta} + \frac{\mu_{\varphi\theta}}{R} \frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения движения усеченной полусферы тонкостенной конструкции имеют вид [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{\partial N_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - N_{\varphi\varphi} \cos \theta + Q_{\theta z} \sin \theta &= \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial t^2} R \rho h(\theta) \sin \theta, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta\varphi} \sin \theta) + \frac{\partial N_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + N_{\varphi\varphi} \cos \theta + Q_{\varphi z} \sin \theta &= \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial t^2} R \rho h(\theta) \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} (Q_{\theta z} \sin \theta) + \frac{\partial Q_{\varphi z}}{\partial \varphi} - (N_{\theta\theta} + N_{\varphi\varphi}) \sin \theta + \\ + RP_z \sin \theta = \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial t^2} R \rho h(\theta) \sin \theta, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} - M_{\varphi\varphi} \cos \theta - RQ_{\theta z} \sin \theta = \\ = \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\theta}{\partial t^2} \frac{R \rho h^3}{12} \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{\theta\varphi} \sin \theta) + \frac{\partial M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + M_{\varphi\theta} \cos \theta - RQ_{\varphi z} \sin \theta = \\ = \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial t^2} \frac{R \rho h^3}{12} \sin \theta. \end{aligned}$$

Соотношения (5) введем в (6) и получим уравнения движения сферических днищ тонкостенной конструкции:

$$\begin{aligned} \frac{E_{\theta\theta}}{1 - \mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}} \left\{ \frac{1}{R^2 \rho} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \theta} + \mu_{\theta\varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \theta} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{R^2 \rho \operatorname{tg} \theta} \left[\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \tilde{u}_z + \mu_{\theta\varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_\theta}{\operatorname{tg} \theta} + \tilde{u}_z \right) \right] \right\} + \\ + \frac{G_{\theta\varphi}}{R^2 \rho \sin \theta} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi^2} \right] + \\ + \frac{\kappa G_{\theta z}}{R^2 \rho \operatorname{tg} \theta} \left[\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \theta} - \tilde{u}_\theta + R \tilde{\beta}_\theta \right] + \\ + \frac{E_{\varphi\varphi}}{1 - \mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}} \frac{\cos \theta}{R^2 \rho \sin \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_\theta}{\operatorname{tg} \theta} + \tilde{u}_z + \right. \\ \left. + \mu_{\varphi\theta} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \tilde{u}_z \right) \right] = \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{G_{\theta\varphi}}{\rho R^2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{1}{\sin \theta \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{u}_\varphi}{\operatorname{tg}^2 \theta} \right] + \\ + \frac{E_{\varphi\varphi}}{\rho R^2 (1 - \mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta})} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta \sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{\mu_{\varphi\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1 + \mu_{\varphi\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \varphi} \right] + \frac{G_{\theta\varphi}}{\rho R^2} \left[\frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\tilde{u}_\varphi}{\operatorname{tg}^2 \theta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin \theta \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\kappa G_{\varphi z}}{\rho R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \varphi} - \tilde{u}_\varphi + \tilde{\beta}_\varphi \right] = \frac{\partial^2 \tilde{u}_{\varphi\varphi}}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\kappa G_{\theta z}}{R^2 \rho \sin \theta} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + R \frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \left(\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \theta} - \tilde{u}_\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + R \tilde{\beta}_\theta \right) \right] + \frac{\kappa G_{\varphi z}}{R^2 \rho \sin \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \right. \\ \left. + R \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} \right] - \frac{E_{\theta\theta}}{R^2 \rho \sin \theta (1 - \mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta})} \left[\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \tilde{u}_z + \right. \\ \left. + \mu_{\theta\varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_\theta}{\operatorname{tg} \theta} + \tilde{u}_z \right) \right] - \\ - \frac{E_{\varphi\varphi}}{R^2 \rho \sin \theta (1 - \mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta})} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{u}_\theta}{\operatorname{tg} \theta} + \tilde{u}_z + \right. \\ \left. + \mu_{\varphi\theta} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\theta}{\partial \theta} + \tilde{u}_z \right) \right] + \frac{P_z}{\rho h} = \frac{\partial^2 \tilde{u}_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_{\theta\theta}}{R^2 \rho (1 - \mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta})} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta^2} + \mu_{\theta\varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{12 \kappa G_{\theta z}}{R \rho h^2} \left[\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \theta} - \tilde{u}_\theta + R \tilde{\beta}_\theta \right] + \\ + \frac{E_{\theta\theta}}{R^2 \rho (1 - \mu_{\theta\varphi}\mu_{\varphi\theta}) \operatorname{tg} \theta} \left[\frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta} + \mu_{\theta\varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \tilde{\beta}_\theta \right] + \frac{G_{\theta\varphi}}{R^2 \rho \sin \theta} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} - \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\theta}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{E_{\varphi\varphi}}{R^2 \rho (1 - \mu_{\theta\varphi} \mu_{\varphi\theta}) \operatorname{tg} \theta} \times \\
 & \times \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tilde{\beta}_\theta}{\operatorname{tg} \theta} + \mu_{\varphi\theta} \frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\theta}{\partial t^2}, \\
 & \frac{G_{\theta\varphi}}{\rho R^2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta \partial \varphi} \right] + \\
 & + \frac{2G_{\theta\varphi}}{\rho R^2 \operatorname{tg} \theta} \left[\frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\beta}_\varphi}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \varphi} \right] + \\
 & + \frac{1}{\rho R^2 \sin \theta} \frac{E_{\varphi\varphi}}{(1 - \mu_{\theta\varphi} \mu_{\varphi\theta})} \times \\
 & \times \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \frac{\partial \tilde{\beta}_\theta}{\partial \varphi} + \mu_{\varphi\theta} \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\theta}{\partial \theta \partial \varphi} \right] - \\
 & - \frac{12\kappa G_{\varphi z}}{\rho R h^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \varphi} - \tilde{u}_\varphi + R \tilde{\beta}_\varphi \right] = \frac{\partial^2 \tilde{\beta}_\varphi}{\partial t^2}.
 \end{aligned}$$

Дополним уравнения движения цилиндрической оболочки (4) и уравнения движения днищ (7) различными граничными условиями. Сначала рассмотрим граничные условия сопряжения цилиндрической оболочки с левым днищем.

Кинематические граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_x(0, \varphi, t) &= \cos(\phi_1) \tilde{u}_\theta(\pi/2, -\varphi, t), \\
 \tilde{u}_\varphi(0, \varphi, t) &= \tilde{u}_\varphi(\pi/2, -\varphi, t), \\
 \tilde{u}_z(0, \varphi, t) &= \sin(\phi_1) \tilde{u}_z(\pi/2, -\varphi, t), \\
 \tilde{\beta}_x(0, \varphi, t) &= \tilde{\beta}_\theta(\pi/2, -\varphi, t), \\
 \tilde{\beta}_\varphi(0, \varphi, t) &= \tilde{\beta}_\varphi(\pi/2, -\varphi, t),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где ϕ_1 – угол наклона касательной к днищу в точке ее стыка с цилиндрической оболочкой.

Силовые условия сопряжения таковы:

$$\begin{aligned}
 N_{xx}(0, \varphi, t) &= \cos(\phi_1) N_{\theta\theta}(\pi/2, -\varphi, t), \\
 N_{x\varphi}(0, \varphi, t) &= N_{\theta\varphi}(\pi/2, -\varphi, t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi\varphi}(0, \varphi, t) &= \sin(\phi_1) N_{\varphi\varphi}(\pi/2, -\varphi, t), \\
 Q_{xz}(0, \varphi, t) &= Q_{\theta z}(\pi/2, -\varphi, t), \\
 Q_{\varphi z}(0, \varphi, t) &= Q_{\varphi z}(\pi/2, -\varphi, t).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Теперь рассмотрим граничные условия сопряжения конца цилиндрической оболочки с правым днищем. Кинематические граничные условия выглядят так:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_x(L, \varphi, t) &= \cos(\phi_2) \tilde{u}_\theta(\pi/2, \varphi, t), \\
 \tilde{u}_\varphi(L, \varphi, t) &= \tilde{u}_\varphi(\pi/2, \varphi, t), \\
 \tilde{u}_z(L, \varphi, t) &= \sin(\phi_2) \tilde{u}_z(\pi/2, \varphi, t), \\
 \tilde{\beta}_x(L, \varphi, t) &= \tilde{\beta}_\theta(\pi/2, \varphi, t), \\
 \tilde{\beta}_\varphi(L, \varphi, t) &= \tilde{\beta}_\varphi(\pi/2, \varphi, t),
 \end{aligned} \tag{10}$$

где ϕ_2 – угол наклона касательной к правому днищу в точке стыковки с цилиндрической оболочкой.

Силовые граничные условия сопряжения имеют вид

$$\begin{aligned}
 N_{xx}(L, \varphi, t) &= \cos(\phi_2) N_{\theta\theta}(\pi/2, \varphi, t), \\
 N_{x\varphi}(L, \varphi, t) &= N_{\theta\varphi}(\pi/2, \varphi, t), \\
 N_{\varphi\varphi}(L, \varphi, t) &= \sin(\phi_2) N_{\varphi\varphi}(\pi/2, \varphi, t), \\
 Q_{xz}(L, \varphi, t) &= Q_{\theta z}(\pi/2, \varphi, t), \\
 Q_{\varphi z}(L, \varphi, t) &= Q_{\varphi z}(\pi/2, \varphi, t).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Конец левого днища жестко зашпелен, что выражается следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_\theta(\theta_1, \varphi, t) &= 0, \quad \tilde{u}_\varphi(\theta_1, \varphi, t) = 0, \quad \tilde{u}_z(\theta_1, \varphi, t) = 0, \\
 \tilde{\beta}_\theta(\theta_1, \varphi, t) &= 0, \quad \tilde{\beta}_\varphi(\theta_1, \varphi, t) = 0, \\
 \frac{\partial \tilde{u}_\theta(\theta_1, \varphi, t)}{\partial \theta} &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_\varphi(\theta_1, \varphi, t)}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_z(\theta_1, \varphi, t)}{\partial \theta} = 0, \\
 \frac{\partial \tilde{u}_z(\theta_1, \varphi, t)}{\partial \theta} &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}_z(\theta_1, \varphi, t)}{\partial \varphi} = 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Конец правого днища оболочки также жестко зашпелен, что выражается граничными условиями, аналогичными условиям (12).

Теперь рассмотрим начальные условия задачи. В начальный момент времени $t = 0$ оболочка находится в состоянии покоя. Этот факт выра-

жаются следующими начальными условиями для цилиндрической оболочки:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x(x, \varphi, 0) &= \tilde{u}_\varphi(x, \varphi, 0) = \tilde{u}_z(x, \varphi, 0) = \\ &= \tilde{\beta}_x(x, \varphi, 0) = \tilde{\beta}_\varphi(x, \varphi, 0) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial t}(x, \varphi, 0) &= \frac{\partial \tilde{u}_\varphi}{\partial t}(x, \varphi, 0) = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial t}(x, \varphi, 0) = \\ &= \frac{\partial \tilde{\beta}_x}{\partial t}(x, \varphi, 0) = \frac{\partial \tilde{\beta}_\varphi}{\partial t}(x, \varphi, 0) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Начальные условия для сферических днщ аналогичны условиям (13).

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В этом разделе динамическая система в частных производных приводится к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности.

Представим в виде разложений в ряды Фурье компоненты перемещений и углов поворота цилиндрической части конструкции:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x(x, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{X,n}(x, t) \cos n\varphi, \\ \tilde{u}_\varphi(x, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_{\varphi,n}(x, t) \sin n\varphi, \\ \tilde{u}_z(x, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_{Z,n}(x, t) \cos n\varphi, \\ \tilde{\beta}_x(x, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{X,n}(x, t) \cos n\varphi, \\ \tilde{\beta}_\varphi(x, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{\varphi,n}(x, t) \sin n\varphi, \end{aligned} \quad (14)$$

где $U_{X,n}, U_{\varphi,n}, U_{Z,n}, B_{X,n}, B_{\varphi,n}$ — неизвестные функции.

При выводе уравнений нестационарной динамики конструкции рассмотрим более общий вид нагрузок по сравнению с (1). Импульсное давление представим в виде

$$P_z(x, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, t) \cos n\varphi.$$

Теперь разложения (14) введем в динамическую систему (4) и получим систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно амплитуд гармоник разложений (14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{X,n}}{\partial t^2} + K_1 \frac{\partial^2 U_{X,n}}{\partial x^2} + n^2 K_2 U_{X,n} + \\ + nK_3 \frac{\partial U_{\varphi,n}}{\partial x} + K_4 \frac{\partial U_{Z,n}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 U_{\varphi,n}}{\partial t^2} + K_5 \frac{\partial^2 U_{\varphi,n}}{\partial x^2} + (n^2 K_6 + K_7) U_{\varphi,n} + \\ + nK_{81} \frac{\partial U_{X,n}}{\partial x} - nK_{82} U_{Z,n} + K_9 B_{\varphi,n} = 0, \\ \frac{\partial^2 U_{Z,n}}{\partial t^2} + K_{10} \frac{\partial^2 U_{Z,n}}{\partial x^2} + (n^2 K_{11} + K_6) U_{Z,n} + \\ + K_{12} \frac{\partial U_{X,n}}{\partial x} + nK_{82} U_{\varphi,n} + K_{10} \frac{\partial B_{X,n}}{\partial x} + K_9 B_{\varphi,n} = \frac{P_n(x, t)}{\rho h}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{X,n}}{\partial t^2} + K_1 \frac{\partial^2 B_{X,n}}{\partial x^2} + (n^3 K_2 + K_{13}) B_{X,n} + \\ + K_{13} \frac{\partial U_{Z,n}}{\partial x} + nK_3 \frac{\partial B_{\varphi,n}}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{\varphi,n}}{\partial t^2} + K_5 \frac{\partial^2 B_{\varphi,n}}{\partial x^2} + K_{14} B_{\varphi,n} + K_{15} U_{\varphi,n} + \\ + nK_{15} U_{Z,n} + nK_{82} \frac{\partial B_{X,n}}{\partial x} + n^2 K_8 B_{X,n} = 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты K_i ($i = 1, 2, \dots$) динамической системы (15) зависят от параметров оболочки. Они не приводятся для краткости изложения.

Систему уравнений в частных производных (15) сведем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Для этого все частные производные по продольной координате x заменим их конечно-разностными аппроксимациями с помощью центральных разностей. Все неизвестные системы (15) в области $0 \leq x \leq L$ представим сеточными функциями с шагом $l = L/J$, где J — число точек дискретизации функции. Дискретные значения координаты x определим выражением $x_j = jl$. Вектор неизвестных системы (15) представим в виде $\mathbf{U}_{x,n} = \{U_{X,n}, U_{\varphi,n}, U_{Z,n}, B_{X,n}, B_{\varphi,n}\}$, а значения функции $\mathbf{U}_{x,n}$ в дискретных точках — в виде $\mathbf{U}_{x,n}^{(j)}$ ($j = 0, \dots, J$). Для аппроксимации частных производных воспользуемся конечно-разно-

стными соотношениями. Тогда решения системы (15) аппроксимируем решениями следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которую в матричном виде представим так:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}_{x,n}}{\partial t^2} + \mathbf{C}_1 \mathbf{U}_{x,n} = \mathbf{P}_{x,n},$$

где $\mathbf{U}_{x,n} = \{U_{x,n}^{(0)}, \dots, U_{x,n}^{(j)}\}$; \mathbf{C}_1 — постоянная матрица;

$$\mathbf{P}_{x,n} = \{P_{x,n}^{(0)}, \dots, P_{x,n}^{(j)}\}; P_{x,n}^{(j)} = \{0, 0, P_{x,n}^{(j)}, 0, 0\}.$$

Теперь выведем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую динамику сферических днищ. Компоненты перемещений и углов поворота сферических днищ представим в виде следующих разложений в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\theta(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_{\theta,n}(\theta, t) \cos n\varphi, \\ \tilde{u}_\varphi(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{U}_{\varphi,n}(\theta, t) \sin n\varphi, \\ \tilde{u}_z(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_{z,n}(\theta, t) \cos n\varphi, \\ \tilde{\beta}_\theta(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_{\theta,n}(\theta, t) \cos n\varphi, \\ \tilde{\beta}_\varphi(\theta, \varphi, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_{\varphi,n}(\theta, t) \sin n\varphi, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tilde{U}_{\theta,n}, \tilde{U}_{\varphi,n}, \tilde{U}_{z,n}, \tilde{B}_{\theta,n}, \tilde{B}_{\varphi,n}$ — неизвестные функции.

Разложения (16) введем в систему уравнений в частных производных (9). В результате получим систему уравнений в частных производных, которая в матричном представлении имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{U}}_{s,n}}{\partial t^2} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{U}}_{s,n}}{\partial \theta^2} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_{s,n}}{\partial \theta} + \mathbf{A}_3 \tilde{\mathbf{U}}_{s,n} = \frac{1}{\rho h} \mathbf{P}_n(\theta, t), \quad (17)$$

где $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n} = \{\tilde{U}_{\theta,n}, \tilde{U}_{\varphi,n}, \tilde{U}_{z,n}, \tilde{B}_{\theta,n}, \tilde{B}_{\varphi,n}\}$; $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ — постоянные матрицы.

Теперь систему уравнений в частных производных (17) сведем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Введем вектор глобальных неизвестных сферических днищ конструкции $\mathbf{U}_{s,n} = \{\tilde{\mathbf{U}}_{s,n}^{(0)}, \dots, \tilde{\mathbf{U}}_{s,n}^{(M)}\}$. Решение си-

стемы уравнений в частных производных (17) заменим решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора неизвестных $\mathbf{U}_{s,n}$. Эта система будет иметь вид, аналогичный системе (15). Здесь эта система уравнений не приводится.

Итак, нестационарная динамика твердотопливного двигателя описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую входят система (15) и аналогичная система уравнений, описывающая динамику днищ. Компоненты вектора перемещений $\mathbf{U}_{s,n}$ удовлетворяют условиям стыковки (8) — (11). Вектор решений для левого днища обозначим $\hat{\mathbf{U}}_{s,n}$, а для правого — $\bar{\mathbf{U}}_{s,n}$. Из граничных условий для левого днища (18) и аналогичных граничных условий для правого днища получаем, что для левого днища выполняется условие $\hat{\mathbf{U}}_{s,n}^{(0)} = \{0, 0, 0, 0, 0\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), а для правого днища справедливо соотношение $\bar{\mathbf{U}}_{s,n}^{(0)} = \{0, 0, 0, 0, 0\}$. Теперь рассмотрим условие сшивания решений. Решения для последнего узла дискретизации левого днища равняются решению в первой точке дискретизации цилиндрической оболочки: $\hat{\mathbf{U}}_{s,n}^{(M_1)} = \mathbf{U}_{x,n}^{(0)}$, где M_1 — количество узлов дискретизации в левом днище. Условия стыковки (8) запишем в матричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_4 \{(\mathbf{U}_{s,n}^{(M_1)} - \mathbf{U}_{s,n}^{(M_1-1)}) / h_s + \mathbf{U}_{s,n}^{(M_1)}\} = \\ = \mathbf{A}_5 \{(\mathbf{U}_{x,n}^{(1)} - \mathbf{U}_{x,n}^{(0)}) / l + \mathbf{U}_{x,n}^{(0)}\}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5$ — постоянные матрицы, зависящие от параметров системы.

Решения в последней точке дискретизации для правого днища равняются решению в последней точке дискретизации для цилиндрической оболочки: $\bar{\mathbf{U}}_{s,n}^{(M_2)} = \mathbf{U}_{x,n}^{(J)}$, где M_2 — количество узлов дискретизации решения для правого днища. Условия стыковки (16) представим в следующем матричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_6 \{(\bar{\mathbf{U}}_{s,n}^{(M_2)} - \bar{\mathbf{U}}_{s,n}^{(M_2-1)}) / h_s + \bar{\mathbf{U}}_{s,n}^{(M_2)}\} = \\ = \mathbf{A}_7 \{(\mathbf{U}_{x,n}^{(J)} - \mathbf{U}_{x,n}^{(J-1)}) / l + \mathbf{U}_{x,n}^{(J)}\}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{A}_6, \mathbf{A}_7$ — постоянные матрицы, зависящие от параметров системы.

Для интегрирования полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений применяется метод Ньюмарка [8].

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Основной целью численного моделирования является расчет допустимых импульсных нагрузок, которые не приведут к потери работоспособности корпуса. Для этого исследовалась динамическая прочность конструкции с параметрами $L = 2.95$ м, $h = 0.06$ м, $R = 0.4$ м, $H_1 = 0.3$ м, $H_2 = 0.25$ м. Импульсная нагрузка нарастает по линейному закону и достигает максимального значения за временной интервал $t^* = 5$ мс. Нагрузка остается постоянной до значения времени $t^{**} = 30$ мс. Расчеты проводились для значений максимального импульсного давления: $P_{\max} = 12$ МПа. Механические характеристики композитного материала принимались следующими: $E_{xx} = 130$ ГПа, $E_{\theta\theta} = 130$ ГПа, $E_{\varphi\varphi} = 125$ ГПа, $G_{x\varphi} = 3.9$ ГПа, $G_{\theta\varphi} = 3.9$ ГПа, $G_{xz} = 3.9$ ГПа, $G_{z\varphi} = 3.9$ ГПа, $G_{\varphi\theta} = 3.9$ ГПа, $\mu_{x\varphi} = \mu_{\varphi x} = \mu_{\theta\varphi} = \mu_{\varphi\theta} = 0.32$; $\rho = 1400$ кг/м³.

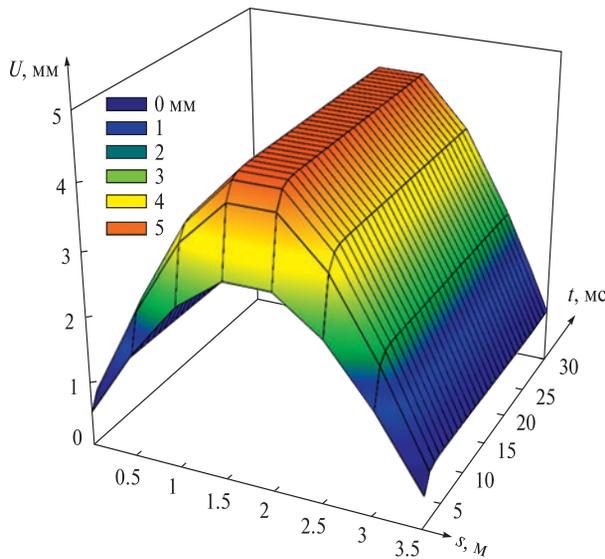


Рис. 2. Перемещения точек срединной поверхности конструкции, принадлежащих одной образующей, на интервале времени 0 ... 30 мс

Результаты расчета перемещений точек срединной поверхности, принадлежащие одной образующей конструкции, представлены на рис. 2.

На этом рисунке на оси аппликат приведены перемещения точек U . Точки образующей срединной поверхности конструкции описываются дуговой координатой s (рис. 1). Видно, что максимальные перемещения наблюдаются в средней части цилиндрической оболочки. Два днища имеют наименьшие перемещения. Подчеркнем, что перемещения достигают своего максимума за 10 мс, и в течение времени 30 мс не изменяют своих значений. Максимальные перемещения составляют 5 мм.

Проводились исследования динамики композитной конструкции с параметрами, представленными выше, и импульсной нагрузкой (1). Расчеты проводились для трех значений максимального импульсного давления: $P_{\max} = 5, 10$ и 15 МПа. Рассмотрим напряжения, возникающие в конструкции при ее динамическом деформировании. Отметим, что наибольшие значения имеют компоненты тензора напряжений σ_{xx} и $\sigma_{\theta\theta}$. Как показало численное моделирование, наибольшими значениями обладает составляющая σ_{xx} . Расчетные значения напряжений σ_{xx} на внутренней поверхности оболочки вдоль образующей конструкции, точки которой характеризуются дуговой координатой s представлены

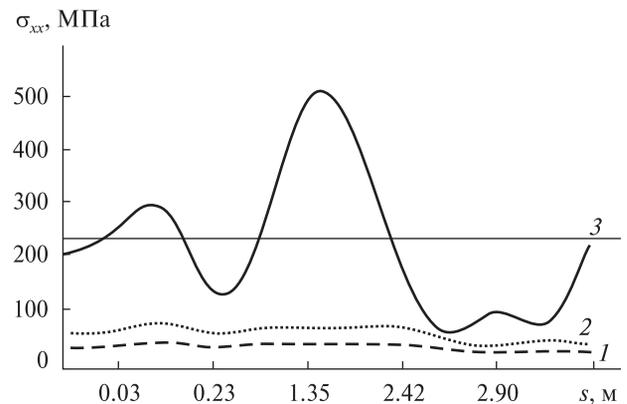


Рис. 3. Напряжения σ_{xx} на внутренней поверхности конструкции вдоль образующей, точки которой описываются дуговой координатой s : 1, 2, 3 — для $P_{\max} = 5, 10$ и 15 МПа соответственно

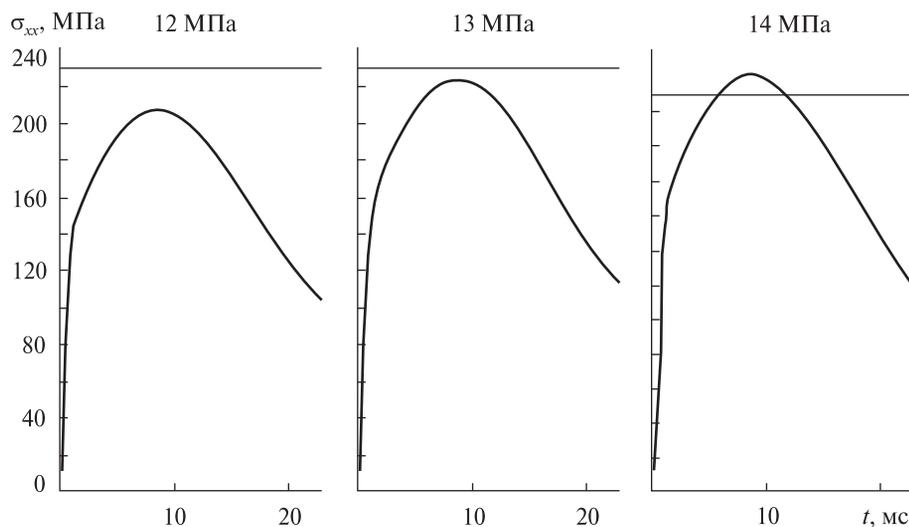


Рис. 4. Поведение напряжений σ_{xx} с течением времени при разных значениях максимального импульсного давления

на рис. 3. На этом рисунке показаны напряжения, наблюдающиеся в момент времени $t = 15$ мс. Штриховой и пунктирной линиями представлены графики напряжений, полученные при максимальном импульсном давлении $P_{\max} = 5$ и 10 МПа соответственно. Сплошной линией показаны напряжения, полученные для значений максимального импульсного давления $P_{\max} = 15$ МПа.

Предприятием, которое проектирует твердотопливные двигатели, из экспериментальных исследований были выбраны критерии работоспособности конструкции с точки зрения прочности. Как следует из расчетного анализа, который представлен выше, максимальными напряжениями являются σ_{xx} . Конструкция считается работоспособной, если $|\sigma_{xx}| < \sigma_*$, где σ_* – предел прочности. Следует подчеркнуть, что в наших расчетах не учитывались пластические деформации, которые могут возникнуть в конструкции.

В качестве предела прочности примем значение $\sigma_* = 230$ МПа. Итак, исходя из поведения напряжений, приведенных на рис. 3, конструкция, нагруженная изнутри с максимальным импульсным давлением $P_{\max} = 15$ МПа, не удовлетворяет критериям работоспособности. Конструкция, нагруженная изнутри с максимальным

внутренним давлением $P_{\max} = 10$ МПа, удовлетворяет условию работоспособности.

Мы исследовали численно поведение напряжения σ_{xx} с течением времени. Расчеты проводились для трех значений максимального импульсного давления: $P_{\max} = 12, 13$ и 14 МПа (рис. 4). Как видно максимальные напряжения достигаются за 10 мс. Критерию работоспособности, который сформулирован выше, удовлетворяет напряженно-деформированное состояние конструкции при $P_{\max} = 12$ и 13 МПа а напряженно-деформированное состояние конструкции при $P_{\max} = 14$ МПа не удовлетворяет этому критерию.

ВЫВОДЫ

Проведены численные исследования динамического напряженно-деформированного состояния композитного корпуса твердотопливного двигателя. Результатом анализа динамики конструкции является поведение перемещений и составляющих тензора напряжений с течением времени. Подчеркнем, что время роста импульсной нагрузки составляет $t^* = 5$ мс, а максимальное значение перемещений и составляющих тензора напряжений наблюдается в момент времени $t_1 = 10$ мс. Итак, после окончания роста

нагрузки компоненты перемещений и напряжений продолжают увеличиваться. Максимальные напряжения σ_{xx} наблюдаются в момент времени $t_1 = 10$ мс, и уже в момент времени 20 мс снижаются наполовину.

1. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. — М.: Машиностроение, 1977. — 485 с.
2. Болгарский А. В., Мухачев Г. А., Шукин В. К. Термодинамика и теплопередача. — М.: Высш. шк., 1975. — 494 с.
3. Борисов В. А. Конструирование основных узлов и систем ракетных двигателей. — Самара: Самар. гос. аэрокосмич. ун-т, 2011. — 114 с.
4. Григolyuk Э. И., Мамай В. И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. — М.: Физматлит, 1997. — 264 с.
5. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. — Киев: ИД «Академперіодика», 2006. — 472 с.
6. Моссаковский В. И., Макаренко А. Г., Никитин П. И. и др. Прочность ракетных конструкций / Под ред. В. И. Моссаковского. — М.: Высш. шк., 1990. — 359 с.
7. Санін Ф. П., Кучма Л. Д., Джур Є. О. та ін. Твердопаливні ракетні двигуни. — Дніпропетровськ: ДНУ, 1999. — 320 с.
8. Bathe K. J., Wilson E. L. Numerical methods in finite element analysis. — N. J. Prentice-Hall., Englewood Cliffs, 1976. — 528 p.
9. Chen J. T., Leu S.-Y. Finite element analysis, design and experiment on solid propellant motors with a stress reliever // Finite Elements in Analysis and Design. — 1998. — N 29. — P. 75–86.
10. Montesano J., Behdian K., Greatrix D. R., et al. Internal chamber modeling of a solid rocket motor: Effects of coupled structural and acoustic oscillations on combustion // J. Sound and Vibration. — 2008. — N 311. — P. 20–38.
11. Poe C. C. Impact damage and residual tension strength of a thick graphite/epoxy rocket motor case // J. Spacecraft and Rockets. — 1992. — 29, N 3. — P. 394–404.
12. Renganathan K., Nageswara-Rao B., Jana M. K. Failure pressure estimations on a solid propellant rocket motor with a circular perforated grain // Int. J. Pressure Vessels and Piping. — 1999. — N 76. — P. 955–963.
13. Soedel W. Vibrations of Shells and Plates. — New York: Inc. Marcel Dekker, 2005. — 361 p.
14. Yildirim H. C., Ozupek S. Structural assessment of a solid propellant rocket motor: Effects of aging and damage // Aerospace Sci. and Technol. — 2011. — N 15. — P. 635–641.

Стаття надійшла до редакції 29.06.16

REFERENCES

1. Biederman V. L. Mechanics of thin-walled structures, 485 p. (Engineering, Moscow, 1977) [in Russian].
2. Bulgarian A. V., Muhachev G. A., Shchukin V. K. Thermodynamics and Heat Transfer, 494 p. (Higher School, Moscow, 1975) [in Russian].
3. Borisov V. A. Construction of the main components and systems of rocket engines, 114 p. (Samara state. aerokosm. Univ., Samara, 2011) [in Russian].
4. Grigolyuk E. I., Mamai V. I. Nonlinear deformation of thin-walled structures, 264 p. (FIZMATLIT, Moscow, 1997) [in Russian].
5. Grigorenko Y. M., Vlaicu G. G., Grigorenko Ya. Numerically-analytical solution of problems of mechanics of shells on the basis of different models, 472 p. (Izdotselsky Academperiodika house, Kiev, 2006).
6. Mossakovskii V. I., Makarenko A. G., Nikitin P. I., et al. Durability missile designs, 359 p. (Ed. V. I. Mossakovskii, Higher School, Moscow, 1990) [in Russian].
7. Sanin F. P., Kuchma L. D., Jur E. A., et al. Solid rocket motors, 320 p. (DNU, Dnepropetrovsk, 1999). [in Ukrainian].
8. Bathe K. J., Wilson E. L. Numerical Methods in Finite Element Analysis, 528 p. (Prentice-Hall., Englewood Cliffs, N. J., 1976).
9. Chen J. T., Leu S.-Y. Finite element analysis, design and experiment on solid propellant motors with a stress reliever. *Finite Elements in Analysis and Design*, N 29, 75–86 (1998).
10. Montesano J., Behdian K., Greatrix D. R., Fawaz Z. Internal chamber modeling of a solid rocket motor: Effects of coupled structural and acoustic oscillations on combustion. *J. Sound and Vibration*, N 311, 20–38 (2008).
11. Poe C. C. Impact damage and residual tension strength of a thick graphite/epoxy rocket motor case. *J. Spacecraft and Rockets*, 29 (3), 394–404 (1992).
12. Renganathan K., Nageswara-Rao B., Jana M. K. Failure pressure estimations on a solid propellant rocket motor with a circular perforated grain. *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, N 76, 955–963 (1999).
13. Soedel W. Vibrations of Shells and Plates, 361 p. (Inc. Marcel Dekker, New York, 2005).
14. Yildirim H. C., Ozupek S. Structural assessment of a solid propellant rocket motor: Effects of aging and damage. *Aerospace Science and Technology*, N 15, 635–641 (2011).

М. В. Чернобрыкко¹, К. В. Аврамов¹, П. Г. Дегтяренко²,
А. М. Тонконоженко², Ю. В. Меша³, О. В. Тишковець⁴,
О. В. Жолос⁴

¹ Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного
Національної академії наук України, Харків

² Державне підприємство «Конструкторське бюро
«Південне» ім. М. К. Янгеля», Дніпро

³ НВП ХАРТРОН-АРКОС ЛТД, Харків

⁴ Національний технічний університет «Харківський
політехнічний інститут», Харків

ДИНАМІКА КОМПОЗИТНОГО КОРПУСУ ТВЕРДОПАЛИВНОГО ДВИГУНА РАКЕТИ ПІД ДІЄЮ ІМПУЛЬСНИХ НАВАНТАЖЕНЬ, ЩО ОПИСУЮТЬ РОБОЧІ ПРОЦЕСИ В ДВИГУНІ

Представлена динамічна модель деформування композитного корпусу твердотопливного двигуна ракети під дією внутрішнього імпульсного тиску, який описує робочі процеси двигуна. Корпус є тонкостінною конструкцією, яка складається з циліндричної оболонки і двох днищ у вигляді зрізаних півсфер. Модель динамічного деформування враховує зсув і інерцію обертання, фізико-механічні властивості композиційного матеріалу. Для дослідження динамічної поведінки конструкції в роботі розроблено напіваналітичний метод. Проведено чисельні дослідження динамічної міцності корпусу твердотопливного двигуна.

Ключові слова: твердотопливний двигун, композитний корпус, імпульсний тиск, динамічна міцність, напіваналітичний метод.

M. V. Chernobryvko¹, K. V. Avramov¹, P. G. Degtyarenko²,
A. M. Tonkonogenko², Y. V. Mesha³, O. V. Tishkovets⁴,
O. V. Zholos⁴

¹ Podgorny Institute for Mechanical Engineering, National
Academy of Science of Ukraine, Kharkiv

² Yangel Yuzhnoye State Design Office, Dnipro

³ LTD RPI HARTRON-ARKOS, Kharkiv

⁴ NTU “KhPI”, Kharkiv

DYNAMICS OF SOLID PROPELLANT MOTOR COMPOSITE CASING UNDER IMPACT PRESSURE WHICH DESCRIBE THE WORKFLOW ENGINE

We propose the model of the dynamic behavior of solid propellant motor composite casing under the internal impact pressure. This pressure describes the operation of the engine. The thin-walled casing consists of the cylindrical shell and two bottoms in the form of truncated hemispheres. The casing is clamped to the rocket along two edges of the bottoms. The structure model takes into account the shear, the rotary inertia and the stress-strain relations for the orthotropic material. The semi-analytical method allows analyzing the stress-strain state of the structure. In the model, the thin-walled casing dynamic is described by high dimension system of the ordinary differential equations.

Key words: solid propellant motor, internal impact pressure, stress-strain state, equations of thin-walled structure.