

doi: <https://doi.org/10.15407/knit2016.06.020>

УДК 629.78

А. И. Маслова, А. В. Пироженко

Институт технической механики Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины, Днепро

ИЗМЕНЕНИЕ ОРБИТЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАЛОГО ПОСТОЯННОГО ТОРМОЖЕНИЯ

Рассмотрена задача торможения спутника на низкой почти круговой орбите постоянным трансверсальным ускорением. Предложено использование новых переменных, описывающих движение и учитывающих особенность движения по почти круговым орбитам. Проанализированы основные закономерности движения и получены конечные аналитические выражения, позволяющие с высокой точностью описывать изменения параметров орбиты.

Ключевые слова: космический мусор, увод объектов с орбит, малое тормозящее ускорение, изменение орбиты.

В проекте LEOSWEEP (Improving Low Earth Orbit Security With Enhanced Electric Propulsion) рассматривается концепция увода объектов космического мусора, основанная на использовании воздействия на объекты плазменного пучка ионного двигателя [<http://www.leosweep.upm.es>, 2]. В рамках проекта рассматривается увод объектов с низких почти круговых околоземных орбит (высота орбит до 1000 км). Предполагается, что расстояние между уводимым объектом (целью) и специальным космическим аппаратом (пастухом) поддерживается почти постоянным, и сила, действующая на цель, почти постоянна и направлено по трансверсали к орбите. Для оценки предлагаемой концепции увода возникла задача анализа изменения орбиты спутника под действием малого постоянного тормозящего ускорения.

Исследования задачи движения спутника с малой постоянной тягой восходит к работам классиков отечественной механики космического полета [1, 3, 4]. Уже к 1970 г. были изучены основные закономерности движения для

рассматриваемой задачи [1, 3, 4, 6]. Вместе с тем ранее основное внимание исследователей было сосредоточено на вопросах разгона спутника и использования двигателей малой тяги для межпланетных перелетов [1, 3]. В нашей работе рассмотрена задача торможения спутника на низкой около круговой орбите постоянным трансверсальным ускорением. Использование новых переменных, описывающих движение, как представляется, позволило более просто получить ясные конечные формулы изменения параметров движения спутника в рассматриваемой задаче.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение спутника в гравитационном поле ньютоновского притягивающего центра. Предполагается, что кроме гравитационной силы на спутник действует постоянная по величине и направленная строго по касательной к орбите малая тормозящая сила. Предполагается также, что начальная орбита движения спутника близка к круговой. Требуется оценить изменение орбиты спутника с течением времени.

© А. И. МАСЛОВА, А. В. ПИРОЖЕНКО, 2016

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнение движения центра масс спутника имеет вид

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu\mathbf{R}}{R^3} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор центра масс спутника относительно притягивающего центра, μ — постоянная гравитационного поля, \mathbf{F} — возмущающее ускорение, точками обозначаются производные по времени.

Введем инерциальную ($OXYZ$) и орбитальную ($Oxuz$) правые системы координат (СК) с началом в притягивающем центре O . Оси $Oxuz$ определяются следующим образом: ось Ox направлена вдоль \mathbf{R} , ось Oy — в плоскости мгновенной орбиты в сторону движения спутника; ось Oz — по бинормали к орбите.

Умножая векторно (1) слева на \mathbf{R} , получим

$$\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}} = (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) = \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F},$$

где \mathbf{L} — удельный кинетический момент движения центра масс, \mathbf{M} — возмущающий момент. По построению орбитальной СК $\mathbf{L} = L\mathbf{e}_3$, где \mathbf{e}_3 — орт оси Oz . Тогда

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{L}\mathbf{e}_3 + L\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_3, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\omega}_0$ — угловая скорость $Oxuz$ относительно $OXYZ$.

Проектируя (2) на оси орбитальной СК, получим

$$\dot{L} = M_3, \quad \omega_{20}L = M_1 = 0, \quad \omega_{10}L = -M_2,$$

где индексами 1, 2, 3 обозначены проекции на оси Ox , Oy и Oz соответственно.

Следовательно, $\omega_{20} = 0$, $\omega_{10} = -M_2 / L$.

Так как $\mathbf{L} = L\mathbf{e}_3 = \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} = R^2\boldsymbol{\omega}_{30}\mathbf{e}_3$, то $\omega_{30} = L / R^2$.

Используя, например, кинематические соотношения для углов Эйлера

$$\omega_{10} = \dot{\Omega} \sin i \sin u + \frac{di}{dt} \cos u,$$

$$\omega_{20} = \dot{\Omega} \sin i \cos u - \frac{di}{dt} \sin u,$$

$$\omega_{30} = \dot{\Omega} \cos i + \dot{u},$$

и учитывая, что в кеплеровом движении $L = \sqrt{\mu p}$, где p — фокальный параметр орбиты, получим

первую группу уравнений возмущенного кеплерова движения:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \frac{R}{p} \cos u \tilde{F}_3, & \dot{\Omega} &= \frac{R \sin u}{p \sin i} \tilde{F}_3, \\ \dot{p} &= 2R\tilde{F}_2, & \dot{u} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{R^2} - \frac{R}{p} \sin u \text{ctg} i \tilde{F}_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tilde{F}_i = \sqrt{\frac{p}{\mu}} F_i$, ($i = 1, 2, 3$), F_1, F_2, F_3 — соответственно радиальное, трансверсальное и нормальное возмущающие ускорения; Ω, u, i — углы Эйлера (прецессия, чистое вращение, нутация), имеющие в теории космического полета названия аргумента восходящего узла орбиты, аргумента широты и наклона орбиты соответственно.

Проектируя (1) на Ox с учетом, что

$$\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{e}_1 = \ddot{R} - \omega_{30}^2 R,$$

где \mathbf{e}_1 — орт оси Ox , получим

$$\ddot{R} - \frac{L^2}{R^3} = -\frac{\mu}{R^2} + F_1. \quad (4)$$

Пусть начальная орбита центра масс почти круговая, $R \approx p$, или мгновенная кеплерова орбита имеет малый эксцентриситет ($e \ll 1$).

Для рассматриваемых почти круговых орбит за опорную (исходную невозмущенную орбиту) целесообразно брать не кеплерову эллиптическую орбиту, а круговую [5, 7]. Дело в том, что для почти круговых орбит при действии возмущений понятие эксцентриситета может терять смысл, поскольку учитываемые эксцентриситетом отклонения орбиты от круговой могут быть соизмеримы с отклонением орбит от кеплеровых, вносимых возмущениями. Именно с этим связано вырождение классических уравнений возмущенного кеплерова движения.

Введем новые переменные b_1 и b_2 следующим образом:

$$R = p(1 + b_1), \quad \dot{R} = b_2 \sqrt{\mu/p}. \quad (5)$$

Параметр b_1 — отклонение текущего радиуса возмущенной орбиты от ее фокального параметра, отнесенное к p . Параметр b_2 — радиальная скорость на возмущенной орбите, отнесенная к скорости движения по круговой орбите. В силу

постановки задачи b_1 и b_2 — малые величины, $b_i \ll 1$.

Дифференцируя первое уравнение (5) по времени, получим

$$\dot{b}_1 = b_2 \sqrt{\mu/p^3} - 2(1+b_1)^2 \tilde{F}_2. \quad (6)$$

Дифференцируя второе равенство (5) с учетом (3), (4), получим

$$\dot{b}_2 = b_2(1+b_1)\tilde{F}_2 + \tilde{F}_1 - \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \frac{b_1}{(1+b_1)^3}. \quad (7)$$

Уравнения (3), (4), (7) — уравнения возмущенного кеплерова движения для почти круговых орбит [5, 7].

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЙ

В силу постановки задачи $F_1 = F_3 = 0$, а $F_2 = \text{const} \ll 1$. Тогда уравнения движения спутника примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= 0, \quad \frac{di}{dt} = 0, \quad \dot{i} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} z^{-2}, \\ \dot{\gamma} &= 2zs\tilde{F}_2, \\ \dot{b}_1 &= b_2 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} - 2z^2 \tilde{F}_2, \\ \dot{b}_2 &= b_2 z \tilde{F}_2 - \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \frac{b_1}{z^3}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $p = p_0(1+\gamma)$ — фокальный параметр орбиты, p_0 — начальное значение фокального параметра, $z = 1+b_1$, $s = 1+\gamma$, γ , как и b_1, b_2 — малая величина.

Последних три уравнения (8) не зависят от изменения углов и описывают изменения формы орбиты в ее плоскости.

Введем для b_1 и b_2 новые переменные: амплитуду A и фазу w колебаний следующим образом:

$$b_1 = A \sin w, \quad b_2 = A \cos w.$$

То есть, используем классическую замену переменных метода усреднения, «заставляя» радиус орбиты совершать гармонические колебания относительно фокального параметра, а всю «нелинейность» динамики «загоним» в фазу этих колебаний.

Нетрудно видеть, что

$$\dot{A} = \dot{b}_1 \sin w + \dot{b}_2 \cos w, \quad A\dot{w} = \dot{b}_1 \cos w - \dot{b}_2 \sin w,$$

или

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \left(A \cos w \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} - 2(1+A \sin w)^2 \tilde{F}_2 \right) \sin w + \\ &+ \left(A \cos w \cdot (1+A \sin w) \tilde{F}_2 - \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \frac{A \sin w}{(1+A \sin w)^3} \right) \cos w, \\ A\dot{w} &= \left(A \cos w \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} - 2(1+A \sin w)^2 \tilde{F}_2 \right) \cos w - \\ &- \left(A \cos w \cdot (1+A \sin w) \tilde{F}_2 - \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \frac{A \sin w}{(1+A \sin w)^3} \right) \sin w. \end{aligned}$$

Производная A пропорциональна $A^2 \sqrt{\mu/p^3}$ и \tilde{F}_2 , а $\dot{w} \propto \sqrt{\mu/p^3}$. Так как A^2 и $\tilde{F}_2/\sqrt{\mu/p^3} = F_2/(\mu/p^2)$ (что равно отношению трансверсального ускорения к ускорению свободного падения на рассматриваемой высоте) малые величины, то переменные A и γ являются медленными переменными, а w — быстрой.

Осредненные по быстрой переменной (фазе) уравнения изменения A и γ дают уравнения первого приближения с точностью порядка $\varepsilon = \max\{A^2, F_2/(\mu/p^2)\}$, описывающие изменение A и γ на интервале времени порядка $2\pi/\varepsilon$ оборотов спутника вокруг Земли.

Уравнения первого приближения имеют вид

$$\dot{A} = -\frac{3}{2} A \sqrt{\frac{p_0 s}{\mu}} F_2, \quad (9)$$

$$\dot{s} = 2s \sqrt{\frac{p}{\mu}} F_2 \quad \text{или} \quad \dot{s} = 2s^{3/2} \sqrt{\frac{p_0}{\mu}} F_2. \quad (10)$$

Эти уравнения легко интегрируются. Проинтегрировав (10), найдем

$$\sqrt{s} = \frac{1}{s_0^{-1/2} - \sqrt{\frac{p_0}{\mu}} F_2 t} = \frac{\sqrt{s_0}}{1 - \sqrt{\frac{p_0 s_0}{\mu}} F_2 t},$$

где s_0 — начальное значение s , $s_0 = 1$ Тогда

$$p = \frac{p_0}{\left(1 - \sqrt{\frac{p_0}{\mu}} F_2 t\right)^2}. \quad (11)$$

Подставив решение (11) в (9), получим

$$A = A_0 \sqrt{1 - \sqrt{\frac{p_0}{\mu}} F_2 t}^3, \quad (12)$$

где A_0 — начальное значение амплитуды.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ И ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ

Расчеты показали не только качественное соответствие полученных формул, но и высокую точность решений уравнений первого приближения даже на длительном интервале времени. На рис. 1 представлены изменения b_1 , полученные интегрированием исходных уравнений (8) (тонкая сплошная линия), и изменения амплитуды колебаний b_1 по аналитической зависимости (12) (жирная курсивная линия). Как видно, отклонений в решениях не наблюдается. Таким образом, полученные формулы могут быть использованы для длительного прогнозирования изменений движения.

Перейдем к анализу закономерностей движения. Из выражения (11) следует, что при действии на спутник малого возмущающего трансверсального ускорения, направленного в противоположную сторону его движения ($F_2 < 0$), фокальный параметр будет медленно уменьшаться относительно своего начального значения. Для относительно небольшого промежутка времени это уменьшение близко к равномерному.

Из выражения (11) легко можно найти время T , за которое фокальный параметр снизится на интересующую нас высоту $H = p_0 - p(T)$:

$$T = \frac{\sqrt{1 - \frac{H}{p_0}} - 1}{\sqrt{\frac{p_0 - H}{\mu}} F_2}.$$

Характер зависимости T от начального значения фокального параметра $p_0^* = p_0 - R_z$, где R_z — средний радиус Земли, и тормозящего ускорения F_2 представлен на рис. 2. Как видим, время снижения: слабо зависит от начального значения фокального параметра для его рассматриваемого диапазона; почти обратно пропорционально увеличению силового воздействия F_2 .

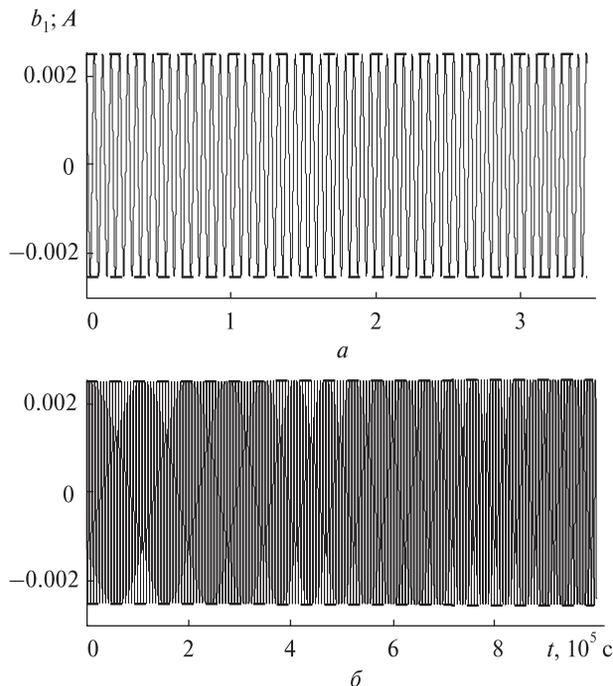


Рис. 1. Изменение b_1 и A для $b_{10} = A_0 = 0.0025$, $b_{20} = 0$, $\gamma = 0$: а — при $F_2 = -0.1$ мм/с², б — при $F_2 = -1$ мм/с²

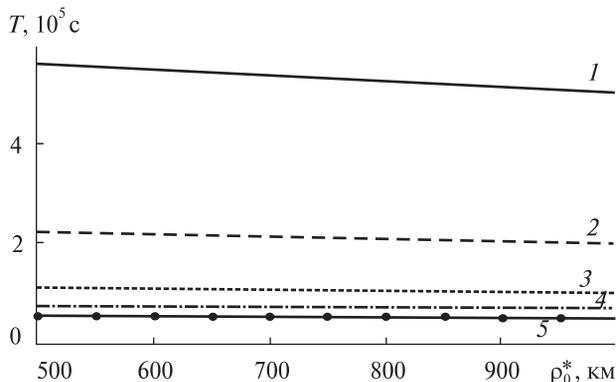


Рис. 2. Зависимость времени снижения T фокального параметра на 100 км ($H = 100$ км) от значений p_0 . Кривые 1 — 5 — для $F_2 = -0.1, -0.25, -0.5, -0.75$ и -1.0 мм/с² соответственно

Из выражения (12) следует, что амплитуда колебаний b_1 и b_2 при тормозящем ускорении увеличивается во времени. Решение (12) можно записать в виде

$$A = A_0 (p_0/p)^{3/4}. \quad (13)$$

Из выражения (13) легко видно, что уменьшение фокального параметра сопровождается увеличением амплитуды A (эксцентриситета) орбиты. Вместе с тем для рассматриваемых низких околоземных орбит это увеличение весьма незначительно. Например, при изменении высоты орбиты с 1000 до 500 км амплитуда (или эксцентриситет мгновенной орбиты) увеличится менее чем на 5.4 %. Поэтому можно говорить, что малое трансверсальное ускорение не изменяет характера почти круговой орбиты для низких околоземных орбит.

«Механику» малого изменения эксцентриситета орбиты можно объяснить следующим образом. Трансверсальное ускорение в вековом движении изменяет лишь энергию вращательного движения спутника относительно притягивающего центра. Энергию же колебаний R относительно среднего значения оно не изменяет (это нетрудно показать строго для рассматриваемой задачи [7]). Поэтому амплитуда колебаний R увеличивается только за счет изменения p , а не за счет увеличения энергии этих колебаний.

ВЫВОДЫ

1. Исследована задача об основных закономерностях изменения низкой околоземной орбиты спутника под действием малого постоянного трансверсального торможения. Получены конечные аналитические выражения, позволяющие с высокой точностью описывать изменение параметров орбиты.

2. Использование переменных, учитывающих близость изменений расстояния R к гармоническим колебаниям для почти круговых орбит, позволило значительно упростить исследование задачи.

3. Показано, что при малом постоянном трансверсальном ускорении изменение эксцентриситета орбиты весьма незначительно, и для рассматриваемых низких околоземных орбит орбита остается почти круговой.

Работа выполнена при поддержке 7th Framework Programme, проект LEOSWEEP (Improving Low

Earth Orbit Security With Enhanced Electric Propulsion), N 607457.

1. *Белецкий В. В.* Очерки по механике космического полета. — 3-е изд. — М.: Изд-во ЛКИ, 2009. — 432 с.
2. *Бомбарделли К., Алпатов А. П., Пироженко А. В. и др.* Проект «Космического пастуха» с ионным лучом. Идеи и задачи // *Космічна наука і технологія.* — 2014. — **20**, № 2. — С. 55—60.
3. *Евтушенко Ю. Г.* Влияние касательного ускорения на движение спутника // *Прикл. мат. и мех.* — 1966. — **30**, № 3. — С. 317—323.
4. *Охочимский Д. Е.* Исследование движения в центральном поле сил под действием постоянного касательного ускорения // *Космич. исслед.* — 1964. — **2**, № 6. — С. 817—842.
5. *Пироженко А. В.* К построению новых форм уравнений возмущенного кеплерова движения // *Космічна наука і технологія.* — 1999. — **5**, № 2/3. — С. 103—107.
6. *Прикладная небесная механика и управление движением:* Сб. ст., посвящ. 90-летию со дня рождения Д. Е. Охочимского / Составители: Т. М. Энеев, М. Ю. Овчинников, А. Р. Голиков. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2010 — 368 с.
7. *Alpatov A. P., Beletsky V. V., Dranovskii V. I., et al.* Dynamics of Tethered Space System. — Taylor & Francis Group, 2010. — 223 p.

Стаття надійшла до редакції 13.06.16

REFERENCES

1. *Beleckij V. V.* Oчерki po mehanike kosmicheskogo poleta, 432 p. (Izd-vo LKI, Moscow, 2009).
2. *Bombardelli K., Alpatov A. P., Pirozhenko A. V. i dr.* Proekt «Kosmicheskogo pastuha» s ionnym luchom. Idei i zadachi. *Kosm. nauka tehnol.*, **20** (2), 55 — 60 (2014).
3. *Evtushenko Ju. G.* Vlijanie kasatel'nogo uskorenija na dvizhenie sputnika. *Prikl. mat. i meh.*, **30** (3), 317—323 (1966).
4. *Ohocimskij D. E.* Issledovanie dvizhenija v central'nom pole sil pod dejstviem postojannogo kasatel'nogo uskorenija. *Kosmich. issled.*, **2** (6), 817—842 (1964).
5. *Pirozhenko A. V.* K postroeniju novyh form uravnenij voz-mushhennogo keplerova dvizhenija. *Kosm. nauka tehnol.*, **5** (2/3), 103—107 (1999).
6. *Prikladnaja nebesnaja mehanika i upravlenie dvizheniem:* Sb. st., posvjashh. 90-letiju so dnja rozhdenija D. E. Oho-cimskogo / Sostaviteli: T. M. Jeneev, M. Ju. Ovchinnikov, A. R. Golikov, 368 p. (IPM im. M. V. Keldysha, Moscow, 2010).
7. *Alpatov A. P., Beletsky V. V., Dranovskii V. I., et al.* Dynamics of Tethered Space System, 223 p. (Taylor & Francis Group, 2010).

A. I. Maslova, O. V. Pirozhenko

Інститут технічної механіки
Національної академії наук України
і Державного космічного агентства України, Дніпро

ЗМІНА ОРБИТИ ПІД ДІЄЮ МАЛОГО ПОСТІЙНОГО ГАЛЬМУВАННЯ

Розглянуто задачу гальмування супутника на низькій майже коловій орбіті постійним трансверсальним прискоренням. Запропоновано використання нових змінних, що описують рух і враховують особливість руху по майже колових орбітах. Проаналізовано основні закономірності руху і отримано кінцеві аналітичні вирази, що дозволяють з високою точністю описувати зміни параметрів орбіти.

Ключові слова: космічне сміття, відведення об'єктів з орбіт, мале гальмівне прискорення, зміна орбіти.

A. I. Maslova, A.V. Pirozhenko

Institute of Technical Mechanics
of the National Academy of Science of Ukraine
and the National Space Agency of Ukraine, Dnipro

ORBIT CHANGES UNDER THE SMALL CONSTANT DECELERATION

This paper considers the problem of braking a satellite on a low nearly circular orbit via constant transversal acceleration. We propose to use a new set of variables, describing the motion and taking into account features of the motion on a nearly circular orbit. We analyzed the main regularities of motion and received the final analytical expressions, allowing to describe the changes of the orbital parameters with a high accuracy.

Key words: space debris, deorbit of objects, small braking acceleration, orbit changes.