doi: https://doi.org/10.15407/knit2016.06.010

УДК 681.518.5

В. Ф. Губарев, С. В. Мельничук

Институт космических исследований Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины, Киев

КОМБИНАТОРНЫЙ МЕТОД ИНТЕРВАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ АСТРОДАТЧИКОВ

Предлагается метод нахождения интервальных оценок параметров ориентации космического аппарата. Исходными данными задачи являются измерения астродатчиков. Рассматриваются системы с одним, двумя и тремя датчиками. Проводится сравнение точности решения по ширине интервальных оценок параметров ориентации.

Ключевые слова: *комбинаторный метод, астродатчик, гарантированное оценивание ориентации, интервальное оценивание.*

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время астродатчики (АД) являются одним из основных инструментов, позволяющих определять ориентацию космических аппаратов (КА) по направлениям на звезды [4, 6]. При этом использование выходной информации двух и более АД позволяет существенно повысить точность оценивания кватерниона ориентации по угловым координатам всех звезд, попавших в поле зрения кластера звездных датчиков. Достигается это за счет такого взаимного расположения звездных датчиков на борту КА, при котором можно существенно увеличить углы между направлениями на звезды от разных АД по сравнению с угловым размером поля зрения одного АД. Это обстоятельство становится существенным, когда измерительная информация об угловых координатах звезд является приближенной, т. е. содержит погрешности. Тогда алгоритмы определения ориентации при малых углах между единичными векторами направлений на звезды, т.е. при малом поле зрения, дают достаточно большую погрешность оценивания, что имеет место, как правило, в случае одного АД. Если же ориентацию определять по звездам от разных датчиков, то углы между направлениями на звезды можно существенно увеличить. В результате, как продемонстрировано в работе [3], даже при использовании двух АД удалось значительно уменьшить норму вектора погрешности по сравнению с нормой вектора ошибки, вычисленной по показаниям одного АД. При этом в работе [3] для оценивания кватерниона ориентации применялся рекуррентный метод наименьших квадратов с регуляризацией. Задача сводилась к минимизации сглаживающего функционала с определением параметра регуляризации из принципа обобщенной невязки.

В данной работе предлагается иной способ определения кватерниона ориентации на основе комбинаторного метода решения переопределенной системы уравнений, к которым сводится указанная задача при использовании M АД с n_m звездами в поле зрения m-го датчика ($m=\overline{1,M}$), когда

$$\sum_{m=1}^{M} n_m = N$$

по крайней мере больше трех.

Если погрешности измерения составляющих вектора направления на звезды задаются в виде ограничительных неравенств, то комбинаторный метод, описанный в работе [1], позволяет получать приближенную оценку кватерниона и гарантированный интервал принадлежности его точного значения. По этим данным непосредственно устанавливается эффективность алгоритмов и можно оптимизировать проектные параметры системы ориентации.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Кластерный измерительный звездный комплекс, состоящий из M АД, каждый из которых имеет свою оптическую систему (объектив), матричный приемник излучения (ПЗС или КМОП) и блок электроники, позволяет, как было сказано, более эффективно и надежно определять ориентацию КА в сравнении с одним АД. При этом бортовой вычислитель, входящий в ее состав, обрабатывает исходную информацию всех АД и на выходе выдает параметры ориентации КА, включая угловые скорости его вращательного движения. В результате можно отказаться от использования на борту КА других датчиков. Вся необходимая информация для управления угловым движением КА выдается бортовым вычислителем. Здесь мы будем рассматривать только метод и алгоритм определения кватерниона ориентации по направлениям на звезды, попавшим в кадр каждого из АД. Определение по этой информации угловых скоростей осуществляется другим алгоритмом, который в работе не описывается.

Каждый АД функционирует следующим образом: на его матричном приемнике экспонируется кадр с изображением звездного неба, в нем выделяются изображения звезд и определяются их координаты. Звезды в кадре или их часть отождествляются со звездами в бортовом навигационном каталоге, который содержит координаты звезд с их положениями в одной из инерциальных (небесных) систем координат (ИСК). Координаты направлений на звезды относительно внутренней системы координат (ВСК) каждого АД и координаты отождествленных с этими звездами из бортового каталога подаются на вход бортового вычислителя, в котором по этой информации определяется кватернион ориентации.

Пусть O_m, x_m, y_m, z_m — система координат, соответствующая ВСК$_m$, т. е. m-му астродатчику АД$_m$, а O_0, x_0, y_0, z_0 — система координат, соответствующая ИСК. Направления на звезды, попавшие в поле зрения m-го датчика, представим в виде векторов $r^{mi} = (r^{mi}_{x_0}, r^{mi}_{y_0}, r^{mi}_{z_0}),\ i = 1,2,\ldots,n_m$. Направления на те же звезды, но в системе координат ВСК$_m$, запишем как $b^{mi} = (b^{mi}_x, b^{mi}_y, b^{mi}_z)$. Полагаем, что компоненты вектора r^{mi} из бортового каталога известны с высокой точностью, а измеренные АД направления вектора b^{mi} содержат погрешности, т.е. имеем

$$\tilde{b}^{mi}_x = b^{mi}_x + \xi^{mi}_x,\ \tilde{b}^{mi}_y = b^{mi}_y + \xi^{mi}_y,$$

$$\tilde{b}^{mi}_z = b^{mi}_z + \xi^{mi}_z, \tag{1}$$

где $b^{mi}_x, b^{mi}_y, b^{mi}_z$ — точные значения составляющих вектора b^{mi}, $\tilde{b}^{mi}_x$, $\tilde{b}^{mi}_y$, $\tilde{b}^{mi}_z$ — измеренные, а ξ^{mi}_x, ξ^{mi}_y, ξ^{mi}_z — случайные погрешности измерений, о которых априори известно, что они по величине ограничены неравенствами

$$\left|\xi^{mi}_x\right| \le \varepsilon^{mi}_x,\ \left|\xi^{mi}_y\right| \le \varepsilon^{mi}_y,\ \left|\xi^{mi}_z\right| \le \varepsilon^{mi}_z. \tag{2}$$

Если все АД$_m$ идентичны, и звезды в поле зрения каждого датчика имеют близкие межзвездные угловые размеры, то можно для простоты считать $\varepsilon^{mi}_x = \varepsilon_1$, $\varepsilon^{mi}_y = \varepsilon_2$, $\varepsilon^{mi}_z = \varepsilon_3$.

Зададим связь между ИСК и ВСК$_1$, т. е. датчиком АД$_1$, с помощью ортогональной матрицы ориентации

$$S_0 = \begin{bmatrix} s^0_{x_1} & s^0_{x_2} & s^0_{x_3} \\ s^0_{y_1} & s^0_{y_2} & s^0_{y_3} \\ s^0_{z_1} & s^0_{z_2} & s^0_{z_3} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

а переход от ВСК$_1$ к ВСК$_m$ ($m = 2,3,\ldots,M$) — с помощью матриц взаимной ориентации

$$S_0^m = \begin{bmatrix} s_{x_1}^{0m} & s_{x_2}^{0m} & s_{x_3}^{0m} \\ s_{y_1}^{0m} & s_{y_2}^{0m} & s_{y_3}^{0m} \\ s_{z_1}^{0m} & s_{z_2}^{0m} & s_{z_3}^{0m} \end{bmatrix}, \; m = 2,3,\ldots,M. \qquad (4)$$

Матрицы (3), (4) называют еще матрицами направляющих косинусов, поскольку их элементы выражаются через тригонометрические функции углов Крылова. Ортогональность обеспечивает свойства их обратимости и $S^{-1} = S^T$ (T — операция транспонирования). Поэтому элементы матриц ориентации нельзя рассматривать как независимые переменные, а независимыми будут либо углы Крылова, определяющие углы поворота при переходе от одной системы координат к другой, либо кватернион ориентации Λ. Например, выражение матрицы S_0 через Λ имеет вид

$$S_0(\Lambda) = I_3 - 2\lambda_0\breve{\lambda} + 2\breve{\lambda}\breve{\lambda}, \qquad (5)$$

где $\Lambda^T = (\lambda_0, \lambda^T)$, $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, I_3 — единичная матрица размерности 3×3, а $\breve{\lambda}$ — кососимметричная матрица:

$$\breve{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Кроме того, кватернион Λ должен удовлетворять условию нормировки $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется по направлениям на звезды, установленным с помощью системы АД$_m$, $m = \overline{1,M}$, и соответствующих направлений на те же звезды из бортового каталога разработать алгоритм, обеспечивающий наилучшую точность определения ориентации КА по этим данным. Для этого следует использовать систему уравнений, которая получается на основе соотношений, связывающих выражения одних и тех же векторов в разных системах координат, связанных между собой матрицей поворотов. Вектор направления на i-ю звезду r^{mi} в системе координат ИСК с помощью двух матриц поворота преобразуется в вектор направления b^{mi} на ту же звезду в системе координат ВСК$_m$. Это дает следующую систему уравнений:

$$S_0 \cdot S_0^m \cdot b^{mi} = r^{mi}. \qquad (7)$$

Матрица S_0^m при $m=1$ является единичной $S_0^1 = I_3$. Из (7) получаются уравнения для нахождения матрицы ориентации S_0

$$S_0^T \cdot r^{mi} = S_0^m \cdot b^{mi}, \; m = \overline{1,M},$$
$$i = i(m) = 1,2,\ldots,n_m, \qquad (8)$$

где S_0^T соответствует транспонированной матрице S_0 (3). При общем числе звезд в поле зрения всех астродатчиков больше трех уравнения (8) дают переопределенную систему уравнений для нахождения S_0. Если такую переопределенную систему решать взвешенным методом наименьших квадратов (ВМНК), то приходим к задаче нахождения ортогональной матрицы S_0, которая минимизирует функцию потерь, представляющую собой взвешенную сумму квадратов векторов — разностей между измеренными в ВСК$_m$ и преобразованными направлениями на звезды b^{mi} и соответствующими ИСК векторами r^{mi}. Эту задачу применительно к проблеме ориентации КА впервые сформулировал Вахба [7]. Однако практического применения она не нашла в силу того, что элементы матрицы S_0 не являются независимыми, а определяются согласно (5) меньшим числом независимых переменных, выражаемых кватернионом ориентации или углами Крылова. Задачу Вахба при этом использовали как исходную, преобразуя ее к такому виду, при котором непосредственно находился кватернион ориентации [5].

В данной работе ставится задача не просто дать оценку кватерниона, а для каждой его составляющей, исходя из (1), (2) и интервального анализа, найти гарантированный интервал принадлежности точного значения. Тогда по его ширине можно судить об эффективности различных алгоритмов и выбирать проектные параметры системы определения ориентации, при которых достигается наиболее высокая точность. Такую задачу будем решать в два этапа. На первом из них по интервальным оценкам (1), (2) и уравнениям (8) находятся гарантированные интервалы принадлежности точных значений элементов матрицы ориентации, а на втором — по этим результатам определяются гарантированные интервалы для составляющих кватерниона.

Для реализации такого подхода необходимо достаточно близкое к точному знание матриц взаимной ориентации S_0^m. Поэтому предварительно должна быть решена задача определения ВСК$_m$ ($m=\overline{2,M}$) по отношению к ВСК$_1$. Алгоритм решения такой задачи описан в работе [2]. Полагаем, что такая задача решена, и матрицы S_0^m нам известны с приемлемой точностью.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Запишем систему уравнений (7) в виде

$$S_0^T \cdot r^{mi} = \tilde{\tilde{b}}^{mi}, \tag{9}$$

где

$$\tilde{\tilde{b}}^{i} = S_0^m \cdot \tilde{b}^{mi}. \tag{10}$$

Интервальные оценки для вектора $\tilde{\tilde{b}}^{mi}$ можно получить из (1), (2) путем следующих действий. Сначала по измеренным значениям $\tilde{b}^{mi}$ определяются оценки вектора $\tilde{\tilde{b}}^{mi}$ из (10), а затем находятся интервалы принадлежности точных значений $\tilde{\tilde{b}}_T^{mi}$ для правых частей (9), которые запишем как

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{b}}_{Tx}^{mi} &\in [\tilde{\tilde{b}}_x^{mi} - \delta_x^m, \tilde{\tilde{b}}_x^{mi} + \delta_x^m], \\ \tilde{\tilde{b}}_{Ty}^{mi} &\in [\tilde{\tilde{b}}_y^{mi} - \delta_y^m, \tilde{\tilde{b}}_y^{mi} + \delta_y^m], \\ \tilde{\tilde{b}}_{Tz}^{mi} &\in [\tilde{\tilde{b}}_z^{mi} - \delta_z^m, \tilde{\tilde{b}}_z^{mi} + \delta_z^m], \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_x^m &= \left|s_{x_1}^{0m}\right|\varepsilon_1 + \left|s_{x_2}^{0m}\right|\varepsilon_2 + \left|s_{x_3}^{0m}\right|\varepsilon_3, \\ \delta_y^m &= \left|s_{y_1}^{0m}\right|\varepsilon_1 + \left|s_{y_2}^{0m}\right|\varepsilon_2 + \left|s_{y_3}^{0m}\right|\varepsilon_3, \\ \delta_z^m &= \left|s_{z_1}^{0m}\right|\varepsilon_1 + \left|s_{z_2}^{0m}\right|\varepsilon_2 + \left|s_{x_3}^{0m}\right|\varepsilon_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Когда матрица взаимной ориентации S_0^m вычислена приближенно, и если известны интервальные оценки соответствующего ей кватерниона или углов Крылова, которые сравнимы по величине с (2), можно, модифицируя уравнения (12) на основе (10), получить уточненные оценки гарантированных интервалов. В рамках данной статьи полагаем, что расчетные погрешности оценивания S_0^m существенно меньше погрешностей измерения. Тогда имеем переопределенную систему линейных уравнений (9) относительно элементов матрицы S_0^T при неточно заданной правой части, определяемой интервальными оценками (11), (12).

Переопределенную систему уравнений (9) относительно элементов матрицы S_0^T (наблюдаемых звезд больше трех) перепишем в следующем блочно-диагональном виде:

$$\begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1^0 \\ S_2^0 \\ S_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}}_x \\ \tilde{\tilde{b}}_y \\ \tilde{\tilde{b}}_z \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где

$$R = \begin{bmatrix} r_{x_0}^{11} & r_{y_0}^{11} & r_{z_0}^{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{x_0}^{1n_1} & r_{y_0}^{1n_1} & r_{z_0}^{1n_1} \\ r_{x_0}^{21} & r_{y_0}^{21} & r_{z_0}^{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{x_0}^{2n_2} & r_{y_0}^{2n_2} & r_{z_0}^{2n_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{x_0}^{Mn_M} & r_{y_0}^{Mn_M} & r_{z_0}^{Mn_M} \end{bmatrix},$$

$$S_1^0 = \begin{bmatrix} s_{x_1}^0 \\ s_{y_1}^0 \\ s_{z_1}^0 \end{bmatrix}, \quad S_2^0 = \begin{bmatrix} s_{x_2}^0 \\ s_{y_2}^0 \\ s_{z_2}^0 \end{bmatrix}, \quad S_3^0 = \begin{bmatrix} s_{x_3}^0 \\ s_{y_3}^0 \\ s_{z_3}^0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{b}}_x = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}}_x^{11} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_x^{1n_1} \\ \tilde{\tilde{b}}_x^{21} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_x^{2n_2} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_x^{Mn_M} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{b}}_y = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}}_y^{11} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_y^{1n_1} \\ \tilde{\tilde{b}}_y^{21} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_y^{2n_2} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_y^{Mn_M} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{b}}_z = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{b}}_z^{11} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_z^{1n_1} \\ \tilde{\tilde{b}}_z^{21} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_z^{2n_2} \\ \vdots \\ \tilde{\tilde{b}}_z^{Mn_M} \end{bmatrix}.$$

В результате (13) распадается на три независимые подсистемы относительно искомых векторов S_1^0, S_2^0, S_3^0. Каждая из них является переопределенной, когда

$$\sum_{m=1}^{M} n_m$$

больше трех, и их разрешимость определяется свойствами матрицы R. Она будет иметь ранг, равный трем, если найдется тройка векторов r^{mi}, не лежащих в одной плоскости. Когда же любая тройка векторов r^{mi}, являющихся векторами-строками матрицы R, не принадлежит одной плоскости, то все квадратные системы, получаемые из R удалением соответствующего числа строк, будут невырожденными. В этом случае комбинаторный метод решения, описанный в работе [1], будет наиболее эффективным. Однако не менее важно оценивать также степень близости к вырожденности, характеризуемой числом обусловленности соответствующих матриц. При большом числе обусловленности решения становятся чувствительными к погрешностям в данных. Приближенно судить об обусловленности матриц с единичными векторами можно по углу между ними. Чем ближе этот угол к $\pi/2$, тем ближе число обусловленности к 1. Подобрать подходящую обусловленность можно путем варьирования в допустимых пределах матриц взаимной ориентации астродатчиков.

Комбинаторный метод [1] решения переопределенной системы уравнений (13) состоит из последовательности следующих действий. Для каждой независимой подсистемы формируется множество невырожденных квадратных систем уравнений, которых не более C_N^3. Каждая квадратная система решается, и находятся все возможные оценки составляющих векторов S_1^0, S_2^0 и S_3^0. На основе правила Крамера по аналогии с (11), (12) устанавливаются покомпонентно интервальные оценки для всех взятых квадратных систем. При этом такие гарантированные оценки получены для самых неблагоприятных реализаций погрешности ξ в (1), (2). Однако в реальности вероятность такого события мала и следует ожидать более благоприятной реализации помехи. Учесть особенности реализованной при измерениях помехи можно с помощью нижеследующей процедуры. Сгруппируем все полученные результаты отдельно по каждой составляющей векторов S_1^0, S_2^0 и S_3^0. Тогда пересечение всех интервалов в каждой группе даст оценку минимально возможному гарантированному множеству принадлежности точных значений для каждого элемента искомой матрицы ориентации. Этим можно завершить первый этап решения задачи.

Замечание 1. Когда N очень большое, можно ограничить число решаемых квадратных систем, задавшись некоторым предельно допустимым числом обусловленности, если выбросить те квадратные системы, которые превышают этот порог.

Замечание 2. Поскольку матрица R одна и та же для всех трех подсистем, и формируется она из достаточно высокоточных векторов r^{mi}, можно сделать предварительный отбор по числу обусловленности тех систем, которые можно отбросить.

Замечание 3. Строки и столбцы матрицы S_0 должны быть нормированными и попарно ортогональными. Это обстоятельство можно в определенных случаях использовать для сужения интервальных оценок на основе интервального анализа.

В предлагаемом подходе сохраним матрицу S_0 и интервальные оценки ее составляющих в том виде, как они были получены комбинаторным методом. Из (5), (6) нетрудно выразить квадратичные мономы для составляющих кватерниона в виде

$$\begin{gathered}\lambda_0^2=\alpha_0,\ \lambda_1^2=\alpha_1,\ \lambda_2^2=\alpha_2,\ \lambda_3^2=\alpha_3,\\ \lambda_0\lambda_1=\alpha_4,\ \lambda_0\lambda_2=\alpha_5,\ \lambda_0\lambda_3=\alpha_6,\\ \lambda_1\lambda_2=\alpha_7,\ \lambda_1\lambda_3=\alpha_8,\ \lambda_2\lambda_3=\alpha_9,\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered}\alpha_0=\frac{1}{4}(1+s_{x_1}^0+s_{y_2}^0+s_{z_3}^0),\ \alpha_1=\frac{1}{4}(1+s_{x_1}^0-s_{y_2}^0-s_{z_3}^0),\\ \alpha_2=\frac{1}{4}(1-s_{x_1}^0+s_{y_2}^0-s_{z_3}^0),\ \alpha_3=\frac{1}{4}(1-s_{x_1}^0-s_{y_2}^0+s_{z_3}^0),\\ \alpha_4=\frac{1}{4}(s_{z_2}^0-s_{y_3}^0),\ \alpha_5=\frac{1}{4}(s_{x_3}^0-s_{z_1}^0),\ \alpha_6=\frac{1}{4}(s_{y_1}^0-s_{x_2}^0),\\ \alpha_7=\frac{1}{4}(s_{x_2}^0+s_{y_1}^0),\ \alpha_8=\frac{1}{4}(s_{x_3}^0+s_{z_1}^0),\ \alpha_9=\frac{1}{4}(s_{y_3}^0+s_{z_2}^0).\end{gathered} \tag{15}$$

Зная интервальные оценки составляющих векторов S_1^0, S_2^0 и S_3^0, нетрудно вычислить на основе (15) гарантированные интервалы принадлежности правых частей уравнений (14). В результате получим

$$\alpha_j \in [\alpha_j^{(-)}, \alpha_j^{(+)}],\ j = 0, 1, 2, \ldots, 9. \qquad (16)$$

Далее последовательно уточняем эти полученные интервальные оценки и знаки составляющих кватерниона. Из условия $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 \geq 0$ исключаются отрицательные части интервалов. Чисто отрицательных интервалов для этих α быть не может, поскольку это противоречит принципу гарантированного оценивания. В крайнем случае возможны интервалы с нулевой правой границей. Тогда эти кватернионы получаются равными нулю. Более того, все α_j, стоящие в правых частях (14), (15), должны удовлетворять условию $\alpha_j \leq 1$. Тогда, исходя из этого условия, следует уточнить оценки (16), удалив из них недопустимые части интервалов. После этого производим упорядочивание уравнений первой строки (14) по удалению нижней границы интервалов принадлежности α от нуля, расположив их в невозрастающем порядке. Пусть такое упорядочение дает последовательность уравнений

$$\lambda_{i1}^2 = \alpha_{i1},\ \lambda_{i2}^2 = \alpha_{i2},\ \lambda_{i3}^2 = \alpha_{i3},\ \lambda_{i4}^2 = \alpha_{i4}. \qquad (17)$$

Из этих уравнений определяются интервальные оценки принадлежности кватернионов. Для тех λ_j, для которых $\alpha_j^{(-)} > 0$, интервалы принадлежности находятся по формуле

$$\lambda_j \in \left[\sqrt{\alpha_j^{(-)}}, \sqrt{\alpha_j^{(+)}}\right]$$

или

$$\lambda_j \in \left[-\sqrt{\alpha_p^{(+)}}, -\sqrt{\alpha_p^{(-)}}\right]. \qquad (18)$$

Знак λ_j, т. е. выбор одной из этих формул, устанавливается по предшествующей оценке λ_j, полагая при этом, что дискретность измерений по времени такова, что приращение $\Delta\lambda_j$ на шаге дискретизации также мало. Для тех j, для которых $\alpha_j^{(-)} = 0$, интервальная оценка находится по формуле

$$\lambda_j \in [-\sqrt{\alpha_j^{(+)}}, \sqrt{\alpha_j^{(+)}}]. \qquad (19)$$

Любой нормированный кватернион, принадлежащий интервалам (18), (19), можно брать в качестве оценки $\widehat{\Lambda}$, поскольку вероятностные свойства погрешностей измерения в данном подходе не учитываются. Однако кватернион, наиболее близко расположенный к серединам этих интервалов, является предпочтительным, так как он гарантированно ближе к точному значению при самых наихудших реализациях погрешности, удовлетворяющей (2). Самый простой способ его приближенного выбора состоит в следующем. Для трех самых малых интервалов принадлежности кватерниона взять среднее значение, а для оставшейся составляющей взять значение из условия нормировки. Если при этом окажемся за пределами интервала, то простым перемещением следует расположить кватернион в допустимой области.

Привлекая другие уравнения из (14), можно улучшить результат как в отношении ширины интервалов, так и по уточнению знака составляющих, близких к нулю. Для этого необходимо рассмотреть все возможные случаи расположения интервалов принадлежности α_j $(j = 5, 9)$ относительно нуля. Так, в случае, когда все эти интервалы не содержат точки ноль, можно применить приведенный ниже алгоритм. Для двух наиболее удаленных от нуля составляющих λ_{i3}, λ_{i4} привлекаем уравнение

$$\lambda_{i3} \cdot \lambda_{i4} = \alpha_{i5}. \qquad (20)$$

При известных знаках α_{i5} и λ_{i4} из (20) непосредственно устанавливается знак λ_{i3}. Это же уравнение совместно с уравнениями для λ_{i3}^2 и λ_{i4}^2 позволяет найти интервальные оценки принадлежности λ_{i3} и λ_{i4}. В случае $\alpha_{i5}^{(-)} > 0$ их можно записать как

$$\lambda_{i3} \in \left[\frac{\alpha_{i5}^{(-)}}{\lambda_{i4}^{(+)}}, \frac{\alpha_{i5}^{(+)}}{\lambda_{i4}^{(-)}}\right] \text{или } \lambda_{i3} \in \left[-\frac{\alpha_{i5}^{(+)}}{\lambda_{i4}^{(-)}}, -\frac{\alpha_{i5}^{(-)}}{\lambda_{i4}^{(+)}}\right],$$

$$\lambda_{i4} \in \left[\frac{\alpha_{i5}^{(-)}}{\lambda_{i3}^{(+)}}, \frac{\alpha_{i5}^{(+)}}{\lambda_{i3}^{(-)}}\right] \text{или } \lambda_{i4} \in \left[-\frac{\alpha_{i5}^{(+)}}{\lambda_{i3}^{(-)}}, -\frac{\alpha_{i5}^{(-)}}{\lambda_{i3}^{(+)}}\right], \qquad (21)$$

в зависимости от того, какой знак имеет λ_{i4}. Аналогично в зависимости от знака λ_{i4} записываются интервальные оценки, когда $\alpha_{i5}^{(+)} < 0$:

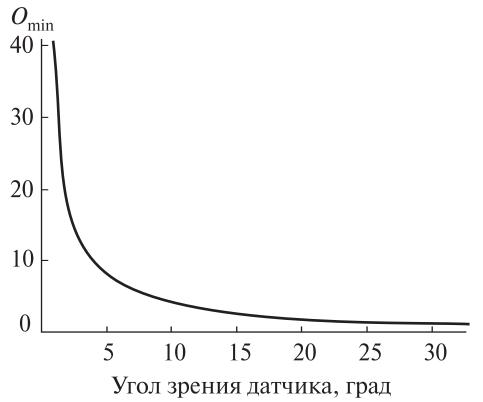

Рис. 1. Обусловленность $O_{\min}$ системы уравнений для двух астродатчиков

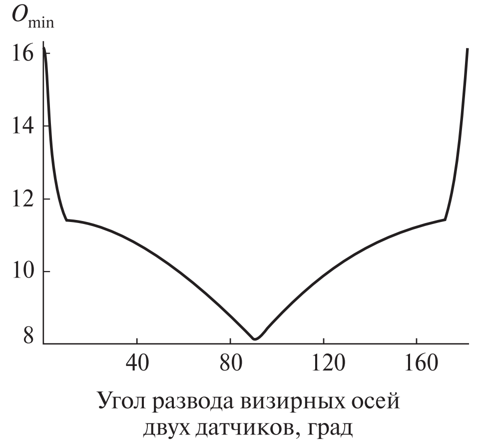

Рис. 2. Обусловленность системы уравнений для двух астродатчиков

Таблица 1. **Обусловленность системы уравнений для одного астродатчика**

Угол зрения датчика, град	1	5	10	20
Минимально возможная обусловленность матрицы *R*	81.02	16.6	8.02	3.89

Таблица 2. **Обусловленность системы уравнений для разного количества астродатчиков**

Количество астродатчиков	1	2	3
Минимально возможная обусловленность матрицы *R*	16.6	8.1	1

$$\lambda_{i3} \in \left[-\frac{\alpha_{i5}^{(-)}}{\lambda_{i4}^{(+)}}, -\frac{\alpha_{i5}^{(+)}}{\lambda_{i4}^{(-)}} \right] \text{или } \lambda_{i3} \in \left[\frac{\alpha_{i5}^{(+)}}{\lambda_{i4}^{(-)}}, \frac{\alpha_{i5}^{(-)}}{\lambda_{i4}^{(+)}} \right],$$
$$\lambda_{i4} \in \left[-\frac{\alpha_{i5}^{(-)}}{\lambda_{i3}^{(+)}}, -\frac{\alpha_{i5}^{(+)}}{\lambda_{i3}^{(-)}} \right] \text{или } \lambda_{i4} \in \left[\frac{\alpha_{i5}^{(+)}}{\lambda_{i3}^{(-)}}, \frac{\alpha_{i5}^{(-)}}{\lambda_{i3}^{(+)}} \right]. \qquad (22)$$

С помощью следующей пары уравнений из (14)

$$\lambda_{i2} \cdot \lambda_{i3} = \alpha_{i6}, \lambda_{i2} \cdot \lambda_{i4} = \alpha_{i7} \qquad (23)$$

можно определить знак λ_{i2} и уточнить интервальную оценку принадлежности λ_{i2}. Из (23) по аналогии с (21) или (22) можно получить два интервала принадлежности λ_{i2}.

Наконец, последняя группа уравнений

$$\lambda_{i1} \cdot \lambda_{i4} = \alpha_{i8}, \lambda_{i1} \cdot \lambda_{i3} = \alpha_{i9}, \lambda_{i1} \cdot \lambda_{i2} = \alpha_{i10} \qquad (24)$$

позволяет получить дополнительно три интервала принадлежности λ_{i1}.

В результате, зная только знак максимальной по величине составляющей λ_{i4}, однозначно определились знаки остальных составляющих.

Путем пересечения интервальных оценок составляющих кватерниона (18) с учетом их знаков с оценками, полученными на основе уравнений (18) или (19), а также (23), (24), уточняем оценки (18).

Замечание 4. Значение λ_{i4} по величине всегда больше или равно 0.5. Его знак не может поменяться на противоположный по отношению к предшествующему по времени измерению за достаточно малый временной интервал. Поэтому достаточно знать знак максимальной составляющей кватерниона только в начальный момент времени. После этого все остальные знаки определяются однозначно.

Описанный комбинаторный метод оценивания гарантированных интервалов и нахождения нормированного кватерниона, принадлежащего этим интервалам, позволяет получать высокоточную оценку кватерниона. Об этом свидетельствуют результаты вычислительных экспериментов, которые описаны ниже. Достоинство приведенного алгоритма состоит в том, что он позволяет эффективно распараллеливать процесс вычислений, обеспечивая таким образом высокое быстродействие даже при большом количестве звезд, попавших в поле зрения кластера астродатчиков.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Рассматривались три варианта построения астроизмерительной системы: с одним датчиком, двумя и тремя. В случае двух и трех АД исследовалась зависимость результата от их взаимного расположения. Как было сказано, получаемые оценки существенно зависят от числа обусловленности матриц квадратных систем, которое в свою очередь определяется расположением звезд в кадре. Поэтому для одного, двух и трех датчиков было найдены оптимальные расположения звезд и определены минимальные значения числа обусловленности.

Результаты моделирования для одного АД с разными угловыми размерами поля зрения представлены в табл. 1.

На рис. 1 показана зависимость минимально-возможной обусловленности матрицы R системы (13) для двух АД, расположенных под прямым углом, от угла поля зрения датчиков.

На рис. 2 показана зависимость минимально возможной обусловленности для двух АД, с полем зрения в 5° от угла между их визирными осями.

Для трех АД, расположенных взаимно ортогонально, минимальное значение обусловленности системы (13) равно единице. Минимально возможная обусловленность матрицы R системы (13) для одного, двух и трех АД с полем зрения 5° приведена в табл. 2.

Проведены вычислительные эксперименты с различными реализациями случайной погрешности, удовлетворяющей (1), (2). Количество звезд N варьировалось случайным образом. Начальный набор звезд был выбран так, чтобы обеспечить наименьшую обусловленность. Далее к нему поочередно добавлялись звезды со случайно сгенерированными координатами.

Если отказаться от оптимального расположения начального набора звезд, и также их выбирать случайным образом, то при малых N для одного АД получаем сильный разброс интервалов принадлежности (18), т.е. результат оказывается чувствительным к конкретной реализации погрешности измерения.

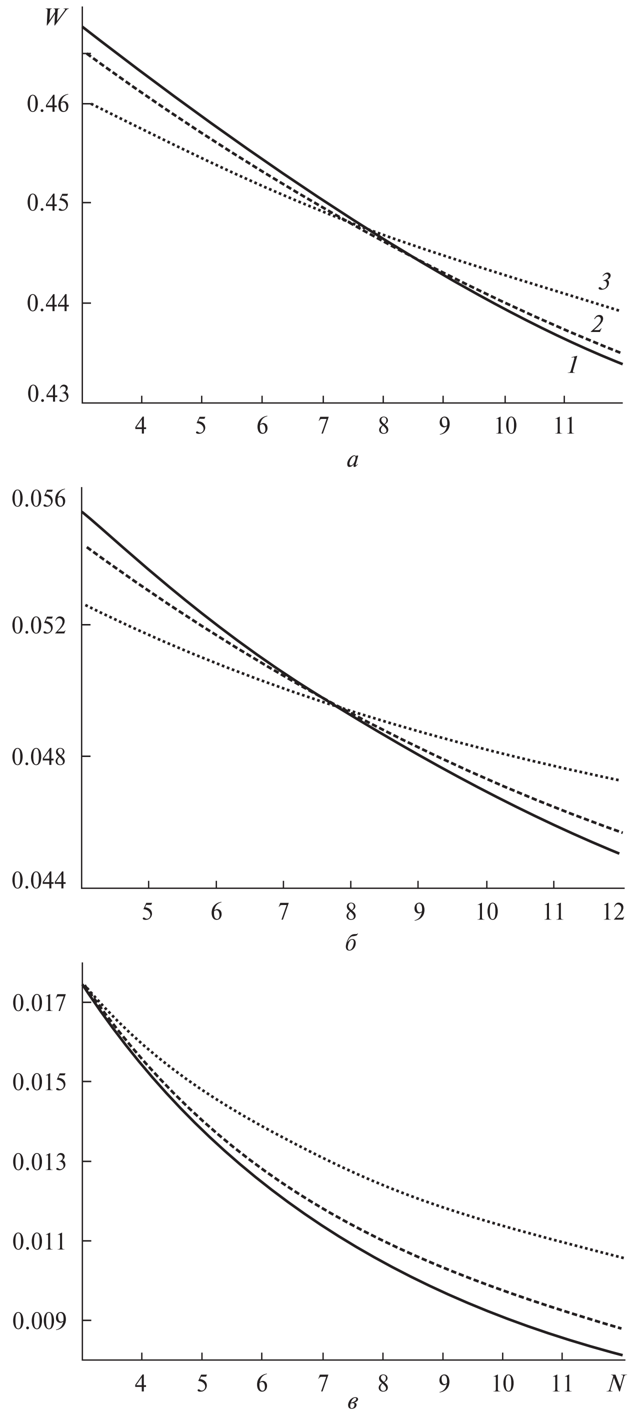

Рис. 3. Ширина W гарантированных интервалов: *а* — для одного астродатчика, *б* — для двух астродатчиков, *в* — для трех астродатчиков (*1* — распределение ошибок, *2* — равномерное распределение, *3* — гауссовское распределение)

На рис. 3, *а* для одного АД показана зависимость ширины гарантированных интервалов составляющих матрицы ориентации S_0 от *N*, начиная с *N* = 3 при угле зрения 5°. Предполагалось, что ошибка измерения направления на звезды ограничена величиной 0.05°. Приведенные значения являются усреднением по 1000 реализаций ошибок измерений.

Сплошная линия представляет распределение ошибок, с максимумами плотности на краях гарантированного интервала. Штрих-пунктирная линия соответствует равномерному распределению. Пунктирная линия характеризует распределение, подобное гауссовскому. Для двух и трех датчиков эксперименты проводились с теми же параметрами.

Результаты аналогичных экспериментов с двумя и тремя датчиками приведены на рис. 3, *б*, *в*.

На рис. 3, *б* показана зависимость ширины гарантированных интервалов от *N*, начиная с *N* = 4 для двух АД, расположенных перпендикулярно относительно друг друга.

На рис. 3, *в* продемонстрированы зависимости ширины гарантированных интервалов для измерительной системы из трех АД, размещенных взаимно перпендикулярно.

Проведенные эксперименты показали, что для АД с углом поля зрения в 5° измерительная система с двумя датчиками дает решение примерно в восемь раз, а система с тремя — примерно в 40 раз точнее, чем один АД.

Переход от одного АД к трем АД привел к увеличению точности в среднем до 40 раз, при том что минимальная обусловленность уменьшается лишь в 16.6 раза. Это подтверждает, что чувствительность решения к реализациям положений звезд в поле видимости системы заметно уменьшалась.

Если в случае трех АД брать квадратные системы, которые содержат только звезды от разных АД, то разброс по обусловленности практически исчезает. Данный результат с тремя астродатчиками важен для практического применения, поскольку в этом случае при соответствующем выборе $n_1 \approx n_2 \approx n_3$ можно получить наилучшую точность оценивания, робастную по отношению к тем звездам, которые оказались в кадре каждого АД.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Комбинаторный метод в сочетании с кластерным измерительным звездным комплексом, предлагаемый в статье для решения задачи определения ориентации КА, позволяет получать более высокую точность оценивания. Особенно он эффективен при использовании трех астродатчиков, когда достигается высокая точность и робастность по отношению к попавшим в кадр звездам. Дальнейшее увеличение кластера АД будет приводить к улучшению результата, но не так существенно, как это произошло для трех АД в сравнении с одним и двумя АД. Манипулируя взаимным расположением АД и количеством звезд n_m $(m = 1, 2, 3)$, можно обеспечить высокую точность при использовании комбинаторных алгоритмов расчета с наилучшими значениями сингулярных чисел квадратных систем линейных алгебраических уравнений.

Хотя при этом приходится решать большое число таких уравнений, но это же обстоятельство позволяет очень эффективно распараллеливать вычислительный процесс, приближаясь по быстродействию к случаю с одним квадратным уравнением третьего порядка. Все логические операции алгоритма также поддаются распараллеливанию.

В дальнейшем планируется применить описанный подход к задаче определения матриц взаимной ориентации АД в кластере.

Работа выполнена при финансовой поддержке Целевой комплексной программы НАН Украины по научным космическим исследованиям на 2012—2016 гг.

1. *Губарев В. Ф., Мельничук С. В.* Алгоритмы гарантированного оценивания состояния линейных систем при наличии ограниченных помех // Проблемы управления и информатики. — 2015. — № 2. — С. 26—34.
2. *Ефименко Н. В.* Взаимная привязка внутренних систем координат астродатчиков в задаче высокоточного определения ориентации космического аппарата // Космічна наука і технологія. — 2013. — **19**, № 6. — С. 12—17.
3. *Ефименко Н. В.* Повышение точности определения ориентации космического аппарата по звездам путем совместной обработки выходной информации

двух астродатчиков // Космічна наука і технологія. — 2014. — **20**, № 3. — С. 22—27.
4. *Захаров А. И., Прохоров М. Г., Тучин М. С., Жуков А. О.* Минимальные технические характеристики звездного датчика ориентации, необходимые для достижения заданной погрешности // Астрофиз. бюл. — 2013. — **68**, № 4. — С. 507—520.
5. *Davenport P.* A vector approach in the algebra of rotations with applications // NASA Techn. Note. — 1968. — D — 4696.
6. *Farrell J. L., Stuelpnagel J. C., Wessner R. H., et al.* A least square estimate of spacecraft attitude // SIAM Rev. — 1966. — **8**, N 3. — P. 384—386.
7. *Wahba G. A.* Least squares estimate of spacecraft attitude // SIAM Rev. — 1965. — **7**, N 3. — P. 409—411.

Стаття надійшла до редакції 30.08.16

REFERENCES

1. *Gubarev V. F., Melnychuk S. V.* Guaranteed state estimation algorithms for linear systems in the presence of bounded noise. *Journal of Automation and Information Sciences*, No. 2, 26—34 (2015).
2. *Efimenko N. V.* Mutual relations of internal coordinate systems of star sensors in the problem of accurate determination of spacecraft orientation. *Kosm. nauka technol.,* **19** (6), 12—17 (2013).
3. *Efimenko N. V.* Determining spacecraft orientation using information from two jointly processed star trackers. *Kosm. nauka technol.,* **20** (3), 22—27 (2014).
4. *Zakharov A. I., Prokhorov M. E., Tuchin M. S., Zhukov A. O.* Minimum Star Tracker Specifications Required to Achieve a Given Attitude Accuracy. *Astrophysical Bulletin*, **68** (4), 507—520 (2013).
5. *Davenport P.* A vector approach in the algebra of rotations with applications. *NASA Techn. Note,* D4696 (1968).
6. *Farrell J. L., Stuelpnagel J. C., Wessner R. H., Velman J. R., Brock J. E.* A least square estimate of spacecraft attitude. *SIAM Rev.,* **8** (3), 384—386 (1966).
7. *Wahba G. A.* Least squares estimate of spacecraft attitude. *SIAM Rev.,* **7** (3), 409—411 (1965).

В. Ф. Губарєв, С. В. Мельничук

Інститут космічних досліджень
Національної академії наук України
і Державного космічного агентства України, Київ

КОМБІНАТОРНИЙ МЕТОД ІНТЕРВАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ ОРІЄНТАЦІЇ КОСМІЧНОГО АПАРАТА ЗА ВИМІРЮВАННЯМИ АСТРОДАТНИКІВ

Пропонується метод знаходження інтервальних оцінок параметрів орієнтації космічного апарата. Вихідними даними задачі є вимірювання астродатників. Розглядаються системи з одним, двома і трьома датниками. Проводиться порівняння точності розв’язку за шириною інтервальних оцінок параметрів орієнтації.

Ключові слова: комбінаторний метод, астродатник, гарантоване оцінювання орієнтації, інтервальне оцінювання.

V. F. Gubarev, S. V. Melnychuk

Space Research Institute
of the National Academy of Science of Ukraine
and the National Space Agency of Ukraine, Kyiv

COMBINATORIC METHOD FOR INTERVAL ESTIMATION OF A SPACECRAFT ATTITUDE BASED ON STAR TRACKER MEASUREMENTS

We propose a method for finding interval estimates of a spacecraft attitude. The input data of the problem are measurements from star trackers. Systems with one, two or three sensors are considered. A comparison of the accuracy is made by the width of interval estimates of the orientation parameters.

Keywords: combinatoric method, star tracker, guaranteed estimation of attitude, interval estimation.