

doi: 10.15407/knit2016.02.060

УДК 551.510; 533.93

**Л. В. Козак**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

## МЕТОДИ І ПІДХОДИ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОГО СЕРЕДОВИЩА

---

*Відібрано методи і підходи, які можна використовувати для аналізу гідродинамічних і магнітогідродинамічних турбулентних потоків. Визначено, що для характеристики типу турбулентних процесів найкраще підходять методи статистичної фізики. В рамках статистичного підходу розглянуто фрактальний аналіз (визначення фрактальної довжини та висоти максимуму функції густини ймовірності флуктуацій досліджуваних параметрів), та мультифрактальний аналіз (дослідження степеневих залежностей статистичних моментів високих порядків та побудова мультифрактального спектру). Вказано, що статистичний аналіз властивостей турбулентних процесів можна доповнити спектральними дослідженнями: фур'є- та вейвлет-аналізом. Для апробації розглянутих у роботі методів і підходів використано ферозондові виміри флуктуацій магнітного поля космічного апарата «Самба» місії «Кластер-2» з дискретністю 22.5 Гц у перехідних областях магнітосфери Землі та плазми сонячного вітру. Можна відмітити хорошу відповідність між різними дослідженнями і взаємне їхнє доповнення для створення загальної картини турбулентності.*

**Ключові слова:** турбулентність, статистичний аналіз, фрактальний аналіз супутникових вимірювань, мультифрактальний аналіз, флуктуації магнітного поля, магнітосфера Землі, плазма сонячного вітру.

---

### ВСТУП

Оскільки плазма у магнітосфері є динамічною системою з великою кількістю ступенів вільності, то для розгляду властивостей турбулентності на великих часових і просторових масштабах застосовують методи статистичної фізики та каскадні моделі, розвинені в гідродинамічних теоріях. У магнітній гідродинаміці теоретичний розгляд ще більш ускладнюється, оскільки потрібно враховувати не тільки матеріальні границі потоку та ефекти «зсуву», але і масштаби структур (хвиль, вихорів і т. п.), що формуються магнітними і електричними полями. У плазмових потоках турбулентність може формуватися багатьма класами нестійкостей — дрейфово-дисипативними, кінетичними, магнітогідродинамічними (МГД) та ін. [4, 5]. Так, нестійкості магнітогідродина-

мічного типу призводять до флуктуацій магнітного поля, дрейфово-дисипативні та кінетичні нестійкості викликають флуктуації електричних полів, густини і температури плазми. При цьому у процес розвитку турбулентності може бути залучено одночасно декілька нелінійно зв'язаних нестійкостей.

Супутникові дослідження космічної плазми дозволяють отримати експериментальні дані про властивості турбулентності в діапазонах просторових і часових масштабів, недоступних в лабораторних експериментах на Землі. Чисельна відмінність діапазонів пов'язана з відмінностями значень магнітного поля (на границі магнітосфери — порядку 10—100 нТл) та значень гірчастот і гірорадіусів іонів, які в часовій і просторовій області обмежують інтервали застосовності МГД-наближення зверху і знизу відповідно. При взаємодії магнітошару і магнітосфери основні процеси взаємопов'язані і глобально синхро-

---

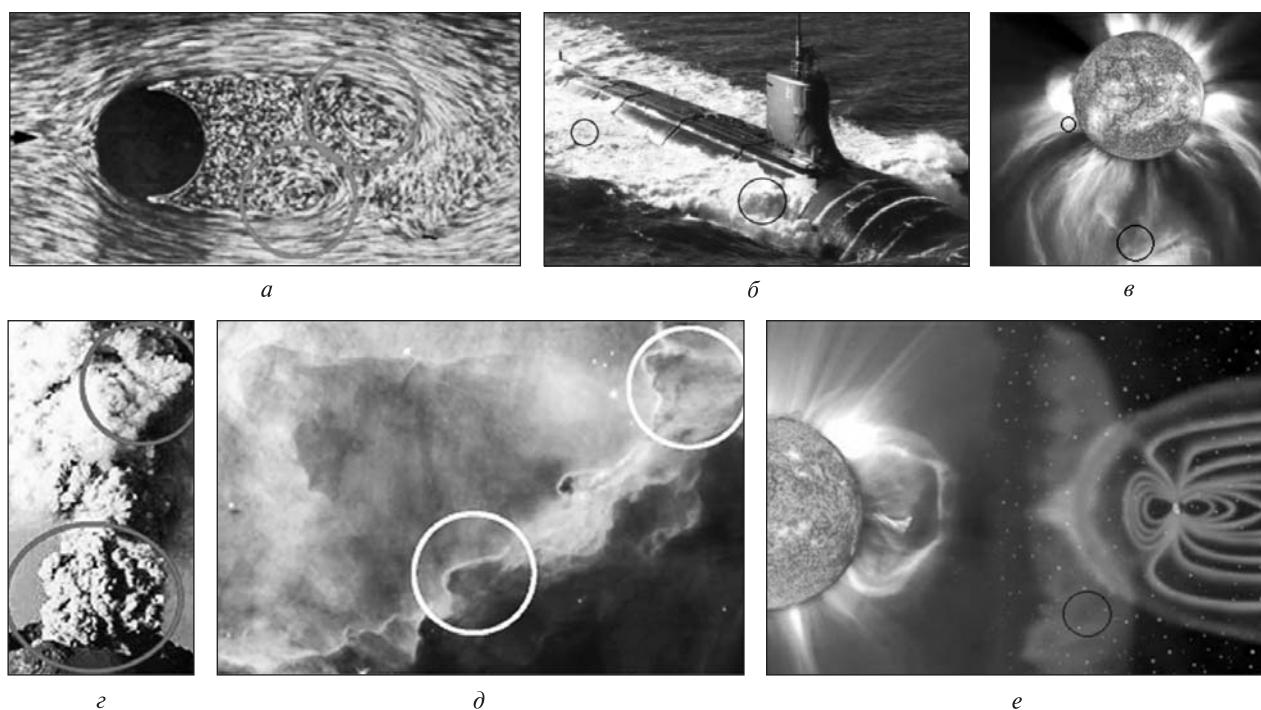
© Л. В. КОЗАК, 2016

нізовані низькочастотними магнітозвуковими коливаннями денного магнітошару як цілого [14, 34]. На середніх масштабах в турбулентних перехідних шарах (ТПШ) подібна самоорганізація спостерігається за рахунок зворотних каскадів, що можуть бути викликані відбитими від кордону хвилями, сфокусованими локально увігнутою перешкодою (наприклад, горловина каспу).

Таким чином, ми маємо справу не із послідовністю адитивних реакцій на збурення в сонячному вітрі і магнітошарі, а зі складною великомасштабною нелінійною системою. При цьому відбувається «катастрофічна» перебудова течії і магнітної топології (прискорені і уповільнені струмені, перехід від ламінарної застійної області до нерегулярної структури пограншару). Спостерігається залежність від передісторії (на часах, характерних для релаксації альвенівських потоків), поява аномально великих кореляцій на великих часових і просторових масштабах і утворення когерентних структур у вигляді струменів,

що забезпечують аномальне перенесення плазми [10].

Характеристикою турбулентності плазми є не тільки кінетичне число Рейнольдса  $Re$ , яке визначається кінематичною в'язкістю, але і магнітне число Рейнольдса  $Rem$ , пов'язане з магнітною в'язкістю. При відносно невисоких значеннях  $Re$ ,  $Rem < 10^3 \dots 10^4$  і при впливі границь у плазмі може формуватися властивість переміжності (неоднорідності) — активні області чергуються з пасивними, в яких потік квазіламінарний (рис. 1). У такому процесі параметри плазми спостерігаються як випадкові змінні з негауссовою функцією розподілу, коли турбулентні пульсації великої амплітуди представлені у процесі з імовірністю, значно більшою, ніж передбачається гауссовим законом (нормальним розподілом). Переміжність спостерігається в гідродинамічних турбулентних течіях нейтральних середовищ [3] і замагніченій плазмі [17] як з великими, так і з помірними числами Рейнольдса ( $< 1000$ ).



**Рис. 1.** Приклади переміжності — неоднорідності — турбулентних процесів в різних гідродинамічних і магнітогідродинамічних течіях: *a* — обтікання циліндра, *б* — слід за підводним човном, *в* — сонячна атмосфера, *г* — виверження вулкана, *д* — галактичні хмари, *е* — область магнітосфери. Одночасно спостерігаються вихрові структури різних масштабів

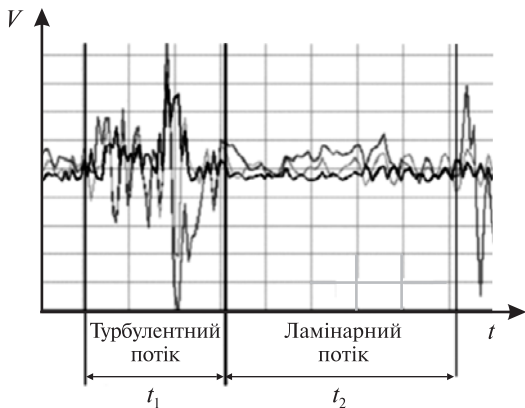


Рис. 2. Приклад чергування квазіламінарних і турбулентних форм руху. Відношення  $t_1/t_2$  називається коефіцієнтом переміжності

Особливостями переміжності у плазмових пограничних шарах є наявність магнітних і електричних полів, що призводять до додаткової анізотропії процесу [13]. У центральних областях плазмового середовища, коли вплив пограншарів незначний, властивості плазмової турбулентності можуть значно відрізнятися.

У турбулентному середовищі переміжність спостерігається у вигляді пульсацій великої амплітуди (рис. 2). Закони масштабної подібності (в англійській літературі зустрічається частіше термін «скейлінг») такої турбулентності з переміжністю описуються параметрами, залежними від масштабу (багатомасштабність). З теоретичного розгляду випливає, що властивість переміжності турбулентності пов'язана з прихованими статистичними симетріями (симетріями масштабної інваріантності) динамічних рівнянь, що описують рух, і необхідністю встановити масштабну інваріантність в обмеженому просторі перехідної області [16]. Випадкові пульсації швидкості та інших параметрів турбулентного потоку з переміжністю мають негауссову статистику, тобто не описуються класичним (нормальним) законом дифузії. З самих загальних теоретичних уявлень динаміка такого процесу може описуватися степеневими законами розподілу, багатомасштабністю, тобто спектром характерних масштабів. Аналітично або чисельно розв'язати задачу про динаміку турбулентної плазми (у тривимірній геометрії) і визначити скейлінг

турбулентності з необхідною детальністю на великих часових масштабах на даний час не вдається. Отже, необхідно з експерименту визначити статистичні властивості турбулентності, пов'язані з масштабною інваріантністю, і отримати оцінки для скейлінгу (показників степеня залежності параметрів плазми у припущенні степеневих законів). Це дає можливість не тільки якісно і кількісно описати особливості турбулентних процесів, а й зрозуміти властивості переносу в розглянутих областях.

### АНАЛІЗ ТУРБУЛЕНТНИХ ПРОЦЕСІВ

У феноменологічних каскадних моделях гідродинамічної турбулентності головним припущенням є розділення потоку енергії між осередками меншого масштабу на кожному подальшому кроці каскадного процесу. При цьому малі осередки тільки модулюють енергію, що проходить через них від великих масштабів. Розглядається ієрархія турбулентних осередків в турбулентному середовищі, яка стає більш неоднорідною на менших масштабах. Така феноменологія відповідає парадигмі, в якій переміжність наростає на менших масштабах.

Не дивлячись на те, що в теорії турбулентності розвинені могутні аналітичні методи, сучасні аналітичні моделі все ще не досягають такого ж ступеня детальності та точності, як напівемпіричні каскадні моделі, що засновані на статистичних методах. Особливо це характеризує опис турбулентності з переміжністю, оскільки не тільки переміжність є результатом турбулентної «активності», але і сама турбулентна «активність» розподілена неоднорідно. При цьому функція розподілу описується розподілом Леві [8, 21].

Крім того, аналіз властивостей турбулентних процесів можна доповнити спектральними дослідженнями: фур'є- та вейвлет-аналіз. При цьому вейвлет-розгляд дозволяє навіть простежити за зміною спектральних властивостей сигналу з часом, вказати, які частоти (масштаби) домінують у сигналі в кожен конкретний момент. Але слід відмітити, що спектральний аналіз, крім найпростіших випадків, не дозволяє визначити тип турбулентних процесів (особливо при наявності переміжності).

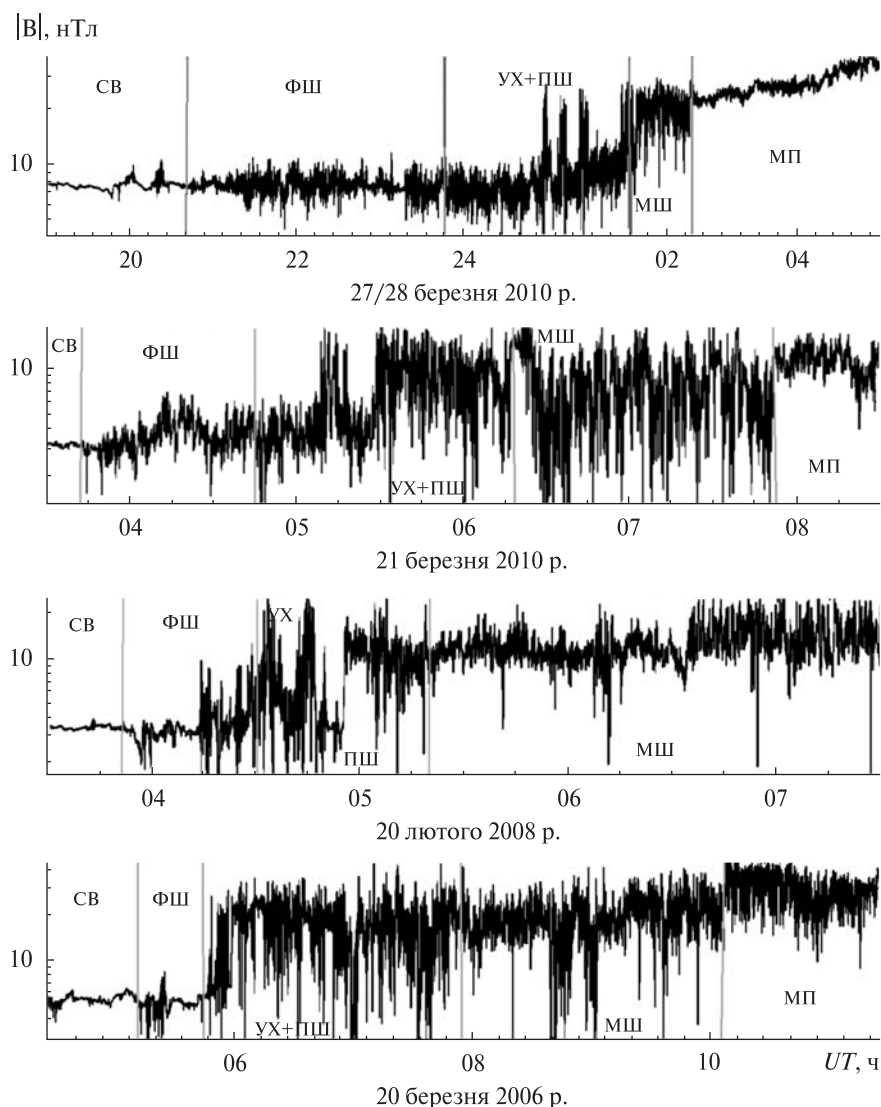


Рис. 3. Приклади супутникових вимірів флуктуацій магнітного поля при русі КА «Самба» місії «Кластер-2» із плазми сонячного вітру в область магнітопаузи

Для апробації розглянутих у роботі методів і підходів дослідження турбулентних властивостей середовища було використано ферозондові виміри флуктуацій магнітного поля космічного апарату «Самба» місії «Кластер-2».

Аналізувалися області проходження магнітосферних приграничних шарів — найбільш збурені області навколосезного простору. При цьому КА рухався із плазми сонячного вітру і послідовно проходив форшокову область (ФШ), ударну хвилю (УХ), постшокову область

(ПШ), магнітошар (МШ) і входив в область магнітопаузи.

Приклади супутникових вимірів флуктуацій магнітного поля з дискретністю 22.5 Гц подано на рис. 3. Добре видно, що флуктуації в магнітошарі суттєво відрізняються від рівня флуктуацій в незбуреному сонячному вітрі насамперед набагато більш високою мінливістю магнітного поля. Відносні варіації поля (відхилення параметра на деякому інтервалі, віднесене до його середнього значення на цьому інтервалі) у магнітошарі пере-



вищують значення в сонячному вітрі приблизно в 2-3 рази. Найбільші флуктуації магнітного поля спостерігаються на фронті УХ- і ПШ-області. При цьому навіть при майже повній відсутності в сонячному вітрі флуктуацій магнітного поля у магнітошарі є варіації, які мають високий рівень збурень. Таким чином, характер турбулентного потоку плазми в МШ не пов'язаний безпосередньо з турбулентністю в СВ і значною мірою є проявом власних процесів у МШ.

**Фрактальний розгляд.** Слід відмітити, що на сьогоднішній день немає однозначного визначення «фракталу». Згідно з означенням Лавер'є [29], фрактал — геометрична фігура, в якій один і той же фрагмент повторюється при кожному зменшенні масштабу. Фрактали, які характеризуються даними властивостями і які утворюються в результаті простої рекурсивної процедури (комбінації лінійних перетворень) називають конструктивними фракталами. Класичним прикладом конструктивного фракталу може служити дерево, стовбур якого розділяють спочатку на дві гілки, далі ще на дві і т. д. Кожну окрему гілку можна, в свою чергу, розглядати як окреме дерево. Ця конструкція має подібність із двійковою системою обчислення.

Фрактальні множини характеризуються рядом основних властивостей:

- мають тонку структуру (містять довільно малі масштаби),
- занадто нерегулярні, щоб могли бути описані за допомогою геометричних підходів,
- мають форму самоподібності,
- зазвичай «фрактальна розмірність» множини більша, ніж його топологічна розмірність,
- у більшості випадків фрактальні множини визначаються рекурсивно.

При фрактальному розгляді аналізі на масштабі  $\tau$ , кратному дискретності вимірів в часі індукції магнітного поля  $\Delta t$ , весь часовий діапазон  $(N\Delta t)$  розділений на підмножину

$$B_{k,m} = \left\{ \begin{array}{l} B(m\Delta t), B(m\Delta t + \tau), B(m\Delta t + 2\tau), \dots, \\ B(m\Delta t + [(N-m)/k]\tau) \end{array} \right\},$$

де  $k = \tau / \Delta t$ ,  $m = 1, 2, \dots, k$ , і у квадратних дужках вказано значення, що не перевищує весь часовий інтервал вимірювань.

Тоді фрактальна довжина  $L_m(\tau)$  підмножини  $B_{k,m}$  визначається як

$$L_m(\tau) = \frac{\left( \sum_{i=1}^k |B(m\Delta t + i\tau) - B(m\Delta t + (i-1)\tau)| \right) A_m}{\tau},$$

де коефіцієнт  $A_m$  визначається відношенням  $(N-1)/((N-m)/k)k$  і є по суті коефіцієнтом нормування для регулювання розходження кількості даних вимірів розглянутої підмножини.

При усередненні довжини  $L_m(\tau)$  по  $k$  точках отримують співвідношення  $L(\tau) \propto \tau^{-d}$ , де  $d$  — фрактальна розмірність [24], а  $B(t)$  — самоафінні дані.

Для флуктуацій магнітного поля можна провести і спектральний аналіз. Для такого типу даних має місце залежність спектральної потужності від частоти  $P(f) \propto f^{-n}$ . Крім того, показник степеня пов'язаний із фрактальною розмірністю співвідношенням [32]  $n = 5 - 2d$ ,  $d \neq 1$ ,  $d \neq 2$ .

Дослідження масштабних властивостей флуктуацій магнітного поля у форшоковій області і порівняння отриманих результатів із фур'є-аналізом подані на рис. 4, де представлено результати фрактального аналізу і фур'є-аналізу. Видно, що фрактальна довжина  $L$  характеризується «гладкою» структурою, а фур'є-спектр  $P$  має велику кількість нерегулярних коливань. Ці переваги фрактального аналізу над традиційним фур'є-аналізом були відзначені ще в роботі [32]. Апроксимація фрактальних результатів двома пунктирними лініями показує наявність двох областей  $L(\tau)$ . Зміна нахилу фрактальної довжини відбувається на масштабі  $\tau \approx 1.8$  с, а фрактальна розмірність першої області дорівнює 1.4. Це значення добре узгоджується із значенням спектрального індексу для спектрального аналізу  $(5 - 2 \cdot 1.4 = 2.2)$ .

Часовий масштаб, на якому відбувається зміна фрактальної розмірності, близький до значення іонноциклотронної частоти і, таким чином, характеризує різні масштаби розгляду турбулентних процесів у форшоковій області магнітосфери Землі.

Аналізуючи результати фрактального і спектрального аналізу флуктуацій магнітного поля у форшоковій області, можна виділити такі зако-

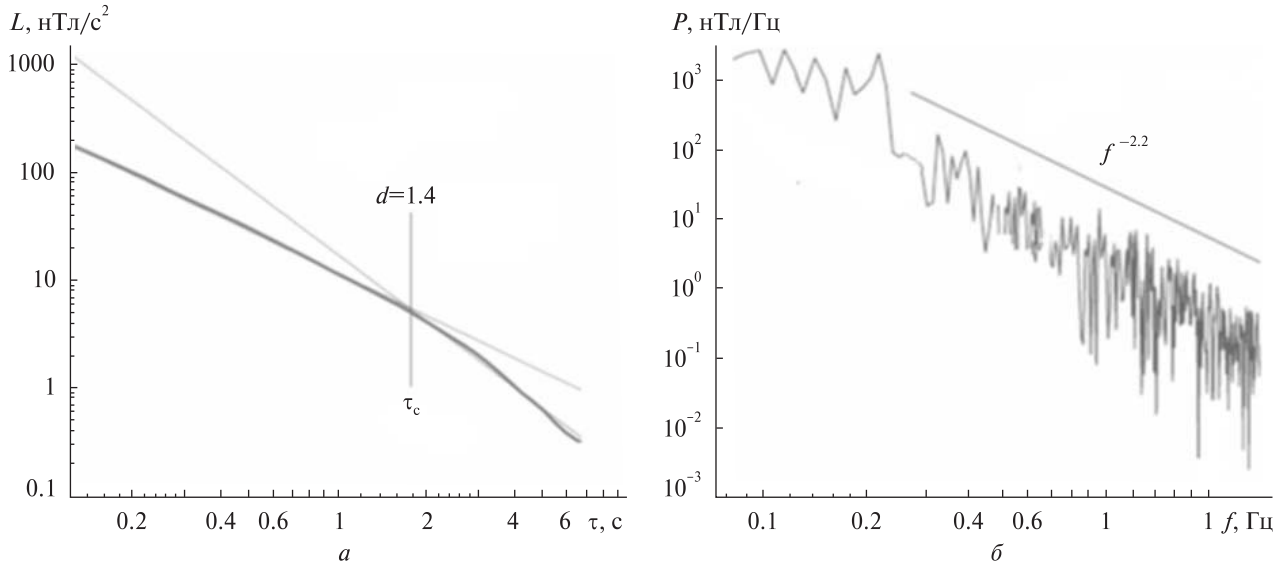


Рис. 4. Порівняння між різними типами аналізу флуктуацій магнітного поля для частини форшокової області (2010/03/27): а — лінійний фрактальний аналіз, б — спектральний аналіз

номірності: фрактальний аналіз характеризується значно більшою стабільністю і локалізацією в часі, ніж спектральний аналіз; фрактальний аналіз дає надійні результати навіть на масштабах, які складають значну частину всього інтервалу вимірів.

Слід відмітити, що підтверджено лінійний зв'язок між отриманою спектральною розмірністю і показником степеня перекачки енергії в турбулентному процесі для форшокової області.

Наведений вище фрактальний аналіз базується на методі (критерії) «yardstick» довжини, який розглядає залежність фрактальної довжини на різних масштабах, кратних дискретності вимірів. Такий підхід не дозволяє дати суттєвої інформації про еволюцію системи. Для цієї мети аналізують функцію густини ймовірності флуктуацій досліджуваних параметрів (PDF-аналіз) [7, 21].

Розподіл ймовірностей амплітуд флуктуацій найпростішого випадкового процесу підпорядковується гауссівському закону

$$P(\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

де  $\mu$  — середнє значення,  $\sigma$  — стандартне відхилення.

Як відзначалося вище, при наявності переміжності будемо мати негауссовий розподіл. В загальному випадку залежність максимуму функції розподілу густини ймовірності  $P_t(0)$  із змінною часового масштабу  $\tau$  можна апроксимувати степеневою залежністю

$$P_t(0) \propto \tau^{-s}.$$

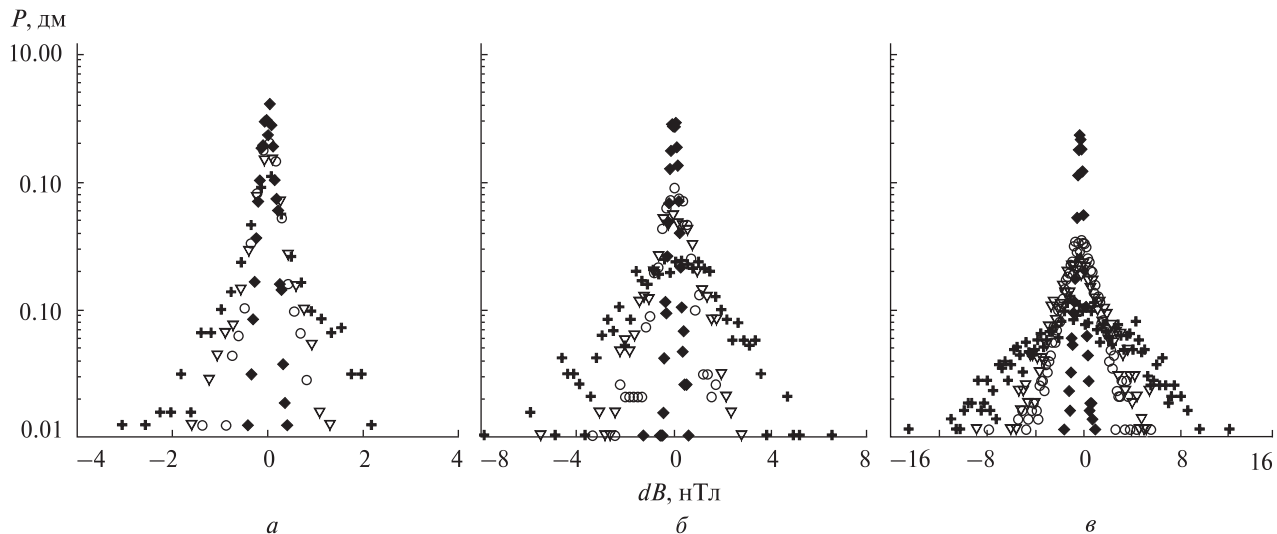
При цьому для гауссівського розподілу показник  $s \sim 0.5$ , а для розподілу Леві  $s > 0.5$ .

Що суттєвіше значення  $s$  відрізняється від значення 0.5, то на довших масштабах є кореляції в системі і наявні реорганізаційні процеси.

Для турбулентності з переміжністю вірогідність значних флуктуацій на крилах розподілу буде високою завдяки надлишку енергії великомасштабних збурень, що генеруються джерелом.

Для розгляду вимірів параметрів МГД середовища у просторі аналізується залежність  $P_t(0) \propto t^{-s}$ . Функція розподілу густини ймовірності  $P(r, t)$  містить повну інформацію про випадкове поле  $f(r, t)$ , однак її визначення у повному обсязі практично неможливе. При цьому розгляд густини ймовірності еквівалентний аналізу послідовності (у загальному випадку — нескінченної) статистичних моментів

$$Mf^m = \int f^m P(f) df.$$



**Рис 5.** Розподіл ймовірності коливань магнітного поля 21 березня 2010 р. з різним дискретним часом: *а* — для плазми сонячного вітру, *б* — для форшокової області, *в* — для області магнітошару (ромбики —  $\tau = 0.0445$  с, кружки —  $20\tau = 0.89$  с, трикутники —  $40\tau = 1.78$  с, хрестики —  $160\tau = 7.12$  с)

**Показники степеня значення максимуму функції розподілу густини ймовірності флуктуацій магнітного поля для різних подій і областей в діапазоні до 1 с**

Область	20 березня 2006 р.	20 лютого 2008 р.	21 березня 2010 р.	27 березня 2010 р.
Плазма сонячного вітру (СВ)	0.54	0.53	0.50	0.55
Область форшоку (ФШ)	0.75	0.76	0.69	0.73
Постшокова область (ПШ)	1.00	0.89	0.97	0.98
Магнітошар (МШ)	0.91	0.84	0.96	0.92
Область магнітопаузи (МП)	0.77	0.69	0.82	0.65

При цьому момент нульового порядку дорівнює одиниці завдяки умові нормування, момент першого порядку, який називають також математичним очікуванням, дає середнє значення величини. Для моментів другого і вищих порядків зазвичай використовують центральні моменти, обчислювані щодо середніх значень. При цьому центральний момент другого порядку називається дисперсією.

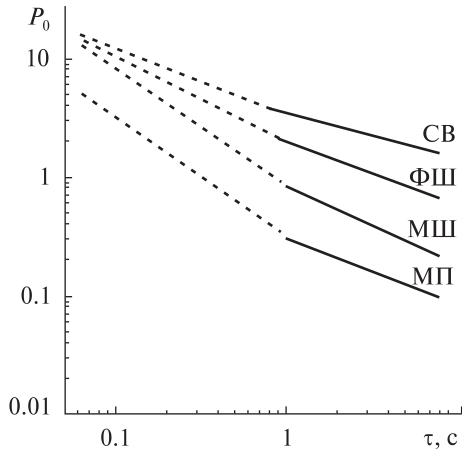
Результати PDF-аналізу для плазми сонячного вітру, форшокової області та області магнітошару показано на рис. 5. Еволюція висоти максимуму функції густини ймовірності флуктуацій магнітного поля при аналізі на різних часових масштабах представлена на рис. 6. Показники степеня значення максимуму функції розподі-

лу густини ймовірності флуктуацій магнітного поля для різних подій і областей в діапазоні до 1 с зібрано в таблиці.

Із рис. 5, 6 і таблиці видно, що в діапазоні до 1 с, за виключенням плазми сонячного вітру, розподіл помітно відхиляється від гауссівського. На масштабах понад 1 с значення параметрів лежать в діапазоні 0.62 до 0.47.

Важливою особливістю отриманих результатів є наявність переміжності у перехідних областях магнітосфери Землі. Для плазми ж сонячного вітру зміна максимуму функції густини ймовірності подібна до типового гауссового розподілу — переміжності немає.

**Мультифрактальний аналіз.** При наявності переміжності турбулентних процесів зазвичай



**Рис. 6.** Значення максимуму функції розподілу густини ймовірності флуктуацій магнітного поля  $P(0)$  від кроку по часу в логарифмічному масштабі для 21 березня 2010 р. Експериментальні точки апроксимувалися прямою  $P \propto \tau^{-s}$ : СВ — плазма сонячного вітру, ФШ — область форшоку, МШ — магнітошар, МП — область магнітопаузи. Значення  $s$  подані в таблиці

стикаємося з випадками в яких одне або два значення фрактальної розмірності не відображають реальних властивостей масштабування. У цій ситуації динаміка системи може бути описана за допомогою організованої критичності [17]. При цьому в літературі розглядають особливості з використанням мультифрактального підходу. Для даних цілей проводять аналіз статистичних моментів (структурних функцій) високих порядків. В класичному підході, представленому А. Н. Колмогоровим в 1941 р. (К41), структурні функції для різниці швидкостей на просторовому масштабі  $l$  визначаються як [9]:

$$S_q(l) \equiv \langle |v(x+l) - v(x)|^q \rangle \propto l^{\zeta(q)},$$

де степенева залежність від просторового масштабу отримується по суті при умові, що всі статистично усереднені моменти  $S_q(l)$  поля швидкостей  $v$  на масштабі  $l$  залежать лише від середньої швидкості дисипації  $\epsilon_l$  і даного масштабу  $l$  (властивість локальності), а динаміка інерційного діапазону не залежить від способу генерації турбулентності і визначається інваріантом потоку енергії через цей інтервал: середній потік енергії зберігається.

При аналізі змінних в часі флуктуацій МГД-параметрів структурна функція  $S_q$  порядку  $q$  ви-

значається на масштабі  $\tau$  як статистичне середнє по ансамблю співвідношень

$$S_q(\tau) = \langle |X(t + \tau) - X(t)|^q \rangle \propto \tau^{\zeta(q)}.$$

Для аналізу моментів функції розподілу визначальним є наявність властивості розширеної самоподібності (в англійській літературі — extended self-similarity (ESS)). Дане явище було виявлене експериментально при дослідженні дрібномасштабної гідродинамічної турбулентності в аеродинамічній трубі [19] і призвело до вироблення критерію узагальненої самоподібності для довільної пари структурних функцій

$$S_q(l) \propto S_p(l)^{\zeta(q)/\zeta(p)}.$$

Передбачається, що така самоподібність є проявом прихованих статистичних симетрій.

Таким чином, при аналізі будують структурні функції у подвійному логарифмічному масштабі. При цьому в інерційному інтервалі виникають лінійні ділянки, нахил яких дає величину степеневих показників  $\zeta_q$ .

На практиці властивість узагальненої самоподібності дозволяє підвищити точність визначення скейлінгу структурної функції при аналізі експериментальних даних, а структурні функції високих порядків дозволяють охарактеризувати властивості турбулентності навіть на малих масштабах.

Використовуючи властивість розширеної самоподібності можна знайти з досить хорошою точністю скейлінг структурних функцій  $\zeta(q)$  і оцінити тип турбулентних процесів.

Для колмогорівської ізотропної турбулентності К41 скейлінг має лінійну залежність  $\zeta(q) = q/3$ , а для двовимірної моделі турбулентності Ірошнікова — Крейчнана (ІК)  $\zeta(q) = q/4$  [27, 28].

Слід додати, що в колмогорівській моделі енергія турбулентних пульсацій передається каскадним чином лише пульсаціям сусідніх масштабів, при цьому сам спектр турбулентності справедливий лише при достатньо великих хвильових числах. За наявності сильних магнітних полів виникає анізотропія, а для опису турбулентних процесів застосовується підхід Ірошнікова — Крейчнана. В рамках цього підходу вважається, що час перенесення енергії по спектру визначається зіткненнями між альфвенівськими



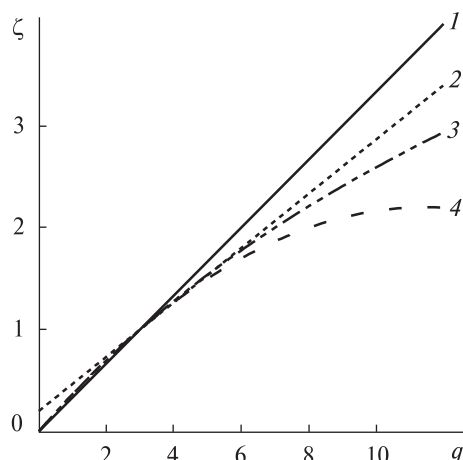


Рис. 7. Порівняння різних тривимірних моделей турбулентних процесів: 1 — модель Колмогорова (K41), 2 —  $\beta$ -модель, 3 — ізотропна логпуассонівська модель, 4 — логнормальна модель

хвильовими пакетами (вихорами) [20]. Час зіткнення хвильових пакетів дорівнює часу прольоту одного хвильового пакету через інший, а швидкість зміни амплітуди швидкості визначається нелінійним конвективним доданком. Відповідні оцінки для часу прольоту, зміни амплітуди швидкості і спектра Ірошнікова — Крейчнана наведено, наприклад, у роботі [2]. Таким чином, модель ІК використовують для пояснення МГД-турбулентності при наявності сильної анізотропії процесів, викликаній магнітними полями. При цьому турбулентні збурення є малими по амплітуді і поширюються уздовж середнього поля (альвенівська турбулентність), тоді як припущення Колмогорова справедливі, якщо флуктуації магнітного поля переважають над зовнішнім магнітним полем.

Нелінійна функціональна залежність  $\zeta(q)$  від порядку моменту  $q$  для експериментальних даних є наслідком переміжності процесів.

Для інтерпретації нелінійної залежності  $\zeta(q)$  використовують ряд моделей.

**Логнормальна модель.** В рамках даної моделі робиться додаткове припущення, що за нормальним законом розподілений логарифм дисипації енергії

$$P(\varepsilon_l) = ce^{-\frac{(\ln \varepsilon - a)^2}{2\sigma_l^2}},$$

де  $P$  — функція розподілу ймовірності,  $a = \ln \bar{\varepsilon}$ ,  $\sigma_l^2$  — дисперсія.

При цьому [16]

$$\zeta_q = \frac{q}{3} + \frac{\mu}{18} q(3-q),$$

де  $\mu$  — коефіцієнт переміжності в логнормальній моделі, що з точністю до знака є показником степеня для моменту другого порядку поля дисипації енергії

$$\langle \varepsilon_l^2 \rangle \propto l^{-\mu}.$$

**$\beta$ -модель.** У  $\beta$ -моделі вводиться величина, що характеризує фрактальну розмірність активної області ( $D$ ) і використовується гіпотеза про те, що потік енергії як і раніше постійний, але по мірі просування до малих масштабів він зосереджується все у меншій частині простору.

Показник степеня структурної функції в рамках даної моделі задається співвідношенням:

$$\zeta_q = \frac{q}{3} + \frac{(3-D)(3-q)}{3}.$$

На відміну від логнормальної моделі, яка дає квадратичну поправку до колмогоровського закону  $q/3$  для масштабних показників,  $\beta$ -модель дає лінійну поправку [30, 35].

**Логпуассонівські моделі.** Є моделями останнього покоління, що виникли в середині 1990-х рр. і базуються на властивості розширеної самоподібності (ESS-аналіз) — розширення інерційного інтервалу відбувається при розгляді будь-якої пари структурних функцій.

В логпуассонівських моделях турбулентності показник степеня структурної функції  $\zeta(q)$  визначається співвідношенням [23]

$$\zeta(q) = (1-\Delta)\frac{q}{3} + \frac{\Delta}{1-\beta}[1-\beta^{q/3}],$$

де  $\beta$  і  $\Delta$  — параметри, які характеризують переміжність і сингулярність дисипативних процесів відповідно. Важливо, що в рамках даної моделі розглядається стохастичний мультиплікативний каскад, і логарифм енергії дисипації описується пуассонівським розподілом. Для ізотропної тривимірної турбулентності Ше і Левек (ШЛ) запропонували значення  $\Delta = \beta = 2/3$  [37]. Важливо, що варіюючи значення параметрів  $\Delta$  і  $\beta$ , можна отримати показник степеня для різних типів моделей.

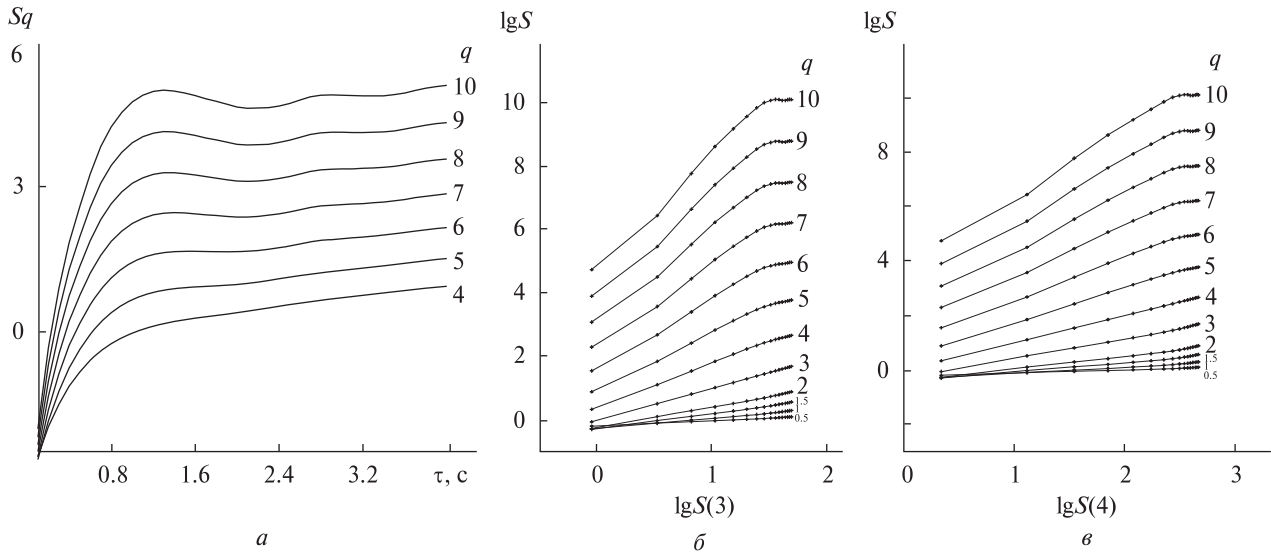


Рис. 8: а — Залежність моментів структурної функції від часового масштабу; б, в — графіки для визначення скейлінгу структурних функцій  $\zeta(q)/\zeta(3)$  та  $\zeta(q)/\zeta(4)$

Порівняння різних моделей турбулентних процесів представлено на рис. 7.

При аналізі особливостей структурних функцій (моментів функції густини ймовірності) різних порядків  $q$  відповідно до часового інтервалу  $\tau$  для ряду даних  $B(t)$  структурна функція визначалася співвідношенням [6, 26]

$$S_q(\tau) = \langle |B(t+\tau) - B(t)|^q \rangle \propto \tau^{\zeta(q)},$$

де  $\langle \dots \rangle$  означає усереднення експериментальних даних за часом.

Степенева залежність типу  $S_q(\tau) \sim \tau^{\zeta(q)}$  (тобто самоподібність — лінійна залежність) спостерігається на обмеженому інтервалі часових масштабів, що відповідає інерційному діапазону (рис. 8, а). В перехідних областях магнітосфери Землі такий інтервал спостерігається на масштабах приблизно 1 с — значення, близьке до іонноциклотронної частоти для розглянутих супутникових вимірів. Наявність даних із дискретністю 22.5 Гц дозволяє провести аналіз структурних функцій високих порядків і визначити властивості турбулентності на малих масштабах — до 1 с.

Порівняння експериментальних даних із тривимірними моделями турбулентних процесів провадилося шляхом розгляду скейлінгу струк-

турної функції, нормованого на скейлінг для третього моменту. Оскільки для колмогорівської моделі турбулентності K41  $\zeta(3) = 3/3 = 1$ . Значення  $\zeta(q)/\zeta(3)$  отримують із нахилу графіка в логарифмічному масштабі (рис. 8, б) (порівняння експериментальних даних із колмогорівською моделлю турбулентності K41).

Для порівняння ж даних експерименту із моделлю двовимірної турбулентності Ірошнікова — Крейчнана знаходять залежність  $\zeta(q)/\zeta(4)$ , оскільки для неї  $\zeta(4) = 4/4 = 1$  (рис. 8, в).

Результати розрахунку скейлінгів моментів функції густини ймовірності флуктуацій магнітного поля для різних порядків  $q$  при аналізі маломасштабної турбулентності та порівняння їх із колмогорівською моделлю, ізотропною логпуассонівською моделлю ( $\zeta(q) = q/9 + 2(1 - (2/3)^{q/3})$ ) та двовимірною моделлю Ірошнікова — Крейчнана [28, 33] представлено на рис. 9.

Серед отриманих результатів можна відмітити, що турбулентні процеси близькі до двовимірної моделі Ірошнікова — Крейчнана у плазмі сонячного вітру, добре описуються ізотропною логпуассонівською каскадною моделлю всередині магнітошару. Найбільша неоднорідність (переміжність) та неізотропність турбулентних процесів спостерігається у постшоковій області.

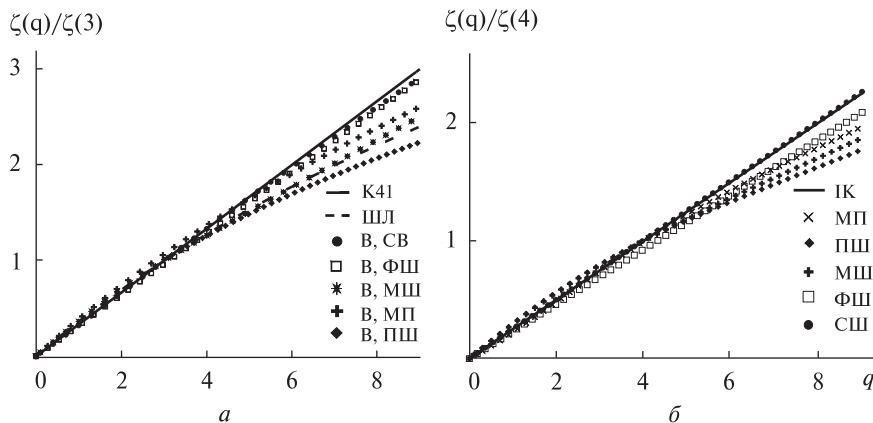


Рис. 9. Відношення  $\zeta(q)/\zeta(3)$  та  $\zeta(q)/\zeta(4)$  для 20 березня 2006 р: K41 та ІК — розрахунки в рамках моделей Колмогорова та Ірошнікова — Крайчнана, ШЛ — розрахунки в рамках ізотропної лог-пуасонівської каскадної моделі; МП, СВ, ФШ, МШ, ПШ — експериментальні дані для області магнітопаузи, плазми сонячного вітру, форшокової області, магнітосфери і постшокової області відповідно

Важливо, що в рамках мультифрактального аналізу, отримавши з експериментальних даних значення  $\zeta(q)$  можна побудувати і мультифрактальний спектр (спектр сингулярностей), що описує глобальну природу розподілу областей із різним скейлінгом [38]. Для визначення спектру сингулярностей  $D(h)$  і показників Гельдера  $h$  можна використати послідовність розрахунків:

$$S_q(\tau) = \left\langle |B(t+\tau) - B(t)|^q \right\rangle \propto \tau^{\zeta(q)} \Rightarrow$$

$$D(h) = \min_q (qh - \zeta(q) + 1), \quad h = d\zeta / dq.$$

Вигляд мультифрактального спектру для різних областей представлено на рис. 10.

По аналогії з мультифрактальним формалізмом і статистичною термодинамікою [11, 12] змінні  $h$  і  $q$  відіграють таку ж роль у статистичному описі процесу, що енергія і обернена температура в термодинаміці.

В більш загальному підході (більш коректно) спектр сингулярності можна отримати із перетворень Лежандра функції  $\zeta(q) - 1$  [31] та з використанням методу WTMM (Wavelet transform modulus maxima) [18], що дозволяє детектувати всі сингулярності в сигналі шляхом пошуку локальних максимумів для даного масштабу.

Для всіх флуктуацій магнітного поля, які було зараєстровано у перехідних областях магнітосфери Землі, має місце уширений (параболічний)

вигляд мультифрактального спектру. Саме уширення і дзвоноподібність — типові ознаки мультифрактальності стохастичних процесів. Слід відмітити, що для броунівського процесу (турбулентність колмогорівського типу)  $D(h)$  є точкою з показником Гельдера  $h = 1/3$ , тобто процес характеризується одним значенням показника [20]. Різниця  $h_{\max} - h_{\min}$  є кількісною характеристикою спектру, яку можна використовувати як показник ступеня відхилення від ізотропної турбулентності — колмогорівського процесу. Розширення спектру  $D(h)$  для проаналізованих областей магнітосфери лежить у межах 0.4—0.7. Найбільше розширення спостерігається для постшокової області, а найменше — для форшоку. Узагальнена розмірність  $D$ , згідно з логнормальною моделлю, пов'язана із коефіцієнтом переміжності  $\mu$  співвідношенням  $\mu = -2dD_q / dq$  при  $q = 0$ . Значення узагальненої розмірності в залежності від порядку структурної функції (як для додатніх, так і від'ємних значень) та її порівняння із логнормальною моделлю представлено на рис. 11.

Узагальнена розмірність близька до логнормальної моделі тільки для невеликого діапазону порядку моментів. Слід зазначити, що логнормальна модель є частиною каскадної моделі, яка генерує мультиплікативний випадковий сигнал.

Ще одним результатом наведеного вище мультифрактального аналізу є визначення коефіцієнта переміжності, який лежить в діапазоні від 0.2 до 0.4. Це означає, що коррекцію на переміжність потрібно вводити при аналізі степеня спектрального індексу для розгляду моделей турбулентності. Крім того, не слід забувати, що ми аналізуємо флуктуації магнітного поля, а не потоку швидкості — тобто може бути різниця між рідиною і МГД-середовищем, оскільки для однорідного потоку рідини показник степеня спектрального індексу дорівнює  $5/3$ , а для випадку МГД-речовини —  $3/2$ .

**Вейвлет-аналіз.** При дослідженні турбулентних процесів за необхідності проаналізувати просторові поля зі складною, багатомасштабною структурою або часових сигналів із змінним з часом спектральним складом використовується вейвлет-аналіз [1, 15]. Вейвлети об'єднали в собі дві важливі властивості — подібність і виражену локалізованість у фізичному і фур'є-просторах. Основні вимоги, яким має задовольняти сімейство функцій, щоб бути вейвлетами, такі:

- допустимість (аналізуючий вейвлет  $\psi(t)$  (вживають також термін материнський вейвлет), повинен мати нульове середнє значення;

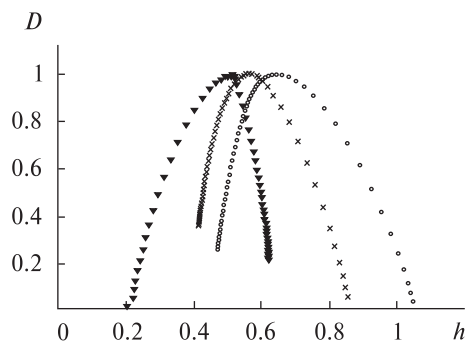
- подібність. Всі функції сімейства отримуються із аналізуючого вейвлету шляхом масштабного перетворення і зсуву;

- зворотність. Вейвлет-перетворення має бути зворотним, тобто має існувати зворотне перетворення, яке однозначно відновлює вихідну функцію за її вейвлет-представленням;

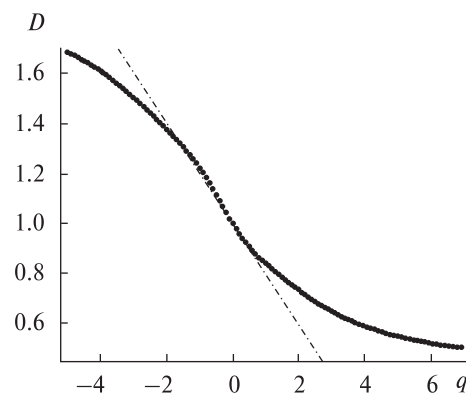
- регулярність. Функція  $\psi(t)$  повинна бути добре локалізована і у фізичному просторі, і у просторі Фур'є.

На відміну від перетворення Фур'є, вейвлет-перетворення допускає широкий вибір аналізованих функцій. Відповідно до першої вимоги, вейвлет завжди є знакозмінною функцією, що включає зазвичай невелику кількість осциляцій. Вибір конкретного виду вейвлета залежить від цілей проведеного аналізу.

Вейвлет-перетворення відображає простір функцій однієї змінної (час) у простір функцій двох змінних (час і частота, або час і масштаб) і є надлишковим. Надлишок неперервного



**Рис. 10.** Значення мультифрактального спектру  $D(h)$  в залежності від показника Гельдера для різних перехідних областей магнітосфери Землі (27 березня 2010 р.): трикутники — форшокова область, кружки — постшокова область, хрестики — область магнітосфари

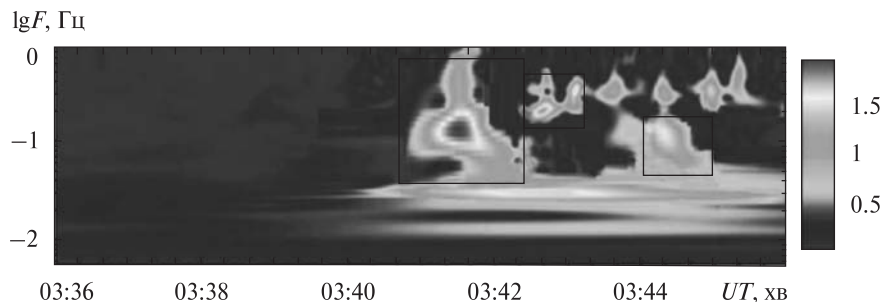


**Рис. 11.** Узагальнена розмірність в залежності від порядку структурної функції для області магнітосфари (27 березня 2010 р.). Порівняння узагальненої розмірності із логнормальною моделлю (штрих-пунктирна лінія)

вейвлет-перетворення виражається в кореляції вейвлет-коефіцієнтів, яка тим більша, чим більший розглянутий масштаб. Інакше кажучи, що більший масштаб, то менше незалежних точок у вейвлет-розкладі. Цей недолік усувається в дискретному вейвлет-представленні.

Вейвлет-представлення проектує одновимірний сигнал (який був функцією тільки часу) на площину «час — частота» і дозволяє побачити зміну в часі спектральних властивостей сигналу.

Материнський вейвлет, використаний в роботі, задовольняє умову  $\psi(t) = \psi(t-b)/a$  де  $a > 0$  — масштабний фактор (розтягнення) функції,  $b$  —



**Рис. 12.** Результат вейвлет-аналізу флуктуацій модуля магнітного поля при русі космічного апарата із плазми сонячного вітру у форшокову область (21 березня 2010 р.) (флуктуації у плазмі сонячного вітру сумірні з похибкою магнітометра). Прямокутниками виділено каскадні процеси. Момент переходу із плазми сонячного вітру у форшокову область — 03:41 UT

параметр, що характеризує зсув материнського вейвлету. Коефіцієнт масштабування прямо пов'язаний з частотою. Коефіцієнти для використаного безперервного вейвлет-перетворення мають вигляд [25, 36]

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt.$$

Використаний материнський вейвлет є вейвлетом Гаусса — Морле і задавався функцією

$$y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \left[ \exp(-i2\pi f_0 t) - \exp(-2\pi^2 \sigma^2 f_0^2) \right] \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right),$$

де  $f_0$  — параметр частоти, яка дозволяє змістити частотний діапазон для дослідження,  $\sigma$  — ширина гаусової обвідної.

Хороша дискретність вимірів флуктуацій магнітного поля дозволила провести аналіз високочастотної області спектру. Результати вейвлет-аналізу у форшоковій області представлено на рис. 12. Добре видно наявність кількох компонентів частот. Можна відмітити наявність низькочастотної складової (0.015 і 0.026 Гц) яка з'явилась безпосередньо перед початком перетину форшокової області (03:41 UT). У моменти 3:43:40, 3:44:20, 3:45:00, 3:45:20 UT спостерігаються коливання на частоті близько 0.3 Гц. Крім того, найцікавішою є наявність каскадних процесів (виділені прямокутниками). Так відразу після входження у форшокову область коливан-

ня, що виникли на частоті 0.2 Гц, поступово зміщуються з часом до частоти 0.04 Гц. Аналогічна ситуація спостерігається і о 03:44 UT.

Отже, маємо зворотний каскадний процес — перехід від високих частот до низьких. Прямий каскадний процес спостерігається у момент часу 03:42:25 UT і характеризується переходом від низьких до високих частот (від 0.15 до 0.4 Гц). Інтенсивність зворотного каскадного процесу, що розпочався о 03:41 UT, суттєво вища, ніж для зворотного каскадного процесу, що розпочався о 03:44 UT.

Таким чином, за допомогою вейвлет-аналізу можна, крім характерних частот, визначити наявність у досліджуваній області прямих чи зворотних каскадних процесів.

**Бікогерентний вейвлет-аналіз.** Бікогерентне вейвлет-перетворення є розрахунком вейвлетного біспектру, який є узагальненням вейвлет-перетворення. Нормалізований біспектр (бікогерентність) характеризує фазові співвідношення (фазовий зв'язок) між різними частотними складовими, наявними у сигналі. Про фазовий зв'язок можна говорити тільки в тому випадку, коли в аналізованому сигналі одночасно є дві частоти, сума чи різниця яких, а також сума фаз цих частотних компонентів залишається сталою протягом деякого проміжку часу. Бікогерентність є кількісною мірою такого фазового зв'язку.

Таким чином, бікогерентний вейвлет-аналіз використовують для пошуку взаємодії «хвиля — хвиля». Використаний в роботі бікогерентний



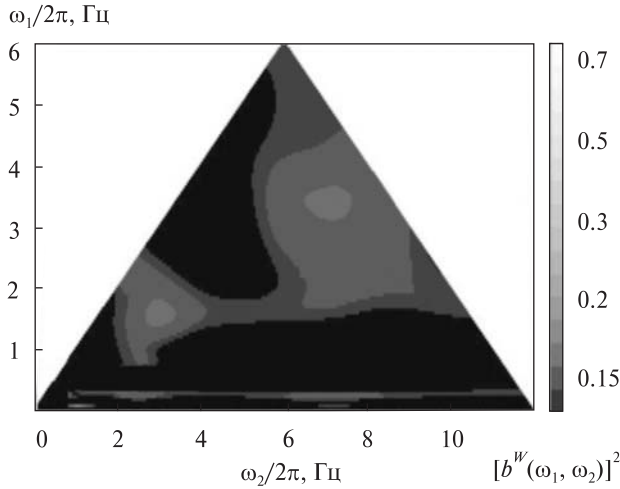


Рис. 13. Результати біспектрального аналізу для області магнітошару (27 березня 2010 р.)

вейвлет-аналіз визначався як [22]

$$\begin{aligned} [b^W(a_1, a_2)]^2 &= \\ &= \frac{|B^W(a_1, a_2)|^2}{\int |W_f(a_1, \tau) W_f(a_2, \tau)|^2 d\tau \int |W_f(a, \tau)|^2 d\tau}, \end{aligned}$$

де  $B^W(a_1, a_2)$  — нормалізований біспектр:

$$B^W(a_1, a_2) = \int W_f^*(a, \tau) W_f(a_1, \tau) W_f(a_2, \tau) d\tau,$$

$W_f(a, \tau)$  — вейвлет-перетворення, що визначається в часовому інтервалі  $t_0 \leq t \leq t_1$ , величина  $a$  визначається зі співвідношення  $1/a = 1/a_1 + 1/a_2$  — по суті правило сумування частот. Зірочкою позначено комплексне спряження.

Вейвлетний взаємний біспектр можна інтерпретувати як фазовий зв'язок між хвилями (вейвлетами), частоти яких задовольняють правило сумування частот.

Результати проведеного біспектрального аналізу для області магнітошару подано на рис. 13. Серед результатів можна відмітити наявність двох бімаксимумів на частотах  $f_1 = 1.5$  Гц і  $3.25$  Гц та на частотах  $f_2 = 3.5$  Гц і  $7.1$  Гц. При цьому  $f_1 + f_2$  дорівнює  $5$  і  $10.35$  Гц відповідно для першого і другого максимуму. Значення бікогерентного максимуму як для першого, так і для другого ви-

падку перевищує 50 % (значення 0.5 на кольоровій шкалі).

Проведений біспектральний аналіз вказує на наявність фазового зв'язку між різними частотними сигналами, які мають місце у флуктуаціях магнітного поля, і свідчить про багатомасштабний характер динаміки магнітосфери.

## ВИСНОВКИ

Відібрано методи і підходи, які можна використовувати для розгляду гідродинамічних і магнітогідродинамічних турбулентних потоків. При цьому можна аналізувати особливості як однорідних турбулентних процесів — описуються моделлю Колмогорова 1941 (тривимірна турбулентність) та моделлю Ірошнікова — Крейчнана (двовимірна, анізотропна турбулентність) — так і неоднорідних турбулентних процесів, при яких активні області співіснують з пасивними, в яких потік квазіламінарний (турбулентність з переміжністю).

Визначено, що для аналізу типу турбулентних процесів найкраще підходять методи статистичної фізики. В рамках статистичного підходу розглянуто фрактальний та мультифрактальний аналіз. Фрактальний аналіз базується на визначенні фрактальної довжини та висоти максимуму функції густини ймовірності флуктуацій досліджуваних параметрів (PDF-аналіз), а при мультифрактальному аналізі провадиться дослідження степеневих залежностей статистичних моментів високих порядків, а також будується мультифрактальний спектр.

Вказано, що статистичний аналіз властивостей турбулентних процесів можна доповнити спектральними дослідженнями: фур'є- та вейвлет-аналіз. При цьому вейвлет-розгляд дозволяє навіть простежити за зміною спектральних властивостей сигналу з часом, вказати, які частоти (масштаби) домінують в сигналі в кожен конкретний момент. Але слід відмітити, що спектральні дослідження, крім найпростіших випадків, не дозволяють визначити тип турбулентних процесів, особливо при наявності переміжності.

Для апробації розглянутих у роботі методів і підходів дослідження турбулентних властивостей середовища було використано ферозондові

виміри флуктуацій магнітного поля космічного апарата «Самба» місії «Кластер-2» у перехідних областях магнітосфери Землі та плазмі сонячного вітру.

Аналізуючи результати фрактального та спектрального аналізу флуктуацій магнітного поля у форшоковій області можна виділити такі закономірності: фрактальний аналіз характеризується значно більшою стабільністю і локалізацією в часі, ніж спектральний аналіз; крім того, він дає надійні результати навіть при аналізі на масштабах, які складають значну частину всього інтервалу вимірів. Підтверджено лінійний зв'язок між отриманою спектральною розмірністю і показником степеня перекачки енергії в турбулентному процесі для форшокової області.

Для отримання детальнішої інформації про еволюцію системи аналізують функцію густини ймовірності флуктуацій досліджуваних параметрів (PDF-аналіз).

При апробації визначено різні масштаби турбулентних процесів у перехідних областях магнітосфери Землі (значення відповідає іонноциклотронній частоті).

Визначено, що для аналізу типу турбулентних процесів потрібно знайти моменти функції розподілу флуктуацій досліджуваних МГД-параметрів, визначити показник степені структурної функції та порівняти отримані результати із наявними на сьогоднішній день моделями: логнормальна,  $\beta$ -модель, логпуасонівська, Колмогорова, Ірошнікова — Крейчнана та ін. Крім того, в рамках мультифрактального аналізу з використанням експериментальних значень показника степеня для структурної функції можна побудувати мультифрактальний спектр (спектр сингулярностей).

Мультифрактальний розгляд дозволяє також визначити коефіцієнт переміжності турбулентного процесу та особливості дисипативних структур.

Методом вейвлет-аналізу вдалося, крім визначення характерних частот, виявити прямі та зворотні каскадні процеси в досліджуваній області. Два зворотні та один прямий каскад зафіксовані у форшоковій області магнітосфери Землі. Для пошуку фазового зв'язку між різними частотни-

ми сигналами (пошук взаємодії «хвиля-хвиля»), які мають місце у флуктуаціях магнітного поля, можна застосовувати бікогерентний вейвлет-аналіз.

Апробація методів і підходів до дослідження характеристики турбулентного середовища у перехідних шарах магнітосфери Землі та плазмі сонячного вітру показала хорошу відповідність між різними дослідженнями і можливість взаємного їхнього доповнення для створення картини процесів у найменш досліджених середовищах — турбулентних.

*Автор вдячна Л. М. Зеленому, С. П. Савіну, а також рецензенту за обговорення отриманих результатів та цінні зауваження. Автор вдячна також А. Т. Луї за представлені дані супутникових вимірювань та співпрацю.*

*Робота виконувалася відповідно до Цільової комплексної програми НАН України з наукових космічних досліджень на 2012—2016 рр. та за підтримки освітньої програми Міністерства освіти і науки України № 2201250 «Освіта, навчання студентів, аспірантів, наукових і педагогічних кадрів за кордоном» (стажування в лабораторії прикладної фізики університету імені Джона Хопкінса, Мерленд, США), гранту 90312 фонду Фольксваген («VW-Stiftung») і Міжнародного інституту космічних досліджень ISSI (Teat 132), Берн, Швейцарія.*

1. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физ. наук. — 1996. — 166. — С. 1145—1170.
2. Загородний А. Г., Черемных О. К. Введение в физику плазмы. — Киев: Наук. думка, 2014. — 696 с.
3. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1988. — 368 с.
4. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Атомиздат, 1964. — С. 188—335.
5. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988. — 303 с.
6. Козак Л. В. Статистичний розгляд турбулентних процесів у магнітосфері Землі за вимірами супутника «Інтербол» // Космічна наука і технологія. — 2010. — 16, № 1. — С. 28—39.
7. Козак Л. В., Пилипенко В. А., Чугунова О. М., Козак П. Н. Статистический анализ турбулентности

- форшоковой области и магнитослоя Земли // Космич. исслед. — 2011. — **49**, № 3. — С. 202—212.
8. Козак Л. В., Савин С. П., Будаев В. П. и др. Характер турбулентности в пограничных областях магнитосферы Земли // Геомагнетизм и аэрономия. — 2012. — **52**, № 4. — С. 470—481.
  9. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. — 1941. — **30**, № 4. — С. 299—303.
  10. Космическая геогелиофизика / Под ред. Л. М. Зеленого, И. С. Веселовского. — М.: Физматлит, 2008. — Том 1. — 624 с.
  11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М. Наука, 1988. — 736 с.
  12. Монин С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. Механика турбулентности. — Л. Гидрометеоиздат, 1967. — 720 с.
  13. Новиков Е. А., Стюарт Р. У. Перемежаемость турбулентности и спектр флуктуаций диссипации энергии // Изв. АН СССР. Сер. геофизика. — 1964. — **3**. — С. 408—413.
  14. Савин С. П., Зеленый Л. М., Амата Э. и др. Динамическое взаимодействие потока плазмы с горячим погранслоем геомагнитной ловушки // Письма в ЖЕТФ. — 2004. — **79**, № 8. — С. 452—456.
  15. Фрик П. Г. Вейвлет-анализ и иерархические модели турбулентности. — Пермь: ИМ СС УрО РАН, 1992. — 40 с.
  16. Фрик П. Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. — Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 1999. — Ч. II. — 136 с.
  17. Фриш У. Турбулентность: Наследие А. Н. Колмогорова. — М.: Фазис, 1998. — 343 с.
  18. Vacry E., Muzy J. F., Arneodo A. Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis: exact results // J. Statistical Phys. — 1993. — **70**. — P. 635—654.
  19. Benzi R., Ciliberto S., Tripicciono R., et al. Extended self-similarity in turbulent flows // Phys. Rev. E. — 1993. — **48**. — P. R29—R32.
  20. Budaev V. P., Savin S., Zelenyi L., et al. Intermittency and extended self-similarity in space and fusion plasma: boundary effects // Plasma Phys. Control Fusion. — 2008. — **50**. — P. 074014—074023.
  21. Consolini G., Kretzschmar M., Lui A. T. Y., et al. On the magnetic field fluctuations during magnetospheric tail current disruption: A statistical approach // J. Geophys. Res. — 2005. — **110**. — A07202. doi:10.1029/2004JA010947.
  22. Consolini G., Lui A. T. Y. Symmetry breaking and nonlinear wave-wave interaction in current disruption: possible evidence for a dynamical phase transition // Magnetospheric current systems / Eds S.-I. Ohtani, R. Fujii, M. Hesse, R. L. Lysak. — Washington: AUG, 2000. — **118**. — 395 p.
  23. Dubrulle B. Intermittency in fully developed turbulence: Log-Poisson statistics and generalized scale covariance // Phys. Rev. Lett. — 1994. — **73**. — P. 959—962.
  24. Feder J. Fractals. — New York: Plenum Press, 1988. — 12 p.
  25. Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. — 1984. — **15**. — P. 723—731.
  26. Kozak L., Lui A., Savin S. Statistical analysis of the magnetic field measurements // Odessa Astron. Publ. — 2014. — **26/2**. — P. 268—271.
  27. Kraichnan R. H. The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers // J. Fluid Mech. — 1959. — **5**. — P. 497—543.
  28. Kraichnan R. H. Convergent to turbulence functions // J. Fluid Mech. — 1970. — **41**. — P. 189—217.
  29. Lauwerier H. A. Fractals — images of chaos. — London: Princeton Univ. Press, 1991. — 240 p.
  30. Lovejoy S., Schertzer D., Silas P. Diffusion in one dimensional multifractal porous media // Water Resources Research. — 1998. — **34**. — P. 3283—3291.
  31. Mallat S., Hwang W. L. Singularity detection and processing with wavelets // IEEE Trans. Inform. Theory. — 1992. — **32**, N 2. — P. 617—643.
  32. Ohtani S., Higuchi T., Lui A. T. Y., Takahashi K. Magnetic fluctuations associated with tail current disruption: fractal analysis // J. Geophys. Res. — 1995. — **100**. — P. 19135—19147.
  33. Politano H., Pouquet A., Carbone V. Determination of anomalous exponents of structure functions in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence // Europhys. Lett. — 1998. — **43**. — P. 516—521.
  34. Savin S. P., Borodkova N. L., Budnik E. Yu., et al. Interball tail probe measurements in outer cusp and boundary layers // Geospace Mass and Energy Flow: Results from the International Solar-Terrestrial Physics Program / Eds J. L. Horwitz, et al. — Washington: AGU, 1998. — Vol. 104. — P. 25—44.
  35. Schertzer D., Lovejoy S., Hubert P. An introduction to stochastic multifractal fields // Mathematical problems in environmental science and engineering / Eds A. Ern, L. Weiping. — Beijing: Higher Education Press, 2002. — **4**. Ser. in contemporary applied mathematics. — P. 106—179.
  36. Schroter E. H., Soltau D., Wiehr E. The German solar telescopes at the Observatorio del Teide // Vistas in Astron. — 1985. — **28**. — P. 519—525
  37. She Z., Leveque E. Universal scaling laws in fully developed turbulence // Phys. Rev. Lett. — 1994. — **72**. — P. 336—339.
  38. Yordanova E., Grzesiak M., Wernik A. W., et al. Multifractal structure of turbulence in the magnetospheric cusp // Ann. geophys. — 2004. — **22**. — P. 2431—2440.

Стаття надійшла до редакції 23.10.14

## REFERENCES

1. *Astaf'eva N. M.* Wavelet analysis: basic theory and some applications. *Phys. Usp.* **166**(11), 1145—1170 (1996) [in Russian].
2. *Zagorodnij A. G., Cheremnykh O. K.* Introduction to the plasma physics, 696 p. (Nauk. dumka, Kiev, 2014) [in Russian].
3. *Zaslavskij G. M., Sagdeev R. Z.* Introduction to the nonlinear physics. From the pendulum to turbulence and chaos, 368 p. (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
4. *Kadomcev B. B.* Turbulence of plasma Questions of plasma theory. Is.4, Ed. by M. A. Leontovich, 188—339 (Atomizdat, Moscow, 1964) [in Russian].
5. *Kadomcev B. B.* Collective phenomena in plasma, 303 p. (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
6. *Kozak L. V.* A statistical approach for turbulent processes in the Earth's magnetosphere from measurements of the satellite Interball. *Kosm. nauka tehnol.* **16** (1), 28—39 (2010) [in Russian].
7. *Kozak L. V., Pilipenko V. A., Chugunova O. M., Kozak P. N.* Statistical analysis of turbulence in the foreshock region and in the Earth's magnetosheath. *Cosmic Research*, **49** (3), 202—212 (2011) [in Russian].
8. *Kozak L. V., Savin S. P., Budaev V. P., Pilipenko V. A., Lezhen L. A.* Character of turbulence in the boundary regions of the Earth's magnetosphere. *Geomagnetism and Aeronomy*, **52** (4), 470—481 (2012) [in Russian].
9. *Kolmogorov A. N.* The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers. *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, **30**(4), 299—303 (1941) [in Russian].
10. *Zelenyj L. M., Veselovskij I. S.* (Eds.) Space geoheliophysics [Kosmicheskaja geogeliofizika]. Vol. 1, 624 p. (Vol. 1-2; Vol. 1) (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
11. *Landau L. D., Lifshic E. M.* Hydrodynamics [Gidrodinamika], 736 p. (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
12. *Monin S., Jaglom A. M.* Statistical Fluid Mechanics. Part 2. Turbulence Mechanics [Statisticheskaja gidromehanika. Pt. 2. Mehanika turbulentsosti], 720 p. (Gidrometeoizdat, Leningrad, 1967) [in Russian].
13. *Novikov E. A., Stjuart R. U.* The intermittency of turbulence and a range of energy dissipation fluctuations [Peremezhnaemost' turbulentsosti i spektr fljukuacij dissipacii jenerгии]. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Geophysics Series*, N 3, 408—413 (1964) [in Russian].
14. *Savin S. P., Zelenyi L. M., Amata E., et al.* Dynamic interaction of plasma flow with the hot boundary layer of a geomagnetic trap. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, **79** (8), 452—456 (2004) [in Russian].
15. *Frik P. G.* Wavelet analysis and hierarchical model of turbulence, 40 p. (IMSS UrO RAN, Perm', 1992) [in Russian].
16. *Frik P. G.* Turbulence: Models and Approaches. Lektion Course. Pt. II, 136 p. (Perm State Techn. Univ., Perm', 1999) [in Russian].
17. *Frisch U.* Turbulence. The Legacy of A. N. Kolmogorov, 343 p. (Fazis, Moscow, 1998) [in Russian].
18. *Bacry E., Muzy J. F., Arneodo A.* Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis: exact results. *J. Statistical Phys.* **70**, 635—654 (1993).
19. *Benzi R., Ciliberto S., Tripicciono R., Baudet C., Massaioli F., Succi S.* Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. E* **48**, R29—R32 (1993).
20. *Budaev V. P., Savin S., Zelenyi L., et al.* Intermittency and extended self-similarity in space and fusion plasma: boundary effects. *Plasma Phys. Control Fusion*, **50**, 074014—074023 (2008).
21. *Consolini G., Kretzschmar M., Lui A. T. Y., Zimbardo G., Macek W. M.* On the magnetic field fluctuations during magnetospheric tail current disruption: A statistical approach. *J. Geophys. Res.*, **110**, A07202 (2005). doi:10.1029/2004JA010947.
22. *Consolini G., Lui A. T. Y.* Symmetry breaking and nonlinear wave-wave interaction in current disruption: possible evidence for a dynamical phase transition. *Magnetospheric current systems*, Eds S.-I. Ohtani, R. Fujii, M. Hesse, R. L. Lysak, **118**, 395 p. (AUG, Washington, 2000).
23. *Dubrulle B.* Intermittency in fully developed turbulence: Log-Poisson statistics and generalized scale covariance. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 959—962 (1994).
24. *Feder J.* *Fractals*, 12 p. (Plenum Press, New York, 1988).
25. *Grossmann A., Morlet J.* Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Mathematical Analysis*, **15**, 723—731 (1984).
26. *Kozak L., Lui A., Savin S.* Statistical analysis of the magnetic field measurements. *Odessa Astron. Publ.*, **26** (2), 268—271 (2014).
27. *Kraichnan R. H.* The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, **5**, 497—543 (1959).
28. *Kraichnan R. H.* Convergents to turbulence functions. *J. Fluid Mech.*, **41**, 189—217 (1970).
29. *Lauwerier H. A.* *Fractals — images of chaos*, 240 p. (Princeton Univ. Press, London, 1991).
30. *Lovejoy S., Schertzer D., Silas P.* Diffusion in one dimensional multifractal porous media. *Water Resources Research*, **34**, 3283—3291 (1998).
31. *Mallat S., Hwang W. L.* Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transactions on Inform. Theory*, **32** (2), 617—643 (1992).
32. *Ohtani S., Higuchi T., Lui A. T. Y., Takahashi K.* Magnetic uctuations associated with tail current disruption: fractal analysis. *J. Geophys. Res.*, **100**, 19135—19147 (1995).
33. *Politano H., Pouquet A., Carbone V.* Determination of anomalous exponents of structure functions in two-di-



- mensional magnetohydrodynamic turbulence. *Europhys. Lett.* **43**, 516–521 (1998).
34. Savin S. P., Borodkova N. L., Budnik E. Yu., et al. Interball tail probe measurements in outer cusp and boundary layers. *Geospace Mass and Energy Flow: Results from the International Solar-Terrestrial Physics Program*, Eds J. L. Horwitz, et al., **104**, 25–44 (AGU, Washington, 1998).
  35. Schertzer D., Lovejoy S., Hubert P. An introduction to stochastic multifractal fields. *Mathematical problems in environmental science and engineering*, Eds A. Ern, L. Weiping. 4. Series in contemporary applied mathematics, 106–179 (Higher Education Press, Beijing, 2002).
  36. Schroter E. H., Soltau D., Wiehr E. The German solar telescopes at the Observatorio del Teide. *Vistas in Astron.*, **28**, 519–525 (1985).
  37. She Z., Leveque E. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 336–339 (1994).
  38. Yordanova E., Grzesiak M., Wernik A. W., Popielawska B., K. Stasiewicz K. Multifractal structure of turbulence in the magnetospheric cusp. *Ann. geophys.*, **22**, 2431–2440 (2004).

Л. В. Козак

Киевский национальный университет  
имени Тараса Шевченко, Киев

#### МЕТОДЫ И ПОДХОДЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЫ

Отобраны методы и подходы, которые можно использовать для анализа гидродинамических и магнитогиродинамических турбулентных потоков. Определено, что для характеристики типа турбулентных процессов лучше всего подходят методы статистической физики. В рамках статистического подхода рассмотрены фрактальный анализ (определение фрактальной длины и высоты максимума функции плотности вероятности флуктуаций исследуемых параметров), и мультифрактальный анализ (исследование степенных зависимостей статистических моментов высоких порядков и построение мультифрактального спектра). Указано, что статистический анализ свойств турбулентных процессов можно дополнить спектральными исследованиями: фурье- и вейвлет-анализом. Для апробации рассмотренных в работе методов

и подходов использовано феррозондовые измерения флуктуаций магнитного поля космического аппарата «Самба» миссии «Кластер-2» с дискретностью 22.5 Гц в переходных областях магнитосферы Земли и плазме солнечного ветра. Можно отметить хорошее соответствие между различными исследованиями и взаимное их дополнение для создания общей картины турбулентности.

**Ключевые слова:** турбулентность, статистический анализ, фрактальный анализ спутниковых измерений, мультифрактальный анализ, флуктуации магнитного поля, магнитосфера Земли, плазма солнечного ветра.

L. V. Kozak

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv

#### THE METHODS AND APPROACHES TO DETERMINE CHARACTERISTICS OF TURBULENT ENVIRONMENT

The methods and approaches that can be used to analyze the hydrodynamic and magneto-hydrodynamic turbulent flows are selected. It was determined that the methods of statistical physics are most suitable to characterize the type of turbulent processes. Within the statistical approach we consider the fractal analysis (determination of fractal length and height of the maximum of the probability density fluctuations of the studied parameters), and multifractal analysis (study of a power dependence of high order statistical moments and construction of multifractal spectrum). It is indicated that statistical analysis of the properties of turbulent processes can be supplemented with the spectral studies: Fourier and wavelet analysis. In order to test the methods and approaches discussed in the work the fero-probe measurements of magnetic field fluctuations obtained by the spacecraft “Samba” of the mission “Cluster 2” with discreteness of 22.5 Hz in the transition regions of Earth’s magnetosphere and solar wind were used. We get a good agreement between different approaches and their mutual complementing to provide a general view of the turbulence.

**Keywords:** turbulence, statistical analysis, fractal analysis of satellite measurements, multifractal analysis, the fluctuations of the magnetic field, the Earth’s magnetosphere, solar wind plasma.