УДК 681.518.5

**Н. В. Ефименко [1], Н. В. Луценко [2], Т. А. Паромова [2]**

[1]Научно-производственное предприятие «Хартрон-ЮКОМ», Запорожье
[2]Запорожский национальный технический университет

# БЫСТРЫЕ ВРАЩЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПОСРЕДСТВОМ МИНИМАЛЬНО-ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМЫ ГИРОДИНОВ

*Рассмотрена задача пространственной переориентации космического аппарата при помощи минимально-избыточной системы гиродинов. Предложен алгоритм переориентации, обеспечивающий заданную ориентацию космического аппарата и оптимальную конфигурацию гиродинов. Приведены результаты численного моделирования предложенного алгоритма.*

***Ключевые слова***: *космический аппарат, гиродин, управление ориентацией.*

## ВВЕДЕНИЕ

Задачи переориентации КА представляют собой задачи управления угловым движением корпуса КА вокруг центра масс. Эти задачи в настоящее время очень актуальны в связи со все возрастающими требованиями к динамическим характеристикам пространственных маневров КА. Разворот должен происходить из любого текущего положения в любое заданное. При этом точность ориентации в развернутом положении должна составлять единицы дуговых минут, а угловые скорости разворота могут достигать величины 2—3 °/с. Для примера, французский КА «Spot-7», выведенный на орбиту 30 июня 2014 г., для получения снимков земной поверхности высокого разрешения обеспечивает следующие динамические характеристики пространственных маневров:

- точность ориентации — 1.7′;
- максимальная скорость разворота — 2.1 °/с.

Обеспечение таких высоких динамических характеристик осложняется тем, что для спутников дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) высокого разрешения прослеживается тенденция увеличения массы. Если масса более ранних спутников «Ikonos», «OrbView-3» составляла 720 и 304 кг соответственно, то масса последующих «QuickBird-2», «WorldView-1, «Geoeye-1», «WorldView-2» превышает две тонны. Известно, что при значительной массе КА наиболее эффективными исполнительными органами системы ориентации являются гиросиловые системы [6, 7, 12], построенные на основе трехстепенных или двухстепенных силовых гироскопов — гиродинов. В качестве примера такого использования следует упомянуть орбитальную станцию «Skylab», космический телескоп «Hubble», орбитальные станции «Мир» и «Альфа», искусственные спутники дистанционного зондирования Земли «Аркон», спутники серии «Ресурс-ДК», научные астрофизические аппараты «Гамма» и «Спектр». Основным достоинством гиродинов является то, что они обладают наилучшим среди прочих типов исполнительных устройств отношением «создаваемый управляющий момент / собственная масса» и при этом позволяют осуществлять сложные вращательные движения аппарата, необходимые для решения многих практически важных задач управления ориентацией.

Задачи гиросилового управления угловым движением являются одними из наиболее сложных среди задач управления переориентацией КА. Центральным вопросом при решении этих задач является вопрос синтеза законов управления отдельными гиродинами в условиях избыточности их количества. Его смысл состоит в том, чтобы определить скорости прецессии гиродинов, реализующие требуемый динамический момент, прикладываемый к корпусу КА. С математической точки зрения отыскание скоростей прецессии гиродинов представляет собой решение системы трех линейных уравнений вида

$$\mathbf{B}(\alpha)\cdot\mathbf{u} = \frac{-\mathbf{M}(t)}{h_0},\ B(\alpha)\in R^{3\times N}, \qquad (1)$$

где $M(t)$ — требуемый динамический момент, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)^{\mathrm{T}}$ — вектор углов прецессии гиродинов, $\mathbf{u} = (u_1, \cdots, u_N)$ — вектор искомого управления гиродинами (вектор скоростей прецессии гиродинов), $\mathbf{B}(\alpha) = \left(\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_1}, \cdots, \frac{\partial h_N}{\partial \alpha_N}\right)$ — матрица управляемости системы. Для того чтобы эта система имела единственное решение, ранг матрицы $\mathbf{B}(\alpha)$ должен быть равен 3. Для обеспечения этого требования вводят так называемый критерий настройки $\Psi(\alpha)$, представляющий собой некоторую целевую функцию, зависящую от углов прецессии и являющуюся характеристикой линейной независимости строк матрицы $\mathbf{B}(\alpha)$. При этом задача нахождения вектора $u$ формулируется как задача оптимизации: найти максимум целевой функции $\Psi(\alpha)$ по вектору $\alpha$ при ограничении (1). Так как целевая функция, как правило, является нелинейной функцией $N$ аргументов и может иметь несколько точек экстремумов, то задача нахождения управления $\mathbf{u}$ является нетривиальной. Есть различные подходы к выбору критерия настройки. Так, в работе [16] в качестве регуляризирующего параметра для минимально-избыточной компланарной системы гиродинов предлагается использовать степень насыщения коллинеарных пар гиродинов по независимым осям. Как отмечено в работе [11], такой подход нашел широкое практическое применение. Усовершенствованию этого метода посвящены работы [8—10], в которых описаны алгоритмы, исключающие возможность реализации установившихся особых состояний силового гироскопического комплекса, а также гарантирующие в любой момент времени возможность создания вектора управляющего момента в любом пространственном направлении.

В настоящее время одной из наиболее распространенных функций настройки является функция $\Psi(\alpha) = \det[\mathbf{B}(\alpha)\mathbf{B}^T(\alpha)]$, предложенная в работах [13, 14]. Вопросам построения алгоритмов управления с этой функцией настройки посвящена работа [3]. Современные подходы к построению алгоритмов управления ориентацией КА с помощью силовых гироскопов нашли отражение в работах [15, 17].

Несмотря на то что задаче управления ориентацией КА с помощью гиродинов было уделено большое внимание, она актуальна и сейчас. Ее решению и посвящена данная статья.

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Космический аппарат (КА) рассматривается как твердое тело, содержащее $N$ произвольно расположенных на КА гиродинов. Положение центра масс КА предполагается неизменным при любых поворотах гиродинов относительно осей прецессии, т. е. принимается гипотеза гиростата [2]. Управление скоростью прецессии $\dot{\alpha}_i$ $i$-го гиродина осуществляется при помощи датчиков моментов (ДМ), представляющих собой электродвигатели с реверсируемой величиной создаваемых ими управляющих моментов. Предполагается, что все гиродины имеют одинаковые собственные кинетические моменты $h_0 = \mathrm{const}$ и известны их тензоры инерции $\mathbf{J}_G$ в базисе $\mathbf{R}_i$.

Согласно теореме об изменении момента количества движения (кинетического момента системы КА+гиродины) относительно ее центра масс [2] вращательное движение системы относительно центра масс описывается уравнением

$$\mathbf{J}\dot{\omega}_E^{EI} + \omega_E^{EI} \times (\mathbf{J}\omega_E^{EI} + \mathbf{H}_E) = -\dot{\mathbf{H}}_E, \qquad (2)$$

где $\mathbf{H}_E = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{h}_{iE}$ — суммарный кинетический момент всех гиродинов в их движении относительно корпуса КА. Для вектора $\mathbf{h}_{iE}$ имеем следующие соотношения:

$$\mathbf{h}_{iE} = \mathbf{C}_E^{G_i}\mathbf{h}_{iG}\,,$$

$$h_{iG} = C_{G_i}^{R_i}(h_{iR} + J_G\omega_{R_i}^{R_iG_i})\,, \tag{3}$$

$$\mathbf{h}_{iR} = \mathbf{h}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \omega_{R_i}^{R_iG_i} = \begin{pmatrix} \dot\alpha_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{G_i}^{R_i} = (\mathbf{c}_1^{G_iR_i}, \mathbf{c}_2^{G_iR_i}, \mathbf{c}_3^{G_iR_i}). \tag{4}$$

$$\mathbf{c}_1^{G_iR_i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{c}_2^{G_iR_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha_i \\ \sin\alpha_i \end{pmatrix},\ \mathbf{c}_3^{G_iR_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha_i \\ \cos\alpha_i \end{pmatrix}. \tag{5}$$

После подстановки соотношений (3)—(5) в выражение для вектора $\mathbf{H}_E$ получим

$$\mathbf{H}_E = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{C}_E^{G_i}(h_0\mathbf{c}_2^{G_iR_i} + J_{gx}\dot\alpha_i\mathbf{c}_1^{G_iR_i})\,.$$

Будем полагать, что составляющая кинетического момента $J_{gx}\dot\alpha_i\mathbf{c}_1^{G_iR_i}$, обусловленная прецессией гиродинов, значительно меньше собственного кинетического момента гиродина $h_0\mathbf{c}_2^{G_iR_i}$, и этой составляющей можно пренебречь. В этом случае для вектора $\mathbf{H}_E$ можно записать выражение

$$\mathbf{H}_E = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{C}_E^{G_i}h_0\mathbf{c}_2^{G_iR_i}. \tag{6}$$

Дифференцируя (6) и учитывая, что

$$\dot{\mathbf{c}}_2^{G_iR_i} = \dot\alpha_i\mathbf{c}_3^{G_iR_i},$$

имеем

$$\dot{\mathbf{H}}_E = \sum_{i=1}^{N}h_0\dot\alpha_i\mathbf{C}_E^{G_i}\mathbf{c}_3^{G_iR_i}. \tag{7}$$

Подставив (7) в (2), получим уравнение движения КА с произвольной системой гиродинов

$$\mathbf{J}\dot\omega_E^{EI} + \omega_E^{EI}\times(\mathbf{J}\omega_E^{EI} + \sum_{i=1}^{N}h_0\mathbf{C}_E^{G_i}\mathbf{c}_2^{G_iR_i} = -\sum_{i=1}^{N}h_0\dot\alpha_i\mathbf{C}_E^{G_i}\mathbf{c}_3^{G_iR_i}. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение вектор $\boldsymbol\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)^T$ и матрицы

$$\mathbf{B}(\alpha) = (\mathbf{C}_E^{G_1}\mathbf{c}_3^{G_1R_1}(\alpha_1)\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \ \mathbf{C}_E^{G_N}\mathbf{c}_3^{G_NR_N}(\alpha_N)),$$

$$\mathbf{G} = (\mathbf{c}_1^{EG_1}\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \ \mathbf{c}_1^{EG_N}),$$

$$\boldsymbol\Omega_E^{EI} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{Ez}^{EI} & \omega_{Ey}^{EI} \\ \omega_{Ez}^{EI} & 0 & -\omega_{Ex}^{EI} \\ -\omega_{Ey}^{EI} & \omega_{Ex}^{EI} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{C}_E^{G_i}\mathbf{c}_2^{G_iR_i}(\alpha_i)\,.$$

Тогда уравнение (8) можно представить в виде

$$\mathbf{J}\dot\omega_E^{EI} + \Omega_E^{EI}\cdot\mathbf{J}\omega_E^{EI} + h_0\Omega_E^{EI}\cdot\mathbf{F}(\alpha) = -\mathbf{h_0}\mathbf{B}(\alpha)\dot\alpha_p\,. \tag{9}$$

К уравнению (9) необходимо добавить уравнение прецессии, которое описывает динамику углов прецессии $\alpha_i$ гиродинов под действием управляющих моментов, приложенных к осям рамок, относительно корпуса КА:

$$\dot\alpha = \mathbf{u},$$

$$\boldsymbol\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{u} = (J_g^{-1}m_1,\ldots,J_g^{-1}m_N)^{\mathrm{T}},$$

где $m_i$ ($i$ = 1, 2, ..., $N$) — управляющий механический момент, создаваемый датчиком моментов $i$-го гироскопа.

### ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ГИРОДИНОВ

Будем полагать, что на КА установлено четыре гиродина с попарно-параллельными осями прецессии (минимально-избыточная компланарная схема расположения гиродинов на КА). Гиродины образуют две группы. Оси прецессии гиродинов первой группы совпадают с осью $x_E$, оси прецессии второй группы совпадают с осью $y_E$. Для такой схемы расположения гиродинов матрицы установки $\mathbf{C}^{EG_i}$ и направляющие косинусы векторов кинетических моментов гиродинов в относительных единицах $\mathbf{g}_i = \mathbf{h}_{iE}/h_\mathbf{0}$ имеют вид

$$\mathbf{C}^{EG_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}^{EG_2} = \mathbf{C}^{EG_1},$$

$$\mathbf{C}^{EG_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}^{EG_4} = \mathbf{C}^{EG_3},$$

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_1 \end{pmatrix},\ \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha_2 \\ \cos\alpha_2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha_3 \\ 0 \\ -\cos\alpha_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{g}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha_4 \\ 0 \\ -\cos\alpha_4 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

При этом

$$\mathbf{H}_E = h_0 \begin{pmatrix} x_3 + x_4 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $h_{12} = z_1 + z_2$ и $h_{34} = z_3 + z_4$ кинетические моменты первой и второй группы гиродинов по оси $z$, а через $\Delta = h_{12} - h_{34}$ — их разность. Если вектор $\mathbf{H}_E = (h_{Ex}, h_{Ey}, h_{Ez})^{\mathrm{T}}$ известен и задана разность $\Delta$, то можно записать следующую систему тригонометрических уравнений для определения проекций векторов $\mathbf{g}_i$ на оси связанной системы координат [1]

$$x_3 + x_4 = \frac{h_{Ex}}{h_0}, \quad y_1 + y_2 = \frac{h_{Ey}}{h_0},$$

$$z_1 + z_2 = h_{12}, \quad z_3 + z_4 = h_{34},$$

$$h_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_{Ez}}{h_0} + \Delta\right), \quad h_{34} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_{Ez}}{h_0} - \Delta\right).$$

Решая эту систему уравнений и учитывая уравнения связей между проекциями векторов $\mathbf{g}_i$

$$y_1^2 + z_1^2 = 1, \quad y_2^2 + z_2^2 = 1,$$

$$x_3^2 + z_3^2 = 1, \quad x_4^2 + z_4^2 = 1,$$

получим

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{4 - h_{Ey}^2 / h_0^2 - h_{12}^2} \Big/ \sqrt{h_{Ey}^2 / h_0^2 + h_{12}^2}, \\ a_2 &= \sqrt{4 - h_{Ex}^2 / h_0^2 - h_{34}^2} \Big/ \sqrt{h_{Ex}^2 / h_0^2 + h_{34}^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{h_{Ey}/h_0 + h_{12} \cdot a_1}{2}, \quad y_2 = \frac{h_{Ey}/h_0 - h_{12} \cdot a_1}{2}, \\ z_1 &= \frac{h_{12} - (h_{Ey}/h_0) \cdot a_1}{2}, \quad z_2 = \frac{h_{12} + (h_{Ey}/h_0) \cdot a_1}{2}, \\ x_3 &= \frac{h_{Ex}/h_0 + h_{34} \cdot a_2}{2}, \quad x_4 = \frac{h_{Ex}/h - h_{34} \cdot a_2}{2}, \\ z_3 &= \frac{h_{34} - (h_{Ex}/h) \cdot a_2}{2}, \quad z_4 = \frac{h_{34} + (h_{Ex}/h) \cdot a_2}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Найдем условие, которому должна удовлетворять разность $\Delta$, при котором существует решение (13). Из формул (12) видно, что решение существует, если выполняются неравенства

$$4 - h_{Ey}^2 / h_0^2 - h_{12}^2 \ge 0, \ 4 - h_{Ex}^2 / h_0^2 - h_{34}^2 \ge 0.$$

Решая эти неравенства относительно параметра $\Delta$, получим следующие условия существования решения (13):

$$a \le \Delta \le b,$$

где

$$a = \max(p_2, p_4), \quad b = \min(p_1, p_3),$$

$$p_1 = -\frac{h_{Ez}}{h_0} + 2\sqrt{4 - \left(\frac{h_{Ey}}{h_0}\right)^2}, \ p_2 = -\frac{h_{Ez}}{h_0} - 2\sqrt{4 - \left(\frac{h_{Ey}}{h_0}\right)^2},$$

$$p_3 = \frac{h_{Ez}}{h_0} + 2\sqrt{4 - \left(\frac{h_{Ex}}{h_0}\right)^2}, \ p_4 = \frac{h_{Ez}}{h_0} - 2\sqrt{4 - \left(\frac{h_{Ex}}{h_0}\right)^2},$$

$$p_1 \ge p_2, \ p_3 \ge p_4.$$

Таким образом, если известен кинетический момент гиродинов и задана разность $\Delta$, то по формулам (12), (13) всегда можно найти распределение кинетического момента между гиродинами. При этом значение разности $\Delta$ должно находиться в диапазоне $a \le \Delta \le b$. Если условие $a \le \Delta \le b$ не выполняется, то невозможно получить заданное распределение кинетического момента между гиродинами по известному кинетическому моменту $\mathbf{H}_E$.

Для исключения особых состояний в работе гиродинов и максимального расширения области управляемости системы введем в рассмотрение функцию настройки $\Psi(\alpha) = \det[\mathbf{B}(\alpha)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\alpha)]$ и рассмотрим задачу нахождения максимума этой функции по параметру $\Delta$. Для заданной схемы установки гиродинов матрица $\mathbf{B}(\alpha)$ имеет вид

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos\alpha_3 & -\cos\alpha_4 \\ -\cos\alpha_1 & -\cos\alpha_2 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_1 & -\sin\alpha_2 & \sin\alpha_3 & \sin\alpha_4 \end{pmatrix},$$

или с учетом выражений (10), (11) для проекций векторов $\mathbf{g}_i$

$$\mathbf{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_3 & z_4 \\ -z_1 & -z_2 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & -x_3 & -x_4 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицу $\mathbf{B}(\alpha)$ на матрицу $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\alpha)$ и найдя детерминант этой матрицы, получим

$$\det[\mathbf{B}(\alpha) \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\alpha)] =$$

$$(z_3^2 + z_4^2)(z_1 y_2 - y_1 z_2)^2 + (z_1^2 + z_2^2)(z_3 x_4 - x_3 z_4)^2, \quad (14)$$

Если в (14) подставить соотношения (12), (13), то можно получить выражение для определителя в виде функции $\Psi(\Delta)$. В явном виде решить оптимизационную задачу $\max\limits_{\Delta}\Psi(\Delta)$ невозможно. Решить ее можно только каким либо численным методом. При этом необходимо учитывать, что $\Psi(\Delta)$ не является выпуклой и имеет несколько точек экстремума. В этих точках $\Psi(\Delta)$ может принимать как минимальное, так и максимальное значение. В связи с этим возникает задача определения начальной точки $\Delta_{нач}$, в окрестности которой необходимо искать максимум $\Psi(\Delta)$. Сделать это можно следующим образом. На отрезке $[a, b]$ вычислим значение функции $\Psi(\Delta)$ в точках $\Delta_{i+1} = \Delta_i + h_\Delta$, ($i$ = 0, 1, ..., $N$), $\Delta_0 = a$, $\Delta_N = b$, где $h_\Delta$ — заданный шаг изменения Δ. Найдем значение параметра Δ, при котором получается максимальный элемент полученной последовательности. Это значение принимаем за точку $\Delta_{нач}$, в окрестности которой необходимо искать максимум. В первом приближении найденное значение $\Delta_{нач}$ можно принять за оптимальное значение разности $\Delta_0$.

## СИНТЕЗ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО ТРЕБУЕМУЮ ОРИЕНТАЦИЮ И ТРЕБУЕМУЮ КОНФИГУРАЦИЮ ГИРОДИНОВ

Предположим, что известен закон управления $\mathbf{M}(t) = (M_x, M_y, M_z)^{\mathrm{T}}$, обеспечивающий требуемую ориентацию КА. Это управление может быть найдено различными способами, например можно воспользоваться подходом, изложенным в работах [4, 5]. Вектор управления гиродинами $\mathbf{u}$ и управление $\mathbf{M}(t)$ связаны зависимостью (1).

Если матрица $\mathbf{B}(\alpha)$ не вырождена, то система (1) имеет единственное решение относительно вектора управления $\mathbf{u}$, обеспечивающего заданную ориентацию КА:

$$\mathbf{u} = (B^{\mathrm{T}}(\alpha)B(\alpha))^{-1} \cdot B^{\mathrm{T}}(\alpha)\frac{-\mathbf{M}(t)}{h_0}.$$

Но найденное таким образом управление $\mathbf{u}$ не обеспечивает требуемую конфигурацию гиродинов. Как было сказано выше, для нахождения $\mathbf{u}$, обеспечивающего заданную ориентацию КА и требуемую конфигурацию гиродинов, решение уравнения (1) необходимо находить как решение оптимизационной задачи: найти $\max\limits_{\alpha}\Psi(\alpha)$ при ограничении (1). Так как $\Psi(\alpha)$ является функцией $N$ аргументов, то оптимизационная задача является не тривиальной. Для избежания всех трудностей связанных с решением оптимизационной задачи поступим следующим образом. Рассмотрим разность Δ. По определению $\Delta = z_1 + z_2 - z_3 - z_4$. Дифференцируя это выражение, получим

$$(y_1, y_2, x_3, x_4)\mathbf{u} = \dot{\Delta}. \quad (15)$$

Введем обозначение $\dot{\Delta} = u_\Delta$ и дополним систему уравнений (1) уравнением (15). В результате для определения $\mathbf{u}$ получим систему

$$\Omega \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (16)$$

где

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathrm{B}(\alpha) \\ y_1, y_2, x_3, x_4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}(t)/h_0 \\ u_\Delta \end{pmatrix}.$$

Если матрица $\Omega$ не вырождена, то система имеет единственное решение, которое определяется выражением $\mathbf{u} = \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{b}$. Для случая, когда матрица $\Omega$ не вырождена, найдем закон управления $u_\Delta$, обеспечивающий заданное значение определителя $\Psi(\Delta)$ как функции Δ.

Введем в рассмотрение ошибку

$$e = \Delta - \Delta_0,$$

где $\Delta_0$ — оптимальное значение разности Δ. С учетом уравнения (15) переменная $e$ описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{e} = u_\Delta.$$

Определим $u_\Delta$ следующим образом:

$$u_\Delta = -k \cdot e, \quad k > 0$$

Несложно показать, что выбранный закон управления $u_\Delta$ обеспечивает асимптотическую устойчивость положению $e = 0$, и следовательно, разность Δ стремится к значению $\Delta_0$. При этом определитель $\Psi(\Delta)$ стремится к заданному значению $\Psi_0 = \Psi(\Delta_0)$, т. е. обеспечивается требуемая конфигурация гиродинов.

В случае, когда матрица Ω вырождена, система (16) может быть совместной и иметь множество решений, или несовместной и не иметь решения. Найдем условия, при которых существует решение системы (16) в случае, когда матрица $\Omega$ вырождена. Представим матрицу $\mathbf{\Omega}$ в виде

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} B(\alpha) \\ \xi^T \end{pmatrix},$$

где

$$\xi = (y_1, y_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}.$$

Матрица $\mathbf{\Omega}$ будет вырожденной лишь в том случае, если вектор $\xi$ можно представить следующим образом:

$$\xi = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\alpha)\lambda. \qquad (17)$$

В развернутом виде соотношение (17) имеет вид

$$\begin{aligned} &y_1\lambda_3 - z_1\lambda_2 = y_1, \quad y_2\lambda_3 - z_2\lambda_2 = y_2, \\ &z_3\lambda_1 - x_3\lambda_3 = x_3, \quad z_4\lambda_1 - x_4\lambda_3 = x_4. \end{aligned} \qquad (18)$$

Рассмотрим соотношения (18) как систему алгебраических уравнений относительно вектора $\lambda$ и исследуем условия существования решения этой системы. Преобразуем эту систему следующим образом: а) вычтем первое уравнение, умноженное на $y_2$, из второго уравнения, умноженного на $y_1$; б) вычтем третье уравнение, умноженное на $x_4$, из четвертого уравнения, умноженного на $x_3$. В результате получим

$$\begin{aligned} &y_1\lambda_3 - z_1\lambda_2 = y_1, \quad (z_1y_2 - y_1z_2)\lambda_2 = 0, \\ &z_3\lambda_1 - x_3\lambda_3 = x_3, \quad (z_3x_4 - x_3z_4)\lambda_1 = 0. \end{aligned} \qquad (19)$$

Из выражений (19) следует, что система (18) имеет решение только в тех случаях, когда выполняется одно из условий:

$$\text{а)}\ z_1y_2 - y_1z_2 = 0, \quad z_3x_4 - x_3z_4 = 0, \qquad (20)$$

$$\text{б)}\ z_1y_2 - y_1z_2 = 0, \quad z_3x_4 - x_3z_4 \neq 0, \qquad (21)$$

$$\text{в)}\ z_1y_2 - y_1z_2 \neq 0, \quad z_3x_4 - x_3z_4 = 0. \qquad (22)$$

При выполнении условия (20) согласно (14) $\det(\mathbf{B}(\alpha)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\alpha)) = 0$, т. е. система не управляемая и, следовательно, невозможно создать управления $\mathbf{M}(t)$, позволяющее получить требуемую ориентацию КА, т. е. управление $\mathbf{u}$ не существует. В случаях (21) и (22) $\det(\mathbf{B}(\alpha)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\alpha)) \neq 0$, система управляемая, и управление $\mathbf{u}$ существует. Найдем управление $\mathbf{u}$ в этих случаях. Рассмотрим вначале алгоритм вычисления управления $\mathbf{u}$ для случая (21). Перепишем условия (21) в следующем виде:

$$\left|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\right| = 0, \quad \left|\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_4\right| \neq 0. \qquad (23)$$

Из выражения (23) следует, что векторы $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ коллинеарны, и для их координат справедливы соотношения

$$y_2 = \rho y_1, \ z_2 = \rho z_1, \qquad (24)$$

где $\rho = \pm 1$ в зависимости от того, совпадают по направлению $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ или нет. Рассмотрим систему (16) при соотношении (24). Запишем ее в развернутом виде:

$$z_3u_3 + z_4u_4 = -\frac{M_x}{h_0},$$

$$-z_1u_1 - \rho z_1u_2 = -\frac{M_y}{h_0},$$

$$y_1u_1 + \rho y_1u_2 - x_3u_3 - x_4u = -\frac{M_z}{h_0},$$

$$y_1u_1 + \rho y_1u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = u_\Delta.$$

Вычитая из четвертого уравнения третье, получим

$$z_3u_3 + z_4u_4 = -\frac{M_x}{h_0}, \quad 2(x_3u_3 - x_4u_4) = u_\Delta + \frac{M_z}{h_0}. \qquad (25)$$

Решение системы (25) имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{u_\Delta}{2} + \dfrac{M_z}{2h_0} \\ -\dfrac{M_x}{h_0} \end{pmatrix}.$$

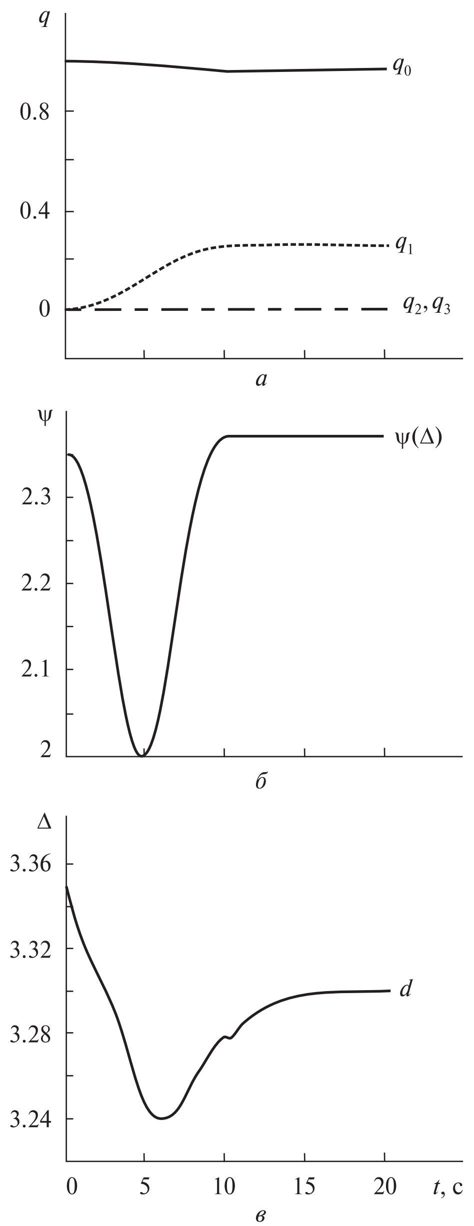
Аналогично, складывая четвертое и третье уравнение, имеем

$$u_1 + \rho u_2 = \frac{1}{z_1}\frac{M_y}{h_0}, \quad u_1 + \rho u_2 = \frac{1}{2y_1}\left(u_\Delta - \frac{M_y}{h_0}\right) \qquad (26)$$

Для того чтобы система (26) была совместной, необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$u_\Delta = 2\frac{y_1}{z_1}\frac{M_y}{h_0} + \frac{M_z}{h_0}.$$

Из выражений (26) следует, что одна из переменных $u_1$, $u_2$ является свободной, и ее значение можно задать произвольно. Выберем в качестве такой переменной $u_2$ и положим ее равной нулю. Тогда с учетом уравнения связи $z_1^2 + y_1^2 = 1$ будем




Изменение во времени: *а* — элементов $q_i$ кватерниона при развороте КА, *б* — определителя Ψ(Δ), *в* — разности Δ

иметь следующие выражения для определения вектора управления $\mathbf{u}$:

$$u_\Delta = 2\frac{y_1}{z_1}\frac{M_y}{h_0} + \frac{M_z}{h_0},$$

$$u_1 = \frac{M_y}{h_0}z_1 + \frac{1}{2}\left(u_\Delta - \frac{M_z}{h_0}\right)y_1, \; u_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{u_\Delta}{2} + \dfrac{M_z}{2h_0} \\ -\dfrac{M_x}{h_0} \end{pmatrix}.$$

Проведя аналогичные преобразования для случая (22), получим следующие формулы для вычисления управления $\mathbf{u}$:

$$u_\Delta = -2\frac{x_3}{z_3}\frac{M_x}{h_0} - \frac{M_z}{h_0},$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{u_\Delta}{2} + \dfrac{M_z}{2h_0} \\ \dfrac{M_y}{h_0} \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \frac{M_x}{h_0}z_3 + \frac{1}{2}\left(u_\Delta + \frac{M_z}{h_0}\right)x_3,$$

$$u_4 = 0.$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для проверки полученных теоретических результатов было проведено численное моделирование управляемого движения КА с тензором инерции

$$J = \begin{pmatrix} 52 & 0 & 0 \\ 0 & 67 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}.$$

Размерность тензора инерции — Н·м·с². Все гиродины имели одинаковые собственные кинетические моменты $h_0 = 5\,\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$. Моделировался разворот спутника по крену на угол 30° длительностью 10 с. Начальные условия были следующие: $\mathbf{Q} = \{1, 0, 0, 0\}$, $\boldsymbol{\omega} = \{0, 0.001, 0\}$. После разворота параметры углового движения аппарата должны быть равны $\mathbf{Q} = \{0.9659, 0.2588, 0, 0\}$, что соответствует развороту спутника по крену на угол 30°. Здесь $\mathbf{Q} = \{q_0, \mathbf{q}\}$ — нормированный кватернион, определяющий ориентацию орбитальной и связанной систем координат, переменные $q_0$ и $\mathbf{q}$ соответственно скалярная и векторная части кватерниона $Q$.

Для расчета управления $\mathbf{M}(t)$, обеспечивающего требуемую ориентацию КА, использовался подход, изложенный в работе [4]. Оптимальная конфигурация гиродинов определялась следующими значениями определителя $\Psi$ и разности $\Delta$: $\Psi_0 = 2.367$, $\Delta_0 = 3.3$.

На рисунке изображены графики изменения элементов кватерниона при движении КА из начального в конечное положение (фрагмент *а*). На фрагменте *б* изображен график изменения во времени определителя $\Psi(\Delta)$. Соответствующее изменение разности $\Delta$ показано на фрагменте *в*. Как видно из рисунка *а*, параметры углового движения КА в конце разворота соответствуют заданным. При этом определитель $\Psi(\Delta)$ и разность $\Delta$ достигли заданных значений. Это подтверждает работоспособность разработанных алгоритмов.

## ВЫВОДЫ

Предложена методика синтеза алгоритмов пространственной переориентации КА с помощью минимально избыточной системы гиродинов. Предлагаемый подход позволяет получать законы управления угловой ориентацией спутника, обеспечивающие высокие точностные и динамические характеристики процесса ориентации, и оптимальную конфигурацию гиродинов. Приведены результаты численного моделирования предложенных алгоритмов. Методика может быть полезной разработчикам систем ориентации КА.

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

$E$ — связанная с космическим аппаратом (КА) система координат (ССК). Оси этой системы совпадают с главными центральными осями инерции КА,

$\mathbf{I}$ — инерциальная система координат,

$\mathbf{G}_i$ — приборная система координат $i$-го гиродина,

$\mathbf{R}_i$ — система координат, связанная с ротором $i$-го гиродина. Ось $x_R$ этой системы совпадает с осью прецессии $i$-го гиродина, ось $y_R$ этой системы совпадает с осью вращения ротора $i$-го гиродина, ось $z_R$ дополняет систему координат до правой,

$\mathbf{x}_A \subset R^3$ — вектор, заданный проекциями на оси базиса $A$,

$\omega_B^{BA}$ — угловая скорость вращения базиса $B$ относительно базиса $A$, заданная проекциями на оси базиса $B$,

$\mathbf{C}_B^A \subset R^{3\times3}$ — матрица перехода от базиса $A$ к базису $B$,

$\mathbf{c}_i^{BA}, i = 1,2,3$ — столбцы матрицы $\mathbf{C}_B^A$,

$\mathbf{q}_i^{BA}, i = 1,2,3$ — строки матрицы $\mathbf{C}_B^A$,

$\mathbf{h}_i$ — вектор кинетического момента $i$-го гиродина,

$\mathbf{J}_G = \mathrm{diag}(J_{gx}, J_{gy}, J_{gz})$ — тензор инерции $i$-го гиродина,

$\mathbf{J}$ — тензор инерции КА,

$\alpha_i$ — угол прецессии $i$-го гиродина,

$N$ — количество гиродинов, установленных на космическом аппарате,

$\mathbf{I}_N$ — единичная матрица размерности $N\times N$.


1. *Васильев В. Н.* Оптимизация настройки минимально избыточной системы гиродинов // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1999. — № 4. — С. 3—10.
2. *Виттенбург И.* Динамика систем твердых тел. — М.: Мир, 1990. — 292 с.
3. *Волосов В. В., Куценко И. А., Попадинец В. И.* Математические модели вращательного движения космических аппаратов с избыточными системами гиродинов и маховиков и задачи управления их ориентацией // Пробл. упр. и информ. — 2003. —№ 1. — С. 101—115.
4. *Ефименко Н. В.* Управление переориентацией космического аппарата посредством маховиков // Пробл. упр. и информ. — 2008. — № 5. — С. 121—128.
5. *Ефименко Н. В.* Синтез алгоритмов управления пространственной переориентацией космического аппарата с использованием динамических уравнений вращательного движения твердого тела в параметрах Родрига — Гамильтона // Пробл. упр. и информ. — 2015. — № 3. — С. 102—115.
6. *Легостаев В. П., Токарь Е. Н.* Область применения гиросиловых систем // Космич. исслед. — 1990. — **28**, вып. 3. — С. 352—359.
7. *Раушенбах Б. В.* Управление ориентацией орбитальных станций // Управление в пространстве: Тр. VI Междунар. Симп. по автомат. упр. в пространстве. — М.: Наука, 1976. — Т. 1. — С. 5—13.
8. *Сомов Е. И.* Динамика прецизионного гиросилового управления космическими аппаратами землеобзора // Гироскопия и навигация. — 2002. — № 4 (39). — С. 54—55.
9. *Сомов Е. И., Бондаренко Е. А., Капитонова Н. Б.* Синтез гиросиловой системы пространственной стабилизации на основе векторных функций Ляпунова и параметрической оптимизации // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. — Новосибирск: Наука, 1991. — С. 257—264.
10. *Сомов Е. И., Бутырин С. А.* Явный логико-динамический закон настройки минимально избыточной системы гиродинов для маневрирующего космического аппарата // Управление движением и навигация

летательных аппаратов. — Самара: СГАУ, 2002. — С. 179—184.
11. *Сомов Е. И., Бутырин С. А., Сорокин А. В., Платонов В. Н.* Управление силовыми гирокомплексами космических аппаратов // Тр. X Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам 26—28 мая 2003. — СПб., 2003. — С. 278—294.
12. *Сорокин А. В., Бакшеев Н. И.* Сравнительный анализ силовых гироскопических комплексов высокодинамичных космических аппаратов // Тр. X Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам 26—28 мая 2003. — СПб., 2003. — С. 272—277.
13. *Токарь Е. Н.* Критерий настройки гиросиловых систем // Космич. исслед. — 1980. — **18**, вып. 3. — С. 77—82.
14. *Токарь Е. Н., Легостаев В. П., Михайлов М. В., Платонов В. Н.* Управление избыточными гиросиловыми системами // Космич. исслед. — 1980. — **18**, вып. 2. — С. 147—156.
15. *Bhat Sanjay, Tiwari Pawan K.* Controllability of spacecraft attitude using control moment gyroscopes // IEEE Trans. Automat. Contr. — 2009. — **54**, N 3. — P. 585—590.
16. *Crenshaw J. W.* 2-Speed, a single gimbal control moment gyro attitude control system // AIAA Paper. — 1973. — N 73-895. — P. 1—10.
17. *Leeghim H., Bang H., Park Jong-Oh.* Singularity avoidance of control moment gyros by one-step ahead singularity index // Acta Astronautica. — 2009. — **64**, N 9/10. — P. 935—945.

*Стаття надійшла до редакції 20.04.15*

*М. В. Єфименко*[1], *Н. В. Луценко*[2], *Т. О. Паромова*[2]

[1] Науково-виробниче підприємство «Хартрон-ЮКОМ», Запоріжжя

[2] Запорізький національний технічний університет

## ШВИДКЕ ОБЕРТАННЯ КОСМІЧНОГО АПАРАТА ЗА ДОПОМОГОЮ МІНІМАЛЬНО-НАДЛИШКОВОЇ СИСТЕМИ ГІРОДИНІВ

Розглянуто задачу просторової переорієнтації космічного апарата за допомогою мінімально-надлишкової системи гіродинів. Запропоновано алгоритм переорієнтації, що забезпечує задану орієнтацію космічного апарата і оптимальну конфігурацію гіродинів. Наведено результати чисельного моделювання запропонованого алгоритму.

**Ключові слова:** космічний апарат, гіродин, керування орієнтацією.

*M. V. Yefymenko*[1], *H. V. Lutsenko*[2], *T. O. Paromova*[2]

[1] «Hartron-UKOM» scientific manufacturing company, Limited Liability Company, Zaporizhia

[2] National Technical University, Zaporizhia

## ACHIEVING SPACECRAFT RAPID ROTATION USING MINIMALLY REDUNDANT COPLANAR GYRODYNE SYSTEM

The subject of this article is to consider a minimally redundant coplanar gyrodyne structure for the spatial reorientation of the spacecraft. The proposed orientation algorithm provides a required reorientation of the spacecraft and optimal gyrodyne configuration. The results of the computer modeling of proposed algorithm are shown.

**Key words:** spacecraft, gyrodyne, attitude control.