

УДК 629.197

А. Л. Макаров<sup>1</sup>, Д. К. Мозговой<sup>2</sup>, А. М. Кулабухов<sup>2</sup>, В. С. Хорошилов<sup>1</sup>, В. Н. Балашов<sup>1</sup>, В. М. Попель<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля», Дніпропетровськ

<sup>2</sup>Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЪЕКТОВ СПУТНИКОВОЙ СЪЕМКИ

---

*Приведена методика математического описания протяженных объектов сложной конфигурации при планировании спутниковой съемки с применением спутников дистанционного зондирования Земли с оптико-электронными сканерами высокого пространственного разрешения. Методика основана на использовании сплайн-интерполяции. Она позволяет получать оптимальное покрытие съемки с учетом полосы захвата съемочного прибора, требуемого направления сканирования и ограничений системы ориентации спутника.*

---

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

При планировании спутниковой съемки протяженных территорий сложной конфигурации (границы, дороги, реки, береговые линии и т. п.), расположенных невдоль подспутниковой трассы, возникает проблема, связанная с узкой (обычно от 5 до 20 км) полосой захвата оптико-электронных сканеров высокого пространственного разрешения, не позволяющей оперативно снимать произвольно расположенные протяженные участки за один виток [3, 7, 10, 13]. Как правило, в таких случаях необходима съемка нескольких сцен с разных витков, причем для солнечно-синхронных орбит, характерных для спутников ДЗЗ с оптико-электронными сканерами, за сутки одна и та же территория может быть снята только на одном витке. Поэтому даже двухвитковая съемка может потребовать при отсутствии облачности и ограничений на минимальные углы съемки нескольких дней (в зависимости от полосы захвата сканера и диапазона углов перенацеливания спутника). С учетом условий облачности съемка может потребовать еще больше времени, что для большинства прикладных и научных задач неприемлемо [2, 14, 15].

Некоторые зарубежные спутники с оптико-электронными сканерами высокого пространственного разрешения позволяют выполнять съемку произвольно ориентированных прямолинейных протяженных участков. Однако съемка протяженных территорий сложной конфигурации обычно выполняется за несколько витков [1, 9, 11].

### ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Существенно повысить оперативность спутниковой съемки протяженных территорий сложной конфигурации позволяет новый метод съемки в процессе перенацеливания (т. е. с ненулевыми угловыми скоростями), реализуемый с помощью программного управления ориентацией спутника [4, 6].

Основными этапами планирования такой съемки являются:

- аппроксимация протяженного объекта, заданного отдельными точками на цифровой картооснове (линейная, квадратичная, сплайновая и т. п.),
- определение оптимального покрытия протяженного объекта путем моделирования съемки с учетом полосы захвата съемочного прибора, требуемого направления сканирования и ограничений системы ориентации спутника.

### МЕТОД СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Для математического описания протяженного объекта функцией  $S(x)$  используется естественный кубический интерполирующий сплайн [3, 7, 10], в котором  $S''(x_0) = 0$  и  $S''(x_n) = 0$ , с последующим сглаживанием методом наименьших квадратов. Снимаемый объект задается на карте узловыми точками  $x_i$  с произвольным шагом по широте и долготе (количество узловых точек объекта  $n = 6...9$ ).

Функция  $S(x)$  интерполируется полиномом

$$S_i(x) = \omega y_i + \bar{\omega} y_{i-1} + h_i^2 [(\omega^3 - \omega)\delta_i + (\bar{\omega}^3 - \bar{\omega})\delta_{i-1}],$$

где

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \omega = \frac{x - x_i}{h_{i+1}}, \quad \bar{\omega} = 1 - \omega.$$

Коэффициенты сплайна  $\delta_0 = 0, \delta_n = 0$ , а  $\delta_1... \delta_{n-1}$  находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 2[h_1 + h_2] & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & 2[h_2 + h_3] & h_3 & \dots & 0 \\ 0 & h_3 & 2[h_3 + h_4] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2[h_{n-1} + h_n] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \dots \\ \delta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \Delta_4 - \Delta_3 \\ \dots \\ \Delta_n - \Delta_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Ее матрица является трехдиагональной, симметричной, со строгим диагональным преобладанием. Система (1) эффективно решается методом прогонки.

На рис. 1 показан кубический интерполирующий сплайн и сглаживающие сплайны при коэффициентах сглаживания 0.8 и 0.3. Узловые точки сплайна показаны крестиками, а штриховой линией показана их линейная аппроксимация методом наименьших квадратов.

### МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

При использовании метода наименьших квадратов наилучшими коэффициентами  $a_1, a_2, \dots, a_m$  аппроксимирующей функции  $S$  считаются те, для которых сумма квадратов отклонений найденной теоретической функции от заданных эмпирических значений будет минимальной [2, 8, 15].

Следовательно, задача состоит в определении коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_m$  таким образом (т. е. в выборе одной кривой из множества), чтобы сумма квадратов отклонений была наименьшей

$$S(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n [f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i]^2 \rightarrow \min, \quad (2)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — коэффициенты аппроксимации.

Чтобы найти набор коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , которые обеспечивают минимум функции  $S$ , определяемой формулой (1), используется необходимое условие экстремума функции нескольких переменных — равенство нулю частных производных. В результате получим нормальную систему для определения коэффициентов  $a_i$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \quad (3)$$

Эта система упрощается, если эмпирическая формула (2) линейна относительно параметров  $a_i$ , тогда система (3) будет линейной.

В случае линейной зависимости  $y = a_1 + a_2 x$  система (3) примет вид

$$\begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a_2 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Коэффициенты  $a_i$  определяются по формулам

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2},$$

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

### МЕТОД ПРОГОНКИ

Систему уравнений (1) для нахождения коэффициентов кубического интерполирующего сплайна можно представить в виде [5—7]

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{h_1}{3}, b_0 = \frac{h_1}{6}, d_0 = -p_0 + \frac{y_1 - y_0}{h_1}, \\ c_n &= \frac{h_n}{6}, a_n = \frac{h_n}{3}, d_n = p_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}, \\ c_i &= \frac{h_i}{6}, a_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{3}, b_i = \frac{h_{i+1}}{6}, \\ d_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, i = 1, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

Решение трехдиагональной системы (4) находится в виде

$$\begin{aligned} m_i &= \lambda_i m_{i+1} + \mu_i, \\ i &= 0, \dots, n - 1, \end{aligned}$$

где  $\lambda_i, \mu_i$  — прогоночные коэффициенты ( $m_n = \mu_n$  при  $b_n = 0$ ).

Рекуррентные формулы для прогоночных коэффициентов  $\lambda_i, \mu_i$  имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\frac{b_0}{a_0}, \mu_0 = \frac{d_0}{a_0}, \\ \lambda_i &= \frac{-b_i}{a_i + c_i \lambda_{i-1}}, \mu_i = \frac{d_i - c_i \mu_{i-1}}{a_i + c_i \lambda_{i-1}}, \\ i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

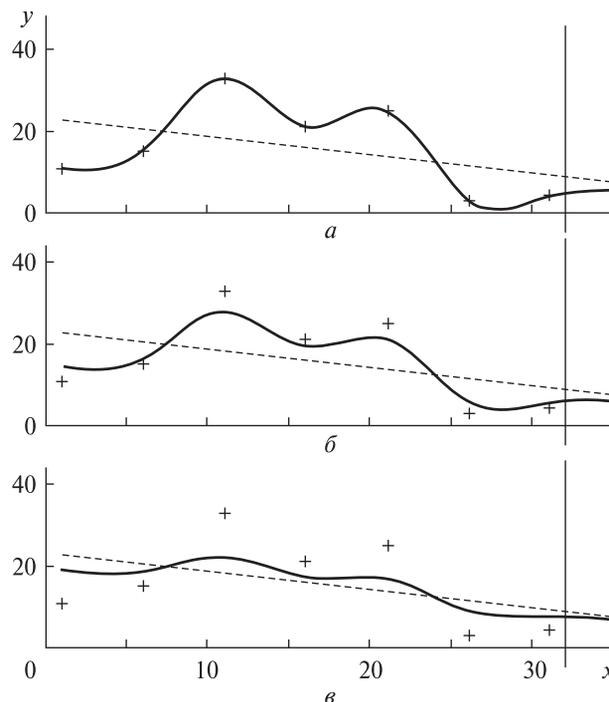


Рис. 1. Кубические сглаживающие сплайны: а — кубический интерполирующий сплайн; б, в — сглаживающие сплайны при коэффициентах сглаживания 0.8 и 0.3. Крестики — узловые точки сплайна, штриховая линия — линейная аппроксимация

### МОДЕЛЬ РЕЛЬЕФА ТЕРРИТОРИИ СЪЕМКИ

Модель рельефа территории съемки может быть создана одним из следующих способов [1, 9, 12]: по данным спутниковой стереосъемки, по данным спутниковой радиолокационной съемки, по данным наземной геодезической съемки, по данным GPS-съемки, синтезирована из слоя рельефа цифровой карты местности.

В настоящее время в картографии и ГИС используются векторные (изолинии, TIN-сетки) и растровые (матрицы высот, светотени) цифровые модели рельефа. В данной работе используется растровая модель рельефа территории съемки SRTM-90, полученная по данным спутниковой радиолокационной съемки и преобразованная в файл формата DEM.

### ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ КАРТОГРАФИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ КООРДИНАТ

Поскольку выбор узловых точек протяженного объекта и последующая сплайн-аппроксимация

выполняются в географической (широтно-долготной) системе координат, а большинство современных крупномасштабных электронных карт выполнены в картографических проекциях (как правило, в UTM), то при планировании и моделировании спутниковой съемки необходимо выполнять преобразование картографических координат в географические и обратно [2, 15].

Переход от геодезических координат к картографическим. Переход от геодезических координат спутника  $\varphi$  и  $\lambda$  к картографическим координатам  $x$  и  $y$  производится по формулам

$$y = B(\varphi) + \frac{t}{2} N \cos^2 \varphi \cdot l^2 + \frac{t}{24} N \cos^4 \varphi \cdot (5 - t^2 + 9\eta^2) l^4 + \\ + \frac{t}{720} N \cos^6 \varphi \cdot (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2) l^6 + \\ + \frac{t}{40320} N \cos^8 \varphi \cdot (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6) l^8, \\ x = N \cos \varphi \cdot l + \frac{1}{6} N \cos^3 \varphi \cdot (1 - t^2 + \eta^2) l^3 + \\ + \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi \cdot (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2) l^5 + \\ + \frac{1}{5040} N \cos^7 \varphi \cdot (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6) l^7,$$

где  $B(\varphi)$  — длина дуги меридиана от экватора,

$N = \frac{a^2}{b\sqrt{1+\eta^2}}$  — радиус кривизны в первом вер-

тикале,  $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$  — вспомогательный параметр,  $e'^2 = (a^2 - b^2) / b^2$  — второй числовой эксцентриситет,  $t = \operatorname{tg} \varphi$  — вспомогательная величина,  $l = \lambda - \lambda_0$  — разность долгот,  $\lambda_0$  — долгота центрального меридиана.

Длина дуги меридиана  $B(\varphi)$  вычисляется при помощи следующего разложения в ряд:

$$B(\varphi) = \alpha[\varphi + \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi + \delta \sin 6\varphi + \varepsilon \sin 8\varphi],$$

где

$$\alpha = \frac{a+b}{2} \left( 1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 \right),$$

$$\beta = -\frac{3}{2} n + \frac{9}{16} n^3 - \frac{3}{32} n^5,$$

$$\gamma = \frac{15}{16} n^2 - \frac{15}{32} n^4,$$

$$\delta = -\frac{35}{48} n^3 + \frac{105}{256} n^4,$$

$$\varepsilon = \frac{315}{512} n^4,$$

$$n = \frac{a-b}{a+b}.$$

Переход от картографических координат к геодезическим. Переход от картографических координат спутника  $x$  и  $y$  к геодезическим координатам  $\varphi$  и  $\lambda$  производится по формулам

$$\varphi = \varphi' + \frac{t}{2N^2} (-1 - \eta^2) x^2 + \\ + \frac{t}{24N^4} (5 + 3t^2 + 6\eta^2 - 6t^2\eta^2 - 3\eta^4 - 9t^2\eta^4) x^4 + \\ + \frac{t}{720N^6} (-61 - 90t^2 - 45t^4 - 107\eta^2 + 162t^2\eta^2 + 45t^4\eta^2) x^6 + \\ + \frac{t}{40320N^8} (1385 + 3633t^2 + 4095t^4 + 1575t^6) x^8, \\ \lambda = \lambda_0 + \frac{1}{N \cos \varphi} x + \frac{1}{6N^3 \cos \varphi} (-1 - 2t^2 - \eta^2) x^3 + \\ + \frac{1}{120N^5 \cos \varphi} (5 + 28t^2 + 24t^4 + 6\eta^2 + 8t^2\eta^2) x^5 + \\ + \frac{1}{5040N^7 \cos \varphi} (-61 - 662t^2 - 1320t^4 - 720t^6) x^7,$$

где  $N$ ,  $\eta$ ,  $t$  вычисляются для значения широты точки пересечения  $\varphi'$

$$\varphi' = y' + \beta \sin 2y' + \gamma \sin 4y' + \delta \sin 6y' + \varepsilon \sin 8y',$$

где

$$\alpha = \frac{a+b}{2} \left( 1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 \right),$$

$$\beta = \frac{3}{2} n - \frac{27}{32} n^3 + \frac{269}{512} n^5, \quad \gamma = \frac{21}{16} n^2 - \frac{55}{32} n^4,$$

$$\delta = \frac{151}{96} n^3 - \frac{417}{128} n^4, \quad \varepsilon = \frac{1097}{512} n^4, \quad y' = \frac{y}{\alpha}.$$

#### АППРОКСИМАЦИЯ ПРОТЯЖЕННОГО ОБЪЕКТА

Для аппроксимации протяженных объектов сложной конфигурации наиболее эффективны методы сплайн-аппроксимации [7, 9, 16]. На рис. 2 показана кусочно-линейная аппроксимация узловых точек объекта съемки (приграничной территории). Легко видеть, что линейная аппроксимация не обеспечивает полного покрытия объекта съемки.

На рис. 3 показаны контуры покрытия при сплайн-интерполяции заданного протяженного



Рис. 2. Кусочно-линейная аппроксимация объекта съемки

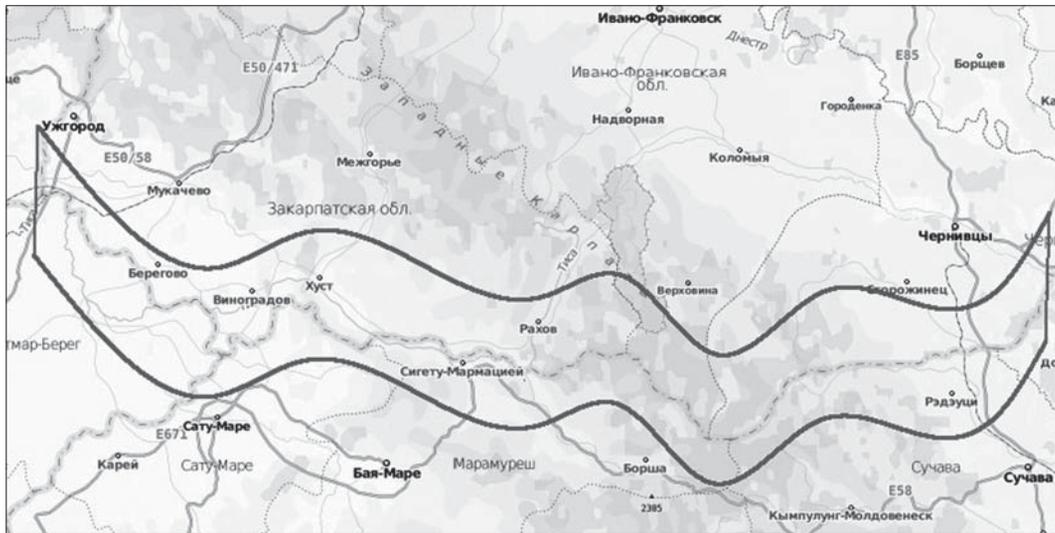


Рис. 3. Контур покрытия при сплайн-интерполяции объекта съемки

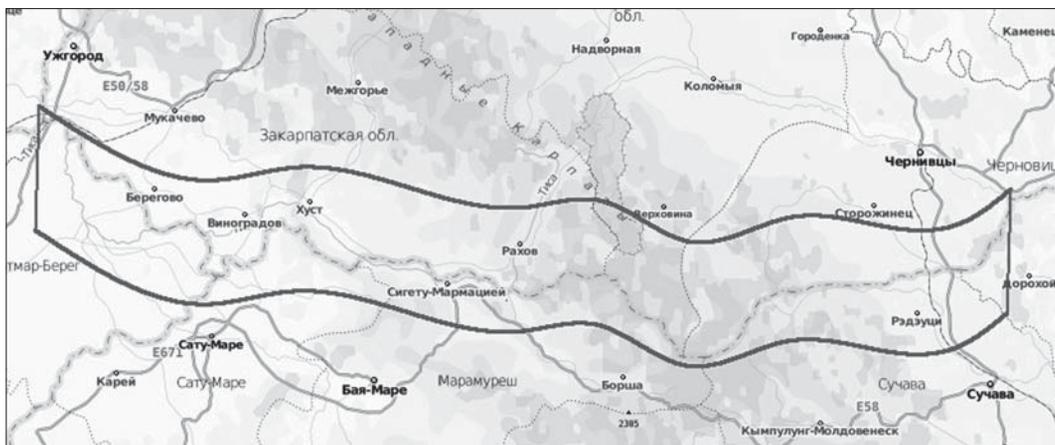


Рис. 4. Контур покрытия при сплайн-аппроксимации объекта съемки

участка приграничной территории. Как видно из рис. 3, сплайн-интерполяция имеет существенную кривизну, что требует динамичного перенацеливания спутника.

Определение оптимального покрытия протяженного объекта с учетом полосы захвата съемочного прибора и требуемого направления сканирования производится путем подбора коэффициента сглаживания сплайна и при необходимости — сдвигов и поворотов контура покрытия.

На рис. 4 показаны контуры покрытия при сплайн-аппроксимации заданного протяженного участка приграничной территории. Как видно из рис. 4, сплайн-аппроксимация обеспечивает полное покрытие заданного участка приграничной территории при меньшей кривизне контура сцены.

## ВЫВОДЫ

Предложена эффективная методика математического описания протяженных объектов сложной конфигурации с использованием сплайн-аппроксимации.

Данная методика позволяет получать оптимальное покрытие протяженного объекта путем подбора коэффициента сглаживания сплайна и при необходимости сдвигов и поворотов контура покрытия с учетом полосы захвата съемочного прибора, требуемого направления сканирования и ограничений на диапазоны углов перенацеливания и угловых скоростей спутника.

Результаты компьютерного моделирования подтвердили высокую эффективность предложенной методики. При спутниковой съемке протяженных приграничных территорий запада Украины (участок Ужгород — Черновцы) угловые скорости перенацеливания спутника в среднем составили менее 0.5 град/с. При этом сплайн-аппроксимация объекта съемки оказалась наиболее эффективной как для оперативности съемки (выполняется за один виток), так и для доли покрытия территории (100 %).

1. Гофманн-Велленгоф Б., Лихтенеггер Г., Коллинз Д. Глобальная система визначення місцезположення (GPS).

- Теорія і практика: Пер. з англ. під ред. Я. С. Яцківа. — К.: Наук. думка, 1995. — 380 с.
2. Долинец Ю. С., Мозговой Д. К. Технология спутниковой съемки с ненулевыми угловыми скоростями // X Міжнар. молодіжна наук.-практ. конф. «Людина і космос»: 36. тез. — Д.: НЦАОМ, 2008. — С. 495.
  3. Макаров О. Л., Мозговой Д. К., Кулабухов А. М. и др. Технология спутниковой съемки в процессе перенацеливания // Космічна наука і технологія. — 2011. — 17, № 6. — С. 3—9.
  4. Макаров А. Л., Мозговой Д. К., Кулабухов А. М. и др. Повышение оперативности спутниковой съемки протяженных территорий сложной конфигурации // Авиационно-космическая техника и технология. — Харьков: Нац. аэрокосмический ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», 2012. — С. 113—122.
  5. Макаров О. Л., Мозговой Д. К., Кулабухов А. М. и др. Учет погрешностей ориентации КА при съемке с ненулевыми угловыми скоростями // Космічна наука і технологія. — 2013. — 19, № 1. — С. 20—27.
  6. Макаров А. Л., Мозговой Д. К., Хорошилов В. С. и др. Методы повышения эффективности спутниковой съемки произвольно расположенных протяженных участков Земли // «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии»: Матер. 21-я Междунар. конф. конф. (Севастополь, 12—16 сент. 2011 г.). — Севастополь: Вебер, 2011. — С. 182—183.
  7. Мозговой Д. К. Методика спутникової зйомки малорозмірних слабоконтрастних об'єктів // Програма наук. конф. за підсумками наук.-досл. роботи університету за 2010 рік. — Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. — С. 108.
  8. Мозговой Д. К. Підвищення інформативності спутникової зйомки малорозмірних об'єктів земної поверхні / Програма наукової конференції за підсумками науково-дослідної роботи університету за 2012 рік. — Дніпропетровськ: ДНУ, 2012. — С. 92.
  9. Мозговой Д. К. Технология съемки протяженных объектов // IX Міжнар. молодіжна наук.-практ. конф. «Людина і космос»: 36. тез. — Дніпропетровськ: НЦАОМ, 2007. — С. 439.
  10. Мозговой Д. К. Спутниковая съемка с высоким разрешением при ненулевых угловых скоростях // Доклад на заседании научного семинара «Космическая техника и технологии», 17 декабря 2008 г.: Тез. докл. — Днепропетровск: Физико-технический факультет ДНУ, 2008.
  11. Мозговой Д. К. Управление ориентацией КА ДЗЗ высокой разрешающей способности // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Ракетно-космічна техніка. — 2009. — Вип. 13, 1, № 17/4. — С. 59—65.
  12. Мозговой Д. К. Метод программного управления угловым движением спутника ДЗЗ в процессе съемки //

- Международ. конф. «Космические технологии: настоящее и будущее», 16–20 апреля 2013 г.: Тез. докл. — Днепропетровск: ГКБ «Южное», 2013. — С. 61.
13. *Мозговой Д. К.* Использование данных MODIS и ASTER для решения актуальных прикладных задач // Международ. научно-практическая конф. «Стратегические решения информационного развития экономики, общества и бизнеса на современном этапе», 17–19 июля 2013 г., п. Научный, АР Крым, Украина: Тез. докл. — Научный, 2013. — С. 113–114.
14. *Мозговой Д. К., Волошин В. И.* Спутниковая съемка протяженных объектов // Вестник Днепропетр. ун-та. Ракетно-космична техніка. — 2006 — Вип. 10, 2, № 9/2. — С. 239–241.
15. *Мозговой Д. К., Волошин В. И.* Технология съемки прибрежных зон // Современные проблемы рационального природопользования в прибрежных морских акваториях Украины: Тез. докл. Международ. конф. молодых ученых (Кацивели, 12–14 июня 2007). — Севастополь, 2007. — С. 21–22.
16. *Mozgovoy D.* Method of program's control of angle motion of remote sensing satellite during the shooting // Technologies: Present and Future. International Conf. — Dnepropetrovsk: Yuzhnoe State Design Office, 2013. — P. 158–159.

Стаття надійшла до редакції 16.01.14

*О. Л. Макаров, Д. К. Мозговой, А. М. Кулабухов, В. С. Хорошилов, В. Н. Балашов, В. М. Попель*

#### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОТЯЖНИХ ОБ'ЄКТІВ СУПУТНИКОВОЇ ЗЙОМКИ

Наведено методику математичного опису протяжних об'єктів складної конфігурації при плануванні зйомки із застосуванням супутників дистанційного зондування Землі з оптико-електронними сканерами високої просторової роздільної здатності. Методика базується на використанні сплайн-інтерполяції. Вона дозволяє одержувати оптимальне покриття зйомки з урахуванням полоси захоплення знімального пристрою, потрібного напрямку сканування і обмеження системи орієнтації супутника.

*A. L. Makarov, D. K. Mozgovoy, A. M. Kulabukhov, V. S. Khoroshilov, V. N. Balashov, V. M. Popel'*

#### A MATHEMATICAL MODEL OF ELONGATED OBJECTS OF SATELLITE IMAGERY

We describe a procedure for the mathematical description of extended objects with complex configuration in the design of a satellite imagery with the use of electro-optical scanners of high spatial resolution. The procedure is based on the spline-interpolation use. It allows one to receive optimum cover of shooting taking into account a band of acquisition of the film-making device, the required direction of scanning and limitations of the satellite attitude control system.