

УДК 531.13

А. Е. Закржевский<sup>1</sup>, В. С. Хорошилов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт механіки ім. С. П. Тимошенка Національної академії наук України, Київ

<sup>2</sup> Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля», Дніпропетровськ

## РАЗВЕРТЫВАНИЕ УПРУТОГО ДЛИННОМЕРНОГО ЭЛЕМЕНТА НА КОСМИЧЕСКОМ АППАРАТЕ С МАГНИТНЫМ УСПОКОИТЕЛЕМ

---

*Построена обобщенная математическая модель и проведено компьютерное моделирование динамики космического аппарата с пассивной системой стабилизации, которая несет тело переменной геометрии, обусловленной разворачиванием по заданной программе компактно сформированной системы в упругий гравитационный стабилизатор с магнитным демпфером на конце.*

---

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных направлений в развитии техники космических полетов является создание космических аппаратов (КА) — ориентированных искусственных спутников Земли (ИСЗ). Для проектов без сложных программных маневров, с большим временем активной жизни и точностью ориентации порядка  $1\text{--}10^\circ$  получили применение пассивные методы ориентации. При разработке систем ориентации пассивного типа можно использовать свойства внешней среды. Из систем, использующих такие свойства, широкое распространение получили гравитационные системы ориентации (ГСО). Принцип ориентации в этих системах основан на следующем хорошо известном свойстве центрального ньютоновского поля сил: КА с неравными главными центральными моментами инерции имеет на круговой орбите четыре устойчивых положения равновесия, соответствующих совпадению наибольшей оси эллипсоида инерции аппарата с радиусом-вектором орбиты и наименьшей оси — с нормалью к плоскости орбиты.

Основным элементом ГСО является стержень с грузом на свободном конце, который устанавливается таким образом, чтобы в ориентирован-

ном положении КА он располагался по радиусу-вектору орбиты. Конструкция, включающая в свой состав стержень и груз с устройствами их выдвижения, называется гравитационным стабилизатором (ГС).

При формировании эллипсоида инерции гравитационного КА путем разнесения масс на значительные расстояния от центрального тела получили широкое распространение трубчатые стержни. Для изготовления стержней используют ленточные штыри типа STEM (Storable Tubular Extendible Member).

Конструкция STEM представляет собой намотанную на барабан металлическую ленту малой толщины, которая вследствие внутренних напряжений, создаваемых термообработкой, при разворачивании с барабана сворачивается в трубку с перехлестом кромок. Такие стержни широко используются при изготовлении антенн и штанг для выноса приборов и позволяют сделать большой длину стержня ГС.

При практической реализации ГСО приходится решать ряд задач, первоочередными из которых являются следующие.

1. Необходимо успокоить КА в любом устойчивом равновесном положении и уже после успокоения перевести его, например, за счет складывания и выдвижения ГС, в заданное угловое положение равновесия.

2. Необходимо демпфировать собственные колебания КА относительно устойчивого равновесия.

Различные ГСО отличаются в основном методами демпфирования собственных колебаний. Значительный интерес представляют пассивные методы. В процессе совершенствования конструкций демпферов и поиска новых способов демпфирования колебаний гравитационных КА вопросам использования магнитного поля Земли было уделено особое внимание [5]. В результате фирмой «Дженерал Электрик» был создан шаровой магнитный демпфер [8]. Его основу составляет магнит, размещенный внутри двух концентрических сфер, разделенных слоем жидкости. Наружная сфера связана с корпусом КА, внутренняя — с постоянным магнитом. Рассеяние энергии происходит за счет вязкости жидкости и вихревых токов, наводимых полем подвижного магнита в оболочке наружной сферы.

Известные конструкции магнитных демпферов (МД) отличаются друг от друга характеристиками, некоторыми конструктивными особенностями и используемыми материалами. Такие демпферы можно помещать в любом месте КА, где наличие магнита не влияет на нормальную работу приборов. Так, в работе [4] рассмотрены вопросы динамики гравитационного КА с МД, расположенным в корпусе КА, однако наиболее целесообразно размещать демпфер на конце гравитационной штанги, используя его одновременно для увеличения поперечных моментов инерции КА.

Другими словами, формирование необходимых моментов инерции гравитационно ориентированного КА осуществляется, в том числе, путем выдвижения ГС. У таких КА, как правило, поперечные моменты инерции практически одинаковые. Ориентацию по курсу в таком случае удобнее всего обеспечивать, используя вращающийся с постоянной угловой скоростью маховик, кинетический момент которого в ориентированном положении КА направлен по нормали к плоскости орбиты. При этом восстанавливающий момент, создаваемый маховиком, действует как по курсу, так и по крену [9].

Среди факторов, оказывающих существенное влияние на точность стабилизации гравитационного КА с МД и тангажным маховиком, необходимо выделить нежесткость элементов конструкции [10]. Исследованию влияния нежесткости стержней на динамику КА уделялось значительное внимание.

Среди отечественных исследователей при выводе общих уравнений движения деформируемого тела получил широкое распространение метод А. И. Лурье [3].

В работе [2] представлена математическая модель магнитно-гравитационной системы ориентации в виде системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику двух тел, одно из которых — КА с вращающимся с постоянной угловой скоростью маховиком, второе — поплавок магнитного успокоителя (демпфера). Учитывается деформируемость ГС. ИСЗ с такими системами ориентации успешно эксплуатировались, примером чего может служить советский спутник «Интеркосмос-25».

Естественно, в соответствии с изложенным динамика ИСЗ с описанными системами ориентации изучена хорошо. Однако переходные процессы, особенно на стадии выдвижения упругого ГС, освещены в печати недостаточно. Именно динамике ИСЗ с гравитационно-магнитной системой ориентации (с тангажным маховиком) в переходных режимах построения ориентации с учетом процесса выдвижения нежесткого стержня ГС и посвящена данная работа.

#### ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

После отделения от последней ступени ракеты-носителя разарретировается МД, который гасит угловые скорости КА примерно до орбитальной скорости. Через определенное время, рассчитываемое бортовым компьютером, по сигналу датчика наличия Земли выдвигается ГС.

В качестве примера конструкции системы развертывания штанги ГС космического аппарата на рис. 1 показан механизм, основные элементы которого пронумерованы.

Развертываемые структуры, особенно сделанные из стержней открытого сечения, имеют существенную гибкость. Это налагает опреде-

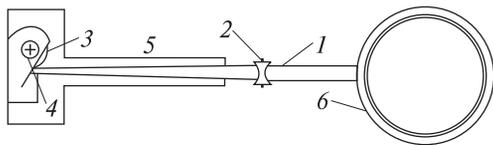


Рис. 1. Физическая модель системы разворачивания: 1 — упругий стержень штанги, образованный из предварительно напряженной ленты, 2 — направляющие ролики, 3 — лента, намотанная на барабан, 4 — механизм раскручивания ленты, 5 — корпус устройства разворачивания, 6 — масса на конце

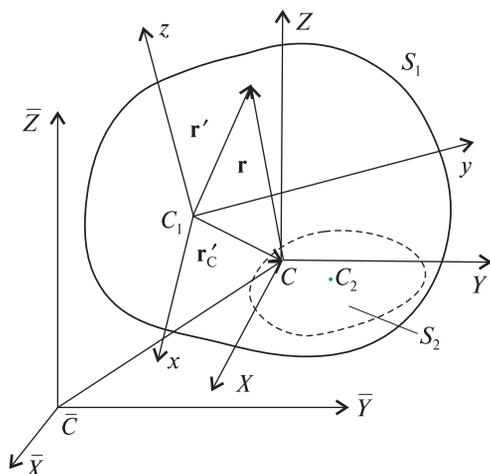


Рис. 2. Обобщенная механическая модель КА, содержащего элементы изменяемой конфигурации

ленные ограничения на параметры закона разворачивания.

Центрирование внутренней сферы МД во внешней сфере обеспечивается отталкивающим действием вспомогательных подковообразных магнитов от слоя висмута. Линейный магнит на внутренней сфере, взаимодействуя с магнитным полем Земли (МПЗ), как стрелка компаса стремится расположиться вдоль локальной магнитной силовой линии, что приводит к относительному перемещению внутренней и внешней сфер. Корпус выполнен из немагнитного материала, так что магнит может ориентироваться исключительно по вектору напряженности геомагнитного поля. Таким образом, МД представляет собой по существу дополнительное тело, связанное с КА фиктивным трехстепенным шарниром. На КА установлен тангажный маховик.

## МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Механическая модель рассматриваемой системы может быть представлена как твердое тело с присоединенным упругим стержнем переменной длины, несущим на конце МД, и системой разворачивания ГС, показанной на рис. 1. На рис. 2 показаны следующие системы координат, используемые в дальнейшем:  $\bar{CXYZ}$  — абсолютный базис,  $C_1xyz$  — связанный с телом базис с началом в точке  $C_1$ , совпадающей с центром масс гиростатической части системы (не изменяющей компоненты полного тензора инерции в процессе разворачивания и в процессе дальнейшего функционирования), ось  $C_1z$  направлена вдоль проектного положения оси ГС. Тело  $S_1$  является гиростатической частью и не включает МД, который изменяет вращательную инерцию тела при упругих деформациях стержня ГС. Тело  $S_2$  является разворачиваемой частью с  $C_2$  в качестве мгновенного центра масс и не содержит гиростатических компонентов (например, массы барабана для ленты; вращение барабана может рассматриваться при вычислении относительного момента количества движения).

Движение тела определяется вектором скорости  $\vec{v}_{C_1}$  относительно центра масс  $C$  и вектором абсолютной угловой скорости  $\vec{\omega}$  тела  $S_1$ . Радиус-вектор  $\vec{r}$  определяет местоположение произвольной точки  $P$  относительно абсолютной системы координат  $\bar{CXYZ}$ , а радиус-вектор  $\vec{r}'$  — относительно системы  $C_1xyz$ , связанной с несущим телом. В отличие от проблемы динамики относительного движения носимых тел, описанной Лурье [3], здесь имеет место общий случай, где выражение для  $\vec{r}'$  зависит от времени  $t$  явно, а не только через обобщенные координаты:  $\vec{r}' = \vec{r}'(q_1, \dots, q_n, t)$ , потому что разворачивание штанги происходит по предписанному во времени закону. В результате  $\vec{r}'_i$  изменяется во времени в процессе разворачивания даже когда значения обобщенных координат, которые определяют относительные упругие смещения штанги, тождественно равны нулю. Введем также связанную с мгновенным положением центра масс орбитальную систему координат  $Cx^{or}y^{or}z^{or}$  с общепринятым направлением осей.

В качестве обобщенных координат, которые определяют внутреннее состояние системы, выбираются относительные перемещения центра масс тела на конце стержня в направлении осей  $C_1x$  и  $C_1y$ , показанные на рис. 3.

Поскольку угловые перемещения центрального тела МД не связаны кинематически с движением его внешней оболочки, его следует рассматривать как свободное в смысле угловых перемещений твердое тело, движение которого описывается уравнениями Эйлера — Лагранжа. Необходимо также ввести систему координат  $C_Dx_Dy_Dz_D$ , связанную с центром масс среднего тела МД, с осью  $C_Dx_D$ , направленной вдоль оси внутреннего магнита МД в сторону его южного полюса, и произвольно направленными двумя другими осями, дополняющими базис до правого прямоугольного. В начальный момент совместим эти оси по направлениям с осями базиса  $C_1x_1y_1z_1$ .

В качестве внешних моментов, действующих на центральное тело МД, фигурируют момент геомагнитного поля и момент вязкого трения, которое создается либо с помощью жидкости, залитой в зазор между центральным корпусом и оболочкой МД (жидкостный МД), либо за счет вихревых токов, возникающих в токопроводящей оболочке при относительном вращении центрального магнита (индукционный МД). Таким образом, движение центрального тела МД должно описываться отдельным уравнением движения. Далее, не нарушая общности подхода, ограничимся рассмотрением жидкостного МД. В свою очередь, на КА действует момент от гравитационного поля Земли, а также момент вязкого трения со стороны жидкости, окружающей центральное тело МД.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Уравнения движения рассматриваемой системы становятся наиболее компактными и наиболее удобными для численного интегрирования (и для угловых, и относительных движений), если в качестве полюса выбрано мгновенное положение центра масс  $C$ . В этом случае кинетическая энергия может быть представлена в следующей форме:

$$\begin{aligned} T_{S_1+S_2} &= \frac{1}{2} \int_m v_i^2 dm = \frac{1}{2} \int_m (\vec{v}_C + \dot{\vec{\rho}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho})^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_m [\vec{v}_C^2 + \dot{\vec{\rho}}^2 + (\vec{\omega} \times \vec{\rho})^2 + 2v_C \dot{\vec{\rho}} + \\ &\quad + 2v_C (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + 2\dot{\vec{\rho}} (\vec{\omega} \times \vec{\rho})] dm. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{\rho}$  — радиус-вектор произвольной точки системы относительно мгновенного положения центра масс  $C$ .

После интегрирования выражение для кинетической энергии всей системы принимает вид

$$T = \frac{M}{2} \vec{v}_C^2 + T_r^{C_1} - \frac{M}{2} \dot{\vec{r}}_C'^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \Theta^C \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \vec{K}_r^C. \quad (2)$$

Здесь  $m$  — полная масса системы,  $\vec{v}_C$  — абсолютная скорость центра масс,  $T_r^{C_1}$  — кинетическая энергия относительного движения носимых тел, вычисленная при условии определения относительных скоростей их точек относительно  $C_1$ . Легко показать, что, если вычислять относительные скорости указанных точек относительно мгновенного положения центра масс  $C$ , выражение (2) может быть преобразовано к более простой форме:

$$T = \frac{M}{2} \vec{v}_C^2 + T_r^C + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \Theta^C \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \vec{K}_r^C.$$

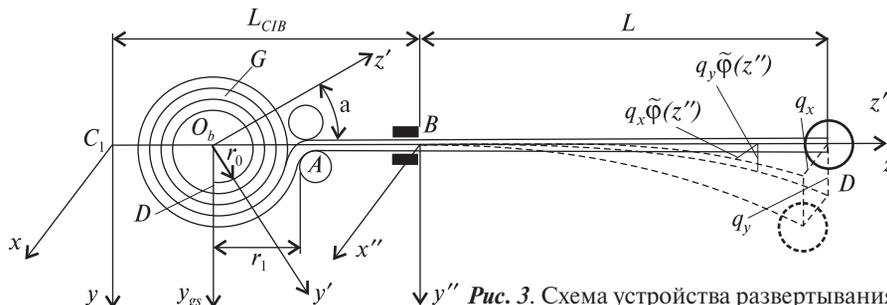


Рис. 3. Схема устройства развертывания

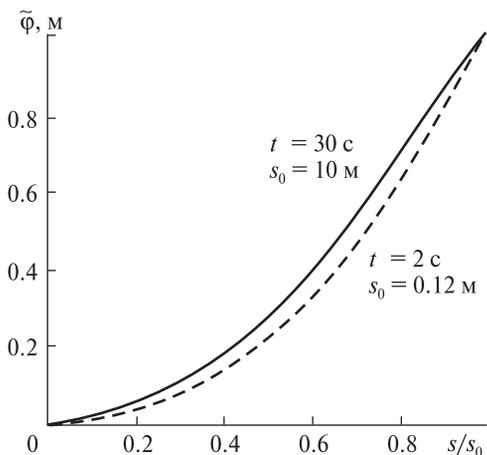


Рис. 4. Зависимость первой парциальной формы от длины выдвинутого ГС

Следует заметить, что хотя кинетическая энергия относительного движения — скаляр, из вышеупомянутого следует, что необходимо определить выбранный полюс для вычисления относительных скоростей для ее правильного вычисления.

Для построения математической модели используется формализм построения уравнений движения Лагранжа второго рода [3]. Если в качестве полюса выбрать мгновенное положение центра масс системы  $C$ , уравнения движения несущего тела вокруг центра масс и уравнения относительного движения носимых тел примут вид

$$\Theta^C \cdot \dot{\vec{\omega}} + \Theta^C \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\Theta^C \cdot \vec{\omega}) + \vec{K}_r^C + \vec{\omega} \times \vec{K}_r^C = \vec{m}^C, \quad (3)$$

$$E_s(T_r^{C_1}) - M \vec{r}_C^{**} \cdot \frac{\partial \vec{r}_C^*}{\partial q_s} - \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \Theta^C}{\partial q_s} \cdot \vec{\omega} + \vec{\dot{\omega}} \cdot \frac{\partial \vec{K}_r^C}{\partial \dot{q}_s} + \vec{\omega} \cdot E_s^*(\vec{K}_r^C) = Q_s. \quad (4)$$

Здесь  $\Theta^C$  — тензор инерции системы в ее центре инерции  $C$ ,  $\vec{K}_r^C$  — относительный кинетический момент развертываемой части относительно точки  $C$ ,  $\vec{\omega}$  — вектор абсолютной угловой скорости несущего тела,  $\vec{m}^C$  — главный момент внешних сил относительно центра инерции КА,

$$E_j(\cdot) = \frac{d}{dt} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(\cdot)}{\partial q_j} \text{ — оператор Эйлера,}$$

$$E_j^*(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(\cdot)}{\partial q_j} \text{ — также оператор Эйлера,}$$

но дифференцирование по времени проводится здесь в связанном базисе,  $T_r^{C_1}$  — кинетическая энергия относительного движения элементов системы при определении их скоростей относительно базиса  $C_1$ хуз,  $q_s$  — обобщенные координаты,  $Q_s$  — обобщенные силы,  $\dot{f}$  обозначает абсолютную производную по времени,  $f^*$  — производную по времени в системе координат, неизменно связанной с несущим телом. Здесь нужно заметить, что хотя кинетическая энергия относительного движения — скаляр, для ее правильного вычисления необходимо указывать полюс, выбранный для определения относительных скоростей точек носимых тел. Важно также отметить, что член  $E_s^*(\vec{K}_r^C)$  не приводится к  $-2 \frac{\partial \vec{K}_r^C}{\partial q_s}$ , как это показано в [3], так как случай, который рассматривается здесь, является более общим случаем нестационарных связей.

Для описания динамики центрального тела МД нужно составить уравнение

$$\Theta^{C_d} \cdot \dot{\vec{\omega}}_d + \vec{\omega}_d \times (\Theta^{C_d} \cdot \vec{\omega}_d) = \vec{m}_d^{C_d}, \quad (5)$$

где  $\Theta^{C_d}$  — собственный тензор инерции центрального тела МД,  $\vec{\omega}_d$  — вектор абсолютной угловой скорости этого тела,  $\vec{m}_d^{C_d}$  — момент внешних сил, действующих на него. Этот момент состоит из момента, возникающего при взаимодействии МД с МПЗ и момента вязких сил, возникающего при вращении центрального тела МД относительно его корпуса.

Учитывая, что масса полностью развертываемого стержня существенно меньше массы тела на конце стержня, и принимая во внимание, что вторая парциальная частота такого стержня существенно больше, чем первая, достаточно рассматривать только одну форму упругих колебаний в каждой из главных плоскостей связанного с КА базиса. Необходимо отметить, что парциальные формы и частоты колебаний изменяются в течение выдвижения стержня. Из-за малых угловых скоростей КА и медленного развертывания ГС можно пренебречь влиянием продольных сил на формы колебаний. При использовании функций Крылова [3] для представления

упругих собственных форм в двух плоскостях для балки с одним закрепленным концом и с точечной массой на свободном конце можно показать, что характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$V(kl)T(kl) - S(kl)^2 + kl \frac{m_{gs}}{m_b} (T(kl)U(kl) - V(kl)S(kl)) = 0, \quad (6)$$

где  $S(kl), T(kl), U(kl), V(kl)$  — функции Крылова,  $kl$  — корни характеристического уравнения,  $m_{gs}$  и  $m_b$  — масса на конце и масса развернутой части балки соответственно. Уравнение (6) вырождено в начальный момент развертывания балки (при  $m_b = 0$ ). Этот факт нужно принимать во внимание при численном моделировании. Крутильные колебания концевой массы вокруг оси стержня ГС учитывать не будем, поскольку они не изменяют компоненты тензора инерции КА и не могут оказать существенного влияния на угловые колебания КА.

Барабан с намотанной лентой можно рассматривать как маховик с переменным моментом инерции, а все тело  $S_2$  — как тело со смещаемым относительно  $C_1$  центром масс  $C_2$  и с переменным тензором инерции.

Выражения для различных интегралов, связанных с формой упругих перемещений, которые используются при вычислении коэффициентов уравнений движения системы развертывания балки, показанной на рис. 3, имеют вид

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \int_0^{s(t)} \tilde{\phi}(z'', t) dz'', \\ F_2(t) &= \int_0^{s(t)} \tilde{\phi}(z'', t)(z'' + L_{C_1B}) dz'', \\ F_3(t) &= \int_0^{s(t)} (\tilde{\phi}(z'', t))^2 dz'', \\ F_4(t) &= \int_0^{s(t)} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\phi}(z'', t)}{\partial z''^2} \right)^2 dz''. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{\phi}(z'', t)$  — нормированная первая парциальная форма поперечного колебания упругой балки длиной  $s(t)$  с точечной массой  $m_{gs}$  на конце. Зависимость ее от времени связана с изменением величины  $m_{gs}/m_b$  в характеристическом уравнении (6) по мере выдвигания стержня ГС. В качестве примера можно сослаться на

рис. 4, на котором видно, как по мере выдвигания стержня изменяются ординаты нормированной первой собственной формы.

## ОСНОВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ СИСТЕМЫ

Для составления выражений для динамических величин, входящих в уравнения движения, вначале должны быть получены выражения для радиусов-векторов и относительных скоростей точек подвижных элементов носимых тел.

Радиусы-векторы характерных точек системы можно представить в следующем виде: для центра масс МД  $\vec{r}_D = \{q_x, q_y, s + L_{C_1B}\}$ , для центра масс изогнутой балки  $\vec{r}_C' = \{q_x / L F_1(t), q_y / L F_1(t), L/2 + L_{C_1B}\}$ , для центра масс ленты на барабане  $\vec{r}_O' = \{0, 0, L_{C_1O}\}$ . Текущая масса ленты на барабане  $m_{dL} = m_L(L-s)$ , где  $L$  — длина балки в полностью развернутом состоянии; внешний радиус ленты, намотанной на барабане,  $r_L = r_0 + \kappa(\Phi - \Psi)$ . Здесь  $\kappa = \delta / 2\pi$ ,  $\delta$  — толщина ленты;  $m_l$  — масса единицы длины балки;  $\Phi$  — максимальное значение угла поворота барабана в процессе развертывания балки;  $q_x, q_y$  — обобщенные координаты упругих перемещений, определяющие прогиб конца балки в плоскостях  $C_1xz, C_1yz$  соответственно.

Геометрия ленты в устройстве развертывания показана на рис. 3. Здесь  $C_{1xyz}$  — связанная с главным модулем КА система координат. Центральную линию ленты, намотанной на барабан, можно рассматривать как правую спираль Архимеда  $\rho = \frac{\delta}{2\pi} \phi_k$ ,  $\phi_k \in [0, \Phi_f]$ , где  $\delta$  — толщина ленты. Часть этой спирали, для которой  $\phi_k \in [0, \phi_D]$ , формирует тело барабана. Область ленты до начала развертывания соответствует величинам  $\phi_k \in [\phi_D, \Phi_f]$ .

На рис. 3 точка  $A$  — это точка, где лента составляет барабан. Точка  $G$  является произвольной точкой спирали. Полная длина ленты намотана на барабане в начальный момент времени, и каждая точка его средней поверхности лежит на спирали. Точка  $D$  является началом ленты на барабане. Это соответствует угловой координате  $\phi_D$  спирали. Если  $r_0$  — расстояние от точки  $D$  до центра барабана  $O_1$ ,  $\phi_D = 2\pi r_0 / \delta$ .

Длина спирали, занятой барабаном, равна

$$L_D = \frac{\delta}{4\pi} [\phi_D \sqrt{1 + \phi_D^2} + \ln(\phi_D + \sqrt{1 + \phi_D^2})]. \quad (8)$$

В начальный момент точка  $A$  расположена на конце спирали. Значение  $\phi_A$  может быть найдено численно по известной полной длине ленты, которая формирует ГС после завершения развертывания, из условия

$$L_{AD} = \frac{\delta}{4\pi} [\phi_A \sqrt{1 + \phi_A^2} + \ln(\phi_A + \sqrt{1 + \phi_A^2})] - \frac{\delta}{4\pi} [\phi_D \sqrt{1 + \phi_D^2} + \ln(\phi_D + \sqrt{1 + \phi_D^2})] = L, \quad (9)$$

где  $L$  – длина развернутого ГС. Здесь нужно учитывать тот факт, что по мере сматывания ленты с барабана точка  $A$  сдвигается к его центру на расстояние  $\delta\psi_d / (2\pi)$ .

Полный угол намотки ленты на барабан  $\Phi_L = \phi_A - \phi_D$ . Длина ленты  $s$ , формирующей ГС при вращении барабана на произвольный угол  $\psi_d$ , равна

$$s = \frac{\delta}{4\pi} [\phi_A \sqrt{1 + \phi_A^2} + \ln(\phi_A + \sqrt{1 + \phi_A^2})] - \frac{\delta}{4\pi} [(\phi_A - \psi_d) \sqrt{1 + (\phi_A - \psi_d)^2} + \ln((\phi_A - \psi_d) + \sqrt{1 + (\phi_A - \psi_d)^2})] - \delta\psi_d / (2\pi). \quad (10)$$

Двойное дифференцирование выражения (10) относительно времени дает выражения для  $\dot{s}$  и  $\ddot{s}$ , которые необходимы, чтобы вычислить коэффициенты динамических уравнений. При дифференцировании этого выражения по времени нужно учитывать, что  $\phi_A$  – константа, определяемая исходным состоянием барабана до начала развертывания.

В соответствии с рис. 3 для любой материальной точки выдвигаемого стержня ГС с учетом его упругих перемещений компоненты радиус-вектора в базисе  $C_1xuz$  имеют вид

$$\vec{r}'_L = \{q_x(t)\tilde{\phi}(z'',t), q_y(t)\tilde{\phi}(z'',t), C_1B + z''\}. \quad (11)$$

Вектор относительной скорости такой материальной точки не может быть получен из этого выражения простым дифференцированием по времени в связанном базисе, поскольку любая материальная точка стержня ГС при его выдвигении совершает дополнительное переносное

перемещение вдоль оси  $C_1z''$  со скоростью  $\dot{s}(t)$ . Поэтому

$$\vec{v}'_L = \frac{\partial \vec{r}'_L}{\partial t} + \{0, 0, \dot{s}(t)\}. \quad (12)$$

Принимая во внимание, что собственная форма  $\tilde{\phi}(z'',t)$  зависит от времени, выражение для  $\partial \vec{r}'_L / \partial t$  можно записать в виде

$$\partial \vec{r}'_L / \partial t = \{\dot{q}_x(t)\tilde{\phi}(z'',t) + q_x(t)\tilde{\phi}^{(0,1)}(z'',t), \dot{q}_y(t)\tilde{\phi}(z'',t) + q_y(t)\tilde{\phi}^{(0,1)}(z'',t), 0\}. \quad (13)$$

Для сосредоточенной массы, расположенной на конце стержня ГС, такие же величины можно определить в виде

$$\vec{r}'_G = \{q_x(t), q_y(t), C_1B + z''\}, \quad (14)$$

$$\vec{v}'_G = \frac{\partial \vec{r}'_G}{\partial t} + \{0, 0, \dot{s}(t)\}. \quad (15)$$

Компоненты тензора инерции КА  $\Theta^{C_1}$  в связанном с телом базисе могут быть записаны с учетом выражений (7) следующим образом:

$$\Theta^{C_1}_{xx} = J_{xx} + m_{dl} \left( \frac{r_l^2 + r_0^2}{2} + L_{C_1O}^2 \right) + m_{gs} (r_D(2)^2 + r_D(3)^2) + m_l \left( \frac{z_D^3 - z_B^3}{3} + q_y^2 F_3 \right),$$

$$\Theta^{C_1}_{yy} = J_{yy} + m_{dl} \left( \frac{3r_l^2 + 3r_0^2 + b^2}{12} + L_{C_1O}^2 \right) + m_{gs} (r_D(1)^2 + r_D(3)^2) + m_l \left( \frac{z_D^3 - z_B^3}{3} + q_x^2 F_3 \right), \quad (16)$$

$$\Theta^{C_1}_{zz} = J_{zz} + m_{dl} \frac{3r_l^2 + 3r_0^2 + b^2}{12} + m_{gs} (r_D(1)^2 + r_D(2)^2) + m_l (q_x^2 + q_y^2) F_3,$$

$$\Theta^{C_1}_{xy} = J_{xy} + (m_{gs} + m_l F_3) q_x q_y,$$

$$\Theta^{C_1}_{xz} = J_{xz} + (m_{gs} (L_{C_1B} + L) + m_l F_2) q_x.$$

Здесь  $J_{xx}$ ,  $J_{xy}$ , ... – компоненты тензора инерции для гиростатической части системы. Тензором инерции МД относительно его центра масс по сравнению с его вкладом в тензор инерции всего КА пренебрегаем. Компоненты тензора инерции вычислены в базисе с началом в точке тела  $C_1$ , поэтому далее используем в уравнениях движения соотношение

$$\Theta^C = \Theta^{C_1} - M(\mathbf{E}\vec{r}'_C \cdot \vec{r}'_C - \vec{r}'_C \vec{r}'_C).$$

Масса центрального тела МД учитывается при вычислении тензора инерции КА, поскольку центр масс МД неподвижен относительно корпуса МД, являющегося частью КА.

Кинетическая энергия элементов ГС в относительном движении при вычислении скоростей относительно точки  $C_1$  равна

$$T_r^{C_1} = J_d \dot{\psi}^2 / 2 + m_{gs} (\dot{q}_x^2 + \dot{q}_y^2) \phi^2(L) / 2 + m_l [(L_{ab} + L) \dot{L}^2 (\dot{q}_x^2 + \dot{q}_y^2) F_3]. \quad (17)$$

Компоненты кинетического момента элементов ГС в относительном движении могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \bar{K}_r^{C_1} = \{ & [J_{dr} + m_{dl}(r_0^2 + r_l^2) / 2] \dot{\psi} + \\ & + m_{gs} (q_y \dot{L} - \dot{q}_y (L_{C_1B} + L)) + m_l (-F_2 \dot{q}_y + F_1 q_y \dot{L}); \\ & [m_{gs} (q_x \dot{L} - \dot{q}_x (L_{C_1B} + L)) + m_l (-F_2 \dot{q}_x + F_1 q_x \dot{L}); \\ & (m_{gs} + m_l F_3) (q_x \dot{q}_y - \dot{q}_x q_y) \}. \end{aligned} \quad (18)$$

Сюда не входит кинетический момент относительного вращения центрального тела МД, поскольку связь его с КА чисто динамическая. Взаимодействие осуществляется только через силы вязкого трения при вращении центрального тела внутри оболочки МД, которые можно рассматривать как внешние силы как для КА, так и для центрального тела МД.

Потенциальная энергия сил упругости для системы может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_e = \left( \frac{q_x^2}{2} + \frac{q_y^2}{2} \right) \int_0^{L(t)} EJ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial (z'')^2} \right)^2 dz'' = \\ = \left( \frac{q_x^2}{2} + \frac{q_y^2}{2} \right) F_4(t). \end{aligned} \quad (19)$$

## ВНЕШНИЕ МОМЕНТЫ И ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ

Особого внимания заслуживает определение внешних моментов и обобщенных сил в рассматриваемой системе. Момент  $\bar{m}^C$  в уравнении (3) состоит из гравитационного момента, возникающего при взаимодействии КА с гравитационным полем Земли, и момента сил вязкого трения, возникающего в результате вращения центрального тела МД относительно своей оболочки.

В качестве модели МПЗ рассматривается наклонный диполь [7], ось которого, определяемая

ортом  $\bar{e}_m$ , отклонена от оси вращения Земли на  $11.5^\circ$  и связана с центром Земли. Долгота северного магнитного полюса в начальный момент определяется по юлианской дате начала моделирования процесса. В принятом абсолютном базисе (см. рис. 5)

$$\bar{e}_m = \{ \sin \alpha_m \cdot \cos \psi_m, \sin \alpha_m \cdot \sin \psi_m, \cos \alpha_m \}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_r = \{ \cos \Omega \cdot \cos u - \sin \Omega \cdot \sin u \cdot \cos i, \\ \sin \Omega \cdot \cos u + \cos \Omega \cdot \sin u \cdot \cos i, \sin u \cdot \sin i \}. \end{aligned} \quad (21)$$

Вектор магнитной индукции в любой точке орбиты можно записать в виде [7]:

$$\bar{B} = \mu_m R^{-3} [\bar{e}_m - 3(\bar{e}_m \cdot \bar{e}_r) \cdot \bar{e}_r]. \quad (22)$$

Алгоритм вычисления моментов и обобщенных сил, связанных со взаимодействием МД с МПЗ и с КА, состоит в следующем. Момент  $\bar{m}_d^{C_d}$  в уравнении (5) определяется взаимодействием постоянного магнита центрального тела МД с МПЗ. Он равен

$$\bar{m}_d^{C_d} = \bar{m}_{md} \times \bar{B}, \quad (23)$$

где  $\bar{m}_{md}$  — вектор магнитного момента постоянного магнита. С помощью зависимостей, определяющих преобразование координатных базисов (см. ниже (32)), можно вычислить проекции вектора магнитного момента в орбитальном базисе. Вычислив проекции векторов (20), (21) и (22) в орбитальном базисе, по формуле (23) можно вычислить  $\bar{m}_d^{C_d}$  в орбитальном базисе и преобразовать его в базис  $C_D x_D y_D z_D$ , после чего подставить полученное выражение в уравнение (5) и найти проекции векторов абсолютных угловых скоростей КА и МД в их связанных базисах. Далее нужно найти проекции этих векторов в орбитальном базисе. После нахождения вектора угловой скорости центрального тела МД относительно его корпуса по формуле (25) может быть вычислен момент вязкого трения, действующий на корпус МД в орбитальном базисе. Проекция этого момента на оси базисов  $C_1 x_{C_1} y_{C_1} z_{C_1}$  могут быть использованы в дальнейшем для вычисления обобщенных сил, а проекции его на базис  $C_D x_D y_D z_D$  с обратным знаком можно использовать в уравнении (5) как дополнительный внешний момент от МПЗ.

Принимая во внимание (19), выражения для обобщенных сил упругих перемещений можно

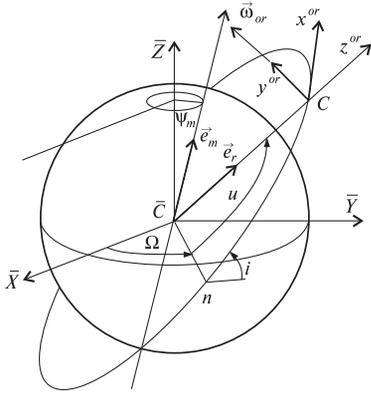
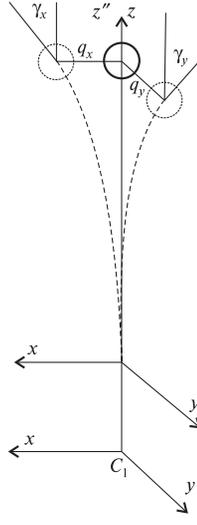


Рис. 5. Принятые системы координат

Рис. 6. Обобщенные координаты упругих перемещений



записать в виде

$$Q_x = -EJF_4 q_x, \quad Q_y = -EJF_4 q_y. \quad (24)$$

К ним следует добавить обобщенные силы от воздействия на корпус МД демпфирующего момента сил вязкого трения и от конструкционного демпфирования. Виртуальную работу первого момента, который может быть представлен в виде

$$\vec{M}_{visc} = k_d \vec{\omega}_{rel}, \quad (25)$$

можно записать как

$$\delta A_{visc} = M_{visc}(2) \delta \gamma_x - M_{visc}(1) \delta \gamma_y.$$

Здесь  $\gamma_x, \gamma_y$  — углы поворота конца балки, к которому прикреплен корпус МД (рис. 6), в плоскостях  $C_1xz, C_1yz$  соответственно. Стержень ГС считается жестким на кручение, поэтому компонент  $M_{visc}(3)$  не совершает работы на упругих перемещениях. Поскольку

$$\gamma_x = \arctg \left( q_x \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} \right),$$

$$\gamma_y = -\arctg \left( q_y \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} \right) \quad (26)$$

(знак минус во второй формуле связан с тем, что при положительном значении  $q_y$  поворот на угол  $\gamma_y$  происходит по часовой стрелке, если смотреть со стороны оси  $C_1x$ ), их вариации выглядят следующим образом:

$$\delta \gamma_x = \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} / \left[ 1 + q_x^2 \left( \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} \right)^2 \right] \delta q_x,$$

$$\delta \gamma_y = \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} / \left[ 1 + q_y^2 \left( \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} \right)^2 \right] \delta q_y,$$

откуда

$$Q_{MDx} = M_{visc}(2) \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} / \left[ 1 + q_x^2 \left( \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} \right)^2 \right],$$

$$Q_{MDy} = -M_{visc}(1) \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} / \left[ 1 + q_y^2 \left( \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} \right)^2 \right]. \quad (27)$$

Здесь  $k_d$  — коэффициент демпфирования, равный  $k_d = 8 / (3\pi r_0^4 / \epsilon)$  [6],  $\rho$  — вязкость жидкости в демпере,  $r_0$  — радиус кожуха,  $\epsilon$  — зазор между корпусом и центральным телом МД,  $M_{visc x}, M_{visc y}$  — проекции вектора  $\vec{M}_{visc}$  на оси базиса  $C_1xyz$ .

Учитывая тот факт, что при упругих деформациях стержня ГС корпус МД будет не только смещаться в базисе  $C_1xyz$ , но и поворачиваться в двух плоскостях (см. рис. 6), при определении вектора  $\vec{\omega}_{rel}$  угловой скорости вращения центрального тела МД относительно кожуха, эти вращения следует учитывать. При значительных колебаниях стержня ГС их вклад в  $\vec{\omega}_{rel}$  может оказаться существенным. Поэтому целесообразно определять абсолютную угловую скорость корпуса МД в связанном базисе как  $\vec{\omega}_{Corp} = \vec{\omega}_{KA} + \dot{\gamma}_y \vec{i}_x + \dot{\gamma}_x \vec{i}_y$ . Принимая во внимание (26), можно записать

$$\vec{\omega}_{rel} = \vec{\omega}_{MD} - \vec{\omega}_{KA} +$$

$$+ \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} / \left[ 1 + q_y^2 \left( \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} \right)^2 \right] \dot{q}_y \vec{i}_x -$$

$$- \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} / \left[ 1 + q_x^2 \left( \frac{\partial \tilde{\phi}(z'')}{\partial z''} \Big|_{z''=L} \right)^2 \right] \dot{q}_x \vec{i}_y. \quad (28)$$

Проекции момента  $\vec{M}_{visc}$  на базис  $C_1xyz$  будут определять также дополнительный внешний момент, действующий на КА.

Обобщенные силы от конструкционного демпфирования можно ввести формально в виде

$$Q_{x,y} = -k_{1x,y} \dot{q}_{x,y},$$

исходя из условия, что декремент колебаний такой парциальной системы как консольно заземленная металлическая балка с массой на конце должен иметь порядок 0.1.

### КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ

Для определения ориентации как приборного отсека КА, так и внутреннего тела МД целесообразно использовать параметры Родрига — Гамильтона. Кинематические уравнения для основного КА могут быть записаны в скалярной форме в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\tilde{\omega}_1\lambda_1 - \tilde{\omega}_2\lambda_2 - \tilde{\omega}_3\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \tilde{\omega}_1\lambda_0 + \tilde{\omega}_3\lambda_2 - \tilde{\omega}_2\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \tilde{\omega}_2\lambda_0 + \tilde{\omega}_1\lambda_3 - \tilde{\omega}_3\lambda_1, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \tilde{\omega}_3\lambda_0 + \tilde{\omega}_2\lambda_1 - \tilde{\omega}_1\lambda_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — компоненты кватерниона, преобразующего орбитальный базис к связанному с телом базису,  $\tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega'_{oi}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\omega_i$  — проекции вектора абсолютной угловой скорости несущего тела на оси связанного с телом базиса,  $\omega'_{oi}$  — проекции вектора орбитальной угловой скорости на те же оси. Так как орбитальная угловая скорость коллинеарна с осью  $Sy^{or}$ , ее проекции на оси связанного с телом базиса определяются матрицей соответствующих направляющих косинусов, записанных в компонентах кватерниона [1]. В результате

$$\begin{aligned} \omega'_{o1} &= 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)\omega_o, \\ \omega'_{o2} &= (\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2)\omega_o, \\ \omega'_{o3} &= 2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)\omega_o. \end{aligned} \quad (30)$$

Матрица перехода  $\mathbf{T}_{OrbSv}$  от орбитального базиса к связанному с КА в параметрах Родрига — Гамильтона [3, с. 105], имеет вид

$$\begin{array}{c|ccc} & x_{orb} & y_{orb} & z_{orb} \\ \hline x_{sv} & \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & 2(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) \\ y_{sv} & 2(-\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) \\ z_{sv} & 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) & 2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{array} \quad (31)$$

Теперь можно записать

$$\vec{R}_{sv} = \mathbf{T}_{OrbSv} \vec{R}_{orb}$$

или

$$\vec{R}_{orb} = \mathbf{T}_{OrbSv}^T \vec{R}_{sv} = \mathbf{T}_{SvOrb} \vec{R}_{sv}. \quad (32)$$

Кинематические уравнения для центрального тела МД могут быть записаны в скалярной фор-

ме в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0^D &= -\tilde{\omega}_1^D\lambda_1^D - \tilde{\omega}_2^D\lambda_2^D - \tilde{\omega}_3^D\lambda_3^D, \\ 2\dot{\lambda}_1^D &= \tilde{\omega}_1^D\lambda_0^D + \tilde{\omega}_3^D\lambda_2^D - \tilde{\omega}_2^D\lambda_3^D, \\ 2\dot{\lambda}_2^D &= \tilde{\omega}_2^D\lambda_0^D + \tilde{\omega}_1^D\lambda_3^D - \tilde{\omega}_3^D\lambda_1^D, \\ 2\dot{\lambda}_3^D &= \tilde{\omega}_3^D\lambda_0^D + \tilde{\omega}_2^D\lambda_1^D - \tilde{\omega}_1^D\lambda_2^D. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь  $\lambda_0^D, \lambda_1^D, \lambda_2^D, \lambda_3^D$  — компоненты кватерниона, преобразующего орбитальный базис к базису, связанному с МД,  $\tilde{\omega}_i^D = \omega_i^D - \omega'_{oi}{}^D$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\omega_i^D$  — проекции вектора абсолютной угловой скорости центрального тела МД на оси связанного с ним базиса,  $\omega'_{oi}{}^D$  — проекции вектора орбитальной угловой скорости на те же оси. Проекции орбитальной угловой скорости на оси связанного с МД базиса определяются по аналогии с (30):

$$\begin{aligned} \omega'_{o1}{}^D &= 2(\lambda_0^D\lambda_3^D + \lambda_1^D\lambda_2^D)\omega_o, \\ \omega'_{o2}{}^D &= ((\lambda_0^D)^2 + (\lambda_2^D)^2 - (\lambda_1^D)^2 - (\lambda_3^D)^2)\omega_o, \\ \omega'_{o3}{}^D &= 2(-\lambda_0^D\lambda_1^D + \lambda_2^D\lambda_3^D)\omega_o. \end{aligned} \quad (34)$$

Соответствующая матрица перехода от орбитального базиса к базису, связанному с центральным телом МД, может быть построена по аналогии с (31) путем замены в ней параметров ориентации связанного базиса на параметры ориентации центрального тела МД относительно орбитального базиса. В качестве углов Крылова, которые более привычны при иллюстрации углового движения КА, можно ввести последовательность поворотов, показанную на рис. 7.

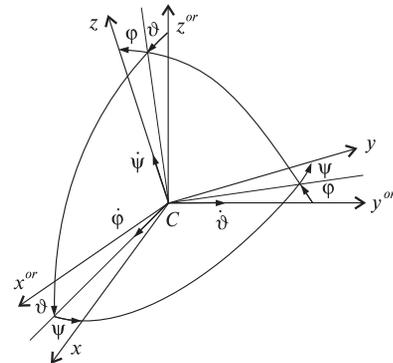


Рис. 7. Углы ориентации связанного базиса в орбитальном ( $\varphi$  — угол крена,  $\theta$  — угол тангажа,  $\psi$  — угол курса)

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

При численном моделировании использовались следующие базовые значения основных параметров. Движение КА рассматривается на круговой орбите радиусом 6700 км с наклоном  $83^\circ$ . Масса основного тела КА  $m_1 = 550$  кг; масса МД  $m_{MD} = 10$  кг; собственный магнитный момент МД  $m_{MD} = 500$  Дж/Тл; коэффициент демпфирования МД  $k_d = 1.4$  Н·м·с; изгибная жесткость стержня ГС в развернутом положении  $EJ = 200$  Н·м<sup>2</sup>; полная длина стержня ГС  $L = 10$  м; погонная масса ленты  $m_L = 0.17$  кг/м; диагональные компоненты тензора инерции основного отсека КА в связанном базисе  $\Theta_{11}^{C_1} = 4000$  кг·м<sup>2</sup>,  $\Theta_{22}^{C_1} = 6000$  кг·м<sup>2</sup>,  $\Theta_{33}^{C_1} = 2000$  кг·м<sup>2</sup>; кинетический момент тангажного маховика  $H_{FW} = 10$  кг·м<sup>2</sup>/с; длительность выдвигания ГС  $T_f - T_0 = 400$  с, закон выдвигания во времени соответствует плавному выходу на постоянную скорость в течение 5 с и такому же завершению процесса, который является оптимальным в смысле минимизации относительных ускорений упругих перемещений [11]. Численное решение задачи Коши проводится методом Рунге — Кутты четвертого порядка с переменным шагом интегрирования, равным 0.01...0.001 с. Численное моделирование начинается с момента начала выдвигания ГС в предположении, что процесс начального успокоения КА завершен, и он ориентирован в орбитальной системе координат.

Вначале целесообразно рассмотреть поведение МД с приведенными выше параметрами в МПЗ, расположенного на идеально стабилизированной платформе, на орбитах вокруг Земли с различным наклоном. Это позволит выработать представление о возможностях такой системы демпфирования.

На рис. 8, 9 приведены законы изменения углов ориентации центрального тела МД и компонент момента, действующего на это тело со стороны МПЗ в орбитальном базисе, для орбит с наклоном  $45^\circ$ ,  $83^\circ$ ,  $90^\circ$  и для орбиты, лежащей в начальный момент в плоскости магнитного экватора (МЕ), отмеченных соответствующими обозначениями. На гипотетической орбите, лежащей в плоскости магнитного экватора ненаклонного диполя, вектор собственного магнитного момен-

та МД, направленный в начальный момент вдоль оси  $C_1x$ , поворачивается на угол  $\pi/2$  вокруг оси  $C_1z$  и далее поддерживает такую ориентацию. Очевидно, что при этом МД сможет демпфировать как колебания КА вокруг осей  $C_1x$  и  $C_1z$ , так и упругие колебания ГС в плоскости  $C_1yz$ . С другими возможными колебаниями МД не будет взаимодействовать. Ситуацию, близкую к подобной, можно предположить и на реальной экваториальной орбите с учетом наклона магнитного диполя. На реальной орбите с наклоном  $45^\circ$  МД вращается по всем трем углам ориентации. Поскольку он вращается несинхронно с орбитальным базисом, в ориентацию КА будут вноситься некоторые возмущения, хотя и несущественные при невысоких требованиях к точности ориентации. В то же время большие возмущения ориентации и связанные с ними упругие колебания могут обрабатываться.

На околополярных орбитах с наклоном  $83^\circ$  и  $90^\circ$  основное вращение центрального поля МД происходит вокруг оси, близкой к оси тангажа, причем за один оборот КА вокруг Земли МД в абсолютном базисе поворачивается на угол  $4\pi$ . При этом возникает возмущающий момент (рис. 9), имеющий существенную постоянную составляющую. Она стремится отклонить КА по углу тангажа от местной вертикали. Естественно, этому возмущению будет противодействовать гравитационный момент, но положение равновесия не сможет соответствовать местной вертикали. Кроме того, из рис. 9 видно, что наибольшая составляющая момента, действующего на магнит МД, имеет заметную периодическую составляющую, которая возрастает у экватора и убывает в районе полюсов. Эта составляющая способствует возникновению периодических помех ориентации. Следует заметить, что показанный на рис. 9 закон изменения момента от магнитного поля мало отличается по величине от момента вязкого трения, действующего на корпус МД со стороны вязкой жидкости, поскольку инерционная составляющая, на которую различаются эти два момента, мала по сравнению с моментом вязкого трения.

Моделирование динамики реального КА позволило выявить ряд качественных и количествен-

ных особенностей процесса пассивной стабилизации КА относительно местной вертикали.

На рис. 10 показано поведение углов ориентации КА без МД и с МД после выдвижения упругого ГС. КА без МД, стабилизированный в момент начала выдвижения ГС в орбитальном базисе, в результате увеличения компонентов тензора инерции  $\Theta_{11}^C, \Theta_{22}^C$  начинает вращаться вокруг оси тангажа с отрицательной относительной угловой скоростью. В результате угол тангажа такого КА (кривая 4 на рис. 10), становится отрицательным. Под действием восстанавливающего момента от гравитационного поля сил и при отсутствии какого-либо демпфирования КА входит в режим гармонических колебаний вокруг оси тангажа. Колебания по другим углам ориентации в таком идеальном случае не возникают.

Установка на КА МД приводит к невозможности пассивной ориентации связанного базиса КА строго в орбитальном базисе. Это вызвано наличием у момента сил вязкого трения, который воздействует на КА со стороны МД, существенной постоянной составляющей, как это было показано выше. В результате этого даже если предположить, что в начале развертывания КА был стабилизирован в орбитальном базисе, угол тангажа  $\vartheta$  не попадет в отрицательную область. Постоянная составляющая момента сил вязкого трения на околополярных орбитах приведет к наклону КА вокруг оси тангажа в положительном направлении. Изменение компонентов тензора инерции  $\Theta_{11}^C, \Theta_{22}^C$  внесет импульс момента, действующий по всем трем осям ориентации КА. В результате вокруг оси тангажа возникнут колебания, амплитуда которых будет ограничиваться как гравитационным моментом, так и моментом от МД. Значения угла тангажа начинают колебаться относительно некоторой положительной величины, постепенно уменьшаясь по амплитуде. Тем не менее, эти колебания не могут затухнуть, несмотря на диссипацию их энергии с помощью МД. Этому препятствует неравномерное вращение МД вокруг своих осей в МПЗ. Через несколько оборотов вокруг Земли амплитуда колебаний становится практически постоянной. Среднее значение угла тангажа на рис. 10 составляет примерно 0.12 рад. Естествен-

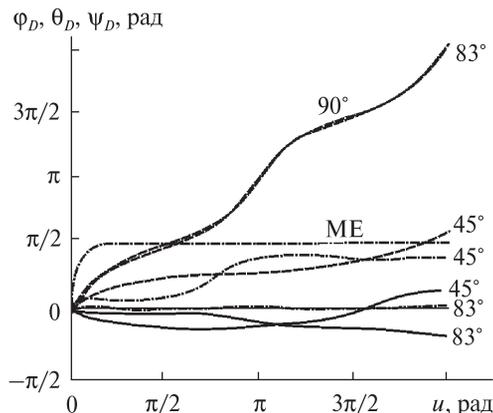


Рис. 8. Угловые движения МД на орбитах с разным наклоном

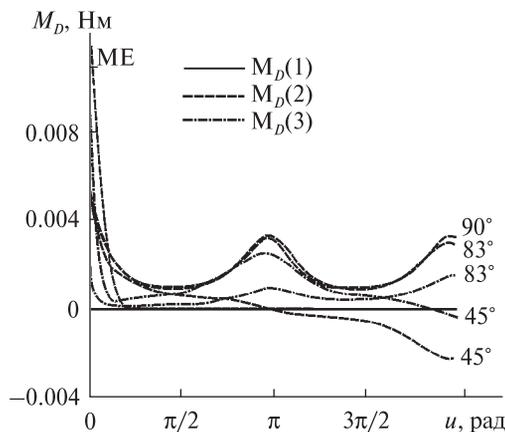


Рис. 9. Компоненты момента от МПЗ на орбитах с разным наклоном

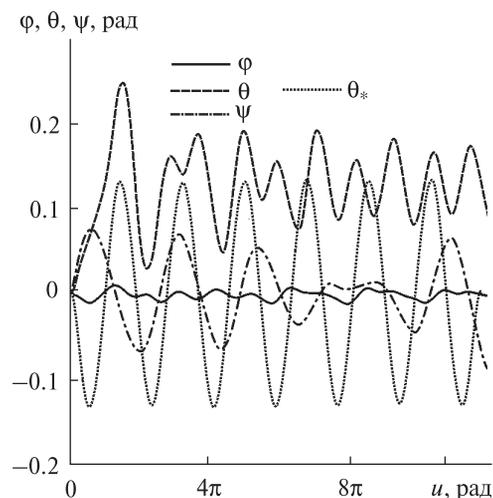


Рис. 10. Поведение углов ориентации КА с МД (кривые 1, 2, 3 — для  $\varphi, \theta, \psi$ ) и без МД (кривая 4 для  $\theta$ )

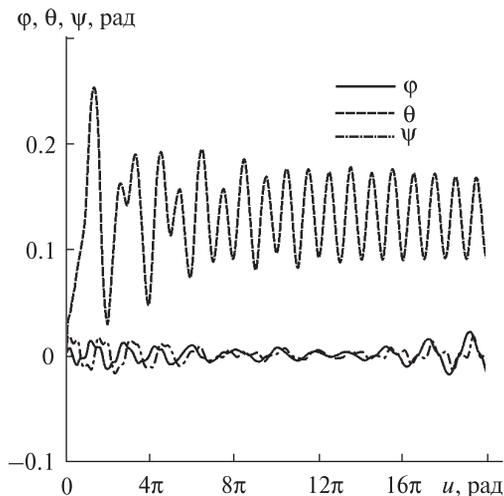


Рис. 11. Углы ориентации КА с МД и тангажным маховиком

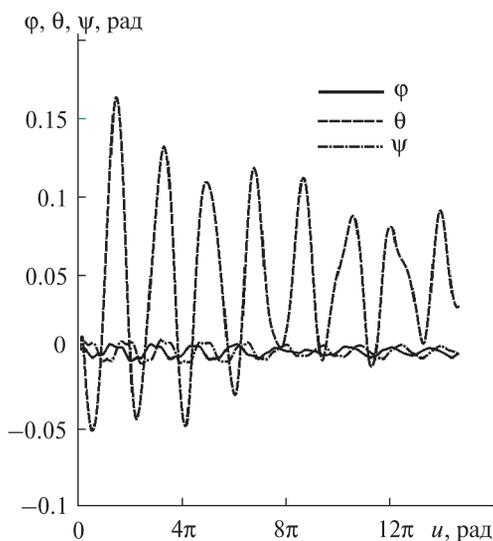


Рис. 12. Изменение углов ориентации КА при уменьшении коэффициента демпфирования

но, оси приборов, которые должны быть параллельны местной вертикали, следует наклонять в связанном с КА базисе на такой же угол, но в обратную сторону. В этом случае ошибка ориентации по тангажу будет определяться амплитудой установившихся колебаний. Из рис. 10 видно, что кроме тангажных колебаний при развертывании ГС и дальнейшем взаимодействии МД с МПЗ существенные колебания переменной амплитуды возникнут также по углам крена и курс-

са. Особенно существенными они будут по углу курса. При некоторых комбинациях параметров эти колебания могут перейти во вращение с переменной угловой скоростью, что может оказаться неприемлемым по условиям работы КА.

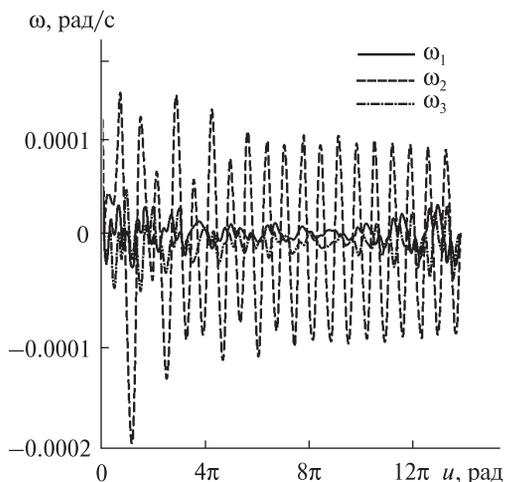
Удачным приемом по предотвращению такой ситуации является установка на КА маховика с постоянным кинетическим моментом, вектор которого параллелен оси тангажа. Из рис. 11 видно, как уменьшаются при этом амплитуды колебаний по углам крена и курса.

Следует отметить, что постоянная составляющая угла тангажа, а также амплитуда колебаний существенно зависит от величины магнитного момента МД и коэффициента демпфирования. Из рис. 12 видно, что уменьшение коэффициента демпфирования в три раза по сравнению со случаем, показанном на рис. 11, уменьшает как среднее значение, так и амплитуду колебаний вокруг оси тангажа. Это естественно сказывается и на амплитудах колебаний вокруг двух других осей. Исследования в этой области показали, что для минимизации помех ориентации параметры МД следует подбирать для каждой орбиты в зависимости от ее высоты.

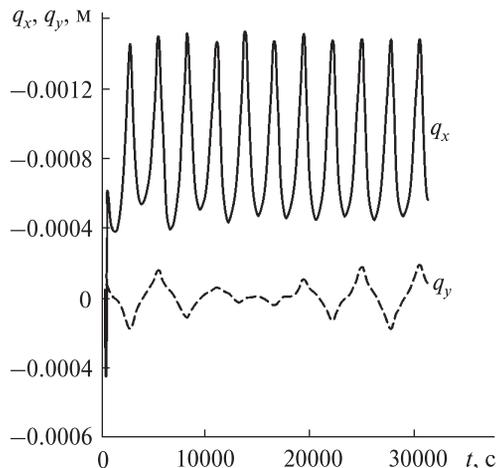
На рис. 13 приведены графики составляющих вектора угловой скорости КА относительно орбитального базиса для случая изменения углов ориентации, показанного на рис. 11. Нестационарность колебаний вызвана существенной неоднородностью МПЗ для таких орбит.

Отдельного внимания заслуживает изучение поведения упругого ГС и его взаимодействие с МД. На рис. 14 показано поведение обобщенных координат упругих перемещений ГС в случае развертывания ГС с предварительного стабилизированного КА без МД с использованием оптимального закона выдвигания, описанного выше. Амплитуда начального отклонения обобщенной координаты  $q_x$  зависит от изгибной жесткости стержня ГС и от длительности процесса развертывания. Видно, что изменения координаты  $q_x$  незначительны, а координата  $q_y$  вообще не изменяется.

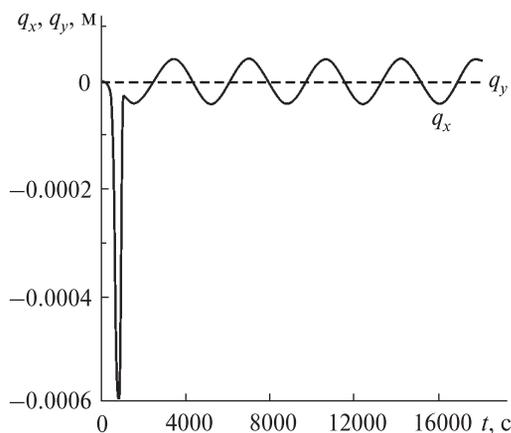
На рис. 15, который соответствует такому же КА, но с МД на конце ГС, картина существенно отличается. Внутреннее тело МД, которое



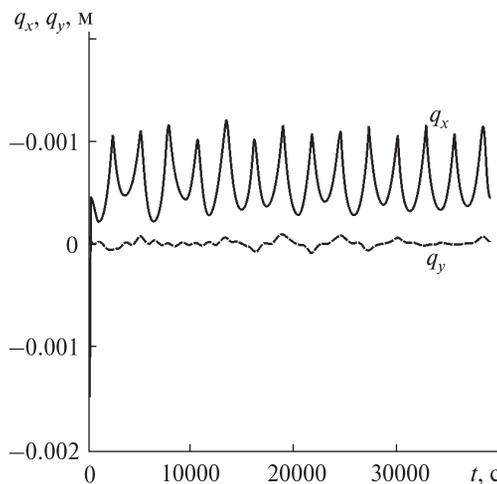
**Рис. 13.** Компоненты вектора угловой скорости КА относительно орбитального базиса для случая, показанного на рис. 11



**Рис. 15.** Поведение  $q_x, q_y$  при развертывании ГС со стабилизированного КА с МД



**Рис. 14.** Поведение  $q_x, q_y$  при развертывании ГС со стабилизированного КА без МД



**Рис. 16.** Снижение амплитуд  $q_x, q_y$  при снижении эффективности МД

вращается в корпусе, расположенном на конце упругого стержня ГС, добавляет к инерционным воздействиям, связанным с вращением КА, момент вязкого трения. Вектор этого момента не совпадает с плоскостью орбиты. Поэтому возникают отклонения не только по координате  $q_x$ , но и по координате  $q_y$ . Их нестационарность связана с неоднородностью МПЗ вдоль орбиты КА. Колебательный характер изменения обобщенных координат на этих рисунках не связан с собственными колебаниями упругого стержня ГС с массой на конце. Они являются в од-

ном случае (рис. 14) результатом собственных колебаний КА с присоединенным элементом в гравитационном поле сил, в другом (рис. 15) на такие колебания накладываются возмущения от вращения центрального тела МД в своем корпусе.

С уменьшением воздействия МД на упругий стержень, которое происходит при уменьшении коэффициента демпфирования или при уменьшении величины собственного магнитного момента центрального тела МД, амплитуды отклонений по обеим обобщенным координатам уменьшаются. Это видно на рис. 16. На рис. 17

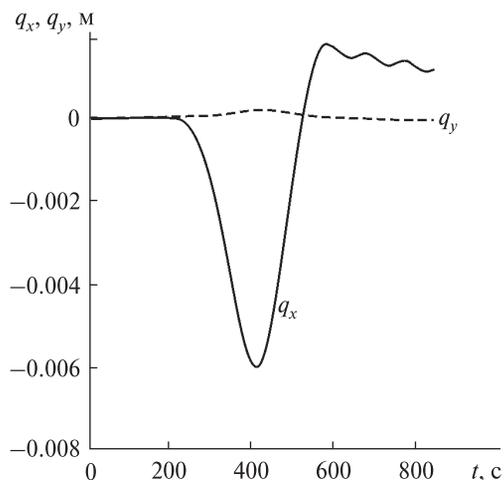


Рис. 17. Поведение  $q_x$ ,  $q_y$  на интервале времени развертывания ГС

показано поведения обобщенных координат  $q_x$ ,  $q_y$  на интервале времени развертывания ГС ( $T_0 = 200$  с,  $T_f = 600$  с). Для координаты  $q_x$  заметны собственные колебания стержня, которые достаточно быстро затухают под влиянием конструкционного демпфирования. На всех приведенных графиках видно, что среднее значение отклонения ГС в плоскости  $C_1xz$  отлично от нуля. Величина отклонения определяется величиной постоянной составляющей момента вязкого трения от МД. Следует также отметить, что переменная составляющая момента вязкого трения в некоторой степени способствует затуханию собственных колебаний стержня ГС. Однако проведенные исследования показали, что основную роль в этом процессе играет конструкционное демпфирование.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа связана с исследованием динамики гравитационно стабилизированного КА при развертывании упругого гравитационного стабилизатора с диссипацией энергии колебаний с помощью магнитного демпфера. Математическая модель, развитая для этого случая, может рассматриваться как обобщение теории системы упругих тел с конфигурацией, зависящей от времени. Подход может быть успешно расширен на моделирование динамики других развертываемых космических структур с существенным

изменением конфигурации в процессе их функционирования. У вычислительного пакета на языке ФОРТРАН, созданного для численного моделирования, есть общие особенности, которые могут быть легко использованы для других развертываемых систем. Полученные данные иллюстрируют метод математической формулировки динамики системы с программным изменением геометрии, так же как и поведение КА в течение и после развертывания гибких структур. Информация, которая была получена при численном моделировании, позволила сделать вывод о том, что развертывание и дальнейшее функционирование изученной конструкции может быть приемлемым для практики только при рациональном выборе параметров конструкции КА и закона развертывания. Полученные данные позволяют выбирать наиболее подходящий закон развертывания и параметры магнитного демпфера.

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973. — 320 с.
2. Иванова Г. А. Динамика космического аппарата с магнитно-гравитационной системой ориентации при наличии тепловых и упругих деформацией элементов конструкции: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 1991. — 150 с. — Машинопись.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.
4. Садов Ю. А. Периодические движения спутника с магнитным демпфером в плоскости круговой орбиты // Космич. исслед. — 1969. — 7, № 1. — С. 41–60.
5. Сарычев В. А., Овчинников М. Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли // Итоги науки и техн. / ВИНТИ. Исслед. космич. пространства. — 1985. — 23. — 104 с.
6. Соколов Л. В. Магнитный демпфер для системы гравитационной ориентации // Управление в пространстве: Тр. IV Междунар. симп. по автом. управл. в пространстве. — М.: Наука, 1973. — Т. 1. — С. 174–179.
7. Справочное руководство по небесной механике и астеродинамике. — М.: Наука, 1976. — 889 с.
8. Alper J. R., O'Neill J. P. A new passive hysteresis damping technique for stabilizing gravity-oriented satellites // J. Spacecraft and Rockets. — 1967. — 4, N 12. — P. 1617–1622.
9. Crespo da Silva Marcelo R. M. Non-linear resonant attitude motions in gravity-stabilized gyrostatt satellites // Int. J. Non-Linear Mech., 1972. — 7, N 6. — P. 621–641.

10. *Newton J. K., Farrell J. L.* Natural frequencies of a flexible gravity-gradient satellite // *J. Spacecraft and Rockets.* — 1968. — **5**, N 5. — P. 550—569.
11. *Zakrzhevskii A. E.* Spacecraft dynamics with regard to elastic pantograph deployment // *J. Spacecraft and Rockets.* — 2013. — **50**, N 2. — P. 475—480.

*Стаття надійшла до редакції 26.12.13*

*A. E. Zakrzhevskii, V. S. Khoroshilov*

**РОЗГОРТАННЯ ПРУЖНОГО ДОВГОВИМІРНОГО  
ЕЛЕМЕНТА НА КОСМІЧНОМУ АПАРАТІ  
З МАГНІТНИМ ЗАСПОКОЮВАЧЕМ**

Побудовано узагальнену математичну модель і здійснено комп'ютерне моделювання динаміки космічного апарата

з пасивною системою стабілізації, що несе тіло змінної геометрії, обумовленої розгортанням по заданій програмі компактно сформованої системи у пружний гравітаційний стабілізатор з магнітним демпфером на кінці.

*A. E. Zakrzhevskii, V. S. Khoroshilov*

**EXPANDING THE FLEXIBLE LONG  
ELEMENT ABOARD SPACECRAFT  
WITH THE MAGNETIC DAMPER**

A generalized mathematical model is derived and numerical simulation is carried out for studying the dynamics of the spacecraft with the passive stabilization system that contains the compact structure of changeable configuration, which is deploying under a prescribed program into the flexible gravitational stabilizer with the magnetic damper at its end.