ISSN 1561-8889. Космічна наука і технологія. 2014. Т. 20. № 1. С. 14–22.

УДК 534-8

Ю. П. Ладіков-Роєв, О. К. Черемних
Інститут космічних досліджень Національної академії наук України
та Державного космічного агентства України, Київ

ВПЛИВ ВИСОКОЧАСТОТНОЇ ВІБРАЦІЇ НА ЗМІНУ ФРОНТУ КРИСТАЛІЗАЦІЇ У ЦИЛІНДРИЧНІЙ АМПУЛІ БРИДЖМЕНА

Досліджено вплив високочастотної вібрації на стійкість фронту кристалізації в ампулі Бріджмена в умовах космічного експерименту. Знайдено можливий вид збурень фронту кристалізації.

ВСТУП

В умовах космічного експерименту практично немає гравітаційної конвекції, яка б впливала на стійкість фронту кристалізації і на якість одержуваних кристалів. Між тим, як показали космічні експерименти [2], фронт кристалізації в ампулі Бріджмена все ж викривлюється. Однією з причин цього є вібрація (мікроприскорення) космічного апарата [4, 6], через що задача дослідження впливу вібрації на процес кристалізації набуває великої ваги [9, 10].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

На рис. 1, *а* зображено схему установки кристалізації за методом Бріджмена [1, 5, 11]. Вона складається з двох циліндричних термостатів, температура одного з яких нижча (холодильник), а іншого — вища (нагрівач) за температуру плавлення T_c. Всередині термостатів знаходиться циліндрична ампула, заповнена речовиною. Завдяки відповідному вибору температур термостатів фронт кристалізації лежить в зазорі між холодильником і нагрівачем. В результаті частина речовини вище фронту кристалізації перебуває в рідкому стані, тобто у стані розплаву, де реалізуються конвективні течії [8], а також можуть генеруватися вихорові структури [3]. Процес вирощування кристалу здійснюється за рахунок одночасного переміщення обох термостатів вгору. При цьому швидкість руху термостатів дорівнює швидкості руху фронту кристалізації. Як правило, ця швидкість мала ($V < 10^{-6}$ м/с), тому усюди нижче фронт кристалізації будемо вважати нерухомим [11].

Під час процесу кристалізації реалізуються такі умови. Розплавлена речовина заповнює ампулу від верхнього торця до фронту кристалізації (див. рис. 1), температура на якому постійна і дорівнює температурі плавлення, і який будемо вважати плоским протягом усього часу кристалізації. Розплав цілком змочує стінки ампули. Температуру T_0 на верхньому торці ампули можна вважати постійною.

У незбуреному стані площина $z = 0$ є границею фазового переходу і має постійну температуру, що дорівнює температурі плавлення T_c. Уздовж осі z задано постійний градієнт температури

$$\frac{dT^*}{dz} = \frac{T_1 - T_c}{L} = \text{const}, \tag{1}$$

де T^* — температура рідкої фази. На незбуреній границі фазового переходу виконуються умови неперервності температури і теплового потоку:

$$T^*\big|_{z=0} = T_s^*\big|_{z=0} = T_c\,, \quad a\frac{\partial T^*}{\partial z}\bigg|_{z=0} = a_s \frac{\partial T_s^*}{\partial z}\bigg|_{z=0}, \tag{2}$$

де T_s^* — температура твердої фази, a і a_s — коефіцієнти теплопровідності рідкої і твердої фаз відповідно. З виразів (1) і (2) випливає, що у твердій фазі виконується співвідношення

$$\frac{dT_s^*}{dz} = \frac{T_1 - T_c}{L}\frac{a}{a_s}. \tag{3}$$

Система перебуває в однорідному полі сили тяжіння (у загальному випадку), а також піддається швидкій поступальній гармонійній вібрації з частотою ω, набагато більшою за характерну гідродинамічну частоту системи порядку a/L^2, тобто є справедливою умова

$$\frac{\omega L^2}{a} >> 1, \qquad (4)$$

де a — коефіцієнт температуропровідності рідкої фази.

У збуреному стані виконуються такі умови. На збуреному фронті кристалізації температура постійна і дорівнює температурі плавлення

$$T\big|_{z=\varepsilon Z(x,y,t)} = T_s\big|_{z=\varepsilon Z(x,y,t)} = T_c, \qquad (5)$$

де $z = \varepsilon Z(x,y,t)$ — збурення поверхні розділу фаз, $\varepsilon << 1$. На фазовій границі виконуються закони збереження маси і теплового потоку

$$(\vec{\nu}\cdot\vec{n})\big|_{z=\varepsilon Z(x,y,t)} = \frac{(\rho_0-\rho_s)}{\rho_0}D_n, \qquad (6)$$

$$(a_s\nabla T_s - a\nabla T)\cdot\vec{n}\big|_{z=\varepsilon Z(x,y,t)} = \rho_0 q_m D_n, \qquad (7)$$

де $\vec{\nu}$ — збурена швидкість, $\vec{n}$ — нормаль до поверхні розділу фаз, ρ_0 і T (ρ_s і T_s) — густина і збурена температура рідкої (твердої) фази, D_n — нормальна швидкість границі розділу фаз, q_m — питома теплота плавлення. Для швидкості $\vec{\nu}$ на твердих поверхнях задано умови прилипання:

$$(\vec{\nu}\times\vec{n})\big|_{z=\varepsilon Z(x,y,t)} = \vec{\nu}\big|_{z=L} = 0. \qquad (8)$$

Для опису конвективного руху, що виникає в рідкій фазі в результаті викликаної вібрацією втрати стійкості, будемо використовувати систему рівнянь Буссінеска, що у рухливій системі координат має вигляд [1, 5, 6]

$$\frac{\partial\vec{\nu}}{\partial t} + (\vec{\nu}\cdot\nabla)\vec{\nu} =$$

$$= -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu\Delta\vec{\nu} + g\beta T\vec{\gamma} - b\omega\sin(\omega t)\beta T\vec{k}, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nu}\cdot\nabla T = a\Delta T, \qquad (10)$$

$$\operatorname{div}\vec{\nu} = 0, \qquad (11)$$

де g — прискорення вільного падіння, $\vec{\gamma} = -\vec{g}/g$, p — тиск, $\beta = -(1/\rho_0)(\partial\rho_0/\partial T)$ — коефіцієнт термічного розширення, a — температуропровідність розплаву, $\vec{k}$ — одиничний вектор уздовж напрямку вібрації, b — амплітуда швидкості вібрації. Ми будемо припускати, що швидкість вібрації є скінченною, тобто

$$\frac{bR_0}{\nu} \approx 1. \qquad (12)$$

У розглянутому випадку високої частоти вібрації (див. умови (5)) у всіх змінних можна виділити пульсаційну швидкозмінний і «повільний» компоненти. Для цього виберемо за характерні значення довжини, швидкості, часу і темпера-

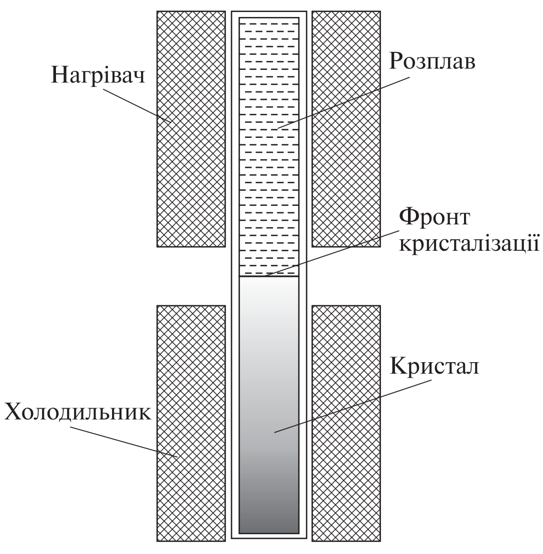

Рис. 1. Схематичне зображення установки кристалізації за методом Бріджмена

тури величини R_0, ν / R_0, a / R_0^2 і $\Theta = T_1 - T_c$ відповідно, і згідно із стандартною процедурою методу багатьох масштабів [5, 7] уведемо послідовність часів

$$t_- = t'/\mu, \quad t = t', \; t_1 = \mu t', \tag{13}$$

де $\mu = 1/\omega'$, а ω' і t' — безрозмірні частота вібрації і час. Будемо вважати уведені величини незалежними змінними функцій системи. Тоді похідна за часом від будь-якої функції часу $f(t)$ представляється у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial f}{\partial t_-} + \frac{\partial f}{\partial t_0} + \mu\frac{\partial f}{\partial t_1}. \tag{14}$$

Враховуючи (13) і (14), система рівнянь (9)—(11) для безрозмірних величин переписується у такий спосіб:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \vec{\nu}}{\partial t_-} + \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial t_0} + \mu\frac{\partial \vec{\nu}}{\partial t_1} + \mathrm{Pr}^{-1}(\vec{\nu}\cdot\nabla)\vec{\nu} =$$

$$= -\nabla p + \Delta\vec{\nu} + Ra\,T\vec{\gamma} - \frac{1}{\mu} b\beta\Theta T\vec{k}\sin(t_-), \tag{15}$$

$$\mathrm{Pr}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial T}{\partial t_-} + \frac{\partial T}{\partial t_0} + \mu\frac{\partial T}{\partial t_1}\right) + \vec{\nu}\cdot\nabla T = \Delta T, \tag{16}$$

$$\mathrm{div}\vec{\nu} = 0, \tag{17}$$

де $Ra = \beta g\Theta L^3/(a\nu)$ — число Релея, $\mathrm{Pr} = \nu / a$ — число Прандтля, а штрих біля безрозмірної амплітуди швидкості вібрації $b' = \dfrac{bR_0}{\nu}$ в (9) опущено.

Представимо змінні у вигляді розкладу по ступенях μ:

$$p = \mu^{-1}p + p_0 + \mu p_1 + \ldots,$$

$$\vec{\nu} = \vec{\nu}_0 + \mu\vec{\nu}_1 + \mu^2\vec{\nu}_2 + \ldots,$$

$$T = T_0 + \mu T_1 + \mu^2 T_2 + \ldots \tag{18}$$

Порядок членів розкладу, що враховуються, обумовлений умовою скінченності вібрації (див. умову (4) та (12). Підставляючи (18) у (15)—(17), в порядку розкладу по $1/\mu$ одержимо

$$-\frac{\partial \vec{\nu}_0}{\partial t_-} = \nabla p_- + b\beta\Theta T_0\vec{k}\sin t_-, \tag{19}$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t_-} = 0. \tag{20}$$

Представимо $\vec{\nu}_0$ й p_- у вигляді

$$\vec{\nu}_0 = b\vec{V}_0\cos t_- + \vec{u}_0, \quad p_- = bp_-\sin t_- + \tilde{p}_-, \tag{21}$$

де $\vec{u}_0$ і $\tilde{p}_-$ не залежать від t_-. Підставляючи (21) у (19), одержимо рівняння

$$\nabla p_- = \vec{V}_0 - \beta\Theta T_0\vec{k}. \tag{22}$$

У нульовому порядку розкладу будемо мати

$$\frac{\partial \vec{\nu}_1}{\partial t_-} + \frac{\partial \vec{\nu}_0}{\partial t_0} + (\vec{\nu}_0\cdot\nabla)\vec{\nu}_0 =$$

$$= -\nabla p_0 + \Delta\vec{\nu}_0 + Ra\,T_0\vec{\gamma} + b\beta\Theta T_1\vec{k}\sin t_-, \tag{23}$$

$$\mathrm{Pr}\left(\frac{\partial T_1}{\partial t_-} + \frac{\partial T_0}{\partial t_0}\right) + \vec{\nu}_0\cdot\nabla T_0 = \Delta T_0, \tag{24}$$

$$\mathrm{div}\vec{\nu} = 0. \tag{25}$$

Будемо шукати T_1 у вигляді

$$T_1 = -b\,\mathrm{Pr}^{-1}\sin t_-\vec{V}_0\cdot\nabla T_0 + \tilde{T}_1, \tag{26}$$

де $\tilde{T}_1$ не залежить від t_-. Підставляючи (21) і (26) у (24), одержимо

$$\mathrm{Pr}\frac{\partial T_0}{\partial t_0} + \vec{u}_0\cdot\nabla T_0 = \Delta T_0.$$

Представимо далі $\vec{\nu}_1$ і p_0 у вигляді

$$\vec{\nu}_1 = b\vec{V}_1\cos t_- + \vec{u}_1, \quad p_0 = bp_0\sin t_- + \tilde{p}_0, \tag{27}$$

де $\vec{u}_1$ і $\tilde{p}_0$ не залежать від t_-. Підставляючи (21), (26), (27) у (23) і усреднюючи по t_-, одержимо

$$\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial t} + (\vec{u}_0\cdot\nabla)\vec{u}_0 + \frac{b^2}{2}(\vec{V}_0\cdot\nabla)\vec{V}_0 =$$

$$= -\nabla\tilde{p}_0 + \Delta\vec{u}_0 + Ra\,T\vec{\gamma} + \frac{b^2\beta\Theta}{2\,\mathrm{Pr}}(\vec{V}_0\cdot\nabla T_0)\vec{k}.$$

У результаті система рівнянь, які визначають усереднений рух рідкої фази, набуває вигляду

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \frac{b^2}{2}(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} =$$

$$= -\nabla p + \Delta\vec{u} + Ra\,T\vec{\gamma} + \frac{b^2\beta\Theta}{2\,\mathrm{Pr}}(\vec{V}_0\cdot\nabla T)\vec{k}, \tag{28}$$

$$\mathrm{Pr}\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla T = \Delta T, \tag{29}$$

$$\mathrm{rot}(\vec{V} - \beta\Theta T\vec{k}) = 0, \tag{30}$$

$$\mathrm{div}\vec{u} = 0, \tag{31}$$

$$\mathrm{div}\vec{V} = 0, \tag{32}$$

де вирази (31) і (32) випливають з рівняння (11). У (28)—(32) індекс «0» біля змінних $\vec{u}, \vec{V}$ і T, а також тильда над змінною тиску опущені. Рівняння (28)—(32) потрібно доповнити рівнянням переносу тепла у твердій фазі

$$\mathrm{Pr}_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \Delta T_s\,, \tag{33}$$

де $\mathrm{Pr}_s = \nu / a_s$, a_s — коефіцієнт температуропровідності твердої фази. Таким чином, при зазначених вище умовах збурений стан системи описується рівняннями (28)—(33).

Представимо збурені величини у вигляді

$$\begin{gathered} \vec{u} = \varepsilon \vec{u}',\ \vec{V} = \vec{V}^* + \varepsilon \vec{V}', \\ T = T^* + \varepsilon T', \\ p = p + \varepsilon p', \\ T_s = T_s^* + \varepsilon T_s', \end{gathered} \tag{34}$$

де зірочкою позначено змінні у незбуреному стані. Підставляючи (34) у (28)—(33) і нехтуючи членами порядку ε^2, одержимо

$$\frac{b^2}{2}(\vec{V}^* \cdot \nabla)\vec{V}^* = -\nabla p^* + RaT^*\vec{\gamma} + \frac{b^2 \beta \Theta}{2\,\mathrm{Pr}}(\vec{V}^* \cdot \nabla T^*)\,, \tag{35}$$

$$\mathrm{rot}(\vec{V}^* - \beta\Theta T^* \vec{k}) = 0, \tag{36}$$

$$\mathrm{div}\vec{V}^* = 0\,, \tag{37}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{b^2}{2}[(\vec{V}^* \cdot \nabla)\vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}^*] = -\nabla p + \Delta \vec{u} + $$
$$+ RaT\vec{\gamma} + \frac{b^2 \beta\Theta}{2\,\mathrm{Pr}}[(\vec{V}^* \cdot \nabla T) + (\vec{V} \cdot \nabla T^*)^*]\vec{k}\,, \tag{38}$$

$$\mathrm{Pr}\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T^* = \Delta T, \tag{39}$$

$$\mathrm{rot}(\vec{V} - \beta\Theta T \vec{k}) = 0, \tag{40}$$

$$\mathrm{div}\vec{u} = 0, \tag{41}$$

$$\mathrm{div}\vec{V} = 0, \tag{42}$$

$$\mathrm{Pr}_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \Delta T_s. \tag{43}$$

Систему (38)—(43), (35)—(37) необхідно доповнити граничними умовами. На верхній і нижній нерухомих твердих границях маємо

$$\begin{gathered} T\big|_{z=l} = \vec{u}\big|_{z=l} = (\vec{V} \cdot \vec{n}_L)\big|_{z=l} = (\vec{V}^* \cdot \vec{n}_L)\big|_{z=l} = 0\,, \\ T_s\big|_{z=-l} = 0\,, \\ l = \frac{L}{R_0}\,, \end{gathered} \tag{44}$$

де $\vec{n}_L$ — нормаль до поверхні $z = l$. Для одержання граничних умов на фронті кристалізації розкладемо вирази (5)—(8) у ряд по малому параметру $\varepsilon Z(x, y, t)$ і підставимо в отриманий розклад співвідношення (34) та обмежимося членами порядку ε. Для безрозмірних змінних, з урахуванням (2), дістанемо

$$T\big|_{z=0} + \frac{\partial T^*}{\partial z}\bigg|_{z=0} Z = 0\,, \tag{45}$$

$$T_s\big|_{z=0} + \frac{\partial T_s^*}{\partial z}\bigg|_{z=0} Z = 0\,, \tag{46}$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{n}_0)\big|_{z=0} = (\vec{V} \cdot \vec{n}_0)\big|_{z=0} = \hat{r}\frac{\partial Z}{\partial t}\,, \tag{47}$$

$$\sigma\left(\frac{\partial T_s}{\partial z}\bigg|_{z=0} + \frac{\partial^2 T_s^*}{\partial z^2}\bigg|_{z=0} Z\right) - $$
$$-\left(\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2}\bigg|_{z=0} Z\right) = \Lambda\frac{\partial Z}{\partial t}, \tag{48}$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{n}_0)\big|_{z=0} = 0\,, \tag{49}$$

де $\sigma = a_s / a$, $\hat{r} = [\mathrm{Pr}(\rho_0 - \rho_s)] / \rho_0$, $\Lambda = (\nu\rho_0 q_m)/(\Theta a)$, $\vec{n}_0$ — нормаль незбуреної фазової границі.

СТІЙКІСТЬ ПОВЕРХНІ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДУ

Скориставшись викладеним методом швидких вібраційних впливів, дослідимо тепер їхній вплив на стійкість фронту кристалізації в ампулі Бріджмена. У циліндричній системі координат рівняння (28)—(33) мають вигляд

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + $$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}\,, \tag{50}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + $$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\,, \tag{51}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + $$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + RaT + Ra_\omega V_z\,, \tag{52}$$

$$\mathrm{Pr}\frac{\partial T}{\partial t} - u_z = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,, \tag{53}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (rV_\theta)}{\partial z} = \beta\Theta \frac{\partial T}{\partial \theta}, \qquad (54)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial r} = \beta\Theta \frac{\partial T}{\partial r}, \qquad (55)$$

$$\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = 0, \qquad (56)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \qquad (57)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0, \qquad (58)$$

$$\mathrm{Pr}_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_s}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_s}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2}. \qquad (59)$$

Їх необхідно доповнити граничними умовами

$$T\big|_{z=1} = u_r\big|_{z=1} = u_\theta\big|_{z=1} = u_z\big|_{z=1} = V_z\big|_{z=1} = 0,$$

$$T_s\big|_{z=-1} = 0, \qquad (60)$$

$$T\big|_{z=0} = -Z, \qquad (61)$$

$$T_s\big|_{z=0} = -Z, \qquad (62)$$

$$u_z\big|_{z=0} = V_z\big|_{z=0} = h\frac{\partial Z}{\partial t}, \qquad (63)$$

$$\sigma \frac{\partial T_s}{\partial z}\bigg|_{z=0} - \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \Lambda \frac{\partial Z}{\partial t}, \qquad (64)$$

$$u_r\big|_{z=0} = u_\theta\big|_{z=0} = 0, \qquad (65)$$

$$T\big|_{r=1} = u_r\big|_{r=1} = u_\theta\big|_{r=1} = u_z\big|_{r=1} = V_r\big|_{r=1} = 0, \qquad (66)$$

де $h = [\mathrm{Pr}(\rho_0 - \rho_s)]/\rho_0$, а σ і Λ — ті ж, що й у (48).

Нехай збурення фронту кристалізації задається виразом

$$Z(r,\theta,t) = \varsigma(r)\cos(n\theta)\exp(-\Omega t), \qquad (67)$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$. Розв'язок задачі (50)—(66) будемо шукати у вигляді

$$u_{r(z)} = u_{r(z)A}(r,z)\cos(n\theta)\exp(-\Omega t), \qquad (68)$$

$$u_\theta = u_{\theta A}(r,z)\sin(n\theta)\exp(-\Omega t), \qquad (69)$$

$$V_{r(z)} = V_{r(z)A}(r,z)\cos(n\theta)\exp(-\Omega t), \qquad (70)$$

$$V_\theta = u_{\theta A}(r,z)\sin(n\theta)\exp(-\Omega t), \qquad (71)$$

$$T_{(s)} = T_{(s)A}(r,z)\cos(n\theta)\exp(-\Omega t), \qquad (72)$$

де індексом A позначені амплітуди збурень. Підставляючи (70), (71) у (54)—(56), (58), одержимо

$$-nV_z + r\frac{\partial V_\theta}{\partial z} = -n\beta\Theta T, \qquad (73)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial r} = \beta\Theta\frac{\partial T}{\partial r}, \qquad (74)$$

$$\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r} + nV_r = 0, \qquad (75)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{nV_\theta}{r} = 0. \qquad (76)$$

Індекс A біля амплітуд тут і далі для зручності опущено. Розв'язуючи цю систему, будемо мати

$$V_z = T - \frac{r}{n}\frac{\partial V_\theta}{\partial z}, \qquad (77)$$

$$V_r = -\frac{1}{n}\frac{\partial (rV_\theta)}{\partial r}, \qquad (78)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(rV_\theta)_r = n\frac{\partial T}{\partial z}. \qquad (79)$$

Розглянемо рівняння (59). Підставляючи в нього вираз (68), одержимо

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_s}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} - \left(\mathrm{Pr}_s\,\Omega + \frac{n^2}{r^2}\right)T_s = 0. \qquad (80)$$

Будемо шукати T_s у вигляді

$$T_s(r,z) = I_s(z)\varsigma(r). \qquad (81)$$

Підставляючи (81) у (80) і розділяючи змінні, дістаємо два рівняння

$$\frac{\partial^2 I_s}{\partial z^2} - \tau^2 I_s = 0, \qquad (82)$$

$$r^2\varsigma'' + r\varsigma' + (\chi^2 r^2 - n^2)\varsigma = 0, \qquad (83)$$

де τ^2 — константа розділення, а $\chi^2 = \tau^2 - \mathrm{Pr}_s\,\Omega$. Легко бачити, що розв'язком рівняння (83) є функція Бесселя $J_n(\chi r)$. Оскільки в силу граничних умов $T_s\big|_{r=1} = 0$, то має виконуватися співвідношення

$$J(\chi) = 0. \qquad (84)$$

Звідси випливає, що

$$\varsigma(r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_n(\chi_k r), \qquad (85)$$

а загальний розв'язок рівняння (80) має вигляд

$$T_s(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k I_{sk}(z) J_n(\chi_k r),$$

де χ_k — k-й корінь рівняння (85), а C_k — деякі константи. $I_{sk}(z)$ повинні задовольняти рівняння (82). Звідси з урахуванням граничної умови при $z=-1$ випливає, що

$$I_{sk}(z)=\mathrm{sh}[\sqrt{\chi_k^2+\mathrm{Pr}_s\,\Omega}(z+1)],$$

звідки остаточно одержуємо

$$T_s(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\mathrm{sh}[\sqrt{\chi_k^2+\mathrm{Pr}_s\,\Omega}(z+1)]J_n(\chi_k r). \quad (86)$$

Підставимо вирази (68), (72) у рівняння (53), одержимо

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-\left(\mathrm{Pr}_s\,\Omega+\frac{n^2}{r^2}\right)T=-u_z. \quad (87)$$

Представимо T й u_z у вигляді

$$T(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k J_k(z)J_n(\chi_k r), \quad (88)$$

$$u_z=\sum_{k=1}^{\infty}C_k U_{zk}(z)J_n(\chi_k r). \quad (89)$$

Підставляючи вирази (88) і (89) у рівняння (87), одержимо

$$U_{zk}(z)=\left(\frac{d^2}{dz^2}-\chi_k^2-\mathrm{Pr}_s\,\Omega\right)I_k(z). \quad (90)$$

Повернемося до рівняння (79). Покладемо

$$rV_\theta=\sum_{k=1}^{\infty}C_k W_{\theta k}(z)J_n(\chi_k r). \quad (91)$$

Підставляючи (91) у (79), одержимо

$$\frac{\partial^2 W_{\theta k}}{\partial z^2}-\chi_k^2 W_{\theta k}=n\frac{dI_k}{dz}. \quad (92)$$

Будемо шукати $W_{\theta k}$ у вигляді

$$W_{\theta k}=A_1(z)e^{\chi_i z}+A_2(z)e^{-\chi_i z}. \quad (93)$$

Підставляючи (93) у рівняння (92), одержимо систему рівнянь для визначення $A_1(z)$ і $A_2(z)$:

$$\begin{cases}\chi_k(A_1' e^{\chi_k z}+A_2' e^{-\chi_k z})=n\dfrac{dI_k}{dz},\\ A_1' e^{\chi_k z}+A_2' e^{-\chi_k z}=0.\end{cases} \quad (94)$$

Розв'язуючи її, будемо мати

$$A_1'=\frac{ne^{-\chi_k z}}{2\chi_k}\frac{dI_k}{dz}, \quad A_2'=-\frac{ne^{\chi_k z}}{2\chi_k}\frac{dI_k}{dz}.$$

Звідси знаходимо

$$W_{\theta k}=\frac{n}{\chi_k}\int_0^z \mathrm{sh}[\chi_k(z-s)]\frac{dI_k}{dz}ds, \quad (95)$$

або остаточно

$$rV_\theta=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k n}{\chi_k}\int_0^z \mathrm{sh}[\chi_k(z-s)]\frac{dI_k}{dz}dsJ_n(\chi_k r). \quad (96)$$

Знаючи rV_θ, за допомогою співвідношень (77), (78) можна знайти V_z і V_r. Підставляючи (96) у (78), (79), дістанемо

$$V_z=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\left(I_k-\int_0^z \mathrm{ch}[\chi_k(z-s)]\frac{dI_k}{ds}ds\right)J_n(\chi_k r), \quad (97)$$

$$V_r=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\int_0^z \mathrm{sh}[\chi_k(z-s)]\frac{dI_k}{ds}dsJ_{n+1}(\chi_k r). \quad (98)$$

Підставимо тепер співвідношення (68), (69) у рівняння (50)—(52), (57). Одержимо систему рівнянь

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}=L(u_r)-\frac{1}{r^2}(u_r+2nu_\theta), \quad (99)$$

$$-\frac{np}{r}=L(u_\theta)-\frac{1}{r^2}(u_\theta+2nu_r), \quad (100)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=L(u_z)+RaT+Ra_\omega V_z, \quad (101)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}(u_r+nu_\theta)+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0, \quad (102)$$

де

$$L=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\left(\frac{n^2}{r^2}-\Omega\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Виключаючи із (99)—(101) тиск, ці рівняння можна переписати у такий спосіб

$$-\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial r}=\left[r\left(L(u_\theta)-\frac{1}{r^2}(u_\theta+2nu_r)\right)\right]=$$
$$=L(u_r)-\frac{1}{r^2}(u_r+2nu_\theta), \quad (103)$$

$$-\frac{r}{n}\frac{\partial}{\partial z}\left(L(u_\theta)-\frac{1}{r^2}(u_\theta+2nu_r)\right)=$$
$$=L(u_z)+RaT+Ra_\omega V_z. \quad (104)$$

Представимо далі u_r і u_θ у вигляді

$$u_r=\sum_{k=1}^{\infty}C_k U_{rk}(z)J_n(\chi_k r), \quad (105)$$

$$u_\theta=\sum_{k=1}^{\infty}C_k U_{\theta k}(z)J_n(\chi_k r). \quad (106)$$

Підставляючи (105), (106) у (102)—(104) і використовуючи рекурентні співвідношення для функцій Бесселя, з урахуванням (88)—(90), (97), а також граничних умов (60)—(66), ми одержимо замкнуту лінійну систему рівнянь відносно $U_{rk}(z)$, $U_{zk}(z)$, $U_{\theta k}(z)$, і $I_k(z)$, яку можна звести до одного звичайного диференціального рівняння восьмого порядку. Отримане рівняння призводить до однорідної системи з дев'яти лінійних алгебраїчних рівнянь, рівність нулеві детермінанта якої, а також характеристичне рівняння вихідного диференціального рівняння визначають залежність Ω від параметрів задачі. Проілюструємо сказане.

Розглянемо докладніше випадок осьової симетрії задачі. У цьому випадку у вихідних рівняннях необхідно покласти $n=0$ і $u_\theta=0$. Після цього система (99)—(102) набуває вигляду

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\Omega+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_r, \quad (107)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\Omega+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_z+RaT+Ra_\omega V_z, \quad (108)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0. \quad (109)$$

Визначимо u_r й u_z у такий спосіб:

$$u_r=\frac{U_r(z)}{\alpha J_0(\chi_1)}\left[J_0'(\chi_1 r)-rJ_0'(\chi_1)\right], \quad (110)$$

$$u_z=U_z(z)\left[\frac{J_0(\chi_1 r)}{J_0(\chi_1)}-1\right]. \quad (111)$$

Підставивши (110), (111) у (109), легко переконатися, що умова нестисливості задовольняється при

$$U_z'(z)=U_r(z), \quad (112)$$

$$2J_0'(\chi_1)+\alpha J_0(\chi_1)=0, \quad (113)$$

$$\alpha J_0'(\chi_1)+\frac{\alpha^2}{2}J_0(\chi_1)=0. \quad (114)$$

У випадку аксіальної симетрії система (73)—(76) буде мати вигляд

$$\frac{\partial V_z}{\partial r}-\frac{\partial V_r}{\partial r}=\beta\Theta\frac{\partial T}{\partial r}, \quad (115)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_r}{r}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0. \quad (116)$$

Будемо шукати V_r і V_z у вигляді

$$V_r=\frac{1}{k_1}J_0'(\chi_k r)W(z), \quad (117)$$

$$V_z=J_0(\chi_k r)W'(z), \quad (118)$$

де k_1 — перший корінь рівняння $J_1(k)=0$. Легко перевірити безпосередньою підстановкою, що вирази (117), (118) задовольняють умову нестисливості (116). Підставляючи (117), (118) і (88) у (115), одержимо рівняння

$$J_0(\chi_k r)[W''(z)-k_1^2W(z)]=$$
$$=k_1\sum_{k=1}^{\infty}C_kI_k(z)J_0'(\chi_k r). \quad (119)$$

Розкладаючи ліву частину рівняння в ряд Фур'є — Бесселя, будемо мати

$$\sum_{k=1}^{\infty}[W_k''(z)-k_1^2W_k(z)]J_0(\chi_k r)=$$
$$=k_1\sum_{k=1}^{\infty}C_kI_k(z)J_0'(\chi_k r), \quad (120)$$

де

$$W_k''(z)-k_1^2W_k(z)=$$
$$=\frac{2[W''(z)-k_1^2W(z)]}{J_1^2(\chi_k)}\int_0^1 rJ_0'(k_1 r)J_0(\chi_k r)dr. \quad (121)$$

З виразу (120) випливає, що

$$W_k''(z)-k_1^2W_k(z)=C_kI_k(z). \quad (122)$$

Звідси з урахуванням (97) і (118) одержимо

$$W_{zk}(z)=C_kk_1^2\int_0^z \mathrm{ch}[k_1(z-s)]I_k(s)ds+$$
$$+C_1e^{k_1z}+C_2e^{-k_1z}.$$

Константи C_1 і C_2 визначаються з граничних умов при $z=0$ і $z=1$.

Виключимо з рівнянь (107), (108) тиск, одержимо

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)-\Omega+\frac{\partial^2}{\partial z}\right]\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}-\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+$$
$$+Ra\frac{\partial T}{\partial r}+Ra\frac{\partial V_z}{\partial r}=0. \quad (123)$$

Помножимо це рівняння на r^2, щоб позбутися особливостей при $r=0$, після чого, використовуючи вирази для u_r, u_z, T, і V_z, розкладемо залежні від r функції у ряд Фур'є — Бесселя. Помноживши далі (123) на $rJ_0(\chi_k r)$ та інтегруючи від 0 до 1, ми одержимо рівняння виду

$$\sum_{m=1}^{4} B_m U_{zk}^{(4-m)}(z) + B_5 Ra I_k(z) + B_6 Ra_\omega W_k(z) = 0, \quad (124)$$

де B_m — коефіцієнти, що з'являються після інтегрування і залежать від Ω. Це рівняння необхідно доповнити співвідношеннями

$$W_k''(z) - k_1^2 W_k(z) = C_k I_k(z),$$
$$U_{zk}'(z) = I_k''(z) - \chi_k^2 I_k(z). \quad (125)$$

Рівняння (122), (124), (125) можна звести до одного рівняння восьмого порядку відносно $W_k(z)$:

$$\sum_{m=0}^{8} D_m W_k^{(8-m)}(z) = 0, \quad (126)$$

де коефіцієнти D_m залежать тепер також від Ra і Ra_ω. Розв'язуючи це рівняння, одержимо

$$W_k(z) = \sum_{m=0}^{8} K_m e^{\lambda_{8-m} z}, \quad (127)$$

де λ_m — корені характеристичного рівняння:

$$\sum_{m=0}^{8} D_m K_m \lambda^{(8-m)} = 0. \quad (128)$$

Граничні умови для U_{zk}, W_k і I_k мають вигляд

$$U_{zk}'(0) = U_{zk}'(1) = 0,$$
$$U_{zk}(0) = U_{zk}(1) = 0,$$
$$W_k(0) = W_k(1) = 0,$$
$$I_k(1) = 0,\ I_k(0) = I_{sk}(0), \quad (129)$$
$$\sigma I_{sk}'(0) - I_k'(0) = -\Omega\Lambda.$$

Звідси з урахуванням співвідношень (122), (125) ми одержимо дев'ять граничних умов стосовно W_k. Далі, аналогічно тому, як це робилося у попередньому розділі, підставивши вирази (127) у ці граничні умови, ми знову прийдемо до системи дев'яти однорідних лінійних рівнянь, з умови рівності нулеві детермінанта якої і характеристичного рівняння (128) можна буде визначити залежність Ω від параметрів задачі.

Таким чином, у випадку осьової симетрії збурення фронту кристалізації є суперпозицією збурень, що описуються функціями Бесселя нульового порядку $J_0(\chi_k r)$ з різними χ_k, де χ_k — k-й корінь рівняння $J_0(\chi r) = 0$. При відсутності осьової симетрії збурення фронту кристалізації будуть залежати також і від θ. Вони можуть бути представлені як суперпозиція функцій вигляду $J_0(\chi_k r)\cos(n\theta)$, де n — цілі числа. На рис. 2 показано вигляд збурень для різних значень χ_k і n. Як видно, комірчаста структура, що спостерігається у ряді космічних експериментів [2], виникає при досить великих k і n та відсутності осьової симетрії.

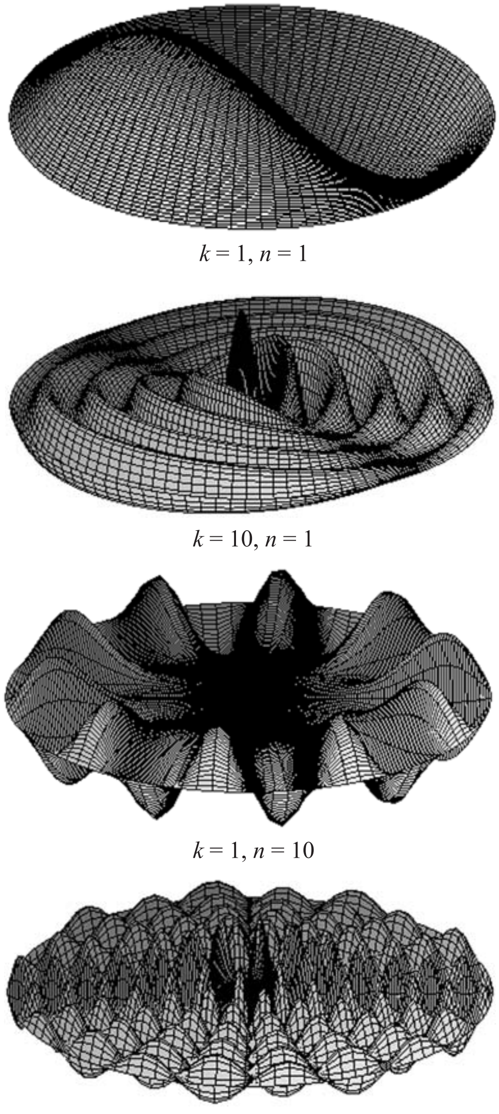

Рис. 2. Вигляд збурення фронту кристалізації при різних значеннях *k* і *n*

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено вплив високочастотної поступальної вібрації на стійкість поверхні розділу фаз кристал — рідина при спрямованій кристалізації розплаву бінарної суміші в ампулі Бріджмена в умовах космічного експерименту.

Отримано рівняння, що описують осереднений рух рідкої фази за наявності високочастотної вібрації. Розглянуто вплив високочастотної вібрації на стійкість поверхні розділу фаз в ампулі. Вихідну задачу зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Знайдено вигляд можливих збурень фронту кристалізації.

Роботу виконано в рамках Комплексної програми НАН України з космічних досліджень.

1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1972. — 296 с.
2. *Земсков В. С.* Новые научные представления о процессах, сопровождающих направленную кристаллизацию расплавов. Итог экспериментов по выращиванию кристаллов полупроводников на космических аппаратах // Механика невесомости. Итоги и перспективы фундаментальных исследований гравитационно-чувствительных систем: Сб. тр. VII Российского симп. (Москва 11—14 апреля 2000 г.). — М.: Ин-т проблем механики РАН, 2000. — С. 34—51.
3. *Ладиков-Роев Ю. П., Рабочий П. П., Черемных О. К.* О структуре конвективных течений в установке кристаллизации Бриджмена при больших числах Грассгофа // Прикладна гідромеханіка. — 2006. — **8**, № 2. — С. 57—63.
4. *Ладиков-Роев Ю. П., Рабочий П. П., Черемных О. К.* Влияние поступательной вибрации и равномерного вращения на процессы тепломассопереноса в расплаве вещества при выращивании кристаллов методом Бриджмена в условиях микрогравитации // Прикладна гідромеханіка. — 2007. — **9**, № 1. – С. 45—53.
5. *Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К.* Математические модели сплошных сред. — Киев: Наук. думка, 2010. — 552 с.
6. *Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А.* Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. — М.: Физматлит, 2003. — 215 с.
7. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984. — 365 с.
8. *Akimenko V. V., Cheremnykh O. K.* Modeling of vortical flows on the background of two-dimensional process of convective heat and mass transfer // J. Automation and Inform. Sci. — **36**, N 3. — P. 35—45.
9. *Fedoseyev A. I., Alexander J. I. D.* Investigation of vibrational control of convective flows in Bridgman melt growth configurations // J. Cryst. Growth. — 2000. — **211**. — P. 34—42.
10. *Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Meradji S., Roux B.* Vibrational control of crystal growth from liquid phase // J. Cryst. Growth. — 1997. — **180**. — P. 648—659.
11. *Salnikov N. N., Klimenko Yu. A., Ladikov-Roev Yu. P., Cheremnykh O. K.* On conditions of realization of flat interface in cylindrical ampule in Bridgeman setup // J. Automation and Inform. Sci. — 2003. — **35**, N 9. — P. 27—39.

Стаття надійшла до редакції 02.09.13

Ю. П. Ладиков-Роев, О. К. Черемных

ВЛИЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВИБРАЦИИ НА ИЗМЕНЕНИЕ ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АМПУЛЕ БРИДЖМЕНА

Исследуется влияние высокочастотной вибрации на устойчивость фронта кристаллизации в ампуле Бриджмена в условиях космического эксперимента. Найден возможный вид возмущений фронта кристаллизации.

Yu.P. Ladikov-Roev, O.K. Cheremnykh

INFLUENCE OF HIGH-FREQUENCY VIBRATION ON CRYSTALLIZATION SURFACE IN CYLINDRICAL BRIDGEMAN'S AMPULE

The influence of the high-frequency vibration on crystallization front stability in the space experimental conditions was investigated. The study was performed with the use of the vertical Bridgman method. A possible type of crystallization front perturbations was obtained.