ISSN 1561-8889. *Космічна наука і технологія. 2013. Т. 19. № 4. С. 57—64.*

УДК 533.951+551.590.21+550.385+551.510

С. О. Черемных

Інститут космічних досліджень Національної академії наук України
та Державного космічного агентства України, Київ

О ПОЛЯРИЗАЦИИ ПОПЕРЕЧНО-МЕЛКОМАСШТАБНЫХ МГД-МОД В МАГНИТОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Теоретически проанализированы поляризационные свойства поперечно-мелкомасштабных ультранизкочастотных собственных МГД-возмущений в дипольном магнитном поле. Получена система уравнений, описывающая альвеновские моды с промежуточной поляризацией. В предельных случаях тороидальных и полоидальных альвеновских мод эта система переходит в полученные ранее системы. Одно из полученных уравнений описывает баллонную неустойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

В рамках изучения ультранизкочастотных МГД-волн в магнитосфере Земли, наблюдаемых как с поверхности Земли в виде геомагнитных пульсаций [15], так и с космических аппаратов (КА) в виде квазипериодических вариаций магнитного поля [2], отдельный интерес представляет вопрос об их поляризации. Важность поляризации обусловлена несколькими факторами. Во-первых, это одна из немногих характеристик таких волн, достоверно измеряемых КА [2]. Во-вторых, волны с разной поляризацией имеют разные условия генерации, распространения и затухания [9]. В-третьих, от поляризации волны существенно зависит характер ее взаимодействия с ионосферой [10]. Кроме того, накопленные на сегодняшний день наблюдательные данные и теоретические представления указывают на возможность изменения типа волн [1, 4, 12] и их резонансного взаимодействия [2]. Эти эффекты также сильно зависят от поляризации.

В данной работе решена задача о поляризации поперечно-мелкомасштабных МГД-возмущений в дипольной конфигурации магнитного поля. Такая конфигурация неплохо описывает структуру магнитного поля во внутренней магнитосфере Земли, поэтому полученные результаты будут интерпретироваться с точки зрения МГД-волн в магнитосфере. Общий подход для описания МГД-мод в такой плазме был заложен в работе [8], результаты которой будут использованы ниже. В работах [1, 4, 12] был проведен предварительный анализ поляризационных свойств указанных возмущений, как теоретически, так и на основе анализа спутниковых измерений. В данной работе мы, следуя подходу работы [8], рассмотрим данную задачу более последовательно, чем это было сделано в работах [1, 4, 12], для которых она не являлась основной.

Для сокращения выкладок мы будем приводить все формулы в системе единиц Хевисайда — Лорентца, которая получается введением нормировки

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(\mathrm{CGS})} \big/ \sqrt{4\pi},$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(\mathrm{CGS})} \frac{\sqrt{4\pi}}{c},$$

где верхним индексом (CGS) обозначены единицы в системе единиц СГС. Эта система единиц удобна тем, что в ней все коэффициенты в уравнениях Максвелла равны единице.

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим статическое МГД-равновесие плазмы

$$\nabla p = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] \tag{1}$$

в дипольном магнитном поле с индукцией

$$\mathbf{B} = [\nabla\psi \times \nabla\phi], \quad (2)$$

где ψ — полоидальный магнитный поток [8], и тороидальным током $\mathbf{j}$

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{B} = 0\,,\ \ \mathbf{j}\cdot\nabla\psi = 0\,. \quad (3)$$

Из выражения (2) следует, что направления векторов $\nabla\psi$, $\nabla\phi$ и $\mathbf{B}$ являются ортогональными:

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\psi = 0 \quad (4)$$

и могут быть использованы в качестве локальной системы координат, введенной на любой магнитной поверхности. Разложим возмущённые величины, например вектор смещения элементарного объёма плазмы $\boldsymbol{\xi}$, по этим ортогональным векторам:

$$\boldsymbol{\xi} = \xi\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} + \eta\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} + \tau\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} =$$

$$= \xi\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} + \eta\frac{[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2} + \tau\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}. \quad (5)$$

Поскольку в состоянии статического равновесия смещений плазмы и электрического поля нет, то, приняв для возмущённых величин зависимость от времени в виде $\exp(-i\omega t)$, получаем уравнения малых колебаний в МГД-приближении:

$$\rho\omega^2\boldsymbol{\xi} = \nabla\delta p + [\mathbf{b}\times\mathbf{j}] + [\mathbf{B}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{b}]\,, \quad (6)$$

$$\nabla\delta p + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla p + \gamma p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} = 0\,, \quad (7)$$

$$\mathbf{b} = \mathrm{rot}[\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}]\,. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{j}$, $\mathbf{B}$ — равновесные плотность тока и вектор индукции магнитного поля, ρ и p — плотность и давление плазмы, δp — возмущение давления, $\mathbf{b}$ — возмущённое магнитное поле.

Выразив фигурирующие в (6)—(8) возмущенные величины через вектор $\boldsymbol{\xi}$, после некоторых математических преобразований [6], учитывающих геометрию магнитного поля, получим следующую систему уравнений для ультранизкочастотных МГД-возмущений:

$$\rho\frac{\omega^2}{|\nabla\psi|^2}\xi + \mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\nabla\psi|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\xi\right) +$$

$$+2(\delta P_1 + P'\xi + \gamma P\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi})\frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} = \frac{\nabla\psi\cdot\nabla\delta P_1}{|\nabla\psi|^2}\,, \quad (9)$$

$$\rho\frac{\omega^2}{\alpha_s}\eta + \mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\alpha_s}\mathbf{B}\cdot\nabla\eta\right) = \frac{\nabla\phi\cdot\nabla\delta P_1}{|\nabla\phi|^2}\,, \quad (10)$$

$$\rho\omega^2\tau + \gamma P\mathbf{B}\cdot\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} = 0\,. \quad (11)$$

Здесь δP_1 — возмущение полного давления плазмы

$$\delta P_1 = \delta P + \mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{B} =$$

$$= -\gamma P\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} - |\mathbf{B}|^2(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi}_\perp + 2\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}), \quad (12)$$

κ — вектор кривизны силовых линий магнитного поля, $\alpha_s = |\mathbf{B}|^2/|\nabla\psi|^2$, а штрих означает производную поперек магнитной поверхности, $(\cdot)' = d(\cdot)/d\psi$.

Уравнения (9)—(11) описывают МГД-возмущения идеальной плазмы в дипольном магнитном поле и не накладывают никаких ограничений на давление, ток и электромагнитное поле. С точностью до обозначений они совпадают с уравнениями работ [6, 8].

РЕДУКЦИЯ УРАВНЕНИЙ

Следуя работе [8], рассмотрим поперечно-мелкомасштабные возмущения, т. е. возмущения вида

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t) = \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t + i\chi(\mathbf{r})/\varepsilon)\,. \quad (13)$$

Здесь ε — малый параметр, описывающий поперечный масштаб возмущений, χ — эйконал, удовлетворяющий условию $\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{B} = 0$, где $\mathbf{k}_\perp = \nabla\chi$. Фигурирующие в (9)—(11) величины $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi}$ и δP_1 для возмущений типа (13) принимают вид

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} = \left[\frac{i}{\varepsilon}(\mathbf{k}_\perp\cdot\hat{\boldsymbol{\xi}}_\perp) + \mathrm{div}\,\hat{\boldsymbol{\xi}}\right]\exp(-i\omega t + i\chi(\mathbf{r})/\varepsilon)\,, \quad (14)$$

$$\delta P_1 = -\left[\frac{i}{\varepsilon}(\gamma P + |\mathbf{B}|^2)(\mathbf{k}_\perp\cdot\hat{\boldsymbol{\xi}}_\perp) + \delta\widehat{P}_1\right]\times$$

$$\times\exp(-i\omega t + i\chi(\mathbf{r})/\varepsilon), \quad (15)$$

$$\delta\widehat{P}_1 = \gamma P\,\mathrm{div}\,\hat{\boldsymbol{\xi}}_\perp + |\mathbf{B}|^2(\mathrm{div}\,\hat{\boldsymbol{\xi}}_\perp + 2\boldsymbol{\kappa}\cdot\hat{\boldsymbol{\xi}}_\perp)\,. \quad (16)$$

Подставляя (14)—(16) в (9)—(11), получаем

$$\rho\frac{\omega^2\hat{\xi}}{|\nabla\psi|^2} + \mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\nabla\psi|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\right) +$$

$$+2(-\delta P_1 + P'\hat{\xi} + \gamma P\mathrm{div}\hat{\boldsymbol{\xi}})\frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} =$$

$$= (\gamma P + |\mathbf{B}|^2) \frac{(\mathbf{k}_\perp \cdot \nabla\psi)}{|\nabla\psi|^2} \frac{(\mathbf{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp)}{\varepsilon^2} -$$

$$-\frac{\nabla\psi \cdot \nabla\delta P_1}{|\nabla\psi|^2} - 2(\gamma P + |\mathbf{B}|^2)(\mathbf{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp)(\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla\psi)] -$$

$$-\frac{i}{\varepsilon|\nabla\psi|^2}[(\mathbf{k}_\perp \cdot \nabla\psi)\delta\widehat{P}_1 +$$

$$+\nabla\psi \cdot \nabla[(\gamma P + |\mathbf{B}|^2) \cdot (\mathbf{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp)], \qquad (17)$$

$$\rho\frac{\omega^2}{\alpha_s}\hat{\eta} + \mathbf{B} \cdot \nabla\left(\frac{1}{\alpha_s}\mathbf{B} \cdot \nabla\hat{\eta}\right) =$$

$$= (\gamma P + |\mathbf{B}|^2) \frac{(\mathbf{k}_\perp \cdot [\mathbf{B} \times \nabla\psi])}{|\mathbf{B}|^2} \frac{(\mathbf{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp)}{\varepsilon^2} -$$

$$-\frac{[\mathbf{B} \times \nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2} \cdot \nabla\delta\widehat{P}_1 - \frac{i}{\varepsilon|\mathbf{B}|^2}[(\mathbf{k}_\perp \cdot [\mathbf{B} \times \nabla\psi])\delta\widehat{P}_1 +$$

$$+([\mathbf{B} \times \nabla\psi] \cdot \nabla)[(\gamma P + |\mathbf{B}|^2)(\mathbf{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp)]], \qquad (18)$$

$$\rho\omega^2\hat{\tau} + \gamma P\mathbf{B} \cdot \nabla \operatorname{div}\hat{\xi} = 0\,. \qquad (19)$$

Заметим, что в уравнениях (17), (18) есть слагаемые разного порядка малости. Поскольку частота колебаний должна быть существенно меньше гирочастоты ионов (иначе перестанет выполняться приближение МГД), то члены, содержащие ω^2, будут иметь нулевой порядок по ε. Поэтому большие слагаемые, пропорциональные ε^{-2} и ε^{-1}, необходимо в указанных уравнениях исключить, налагая на эйконал и возмущенные величины некоторые условия. Следует также отметить, что из тех же соображений применимости приближения МГД параметр ε не может быть слишком малым, чтобы поперечный масштаб возмущений не стал сравним с гирорадиусом ионов.

Приравнивая в (17), (18) слагаемые порядка $1/\varepsilon^2$ к нулю, получаем

$$\mathbf{k}_\perp \cdot \hat{\xi}_\perp = \hat{\xi}\frac{\mathbf{k}_\perp \cdot \nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} + \hat{\eta}\frac{\mathbf{k}_\perp \cdot [\mathbf{B} \times \nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2} = 0. \qquad (20)$$

Обращение в ноль слагаемых порядка $1/\varepsilon$ приводит к уравнению

$$\frac{\delta\widehat{P}_1}{|\mathbf{B}|^2} = \beta \operatorname{div}\hat{\xi} + \operatorname{div}\hat{\xi}_\perp + 2\boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\xi}_\perp = 0\,, \qquad (21)$$

которое мы перепишем в виде

$$\operatorname{div}\hat{\xi} = \frac{1}{1+\beta}\left[\mathbf{B} \cdot \nabla\left(\frac{\hat{\tau}}{|\mathbf{B}|^2}\right) - 2\xi\frac{\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right], \qquad (22)$$

где $\beta = \gamma P / |\mathbf{B}|^2$. Уравнение (22) описывает сжимаемость возмущений.

Оставшиеся в (9)—(11) члены порядка ε^0 приводят к уравнениям

$$\rho\frac{\omega^2\hat{\xi}}{|\nabla\psi|^2} + \mathbf{B} \cdot \nabla\left(\frac{1}{|\nabla\psi|^2}\mathbf{B} \cdot \nabla\hat{\xi}\right) +$$

$$+2(P'\hat{\xi} + \gamma P \operatorname{div}\hat{\xi})\frac{\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} = 0, \qquad (23)$$

$$\rho\frac{\omega^2}{\alpha_s}\hat{\eta} + \mathbf{B} \cdot \nabla\left(\frac{1}{\alpha_s}\mathbf{B} \cdot \nabla\hat{\eta}\right) = 0\,, \qquad (24)$$

$$\rho\omega^2\hat{\tau} + \gamma P\mathbf{B} \cdot \nabla \operatorname{div}\hat{\xi} = 0\,. \qquad (25)$$

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Как было показано в работе [4], направление вектора $\mathbf{k}_\perp$ совпадает с направлением возмущённого электрического поля волны. Следовательно, вектор $\mathbf{k}_\perp$ определяет поляризацию возмущений.

Положим в полученных уравнениях $\mathbf{k}_\perp \parallel \nabla\psi$. Тогда

$$\frac{\mathbf{k}_\perp \cdot [\mathbf{B} \times \nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2} = \frac{\mathbf{k}_\perp \cdot \nabla\phi}{|\nabla\phi|^2} = 0\,, \qquad (26)$$

откуда с учетом (12—16) получаем $\hat{\xi} = 0$, $\hat{\tau} = 0$, $\hat{\eta} \neq 0$, $\operatorname{div}\hat{\xi} = 0$. Амплитуда $\hat{\eta}$ удовлетворяет уравнению

$$\rho\frac{\omega^2}{\alpha_s}\hat{\eta} + \mathbf{B} \cdot \nabla\left(\frac{\mathbf{B} \cdot \nabla\hat{\eta}}{\alpha_s}\right) = 0\,, \qquad (27)$$

впервые приведенному в работе [6], и описывает тороидальные альвеновские моды.

Если же положить $\mathbf{k}_\perp \parallel [\mathbf{B} \times \nabla\psi]$, то

$$\frac{\mathbf{k}_\perp \cdot \nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} = 0\,. \qquad (28)$$

В этом случае $\hat{\eta} = 0$, $\hat{\xi} \neq 0$ и $\hat{\tau} \neq 0$, а амплитуды $\hat{\xi}$ и $\hat{\tau}$ удовлетворяют уравнениям

$$\rho\frac{\omega^2\hat{\xi}}{|\nabla\psi|^2} + \mathbf{B} \cdot \nabla\left(\frac{1}{|\nabla\psi|^2}\mathbf{B} \cdot \nabla\hat{\xi}\right) +$$

$$+2(P'\hat{\xi} + \gamma P \operatorname{div}\hat{\xi})\frac{\boldsymbol{\kappa} \cdot \nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} = 0\,, \qquad (29)$$

$$\rho\omega^2\hat{\tau}+\gamma P\mathbf{B}\cdot\nabla\,\mathrm{div}\,\hat{\xi}=0\,, \qquad (30)$$

$$\mathrm{div}\,\hat{\xi}=\frac{1}{1+\beta}\left[\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{|\mathbf{B}|^2}\right)-2\hat{\xi}\frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right] \qquad (31)$$

и описывают полоидальную компрессионную альвеновскую моду [8, 14].

Эти два предельных случая подробно рассматривались ранее в работе [8]. Более интересно рассмотреть случай, когда поперечное электрическое поле направлено под углом к магнитной поверхности. Это означает, что обе проекции вектора $\mathbf{k}_\perp$ как на тороидальное, так и полоидальное направления отличны от нуля:

$$\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2}\neq 0\,,$$

$$\frac{\boldsymbol{\kappa}_\perp\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\neq 0\,. \qquad (32)$$

В данном случае будут реализовываться смешанные моды [2].

Используя два равенства

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right)=0\,,$$

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2}\right)=0\,, \qquad (33)$$

вывод которых приведен в Приложении, и очевидное из них следствие

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi}{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}\alpha_s\right)=0\,, \qquad (34)$$

приведём уравнения (23), (24) к несколько иному виду. Умножив уравнение (23) на $\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi$, а уравнение (24) — на $\mathbf{k}_\perp\cdot\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]$ и сложив их, получим

$$(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\nabla\psi|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\right)+$$

$$+2(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)(P'\hat{\xi}+\gamma P\,\mathrm{div}\,\hat{\xi})\frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}-$$

$$-\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}{|\nabla\psi|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi}{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\right)=0\,. \qquad (35)$$

При получении (35) использовалось равенство

$$\frac{1}{\alpha_s}\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\eta}=-\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi}{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\,, \qquad (36)$$

вытекающее из (20) и (33). Последнее слагаемое в (35) преобразуем с учётом (34) следующим образом:

$$\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}{|\nabla\psi|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi}{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\right)=$$

$$=\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}{|\nabla\psi|^2}\alpha_s\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi}{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\alpha_s}\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\right)=$$

$$=(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)\left[\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\nabla\psi|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha_s}(\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi})\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\alpha_s}{|\nabla\psi|^2}\right)\right]. \qquad (37)$$

Подставляя (27) в (26), получаем искомое уравнение

$$2(P'\hat{\xi}+\gamma P\,\mathrm{div}\,\hat{\xi})\frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}+$$

$$+\frac{1}{\alpha_s}(\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi})\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\alpha_s}{|\nabla\psi|^2}\right)=0. \qquad (38)$$

Для получения второго уравнения перепишем уравнения (23) и (24) с учётом (36) в виде

$$\rho\frac{\omega^2\hat{\xi}}{|\nabla\psi|^2}+\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\nabla\psi|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\right)+$$

$$+2(P'\hat{\xi}+\gamma P\,\mathrm{div}\,\hat{\xi})\frac{\boldsymbol{\kappa}\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}=0, \qquad (39)$$

$$\rho\omega^2\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi}{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}\hat{\xi}+$$

$$+\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi}{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\right)=0. \qquad (40)$$

Умножив (40) на $\alpha_s(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)/(\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi])$ и сложив с (39), после простых алгебраических преобразований получаем второе уравнение:

$$\frac{\rho\omega^2\hat{\xi}}{|\nabla\psi|^2}\left[1+\left(\frac{(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)|\mathbf{B}|}{(\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi])}\right)^2\right]+$$

$$+\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\nabla\psi|^2}\left[1+\left(\frac{(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)|\mathbf{B}|}{(\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi])}\right)^2\right]\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\right)+$$

$$+2(P'\hat{\xi}+\gamma P\,\mathrm{div}\,\hat{\xi})\frac{\boldsymbol{\varkappa}\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}=0. \qquad (41)$$

Уравнения в виде (41) были получены в работах [1, 3, 12] и исследованы в работах [1, 4]. Если в уравнении (41) положить $(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)|\mathbf{B}|/(\mathbf{k}_\perp\times\times[\mathbf{B}\times\nabla\psi])^2\to 0$, то оно переходит в (29) и описывает полоидальные компрессионные альвеновские моды. В пределе $(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)|\mathbf{B}|/(\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi])^2\to\to\infty$ из (41) получаем уравнение

$$\rho\omega^2\hat{\xi}\alpha_s\frac{(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)^2}{(\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi])^2}+$$
$$+\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\alpha_s\frac{(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)^2}{(\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathrm{B}\times\nabla\psi])^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\right)=0, \qquad (42)$$

которое с помощью уравнений (20) и (36) приводится к уравнению (27) и описывает тороидальные альвеновские моды.

Таким образом, система уравнений (22), (25), (38), (42) справедлива для любых значений $\mathbf{k}_\perp$ и с учетом равенств (33), (34) описывает все возможные поперечно-мелкомасштабные моды в дипольной геометрии магнитного поля.

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ

Уравнение (41) с учётом (38) можно представить также в виде

$$\frac{\rho\omega^2\hat{\xi}}{|\nabla\psi|^2}\left[1+\left(\frac{(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)|\mathbf{B}|}{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}\right)^2\right]+$$
$$+\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\nabla\psi|^2}\left[1+\left(\frac{(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)|\mathbf{B}|}{\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}\right)^2\right]\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\right)-$$
$$-\frac{1}{\alpha_s}(\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi})\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\alpha_s}{|\nabla\psi|^2}\right)=0. \qquad (43)$$

Фигурирующая в этом уравнении величина $\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}$ связана с давлением и кривизной силовых линий уравнением (38). Поэтому уравнение (43) учитывает эффекты, квадратичные по давлению, и, таким образом, описывает баллонные возмущения [8, 11].

Если же в уравнении (38) положить давление равным нулю, то из (43) и (20) мы получим $\hat{\boldsymbol{\xi}}=0$, т. е. такие возмущения не реализуются.

Система (22), (25), (38), (42) содержит три неизвестные функции $\hat{\boldsymbol{\xi}}$, $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ и χ и три уравнения. Поэтому решение этой системы реализуется при определенных значениях χ. Ранее, например в работах [1, 4, 12], вопрос о влиянии поляризации на спектр возмущений рассматривался для произвольной функции χ. Это было обусловлено тем обстоятельством, что уравнение (38) в этих работах отсутствовало. Оно было получено в работе [7] как предельный случай с использованием довольно сложного математического аппарата. В данной работе это уравнение выведено для изначально заданного дипольного магнитного поля и с разъяснением всех тонкостей его получения для рассматриваемой геометрии магнитного поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован вопрос о генерации собственных поперечно-мелкомасштабных МГД-мод в магнитосферной плазме. Основная цель исследования состояла в получении и анализе системы уравнений, описывающих указанные возмущения и, в первую очередь, их поляризацию в рамках модели дипольного магнитного поля.

Получена система уравнений

$$\frac{\rho\omega^2\hat{\xi}}{|\nabla\psi|^2}\left[1+\left(\frac{(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)|\mathbf{B}|}{(\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi])}\right)^2\right]+$$
$$+\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\nabla\psi|^2}\left[1+\left(\frac{(\mathbf{k}_\perp\cdot\nabla\psi)|\mathbf{B}|}{(\mathbf{k}_\perp\cdot[\mathbf{B}\times\nabla\psi])}\right)^2\right]\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi}\right)+$$
$$\frac{2\left(P'\hat{\xi}+\gamma P\frac{1}{1+\beta}\left[\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\hat{\tau}}{|\mathbf{B}|^2}\right)-2\hat{\xi}\frac{\chi\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\right)}{|\nabla\psi|^2}\times$$
$$\times(\chi\cdot\nabla\psi)=0,$$

$$2\left\{P'\hat{\xi}+\gamma P\frac{1}{1+\beta}\left[\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\hat{\tau}}{|\mathbf{B}|^2}\right)-2\hat{\xi}\frac{\chi\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\right\}\frac{\chi\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}+$$
$$+\frac{1}{\alpha_s}(\mathbf{B}\cdot\nabla\hat{\xi})\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\alpha_s}{|\nabla\psi|^2}\right)=0,$$

$$\rho\omega^2\hat{\tau}+\gamma P\mathbf{B}\cdot\nabla\frac{1}{1+\beta}\left[\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\hat{\tau}}{|\mathbf{B}|^2}\right)-2\hat{\xi}\frac{\chi\cdot\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]=0,$$

описывающая альвеновские моды с промежуточной поляризацией. В предельных случаях тороидальных и полоидальных альвеновских мод эта система переходит в полученные ранее уравнение (27) и систему (29)—(31) соответственно.

Второе уравнение этой системы описывает баллонную неустойчивость.

Установлено, что в приближении холодной плазмы реализуются возмущения только с двумя поляризациями — полоидальные и тороидальные альвеновские моды.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для доказательства равенств (33) используем векторное уравнение

$$\mathbf{a}\cdot\nabla(\mathbf{b}\cdot\nabla c)=\mathbf{b}\cdot\nabla(\mathbf{a}\cdot\nabla c)+$$
$$+\nabla c\cdot(\mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b}-\mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}-\mathrm{rot}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}])\,, \qquad (\text{п. }1)$$

с помощью которого находим

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\mathbf{k}_\perp\cdot\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right)=\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\cdot\nabla(\mathbf{B}\cdot\mathbf{k}_\perp)+$$
$$+\mathbf{k}_\perp\cdot\left(\mathbf{B}\,\mathrm{div}\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}-\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\mathrm{div}\,\mathbf{B}-\right.$$
$$\left.-\mathrm{rot}\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\right)=-\mathbf{k}_\perp\cdot\mathrm{rot}\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]. \qquad (\text{п. }2)$$

При получении (п. 2) было учтено, что $\mathbf{k}_\perp=\nabla\chi$. Разложим вектор $\mathrm{rot}[\mathbf{B}\times\nabla\psi/|\nabla\psi|^2]$ по ортогональным направлениям $\nabla\psi$, $[\mathbf{B}\times\nabla\psi]$ и $\mathbf{B}$

$$\mathrm{rot}\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]=\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\left(\nabla\psi\cdot\mathrm{rot}\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\right)+$$
$$+\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\left(\mathbf{B}\cdot\mathrm{rot}\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\right)+$$
$$+\frac{[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2|\nabla\psi|^2}\left([\mathbf{B}\times\nabla\psi]\cdot\mathrm{rot}\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\right). \qquad (\text{п. }3)$$

Преобразуем слагаемые в правой части выражения, используя векторное равенство $\mathrm{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=$ $=\mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{b}$. В результате получаем

$$\mathrm{rot}\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]=$$
$$=\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\left(\mathrm{div}\left(\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\times\mathbf{B}\right)+\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\right)+$$
$$+\frac{[\mathbf{B}\times\nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2|\nabla\psi|^2}s+\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\mathrm{div}\left(\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\times\nabla\psi\right). \qquad (\text{п. }4)$$

Фигурирующая в (п. 4) величина s описывает эффект перекрещенности силовых линий магнитного поля — шир

$$s=[\mathbf{B}\times\nabla\psi]\cdot\mathrm{rot}\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]. \qquad (\text{п. }5)$$

Упростим выражение (п. 4) с помощью несложных векторных преобразований

$$\mathrm{div}\left(\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\times\nabla\psi\right)=$$
$$=\mathrm{div}\left(\mathbf{B}\left(\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\cdot\nabla\psi\right)-\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}(\mathbf{B}\cdot\nabla\psi)\right)=$$
$$\mathrm{div}\,\mathbf{B}=0, \qquad (\text{п. }6)$$

$$\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\mathrm{div}\left(\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\times\mathbf{B}\right)=$$
$$=\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\mathrm{div}\left(\mathbf{B}\left(\mathbf{B}\cdot\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right)-\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right)=$$
$$=\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right)=\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\mathrm{div}(\nabla\psi\alpha_s), \qquad (\text{п. }7)$$

$$\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\left(\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\right)=\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\left(\mathbf{j}\cdot\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]\right)=$$
$$=\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\left([\mathbf{j}\times\mathbf{B}]\cdot\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right)=\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}P'\,. \qquad (\text{п. }8)$$

Следовательно,

$$\mathrm{rot}\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]=\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]s+$$
$$+\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}(P'+\mathrm{div}(\alpha_s\cdot\nabla\psi)). \qquad (\text{п. }9)$$

Подставляя (п.9) в (п.2), находим

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\mathbf{k}_\perp\cdot\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right)=-\mathbf{k}_\perp\cdot\left[\mathbf{B}\times\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right]s. \qquad (\text{п. }10)$$

Покажем, что в рассматриваемой дипольной геометрии магнитного поля $s = 0$. Для этого используем выражение

$$\nabla\phi = \left[\mathbf{B} \times \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right], \qquad (\text{п. } 11)$$

следующее из (2). Подставив в (п. 11) выражение (п. 5) для шира s, убеждаемся, что последний обращается в ноль:

$$s = [\mathbf{B} \times \nabla\psi] \cdot \mathrm{rot}\left[\mathbf{B} \times \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|^2}\right] =$$

$$= |\nabla\psi|^2 \nabla\phi \cdot \mathrm{rot}(\nabla\phi) = 0. \qquad (\text{п. } 12)$$

Из (п. 12) и (п. 10) получаем первое уравнение в (33).

Для доказательства второго равенства в (33) используем, как и выше, уравнение (п. 1). Тогда из цепочки равенств

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\left(\frac{\mathbf{k}_\perp \cdot [\mathbf{B} \times \nabla\psi]}{|\nabla\psi|^2}\right) = \mathbf{k}_\perp \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \mathrm{div}\left(\frac{[\mathbf{B} \times \nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2}\right)\right) -$$

$$-\mathbf{k}_\perp\left(\frac{[\mathbf{B} \times \nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2}\mathrm{div}\,\mathbf{B}\right) -$$

$$-\mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{B} \times [\mathbf{B} \times \nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2}\right) \cdot \mathbf{k}_\perp +$$

$$+\frac{[\mathbf{B} \times \nabla\psi]}{|\nabla\psi|^2} \cdot \nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}_\perp) =$$

$$= -\mathbf{k}_\perp \cdot \mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{B} \times [\mathbf{B} \times \nabla\psi]}{|\mathbf{B}|^2}\right) =$$

$$= -\mathbf{k}_\perp \cdot \mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \nabla\psi)}{|\mathbf{B}|^2} - \frac{\nabla\psi(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{|\mathbf{B}|^2}\right) =$$

$$= \mathbf{k}_\perp \cdot \mathrm{rot}(\nabla\psi) = 0 \qquad (\text{п. } 13)$$

получаем указанное уравнение.

Автор выражает благодарность А. С. Парновскому за обсуждение результатов работы и помощь в их оформлении. Работа выполнена при поддержке ДФФД (грант № Ф53/177-2013).

1. *Агапитов А. В., Парновский А. С., Черемных О. К.* Спектр поперечно-мелкомасштабных возмущений во внутренней магнитосфере Земли // Кинематика и физика небес. тел. — 2006. — **22,** № 6. — С. 387—401.
2. *Агапитов А. В., Черемных О. К.* Поляризация резонансных УНЧ-возмущений в магнитосфере Земли // Кинематика и физика небес. тел. — 2011. — **27,** № 3. — С. 17—27.
3. *Мазур Н. Г., Федоров Е. Н., Пилипенко В. А.* Дисперсионное соотношение для баллонных мод и условие их устойчивости в околоземной плазме // Геомагнетизм и аэрономия. — 2012. — **52**, № 5. — С. 1—10.
4. *Парновский А. С., Черемных О. К.* Спектр баллонных возмущений с произвольной поляризацией во внутренней магнитосфере Земли // Космічна наука і технологія. — 2006. — **12, №** 1/2. — С. 49—56.
5. *Agapitov A. V., Cheremnykh O. K., Parnowski A. S.* Ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth: spectrum, stability and eigenmode analysis // Adv. Space Res. — 2008. — **41**, N 10. — P. 1682—1687.
6. *Cheng C. Z., Chang T. C., Lin C. A., Tsai W. H.* Magnetohydrodynamic theory of field line resonances in the magnetosphere // J. Geophys. Res. — 1993. — **98,** N A7. — P. 11339—11347.
7. *Cheremnykh O. K., Danilova V. V.* Transversal small-scale MHD perturbations in space plasma with magnetic surfaces // Kinematics and Physics of Celectial Bodies. — 2011. — **27**, N 2. — P. 98—108.
8. *Cheremnykh O. K., Parnowski A. S., Burdo O. S.* Ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth // Planet. Space Sci. — 2004. — **55**, N 13. — P. 1217—1229.
9. *Cheremnykh S. O., Agapitov O. V.* MHD waves in the plasma system with dipole magnetic field configuration // Adv. Astron. Space Phys. — 2012. — **2**. — P. 103—106.
10. *Hameiri E., Kivelson M. G.* Magnetospheric Waves and the Atmosphere-Ionosphere Layer // J. Geophys. Res. — 1991. — **96**, N A12. — P. 21125—21134.
11. *Hameiri E., Laurence P., Mond M.* The ballooning instability in space plasmas // J. Geophys. Res. — 1991. — **96**. — P. 1513—1518.
12. *Klimushkin D. Yu.* Theory of azimutally small-scale hydromagnetic waves in the axisymmetric magnetosphere with finite plasma pressure // Ann. geophys. — 1998. — **16**. — P. 303—321.
13. *Parnowski A. S.* Eigenmode analysis of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth // Ann. geophys. — 2007. — **25**, N 1. — P. 1391—1403.
14. *Pokhotelov O. A., Pilipenko V. A.* Drift anisotropy instability of finite-β // Planet. Space Sci. — 1985. — **33**. — P. 1229—1241.
15. *Stewart B.* On the great magnetic disturbance which extended from August 28 to September 7, 1859, as recorded by photography at the Kew Observatory // Phil. Trans. Roy. Soc. — 1861. — 151. — P. 423—430

Статья поступила в редакцию 26.07.13

С. О. Черемних

ПРО ПОЛЯРИЗАЦІЮ ПОПЕРЕЧНО-ДРІБНОМАСШТАБНИХ МГД-МОД У МАГНІТОСФЕРІ ЗЕМЛІ

Теоретично проаналізовано поляризаційні властивості поперечно-дрібномасштабних ультранизькочастотних власних МГД-збурень в дипольному магнітному полі. Отримано систему рівнянь, що описує альвенівські моди з проміжною поляризацією. У граничних випадках тороїдальних і полоїдальних альвенівських мод ця система переходить в отримані раніше системи. Одне з отриманих рівнянь описує балонну нестійкість.

S. O. Cheremnykh

ON THE POLARIZATION OF TRANSVERSALLY SMALL-SCALE MHD MODES IN THE EARTH'S MAGNETOSPHERE

We present a theoretical analysis of polarization properties of transversally small-scale ultra-low-frequency MHD eigenmode perturbations in the dipolar magnetic field. A set of equations is derived describing Alfvén modes with intermediate polarization. In the toroidal and poloidal limits the set of equations reduces to previously derived sets. One of the obtained equations describes the ballooning instability.