ISSN 1561-8889. *Космічна наука і технологія. 2011. Т. 17. № 6. С. 74—76.*

УДК 551.5

О. К. Черемных

Інститут космічних досліджень Національної академії наук України
та Національного космічного агентства України

РЕЗОНАНСНАЯ МОДА В ТЕРМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Показано, що в термосфері Землі реалізується власна резонансна мода з частотою $\omega_{Б-В} = (\gamma - 1)^{1/2} g / c_s$ *і поздовжньою довжиною хвилі* $\lambda = 2\pi c_s / \omega_{Б-В}$.

Данные измерений со спутника «Dynamic Explorer 2» (DE2) свидетельствуют о том, что в термосфере Земли на высоте около 300 км постоянно наблюдается собственная мода с выделенным периодом 10—11 мин, и выделенной длиной волны 520—550 км [3, 4]. Ниже показано, что наличие этой моды можно объяснить резонансом вертикальных и горизонтальных колебаний, распространяющихся параллельно поверхности Земли.

Рассмотрим сжимаемую изотермическую бездиссипативную атмосферу («термосферу») в невращающейся декартовой системе координат (*x, y, z*) с вертикальной координатой *z*, направленной вверх против силы тяжести. Гидродинамическую скорость среды считаем нулевой. Система уравнений, описывающая возмущения в атмосфере, включает уравнение движения

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p - \rho g \mathbf{e}_z , \qquad (1)$$

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{v} = 0 \qquad (2)$$

и уравнение адиабаты

$$\frac{dp}{dt} = c_s^2 \frac{d\rho}{dt} . \qquad (3)$$

Здесь ρ — плотность среды, p — давление, $\mathbf{v}$ — гидродинамическая скорость частиц среды, g — ускорение свободного падения, c_s — скорость звука. Атмосферу считаем в горизонтальной плоскости изотропной, и влиянием магнитного поля пренебрегаем. Эффекты, вносимые кривизной поверхности, в уравнениях (1)—(3) не учитываются, поскольку длины интересующих нас волн много меньше радиуса Земли.

Считаем, что газ стратифицирован барометрически, т. е. в равновесном состоянии он описывается уравнением статического равновесия

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0(z) g . \qquad (4)$$

Нижний индекс "0" относится к равновесным величинам. Подставляя в (4) уравнение состояния идеального газа $p_0 = \rho_0 R T_0$ и учитывая, что температура T_0 является величиной постоянной, получаем хорошо известный результат с экспоненциально убывающими профилями давления и плотности:

$$\frac{p_0(z)}{p_0(0)} = \frac{\rho_0(z)}{\rho_0(0)} = \exp\left(-\frac{z}{H}\right), \qquad (5)$$

$$c_s = \mathrm{const} , \; H = \frac{c_s^2}{\gamma g} = \frac{R T_0}{g} = \mathrm{const} ,$$

где γ — показатель адиабаты. Значение $z = 0$ соответствует нижней границе термосферы.

Волновые решения (1)—(3) ищем в комплексном фурье-представлении, следуя которому возмущенные величины (без нижнего индекса «0»), например скорость, запишем в виде

$$\mathbf{v} = (\widehat{v_x}\mathbf{e}_x + \widehat{v_z}\mathbf{e}_z)\exp\left(\frac{z}{h} + ik_x x\right). \quad (6)$$

Волновое число k_x в общем случае является комплексным, но мы налагаем условие отсутствия экспоненциального изменения амплитуд в горизонтальном направлении, т. е. k_x считаем действительной величиной. Возможным слагаемым $ik_y y$ в (6) мы пренебрегли, поскольку его можно устранить поворотом системы координат вокруг оси z. Слагаемое $ik_z z$ в (6) также отсутствует, поскольку мы считаем, что волны распространяются параллельно поверхности Земли (т. е. вдоль оси x). Свободный параметр h в выражении (6) характеризует изменение возмущенных величин в вертикальном направлении, т. е. их стратификацию.

Линеаризуя выражения (1)—(3), с учетом (4)—(6) получаем два дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + k_x^2 c_s^2\right)\hat{v}_x = ik_x\left(\frac{c_s^2}{h} - g\right)\hat{v}_z, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma\frac{g}{h} - \frac{c_s^2}{h^2}\right)\hat{v}_z = ik_x\left(\frac{c_s^2}{h} - g(\gamma-1)\right)\hat{v}_x. \quad (8)$$

Положим в этих уравнениях

$$h = h_0 \equiv \frac{c_s^2}{(\gamma-1)g}. \quad (9)$$

Правая часть (8) в этом случае обращается в ноль, а левая принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{\text{Б-В}}^2\right)\hat{v}_z = 0, \quad (10)$$

где $\omega_{\text{Б-В}}$ — частота Брента — Вяйсяля

$$\omega_{\text{Б-В}}^2 = (\gamma-1)\frac{g^2}{c_s^2}.$$

Из (10) следует, что элемент объема атмосферы испытывает свободные вертикальные колебания с частотой $\omega_{\text{Б-В}}$:

$$\hat{v}_z = A\mathrm{e}^{-i\omega_{\text{Б-В}}t} + B\mathrm{e}^{i\omega_{\text{Б-В}}t}. \quad (11)$$

Для реализации колебаний (11) необходимо, как обычно [5], проверить, чтобы плотность кинетической энергии вертикальных движений $\varepsilon = (1/2)\rho_0(z)v_z^2$ не увеличивалась при $z \to \infty$. Из (5), (6) и (9) получаем

$$\varepsilon \sim \exp[(\gamma-2)gz/c_s^2].$$

Поскольку $1 < \gamma < 2$ в рассматриваемой области атмосферы [1], то $\varepsilon \to 0$ при $z \to \infty$. Следовательно, колебания (11) могут свободно реализовываться в термосфере.

Уравнение (7) при $h = h_0$ сводится к неоднородному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + k_x^2 c_s^2\right)\hat{v}_x + ik_x g(\gamma-2)\hat{v}_z = 0 \quad (12)$$

и совпадает с уравнением колебаний с вынуждающей периодической силой, пропорциональной $\hat{v}_z$. Поэтому при анализе (12) можно использовать все результаты теории колебаний [2]. Подставляя (11) в (12), получаем

$$\hat{\upsilon}_x = C\mathrm{e}^{-i\omega_s t} + D\mathrm{e}^{i\omega_s t} + iA\frac{k_x g(\gamma-2)}{\omega_{\text{Б-В}}^2 - \omega_s^2}\mathrm{e}^{-i\omega_{\text{Б-В}}t} +$$
$$+ iB\frac{k_x g(\gamma-2)}{\omega_{\text{Б-В}}^2 - \omega_s^2}\mathrm{e}^{i\omega_{\text{Б-В}}t}, \quad (13)$$

где $\omega_s = k_x c_s$. Таким образом, элементарный объем атмосферы в направлении x совершает движение, представляющее собой совокупность двух колебаний — с собственной частотой ω_s и с вынужденной частотой $\omega_{Б-В}$. Видно, что при $\omega_{Б-В} = \omega_s$ имеет место резонанс, который реализуется для возмущений с длиной волны

$$\lambda_{x\,\text{рез}} = 2\pi\frac{c_s}{\omega_{\text{Б-В}}} = c_s T_{\text{Б-В}}. \quad (14)$$

Если учесть диссипацию среды, то в соответствии с результатами теории колебаний скорость v_x будет иметь конечное значение.

Приведем простые оценки. Для высот 250—300 км, где $\gamma \approx 1.6$, $g \approx 9.8$ м/с, $c_s \approx 840$ м/с, получаем $T_{\text{Б-В}} \approx$ 10.5 мин, $\lambda \approx$ 530 км. Легко видеть, что период и длина волны моды, наблюдаемой на DE2, неплохо согласуются с приведенными оценками. С учетом того обстоятельства, что наблюдаемая на DE2 мода [3, 4] является выделенной как по частотам, так и по длинам волн, можно заключить, что изложенный выше результат не противоречит наблюдательным данным.

Полученный здесь результат можно рассматривать как первый шаг в изучении резонансных явлений в атмосфере и ионосфере Земли. При дальнейших более глубоких исследованиях необходимо учитывать, в частности, неизотермичность среды, ее диссипацию, наличие внешних волновых источников, зацепление ионосферных волновых процессов с магнитосферными процессами, проанализировать возможность реализации резонансов при другой вертикальной стратификации возмущений. Необходимо также верифицировать результаты не только по данным с DE2, но и по данным с других спутников.

1. *Госсард Э., Хук У.* Волны в атмосфере. — М.: Мир, 1978. — 532 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. — М.: Наука, 1965. — 204 с.
3. *Федоренко А. К.* Спутниковые наблюдения среднемасштабных акустико-гравитационных волн над полярными шапками // Космічна наука і технологія. — 2008. — **14**, № 5. — С. 65—73.
4. *Федоренко А. К.* Энергетический баланс акустико-гравитационных волн над полярными шапками по данным спутниковых измерений // Геомагнетизм и аэрономия. — 2010. — **50**, № 1. — С. 111—122.
5. *Lamb H.* Hydrodynamics. — New York: Dover Publications, 1945. — 374 p.

Надійшла до редакції 11.11.11

O. K. Cheremnykh

RESONANT MODE
IN THE EARTH'S THERMOSPHERE

It is shown that a resonant eigenmode with the frequency $\omega_{\text{Б-В}} = (\gamma - 1)^{1/2} g / c_s$ and longitudinal wavelength $\lambda = 2\pi c_s / \omega_{\text{Б-В}}$ exists in the Earth's thermosphere.