

УДК 531.13

А. Е. Закржевский¹, В. С. Хорошилов²

¹Институт механики ім. С. П. Тимошенка Національної академії наук України, Київ

²Державне підприємство «Конструкторское бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля», Дніпропетровськ

ДИНАМИКА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ГИРОГРАВИТАЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ РАЗВЕРТЫВАНИИ УПРУГОЙ КОЛЬЦЕВОЙ АНТЕННЫ

Побудовано узагальнену математичну модель і проведено комп'ютерне моделювання динаміки стабілізованого космічного апарата, що несе пружне тіло змінної геометрії, обумовленої розгортанням за заданою програмою компактно сформованої системи в кільцевий пружний елемент типу антени.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных компонентов современных космических систем являются конструкции, создаваемые из элементов, поставляемых на орбиту в компактной форме. Космические аппараты (КА) с длинными гибкими антеннами для исследования физических полей Земли, с большими кольцевыми антеннами и гравитационно стабилизированный космический аппарат, который развертывает длинный упругий стержень с массой на конце, использовались начиная с конца пятидесятих годов предыдущего столетия. Есть большое количество исследований, посвященных развертыванию упругих элементов как с неподвижного основания, так и с вращающегося КА [6, 8, 10, 12, 15, 21], включая развертывание гравитационного стабилизатора [13, 16]. В этих работах были оценены максимальные изгибающие моменты и отклонения стержней при различных упрощающих предположениях, а также оптимальное время развертывания. В работе [11] исследуется динамика КА, стабилизированного вращением, в процессе развертывания длинного гибкого стержня. Были определены максимальные углы нутации и прецессии после развертывания и максимальные изгибающие моменты и

отклонения стержня. Уравнения движения были получены методом Лагранжа, и упругие степени свободы были дискретизированы на основе модального анализа. В работах [17, 17, 22] динамика развертываемых упругих элементов также описана в терминах модального анализа с формами собственных колебаний, зависящими от времени.

В несколько ином подходе к рассматриваемой задаче в работе [6] была представлена новая методика для описания динамики балки, которая развертывается из твердого вращающегося тела или втягивается в него. Суть метода состояла в моделировании балки как цепочки упруго соединенных твердых тел. Метод работал с уравнениями движения, линеаризованными в модальных координатах для элементов балки, расположенных вне несущего тела. В работах [5, 7] анализ был расширен для случая больших отклонений с формулировкой порядка- n для переменного числа тел. Результаты моделирования показали, что отклонения конца балки были очень чувствительны к скорости развертывания/свертывания, и что процесс втягивания менее устойчив, чем процесс развертывания. Было показано, что значение угловой скорости несущего тела существенно влияет на поведение балки.

Особое место среди больших конструкций, которые развертываются в космосе, принадле-

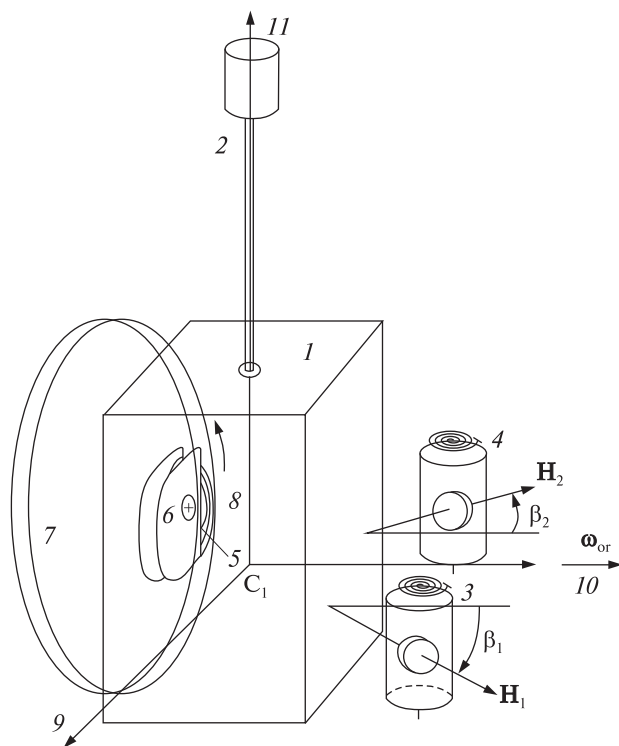


Рис. 1. Основные элементы космического аппарата: 1 — главный модуль КА, 2 — гравитационный стабилизатор, 3, 4 — гиродемпферы, 5 — лента, намотанная на барабан, 6 — корпус устройства развертывания, 7 — кольцо, которое будет сформировано из преднатянутой ленты, 8 — внешний конец ленты, 9 — направление полета, 10 — направление вдоль бинормали орбиты, 11 — местная вертикаль

жит связкам двух и более спутников, которые связаны тонкими длинными тросами. динамике связок посвящено много работ. Одна из самых важных операций во время полета связки — ее развертывание и свертывание. Здесь возможно упомянуть только отдельные работы по этой теме [9, 19, 20], посвященные аналитическому и численному изучению уравнений движения связок, имеющих целью оценить или создать законы управления их развертыванием. В работе [9] представлена стратегия оптимального управления натяжением развертываемого троса. Эта стратегия сравнивается со свободным развертыванием, а также с некоторыми другими известными стратегиями. В работе [20] описана стратегия оптимального управления, использующая

принцип максимума для достижения развертывания привязанного субспутника из положения равновесия относительно местной вертикали вблизи главного КА в положение равновесия относительно местной вертикали далеко от КА. В работе [19] был предложен закон оптимального управления, позволяющий перевести субспутник из положения равновесия относительно местной вертикали вдали от главного КА в такое же положение вблизи КА.

Только немногие из исследований, которые имеют дело с динамикой КА переменной конфигурации, принимают во внимание динамику механизма развертывания. Так, в работе [7] теоретически и экспериментально изучалось поперечное движение консольной фермы. Конструкция развертывалась из контейнера в горизонтальной плоскости и была подвешена к потолку здания, чтобы компенсировать силы тяжести.

Развертывание описанных элементов вносит значительные возмущения в динамику движения КА вокруг его центра масс. Описать эти возмущения простыми математическими моделями в рамках динамики систем тел невозможно. Работа [24] демонстрирует построение общей математической модели КА в процессе развертывания жесткого гравитационного стабилизатора по заданной программе. Динамика космического аппарата при развертывании упругого гравитационного стабилизатора изучена в работе [14].

ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

В данной работе изучена динамика КА, который содержит гиросгравитационную систему стабилизации, в процессе развертывания кольцевой антенны. КА выведен на круговую орбиту радиуса 6600 км. Он включает упругую предварительно напряженную ленту с памятью формы, развертываемую согласно заданной программе в гибкую круговую антенну в орбитальной плоскости. Динамика механизма развертывания также учитывается. Сматываясь с барабана, лента принимает форму упругого кольца 30 м в диаметре. Внешний конец ленты установлен близко к точке, где лента покидает барабан. Эта точка становится ближе к поверхности барабана по мере развертывания ленты. Рис. 1 показывает

схематично космический корабль с механизмом развертывания ленты и системой гирогравитационной стабилизации. Двухстепенные гироскопы установлены на гравитационно стабилизируемом КА для снижения амплитуд его колебаний вокруг центра масс.

МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Для случая развертывания упругой кольцевой антенны на орбите механическая модель может быть представлена как главное твердое тело S_1 и тело S_2 переменной конфигурации, присоединенное к нему (рис. 2).

Здесь \overline{CXYZ} — связанная с Землей инерциальная система координат с \overline{CY} вдоль оси вращения Земли, \overline{CZ} направлена в точку весеннего равноденствия, \overline{CX} дополняет ортогональную триаду. C_1xyz — связанная с главным телом система координат с началом в его центре масс C_1 , с C_1z вдоль направления оси гравитационного стабилизатора. Тело S_1 — гиростатическая часть системы, включающая гиродемпферы (ГД), которые не изменяют вращательную инерцию тела. Гиростабилизатор, вообще говоря, не гиростатический элемент, потому что его тензор инерции может изменяться при упругих колебаниях. Но факторы, которые могут вызвать его колебания, отсутствуют в рассматриваемом эксплуатационном режиме, так как развертывание антенны предполагается очень медленным. Тело S_2 — развертываемая часть системы с центром масс в точке C_2 . Оно не включает гиростатических компонентов. Движение тела S_1 определяется вектором скорости \mathbf{v}_{C_1} точки C_1 и вектором абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела S_1 . Радиус-вектор \mathbf{r} определяет положение произвольной точки P относительно инерциального базиса \overline{CXYZ} , а радиус-вектор \mathbf{r}' — относительно базиса C_1xyz , связанного с главным телом. В отличие от задачи динамики относительного движения носимых тел, описанных Лурье [4], здесь рассматривается более общий случай. Выражение для \mathbf{r}' зависит от времени t явно, а не только через обобщенные координаты:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}'_i(q_1, \dots, q_N, t), \quad (1)$$

поскольку развертывание ленты происходит в

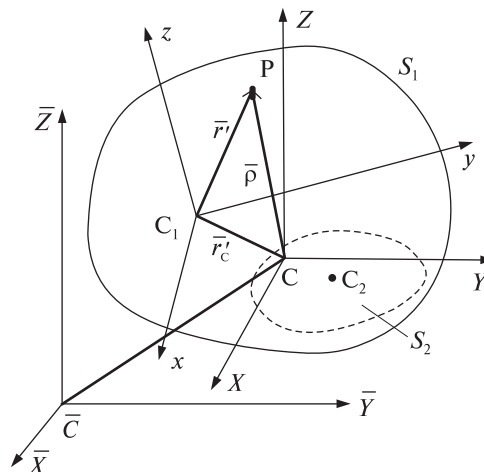


Рис. 2. Обобщенная механическая модель КА, содержащего элементы изменяемой конфигурации (см. текст)

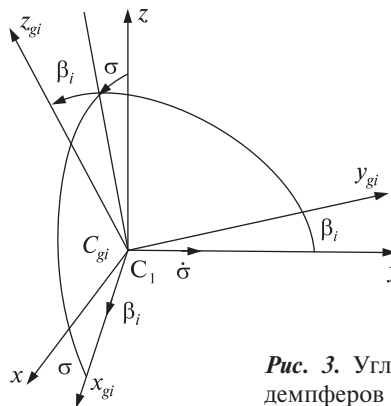


Рис. 3. Углы ориентации гиродемпферов

соответствии с предписанным законом. В результате \mathbf{r}' изменяется во времени в процессе развертывания, даже когда величины обобщенных координат, которые определяют относительное упругое движение кольца, являются нулевыми.

Так как развертывание по предположению является достаточно медленным, кольцевая антенна может быть моделирована на основе классического модального анализа, но модальные функции в некоторых случаях можно рассматривать как пространственные переменные с временной зависимостью [14]. Далее в качестве обобщенных координат, которые определяют относительное движение системы, выбраны относительные отклонения по двум формам колебаний

упругого кольца, закрепленного в одной точке, в ее плоскости и по его двум формам колебаний по нормали к плоскости. Углы вращения β_i ($i = 1, 2$) систем координат $C_{gi}x_{gi}y_{gi}z_{gi}$ ГД, которые показаны на рис. 3, также следует рассматривать как дополнительные обобщенные координаты. Оси роторов ГД направлены вдоль осей $C_{gi}y_{gi}$.

Барабан с лентой будем рассматривать как маховик с переменным моментом инерции. Тело S_2 с его центром масс C_2 перемещается относительно C_1 и имеет переменный тензор инерции.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Уравнения движения рассматриваемой системы становятся наиболее компактными и удобными для численного интегрирования (и для угловых, и для относительных движений), если выбрать в качестве полюса мгновенное положение центра масс C . В этом случае кинетическая энергия может быть представлена в форме

$$T_{S_1+S_2} = \frac{1}{2} \int_m v_i^2 dm = \frac{1}{2} \int_m (\mathbf{v}_C + \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2 dm = \frac{1}{2} \int_m [v_C^2 + \dot{\boldsymbol{\rho}}^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2 + 2\mathbf{v}_C \dot{\boldsymbol{\rho}} + 2\mathbf{v}_C (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + 2\dot{\boldsymbol{\rho}} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] dm, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор произвольной точки системы относительно мгновенного положения центра масс C .

После интегрирования кинетическая энергия всей системы равна

$$T = \frac{M}{2} \mathbf{v}_C^2 + T_r^{C_1} - \frac{M}{2} \dot{\mathbf{r}}_C^{*2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_r^C. \quad (3)$$

Здесь M — полная масса системы, \mathbf{v}_C — абсолютная скорость центра масс, $T_r^{C_1}$ — кинетическая энергия относительного движения несомых тел, вычисленная при условии определения относительных скоростей их точек относительно C_1 . Легко показать, что если вычислить относительные скорости указанных точек относительно мгновенного положения центра масс C , выражение (3) преобразуется к более простой форме:

$$T = \frac{M}{2} \mathbf{v}_C^2 + T_r^C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_r^C.$$

Заметим, что хотя кинетическая энергия относительного движения — скаляр, для ее правиль-

ного вычисления необходимо указывать полюс, выбранный для определения относительных скоростей.

Применение оператора Эйлера $E_j(\cdot) = \frac{d}{dt} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(\cdot)}{\partial q_j}$ к выражению (3) приводит к уравнениям Лагранжа 2-го рода для обобщенных координат q_s следующего вида:

$$E_s(T_r^{C_1}) - M \dot{\mathbf{r}}_C^{*'} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C'}{\partial q_s} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Theta}^C}{\partial q_s} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\partial \mathbf{K}_r^C}{\partial \dot{q}_s} + \boldsymbol{\omega} \cdot E_s^*(\mathbf{K}_r^C) = Q_s, \quad (4)$$

где $E_j^*(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(\cdot)}{\partial q_j}$ — также оператор Эйлера, но дифференцирование по времени проводится здесь в связанном базисе, Q_s — обобщенные силы, которые учитывают упругие и диссипативные свойства конструкции.

Важно отметить, что член $E_s^*(\mathbf{K}_r^C)$ не приводится к виду $-2 \frac{\partial \mathbf{K}_r^C}{\partial q_s}$, как это показано в работе [4], так как случай, который рассматривается здесь, является более общим случаем нестационарных связей (см. выражение (1)).

Здесь используются следующие обозначения: $\boldsymbol{\Theta}^C$ — тензор инерции всей системы относительно точки C , $\mathbf{K}_r^C = \int_m \mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{r}}' dm - M \mathbf{r}_C' \times \dot{\mathbf{r}}_C'$ — относительный кинетический момент разворачиваемой части относительно точки C , \mathbf{r}_C' — радиус-вектор мгновенного положения центра масс C в связанном базисе, звездочка над переменной обозначает дифференцирование по времени в связанном базисе.

Уравнение Эйлера — Лагранжа в векторной форме может быть получено достаточно просто, если использовать теорему изменения кинетического момента системы в целом. Полный кинетический момент системы имеет вид

$$\mathbf{K}^C = \boldsymbol{\Theta}^C \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_r^C. \quad (5)$$

В результате применения указанной теоремы уравнение движения вокруг центра масс может быть получено в форме

$$\Theta^C \cdot \dot{\omega} + \dot{\Theta}^C \cdot \omega + \omega \times (\Theta^C \cdot \omega) + \mathbf{K}_r^C + \omega \times \mathbf{K}_r^C = \mathbf{m}^C, \quad (6)$$

которая совпадает с известным уравнением [4].

Если дополнить уравнения (4), (6) кинематическими уравнениями, можно получить замкнутую систему уравнений движения. Теперь можно сформулировать задачу Коши и исследовать поведение космического аппарата во время, когда его геометрия изменяется.

При постановке задачи могут быть полезными две системы отсчета (рис. 4). Система C_1xyz , как и выше, является системой отсчета, связанной с гиростатической частью КА. Система $Sx^{or}y^{or}z^{or}$ связана с центром масс всего КА. Эта система координат определяется традиционным способом [1]: ось Sx^{or} направлена вдоль вектора скорости КА, Sy^{or} — вдоль бинормали орбиты и Sz^{or} — вдоль местной вертикали. Угол Ω — долгота восходящего узла от точки весеннего равноденствия, i — наклон орбиты, u — аргумент долготы, ω^{or} — вектор орбитальной угловой скорости.

Пренебрегая прецессией орбиты, можно считать, что абсолютная угловая скорость орбитального базиса равна ω^{or} . В качестве кинематических параметров, которые определяют ориентацию главного тела в орбитальном базисе, рассматриваются параметры Родрига — Гамильтона, чтобы исключить возможные особенности в кинематических уравнениях КА в процессе моделирования. Эти уравнения могут быть записаны в скалярной форме следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\tilde{\omega}_1\lambda_1 - \tilde{\omega}_2\lambda_2 - \tilde{\omega}_3\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \tilde{\omega}_1\lambda_0 + \tilde{\omega}_3\lambda_2 - \tilde{\omega}_2\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \tilde{\omega}_2\lambda_0 + \tilde{\omega}_1\lambda_3 - \tilde{\omega}_3\lambda_1, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \tilde{\omega}_3\lambda_0 + \tilde{\omega}_2\lambda_1 - \tilde{\omega}_1\lambda_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — компоненты кватерниона, которые определяют положение связанного базиса в орбитальном, $\tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega'_{oi}$ ($i=1, 2, 3$), ω_i — проекции вектора абсолютной угловой скорости главного тела на оси связанного базиса, ω'_{oi} — проекции вектора угловой скорости на те же оси. Поскольку орбитальная угловая скорость коллинеарна оси Sy^{or} , ее проекции на оси базиса, связанного с КА, определяются матрицей соответствующих направляющих косинусов, запи-

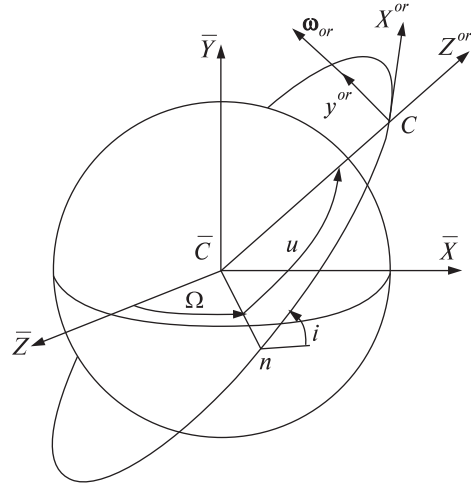


Рис. 4. Системы координат, определяющих положение КА

санных в компонентах кватерниона [4]. Это выглядит как

$$\begin{aligned} \omega'_{o1} &= 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)\omega_o, \\ \omega'_{o2} &= (\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2)\omega_o, \\ \omega'_{o3} &= 2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)\omega_o. \end{aligned} \quad (8)$$

В процессе численного интегрирования уравнений (4), (6), (7) должно быть учтено условие $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, чтобы корректировать норму кватерниона [2].

ГЕОМЕТРИЯ ЛЕНТЫ

Геометрия ленты в кольце и в устройстве разворачивания показана на рис. 6. Здесь C_1xyz — связанный базис главного тела, O' — центр кольца переменного радиуса r_k . Можно рассматривать центральную линию ленты, намотанной на барабан, как правую спираль Архимеда $\rho = \frac{\delta}{2\pi}\varphi_k$, $\varphi_k \in [0, \Phi]$, где δ — толщина ленты. Часть этой спирали, для которой $\varphi_k \in [0, \varphi_B]$, формирует тело барабана (на рис. 6 эта область серая, и спираль в ней показана пунктиром). Собственно лента до начала разворачивания соответствует значениям $\varphi_k \in [\varphi_B, \Phi]$. Точка A — это точка, где лента покидает барабан, и одновременно это точка фиксации свободного конца ленты. Точка G является произвольной точкой спирали. В начальный момент времени вся лента намотана на

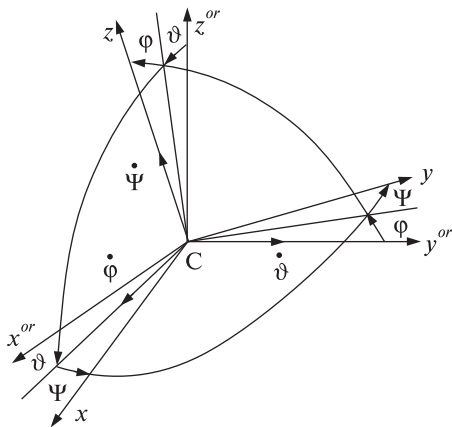


Рис. 5. Ориентация связанного базиса в орбитальном

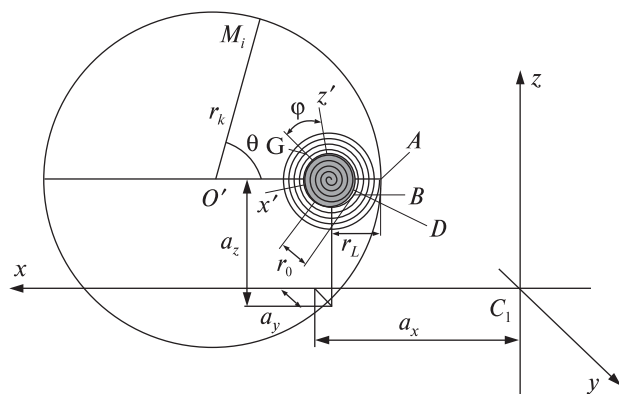


Рис. 6. Схема устройства для развертывания кольцевой антенны (см. текст)

барабан, и каждая точка ее срединной поверхности лежит на спирали. Точка *B* является началом ленты на барабане. Ей соответствует угловая координата спирали φ_B . Если r_0 — расстояние от точки *B* до центра барабана *D*, то $\varphi_B = 2\pi r_0 / \delta$.

Длина спирали, занятой барабаном, равна

$$L_{DB} = \frac{\delta}{4\pi} \left[\varphi_B \sqrt{1 + \varphi_B^2} + \ln(\varphi_B + \sqrt{1 + \varphi_B^2}) \right]. \quad (9)$$

В начальный момент точка *A* находится на конце спирали. Значение φ_A может быть найдено численно по известной полной длине ленты, образующей кольцевую антенну в конце развертывания из условия

$$L_{AB} = \frac{\delta}{4\pi} \left[\varphi_A \sqrt{1 + \varphi_A^2} + \ln(\varphi_A + \sqrt{1 + \varphi_A^2}) \right] -$$

$$- \frac{\delta}{4\pi} \left[\varphi_B \sqrt{1 + \varphi_B^2} + \ln(\varphi_B + \sqrt{1 + \varphi_B^2}) \right] = 2\pi R_k, \quad (10)$$

где R_k — радиус развернутой антенны.

Даже до начала развертывания наружный виток спирали уже является исходным состоянием кольцевой антенны. Следовательно, начальная длина ленты, образующей кольцо, может быть вычислена по формуле

$$s_0 = \frac{\delta}{4\pi} \left[\varphi_A \sqrt{1 + \varphi_A^2} + \ln(\varphi_A + \sqrt{1 + \varphi_A^2}) \right] - \frac{\delta}{4\pi} \left[(\varphi_A - 2\pi) \sqrt{1 + (\varphi_A - 2\pi)^2} + \ln((\varphi_A - 2\pi) + \sqrt{1 + (\varphi_A - 2\pi)^2}) \right]. \quad (11)$$

Полный угол намотки ленты на барабан $\Phi = \varphi_A - \varphi_B$. Для того чтобы точка *B* совпала с точкой *A* и стала концом развернутого кольца, барабан следует повернуть на угол $\Psi = (\varphi_A - 2\pi) - \varphi_B = \Phi - 2\pi$. Длина ленты s , образующей кольцо радиуса r_k при повороте барабана на произвольный угол ψ_d , составит

$$s = \frac{\delta}{4\pi} \left[\varphi_A \sqrt{1 + \varphi_A^2} + \ln(\varphi_A + \sqrt{1 + \varphi_A^2}) \right] - \frac{\delta}{4\pi} \left[(\varphi_A - 2\pi - \psi) \sqrt{1 + (\varphi_A - 2\pi - \psi)^2} + \ln((\varphi_A - 2\pi - \psi) + \sqrt{1 + (\varphi_A - 2\pi - \psi)^2}) \right]. \quad (12)$$

При $\psi_d = 0$, т. е. до начала развертывания, это выражение совпадает с (9). Продифференцировав дважды выражение (12) по времени, можно получить выражения для \dot{s} и \ddot{s} , которые необходимы для вычисления коэффициентов уравнений движения.

КИНЕМАТИКА ТОЧЕК ЛЕНТЫ

В процессе развертывания точки ленты совершают сложное движение. Во-первых, они все время находятся на кольце переменного радиуса, центр которого смещается в связанном базисе (его положение в связанном базисе можно однозначно определить тремя координатами $a_{xr}(t), a_y, a_z$, из которых первая является известной функцией времени, а остальные две постоянны), во-вторых, каждая частица ленты на кольце, выйдя из точки *A*, изменяет свою угловую координату ϑ_k

(по аналогии с механикой сплошной среды ее можно рассматривать как эйлерову координату) (рис. 6), которая описывает положение произвольной точки кольцевой траектории движения ленты от нуля до некоторой конечной величины. Каждой материальной точке по длине ленты можно поставить в однозначное соответствие ее удаление l от зафиксированного в точке A конца ленты (на рис. 6 зафиксирован правый край нижней ветви ленты). Эту величину можно рассматривать как лагранжеву координату частиц ленты). Очевидно, что угловая координата любой точки ленты теперь может быть определена как $\sigma(t) = 2\pi - l / r_k(t)$. Очевидно также, что $l \in [0, s(t)]$, где $s(t)$ — текущая длина ленты в кольце. Переменная $\sigma(t)$ имеет такой же геометрический смысл, как и угол ϑ_k , однако для конкретной материальной точки ленты ее значение перемененно во времени, поскольку она зависит от $r_k(t)$.

В процессе разворачивания кольцевой антенны несущее тело может совершать сложные угловые движения, приводящие при малой жесткости кольца к возникновению упругих колебаний как в его плоскости, так и поперечных колебаний. В дальнейшем рассмотрении будем учитывать две парциальные формы упругих колебаний кольца, заземленного в одной точке (на рис. 6 это точка A), в плоскости кольца и две парциальные формы такого кольца при поперечных колебаниях. В некоторых случаях колебаниями кольца из плоскости можно пренебречь. Это допустимо при большой изгибно-крутильной жесткости кольца из плоскости по сравнению с такими же характеристиками в плоскости, а также при раскрытии антенны, плоскость которой совпадает с главной плоскостью КА, а начальные возмущения угловой скорости при этом невелики.

Не останавливаясь на подробностях, укажем, что первые две нормализованные формы колебаний кольца в его плоскости выглядят так, как показано на рис. 7, *а, б* жирными линиями [25], а первые две нормализованные формы колебаний кольца из его плоскости выглядят так, как показано на рис. 7, *в, г* также жирными линиями. Точка заземления соответствует угловой координате $\vartheta_k = 0^\circ$.

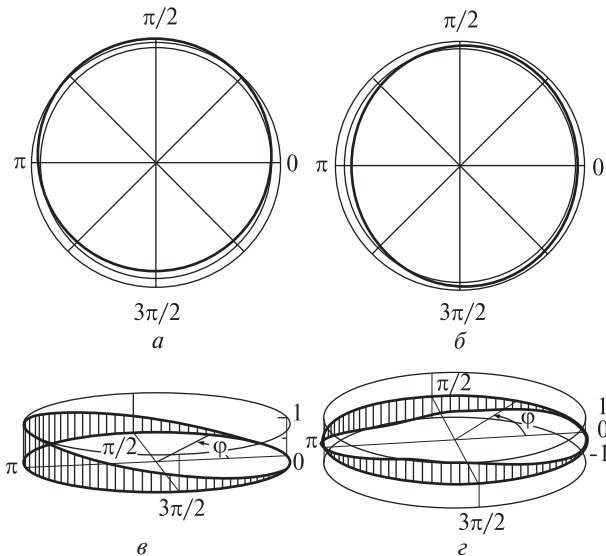


Рис. 7. Первая (*а*) и вторая (*б*) форма упругих колебаний в плоскости и первая (*в*) и вторая (*г*) форма упругих колебаний из плоскости

Можно предположить, что формы упругих колебаний кольца не зависят от времени ввиду малости периодов его собственных колебаний по сравнению с продолжительностью разворачивания. Такое предположение позволяет записать следующее выражение для радиуса-вектора любой материальной точки M_i ленты в пределах границ кольца в системе отсчета C_1xuz :

$$\begin{aligned} r'_x &= a_{xr}(t) - \cos(2\pi - l / r_k(t)) r_k(t) + \\ &+ q_{u1}(t) uv1cs(\vartheta_k) + q_{u2}(t) uv2cs(\vartheta_k), \\ r'_y &= a_y + q_{w1}(t) w_1(\vartheta_k) + q_{w2}(t) w_2(\vartheta_k), \quad (13) \\ r'_z &= a_z + \sin(2\pi - l / r_k(t)) r_k(t) + \\ &+ q_{u1}(t) uv1sc(\vartheta_k) + q_{u2}(t) uv2sc(\vartheta_k). \end{aligned}$$

Здесь $uv1cs(\vartheta_k)$, $uv2cs(\vartheta_k)$, $uv1sc(\vartheta_k)$, $uv2sc(\vartheta_k)$ — первые и вторые формы колебаний кольца в его плоскости на проекциях на оси O_1x и O_1z , принимая во внимание и радиальные, и касательные движения (рис. 7, *а, б*), $w_1(\vartheta_k)$, $w_2(\vartheta_k)$ — первые и вторые формы поперечных колебаний кольца в проекциях на оси C_1y (рис. 7, *в, г*).

Дифференцирование выражений (13) по времени в связанном базисе дает относительные

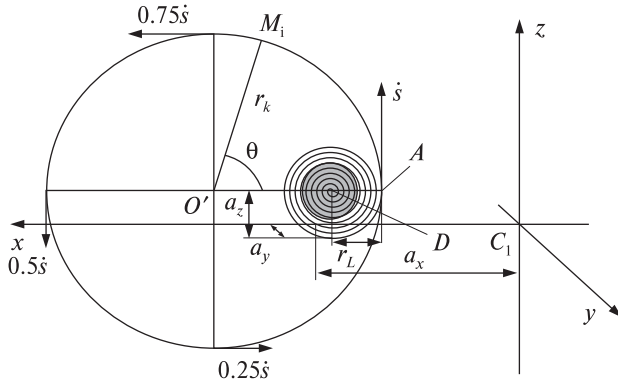


Рис. 8. Относительные скорости точек ленты при развертывании антенны

скорости точек материала ленты как функции времени и координаты ϑ_k :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_x &= \mathbf{a}'_{xt}(t) + \sin(2\pi - l/r_k(t)) \frac{lr'_k(t)}{r_k(t)} - \\ &\quad - \cos(2\pi - l/r_k(t)) \mathbf{r}'_k(t) + \\ &\quad + \mathbf{q}'_{u1}(t) uv1cs(\vartheta_k) + \mathbf{q}'_{u2}(t) uv2cs(\vartheta_k), \\ \mathbf{r}'_y &= \mathbf{q}'_{w1}(t) w_1(\vartheta_k) + \mathbf{q}'_{w2}(t) w_2(\vartheta_k), \\ \mathbf{r}'_z &= \cos(2\pi - l/r_k(t)) \frac{lr'_k(t)}{r_k(t)} + \\ &\quad + \mathbf{r}'_k(t) \sin(2\pi - l/r_k(t)) + \\ &\quad + \mathbf{q}'_{u1}(t) uv1sc(\vartheta_k) + \mathbf{q}'_{u2}(t) uv2sc(\vartheta_k). \end{aligned} \quad (14)$$

Принимая во внимание, что начало системы отсчета C_1xyz выбрано в центре масс гиростатической части КА (в данном случае это КА без ленты), выражение для радиуса-вектора центра КА массы может быть записано как

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_C &= \left(\int_{m_{KL}} \mathbf{r}'_i dm_{KL} + m_{DL} \mathbf{r}'_D \right) / M = \\ &= \left(\mu \int_0^{s(t)} \mathbf{r}'_{i_rig} dl + \mu r'_k \int_0^{2\pi} \mathbf{r}'_{i_fl} d\vartheta_k + m_{DL} \mathbf{r}'_D \right) / M. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь \mathbf{r}'_{i_rig} и \mathbf{r}'_{i_fl} — очевидные из системы (13) обозначения компонентов радиуса-вектора произвольной точки ленты, которые зависят только от развертывания и от упругих колебаний кольца соответственно, $m_{DL}(t)$ — текущая масса ленты на барабане.

Точно так же выражение для относительной скорости центра КА массы, принимая во внимание правило дифференцирования интеграла в переменной по времени области, может быть записано как

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}'_C &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{m_{KL}} \mathbf{r}'_i dm_{KL} + m_{DL} \dot{\mathbf{r}}'_D \right) / M = \\ &= \left(\mu \int_0^{s(t)} \dot{\mathbf{r}}'_{i_rig} dl + \dot{s}(t) \mu \mathbf{r}'_{i_rig} \Big|_{l=s(t)} + \right. \\ &\quad \left. + \mu \dot{r}'_k(t) \int_0^{2\pi} \mathbf{r}'_{i_fl} d\vartheta_k + \mu r'_k(t) \int_0^{2\pi} \dot{\mathbf{r}}'_{i_fl} d\vartheta_k + \dot{m}_{DL} \dot{\mathbf{r}}'_D \right) / M. \end{aligned} \quad (16)$$

Выражения для \mathbf{r}'_i и $\dot{\mathbf{r}}'_i$, полученные выше, также удобны для определения \mathbf{r}'_C и $\dot{\mathbf{r}}'_C$, но они неудобны для вычисления таких значений, как $\mathbf{K}_r^{C_1}, \Theta^{C_1}$ и их производных по времени в системе C_1xyz . Более удобно рассмотреть мгновенное положение материальной точки ленты на круговой траектории переменного радиуса, по которой точки ленты перемещаются. Некоторая точка кольца в каждый момент движется через точку ленты M_i , имеющую угловую координату ϑ_{ki} . Если известна относительная скорость точки кольца M_i и скорость смещения ленты относительно этой точки, можно определить намного проще выражения, которые необходимы для построения уравнений движения.

Движение ленты вдоль кольца происходит со скоростью, которая является переменной относительно угловой координаты. Как видно из рис. 8, эта скорость линейно зависит от угловой координаты ϑ_k . Если лента имеет скорость $\dot{s}(t)$ относительно точки кольца с угловой координатой $\vartheta_k = 0$ в точке схода ленты с барабана, то эта скорость вдвое меньше в точке кольца с угловой координатой $\vartheta_k = \pi$, и равна нулю в точке $\vartheta_k = 2\pi$.

В результате скорость любой материальной точки ленты, которая проходит в данный момент через любую точку M_i круговой траектории относительно этой точки, может быть записана в проекциях на C_1xyz следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{v}'_x &= (2\pi - \vartheta_k) \sin(\vartheta_k) \dot{r}'_k, \quad \tilde{v}'_y = 0, \\ \tilde{v}'_z &= (2\pi - \vartheta_k) \cos(\vartheta_k) \dot{r}'_k. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражения (13) могут быть написаны по-другому:

$$\begin{aligned} r'_x &= a_{xr}(t) - \cos(\vartheta_k) r'_k(t) + \\ &+ q_{u1}(t) uv1cs(\vartheta_k) + q_{u2}(t) uv2cs(\vartheta_k), \\ r'_y &= a_y + q_{w1}(t) w_1(\vartheta_k) + q_{w2}(t) w_2(\vartheta_k), \quad (18) \\ r'_z &= a_z + \sin(\vartheta_k) r'_k(t) + \\ &+ q_{u1}(t) uv1sc(\vartheta_k) + q_{u2}(t) uv2sc(\vartheta_k). \end{aligned}$$

Легко показать, что при $l = (2\pi - \vartheta_k) r'_k(t)$ выражения (13) совпадают с (18). Однако дифференцирование по времени выражений (18) в системе отсчета C_1xyz не дает выражения для полной относительной скорости любой точки ленты. Оно дает только скорости относительного движения точек траектории, у которых угловая координата равна ϑ_k . Чтобы получить такое выражение, необходимо учесть движение кольцевых точек как дополнительное переносное движение. Тогда можно записать

$$\mathbf{v}'_i = \tilde{\mathbf{v}}'_i + \mathbf{r}'_i, \quad (19)$$

где последний член получен в результате дифференцирования по времени выражения (18) в C_1xyz . Нетрудно показать, что выражения для проекций этого вектора на C_1xyz совпадают с выражениями (14) при $l = (2\pi - \vartheta_k) r'_k(t)$.

Выражение для радиус-вектора центра масс C теперь выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_C &= \left(\int_{m_{KL}} \mathbf{r}'_i dm_{KL} + m_{DL} \mathbf{r}'_D \right) / M = \\ &= \left(\mu r'_k(t) \int_0^{2\pi} \mathbf{r}'_i d\vartheta_k + m_{DL} \mathbf{r}'_D \right) / M. \quad (20) \end{aligned}$$

Точно так же выражение для вектора относительной скорости центра масс может быть получено в результате дифференцирования по времени (20), и теперь можно написать:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_C &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{m_{KL}} \mathbf{r}'_i dm_{KL} + m_{DL} \mathbf{r}'_D \right) / M = \\ &= \left(\mu r'_k(t) \int_0^{2\pi} \dot{\mathbf{r}}'_i d\vartheta_k + \mu \dot{r}'_k(t) \int_0^{2\pi} \mathbf{r}'_i d\vartheta_k + \dot{m}_{DL} \mathbf{r}'_D \right) / M. \quad (21) \end{aligned}$$

ОСНОВНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Все аналитические выражения для коэффициентов уравнений движения получены в Mathematica5 ©.

Радиусы-векторы характерных точек рассматриваемой системы в связанном базисе: центра массы барабана — $\mathbf{r}_D = \{a_x, a_y, a_z\}$, центра кольца — $\mathbf{r}'_0 = \{a_x - r_L(t) + r_k(t), a_y, a_z\}$. Текущая масса ленты на барабане равна $m_{dl} = m_l(L_{AB} - s)$, внешний радиус ленты, намотанной на барабан, равен $r_L = r_0 + \kappa(\Phi - \alpha)$. Здесь $\kappa = \delta / 2\pi$, δ — толщина ленты, m_l — погонная масса ленты.

Компоненты кинетического момента относительного движения определяются вращением барабана, движением части ленты вместе с барабаном и движением ленты, формирующей круговую антенну. Кинетический момент относительного движения ленты, образующей кольцо и находящейся на барабане, может быть вычислен как сумма моментов элементарных количеств относительного движения точек ленты по формуле $\mathbf{K}_{rL}^C = \int_{m_L} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i dm_L$, где m_L — полная масса

ленты, \mathbf{v}'_i — вектор относительной скорости любой точки ленты, в соответствии с представлением (19). Подставив сюда необходимые выражения, можно получить после интегрирования векторные компоненты \mathbf{K}_{rL}^C в проекциях на оси C_1xyz . Теперь кинетический момент относительного движения ленты может быть определен относительно мгновенного положения центра масс КА в целом. В результате

$$\mathbf{K}_{rL}^C = \mathbf{K}_{rL}^{C_1} - M \mathbf{r}'_C \times \mathbf{v}'_C. \quad (22)$$

Компоненты этого вектора могут быть получены после подстановки выражений (20), (21) в (22).

При дальнейших операциях дифференцирования по времени в системе отсчета C_1xyz достаточно дифференцировать компоненты полученных векторов и тензоров как скалярные величины.

Слагаемые, соответствующие движению по упругим обобщенным координатам, опущены здесь ввиду их громоздкости.

Для ГД в их системах отсчета относительный кинетический момент равен

$$\mathbf{K}_{r-GD}^{C_{ij}} = \{J_{cs} \dot{\beta}_i, H_g, 0\} \quad (i = 1, 2).$$

В связанном с КА базисе он равен

$$\mathbf{K}_{r_GD}^{C_1} = \mathbf{T}_{c_GD}(i) \{J_{cs} \dot{\beta}_i, H_g, 0\} \quad (i = 1, 2).$$

Матрица преобразования $\mathbf{T}_{c_GD}(i)$ имеет форму, которая определяется последовательностью поворотов систем координат гравитационного стабилизатора вокруг осей связанного базиса главного тела (см. рис. 3):

$$\begin{vmatrix} \cos \sigma & \sin \beta_i \sin \sigma & \cos \beta_i \sin \sigma \\ 0 & \cos \beta_i & -\sin \beta_i \\ -\sin \sigma & \cos \sigma \sin \beta_i & \cos \beta_i \cos \sigma \end{vmatrix}.$$

Выражение для кинетического момента относительного движения подвижных частей, без учета упругих перемещений, после интегрирования по полной массе всех этих элементов имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_r^{C_1} = & \{0, J_d + m_{dL}(r_0^2 + r_L^2) / 2 \dot{\psi}_k + \\ & + m_{kL}((2a_z + \pi r_k) \dot{r}_k - a_z \dot{r}_L), \\ & m_{kL} a_y (2\dot{r}_k - \dot{r}_L)\} + \mathbf{K}_{r_GD}^{C_1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Компоненты тензора инерции, Θ^{C_1} , которые не зависят от обобщенных координат, в базисе $C_1 x y z$ могут быть записаны в следующей форме:

$$\begin{aligned} \Theta_{xx}^{C_1} = & J_{xx} + m_{dl}(3r_L^2 + 3r_0^2 + b_L^2) / 12 + m_{dl}(a_y^2 + a_z^2) + \\ & + m_{kl}(6r_k^2 + 3\delta^2 / 2 + b_L^2) / 12 + m_{kl}(a_y^2 + a_z^2), \\ \Theta_{yy}^{C_1} = & J_{yy} + m_{dl}(r_L^2 + r_0^2) / 2 + m_{dl}(a_x^2 + a_z^2) + \\ & + m_{kl}(r_k^2 + \delta^2 / 4) + m_{kl}(r_{0'x}^2 + a_z^2), \\ \Theta_{zz}^{C_1} = & J_{zz} + m_{dl}(3r_L^2 + 3r_0^2 + b_L^2) / 12 + m_{dl}(a_x^2 + a_y^2) + \\ & + m_{kl}(6r_k^2 + 3\delta^2 / 2 + b_L^2) / 12 + m_{kl}(a_{axr}^2 + a_y^2), \\ \Theta_{xy}^{C_1} = & m_{kl} a_{xr} a_y, \\ \Theta_{xz}^{C_1} = & m_{kl} a_{xr} a_z, \\ \Theta_{yz}^{C_1} = & m_{kl} a_y a_z. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} — компоненты диагонального тензора инерции всех негиростатических частей системы, m_{dl} — масса ленты на барабане, m_{kl} — массы ленты в кольце, b_L — ширина ленты, a_x, a_y, a_z — координаты центра масс барабана в базисе $C_1 x y z$, $a_{xr} = a_x - r_L(t) + r_k(t)$. Дополнительные слагаемые, которые связаны с упругими перемещениями, вычислены с использованием 101

интеграла по угловой координате ϑ_k кольца от различных комбинаций проекций собственных форм на оси координат: $uv1cs(\vartheta_k), uv1sc(\vartheta_k), uv2cs(\vartheta_k), uv2sc(\vartheta_k), w_1(\vartheta_k), w_2(\vartheta_k)$. Ввиду громоздкости этих членов они также опущены.

Потенциальная энергия упругих колебаний кольца имеет вид [26]

$$\begin{aligned} \Pi_L = & \frac{EJ}{2r_k^3} \int_0^{2\pi} (u'' - u)^2 d\vartheta_k + \\ & + \frac{r_k}{2} \int_0^{2\pi} e \left(\frac{x_3''}{r_k^2} + \frac{x_4}{r_k} \right)^2 d\vartheta_k + \\ & + \frac{r_k}{2} \int_0^{2\pi} g \left(\frac{x_3'}{r_k^2} - \frac{x_4'}{r_k} \right)^2 d\vartheta_k. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $u(\vartheta_k, t)$ — смещение точки кольца вдоль радиуса кольца, $x_3(\vartheta_k, t)$ — смещение точки кольца вдоль нормали к плоскости кольца, $x_4(\vartheta_k, t)$ — угол между осевой линией кольца и его плоскостью.

Потенциальная энергия ГД определяется жесткостью их пружин:

$$\Pi_{GD} = \frac{c_s}{2} [(\beta_1 - \beta_{01})^2 + (\beta_2 - \beta_{02})^2]. \quad (26)$$

Обобщенные силы Q_s в уравнениях (4) могут быть определены достаточно просто, принимая во внимание представления (13) после дифференцирования Π по обобщенным координатам.

Относительная кинетическая энергия T_r системы определяется относительным движением ленты и ГД.

Относительная кинетическая энергия ГД может быть написана как

$$\begin{aligned} T_r^{(gd_i)} = & \omega_{rot_i} \cdot \Theta_{rot_i}^{O_i} \cdot \omega_{rot_i} / 2 + \omega_{cs_i} \cdot \Theta_{cs_i}^{O_i} \cdot \omega_{cs_i} / 2 \\ & (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (27)$$

где $\omega_{rot_i} = \{\dot{\beta}_i, \Omega_{rot_i}, 0\}$, $\omega_{cs_i} = \{\dot{\beta}_i, 0, 0\}$ в базисах ГД, $\Theta_{rot_i}^{O_i}, \Theta_{cs_i}^{O_i}$ — тензоры инерции ротора и корпусов ГД относительно их систем отсчета.

Относительная кинетическая энергия ленты равна

$$T_{rL} = m_L r_k / 2 \int_0^{2\pi} (v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2) d\vartheta_k.$$

После подстановки (19) с учетом (14), (17) для v'_x, v'_y, v'_z , выражение для T_{rL} может использоваться в уравнении движения. Это выражение очень громоздко и также здесь опущено.

После добавления демпфирующих моментов в обобщенные силы ГД уравнения движения ГД могут быть представлены в виде

$$Q_{\beta_1, \beta_2} = -k_{3\beta_1, \beta_2} \dot{\beta}_{1,2} - k_{4\beta_1, \beta_2} \beta_{1,2}. \quad (28)$$

Другие выражения, которые входят в уравнения движения, могут быть получены аналогичным образом.

МОДЕЛИРОВАНИЕ

Ключевые значения параметров КА собраны в таблице.

Начальные значения кватернионов выбраны соответствующими нулевым значениям угловых отклонений, начальные значения составляющих угловой скорости КА в орбитальной системе отсчета в момент начала разворачивания выбираются в пределах диапазона $0.0—0.0005 \text{ с}^{-1}$, в качестве основы для закона разворачивания во времени взят достаточно гладкий закон, который соответствует оптимальному вращению гибкого КА с минимальными динамическими перегрузками упругих элементов в относительном движении, как это описано в работе [23]. В рассматриваемом случае такой закон также создает минимально возможные возмущения, возбуждающие упругие колебания во время разворачивания.

Наклонение орбиты i выбрано равным 1, долгота восходящего узла Ω принята нулевой. Момент центрального ньютоновского поля соответствует круговой орбите 600-километровой высоты рассматривается как внешний возмущающий момент. Хотя движение КА вдоль орбиты здесь не рассматривается, параметры орбиты позволяют вычислять гравитационный момент и проекции полного кинетического момента КА на оси абсолютной системы координат. Это необходимо для контроля ошибок численного интегрирования задачи с начальными условиями. Эта задача решалась методом Рунге — Кутта четвертого порядка с шагом интегрирования в диапазоне $0.0001—0.001 \text{ с}$ в зависимости от значения самой высокой частоты собственных колебаний.

На рис. 9, а показаны законы изменения во времени угла вращения барабана ψ_k , длины развернутой ленты s и радиуса кольца r_k . Рис. 9, б показывает поведение диагональных составляющих тензора инерции КА. Здесь можно видеть, что эти значения существенно увеличиваются из-за разворачивания антенны. Составляющая $\Theta_{2,2}^C$ увеличивается больше всего. Заметные здесь гармонические составляющие связаны с колебаниями кольца. Особенно они заметны на рис. 9, в, где показана скорость изменения составной тензора инерции $\Theta_{2,2}^C$.

Если попытаться развернуть антенну на КА, который не содержит гравитационного стабилизатора, КА начинает вращаться вокруг его оси тангажа. Это видно на рис. 10, а, где показано изменение во времени углов ориентации для такого случая и проекций абсолютной угловой скорости в связанном базисе главного тела (рис. 10, б).

Ключевые значения параметров

Параметр	Обозначения	Значение
Масса главного тела	m_1	1400 кг
Погонная масса ленты	m_l	0.148 кг/м
Толщина ленты	δ	0.002 м
Максимальный радиус кольца	r_k	15 м
Изгибная жесткость ленты в плоскости	EJ	1.5 Н·м ²
Изгибная жесткость ленты из плоскости	EJ1	366.4 Н·м ²
Декремент колебаний	ϑ	0.001
Момент инерции барабана	J_{dr}	0.01 кг м ²
Ненулевые компоненты тензора инерции главного тела	J_{xx}	10000 кг м ²
	J_{yy}	12000 кг м ²
	J_{zz}	2000 кг м ²
Координаты центра барабана в связанном базисе	a_x	1 м
	a_y	0.2 м
	a_z	0.2 м
Радиус барабана	r_0	0.10 м
Кинетический момент ротора ГД	h_{rot}	20 кг·м ² /с
Коэффициент демпфирования ГД	$k_{3\beta_1, \beta_2}$	40 Н·м/с
Длительность разворачивания	$T_f - T_0$	500 с

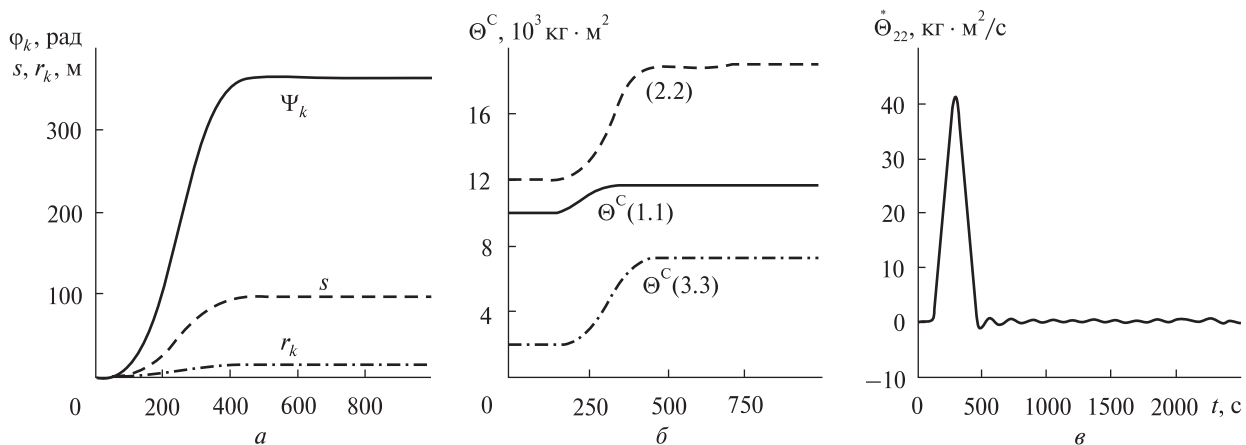


Рис. 9. Изменение во времени: a — длины s ленты в кольце, угла Ψ поворота барабана и радиуса кольца r_k , b — диагональных составляющих тензора инерции КА, θ — величины $\Theta_{2,2}^C$

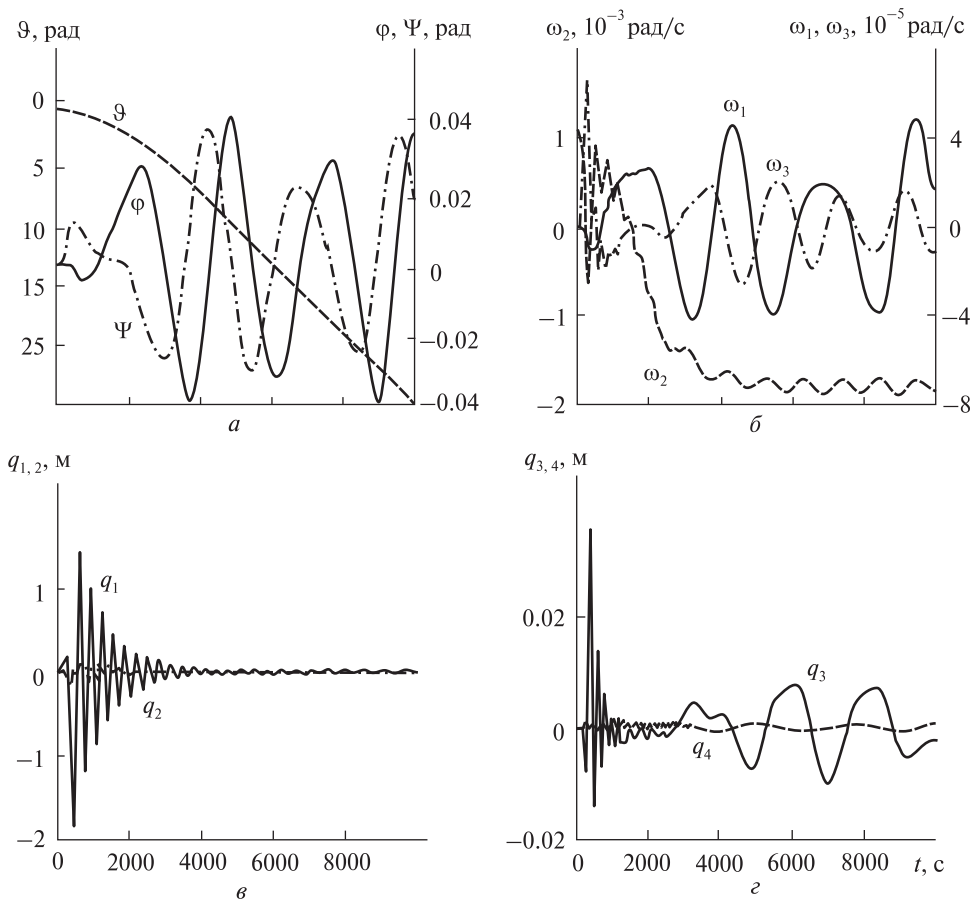


Рис. 10. Изменение во времени углов ориентации θ , φ , ψ (a) и составляющих ω_i (b), амплитуд $q_{1,2}$ (θ) и $q_{3,4}$ (θ) колебаний антенны КА без гидродемпферов

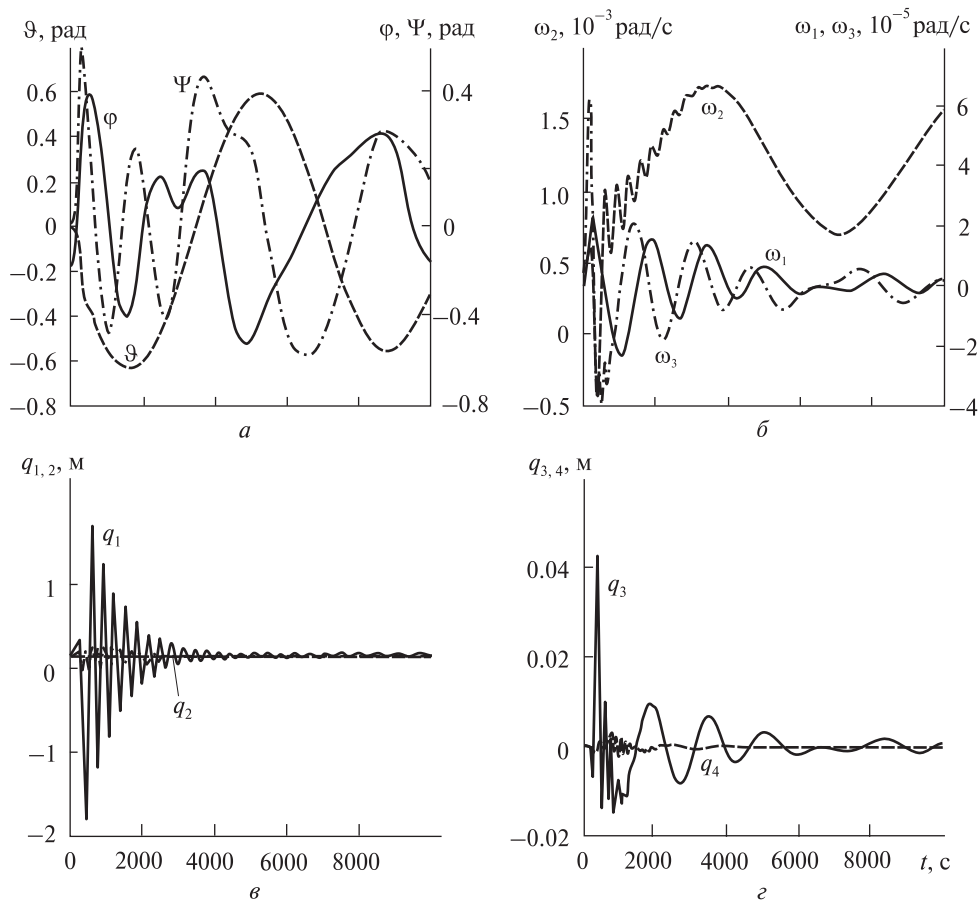


Рис. 11. То же для КА с гиродемпферами

Максимальная амплитуда колебаний кольца при этом приблизительно 1.8 м для первой формы колебаний q_1 в плоскости кольца (рис. 10, в), которая затем существенно уменьшается в результате конструктивного демпфирования, оставаясь однако на постоянном уровне в результате взаимодействия с пространственными движениями КА. Поведение амплитуды q_2 второй формы в плоскости аналогично. Поперечные колебания кольца ведут себя немного иначе, хотя их амплитуды (рис. 10, г) существенно меньше ввиду более высокой изгибной жесткости. Амплитуда q_3 первой поперечной формы, которая линейно связана с колебаниями КА вокруг оси курса, сначала уменьшается, а затем увеличивается, явно взаимодействуя с ними. Амплитуда q_4 второй поперечной фор-

мы, которая нелинейно связана с колебаниями КА вокруг оси курса, постепенно затухает, повторяя квазистатически угловые движения КА по курсу.

Показанные законы демонстрируют, что разворачивание круговой антенны с КА, имеющего только систему гравитационной стабилизации, приводит к режиму движения КА, в котором его гравитационная стабилизация по существу нарушается и едва ли может быть восстановлена до состояния, приемлемого для практики, без использования вспомогательных средств.

Поэтому дальнейшее моделирование динамики КА было выполнено, принимая во внимание установку на нем блока ГД. На рис. 11, а показано изменение углов ориентации для такого случая, а на рис. 11, б — проекции абсолютной

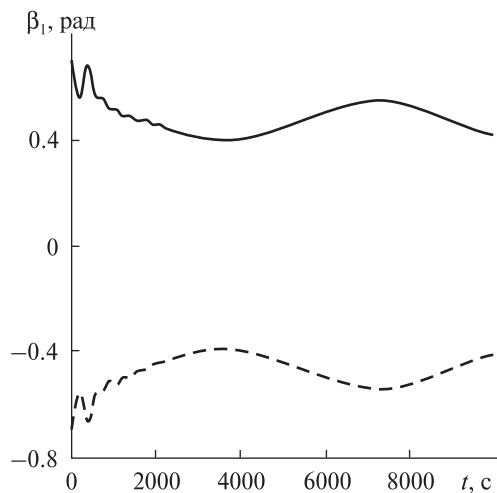


Рис. 12. Изменение углов отклонения гиродемпферов

угловой скорости на связанный базис главного тела. Видно, что поведение КА изменяется существенно: КА не входит во вращение вокруг оси тангажа, есть только колебания вокруг этой оси. С увеличением инерционных и демпфирующих свойств ГД значительно улучшается процесс стабилизации относительно местной вертикали. Видно, что угловая скорость вращения вокруг оси тангажа в процессе демпфирования упругих колебаний начинает колебаться с небольшой амплитудой, со средним значением, равным орбитальной угловой скорости.

Колебания в плоскости кольца, возникающие в то же самое время, имеют максимальную амплитуду q_1 для первой формы в плоскости приблизительно 1.8 м в стадии разворачивания (рис. 11, в), которая затем существенно уменьшается в результате конструктивного демпфирования, оставаясь однако на постоянном уровне в результате взаимодействия с угловым движением КА, хотя она вдвое меньше, чем в предыдущем случае. Характер поведения амплитуды q_2 второй формы в плоскости кольца похожий. В отличие от предыдущего случая, при наличии ГД поперечные колебания (рис. 11, г) быстро исчезают, несмотря на взаимодействие с колебаниями главного модуля, который взаимодействует с ГД.

Это относится как к амплитуде q_3 первой поперечной формы, взаимодействующей с колеба-

ниями КА вокруг оси курса, так и к амплитуде q_4 второй поперечной формы. Движение по этой форме не содержит больше квазистатических колебаний, связанных с угловыми движениями КА по курсу.

Упругие колебания не могут непосредственно взаимодействовать с ГД. Они имеют взаимное влияние только через угловые движения КА. В процессе стабилизации КА углы отклонения гироскопов изменяются почти симметрично (рис. 12). По мере того как упругие колебания кольца затухают, в движении по этим углам остаются только длиннопериодические составляющие. Эти составляющие связаны с медленным демпфированием существенных колебаний вокруг угла тангажа.

Проанализированные графики показывают, что развертывание кольцевой антенны с КА с применением его гирогравитационной стабилизации приводит со временем к фактически приемлемому способу движения КА.

Дальнейшее моделирование процесса развертывания позволяет сделать следующие выводы. Увеличение изгибной жесткости ленты в 10 раз при прочих равных условиях приблизительно настолько же увеличивает максимальные амплитуды упругих колебаний. При развертывании этой же антенны с очень тяжелой идеально стабилизированной космической станции (когда массой ленты можно пренебречь по сравнению с полной массой станции, и упругие колебания не влияют на угловые движения) в течение 500 с явно увеличивается амплитуда колебаний для первой формы, а частоты немного уменьшаются.

Этот на первый взгляд парадоксальный результат может быть легко объяснен. При развертывании антенны с небольшого КА часть возмущений, которые создаются системой развертывания, поглощаются угловыми движениями главного тела. В случае отсутствия угловых движений КА все эти возмущения поглощаются упругим кольцом. Некоторое уменьшение частот вызвано дополнительной жесткостью установки кольца.

Полученные результаты сравнивались со случаем увеличения жесткости ленты вплоть до абсолютно твердой ленты, поведение кото-

рой описано в работе [14]. Здесь было получено асимптотическое совпадение результатов. Чтобы подтвердить результаты вычислений, проводился также контроль полной величины кинетического момента. Согласно известной теореме [4] $\mathbf{K}^C(t) = \mathbf{K}^C(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{m}^C(\tau) d\tau$. Член в левой части вычислялся на каждом шагу интегрирования как полный текущий кинетический момент системы. Первый член в правой части вычислялся с использованием начальных условий, второй вычислялся на каждом шаге интегрирования. Хорошее совпадение левых и правых значений части указывает на отсутствие ошибок в уравнениях движения и в вычислительной программе. Такая проверка была включена в вычислительную программу. Во время контроля, как правило, совпадали 6–8 значащих цифр для каждой проекции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа имеет дело с исследованием динамики гирогравитационно стабилизированного космического корабля в режиме разворачивания упругой кольцевой антенны, сделанной из гибкой ленты с памятью формы после завершения предварительной стабилизации беспорядочного вращения КА вокруг его центра масс. Математическая модель, разработанная для этого случая, может быть рассмотрена как обобщение теории системы упругих тел с переменной во времени конфигурацией. Подход может быть успешно распространен на моделирование динамики разворачивания других космических конструкций с существенным изменением конфигурации в процессе эксплуатации. У вычислительного пакета на языке ФОРТРАН, разработанного для числового моделирования, есть общие свойства, которые могут быть легко адаптированы для других разворачиваемых систем. Полученные данные иллюстрируют успешную математическую формулировку динамики системы, описывающей запрограммированное изменение ее геометрии, так же как поведение реального космического аппарата в процессе разворачивания упругой конструкции большого размера. Эти данные позволяют выбрать на-

иболее приемлемое разворачивание и параметры системы стабилизации.

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965. — 416 с.
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973. — 320 с.
3. *Закржевский А. Е., Ткаченко В. Ф., Хорошилов В. С.* Динамика разворачивания круговой антенны на космическом аппарате без стабилизации // *Космічна наука і технологія*. — 2009. — **15**, № 6. — С. 57–65.
4. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.
5. *Banerjee A. K.* Order- n formulation of extrusion of a beam with large bending and rotation // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. — 1992. — **15**, N 1.
6. *Banerjee A. K., Kane T. R.* Extrusion of a beam from a rotating base // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. — 1989. — **12**, N 2. — P. 140–146.
7. *Banerjee A. K., Nagarajan S.* Efficient simulation of large overall motion of beams undergoing large deflection // *Multibody System Dynamics*. — 1997. — N 1. — P. 113–126.
8. *Barakat R.* Transverse vibrations of a moving thin rod // *J. Acoust. Soc. Amer.* — 1968. — **43**, N 3. — P. 533–539.
9. *Barkow B., Steindl A., Troger H., Wiedermann G.* Various methods of controlling the deployment of a tethered satellite // *J. Vibration and Control*. — 2003. — N 9. — P. 187–208.
10. *Bowers E. J., Williams C. E.* Optimization of RAE satellite boom deployment timing // *J. Spacecraft and Rockets*. — 1970. — **7**, N 9. — P. 1057–1062.
11. *Cherchas D. B.* Dynamics of spin-stabilized satellites during extension of long flexible booms // *J. Spacecraft and Rockets*. — 1971. — **8**, N 7. — P. 802–804.
12. *Cloutier G. J.* Dynamics of deployment of extendible booms from spinning space vehicles // *J. Spacecraft and Rockets*. — 1968. — **5**, N 5. — P. 547–552.
13. *Creamer N. G.* Deployment of a flexible beam from an oscillating base // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. — 1987. — **15**, N 2. — P. 527–529.
14. *Dranovskii V. I., Khoroshylov V. S., Zakrzhevskii A. E.* Spacecraft dynamics with regard to elastic gravitational stabilizer deployment // *Acta Astronautica*. — 2009. — **64**, N 5-6. — P. 501–513.
15. *Lang W. E., Honeycutt G. N.* Simulation of deployment dynamics of spinning spacecraft, TN D-4074, Aug. 1967, NASA.
16. *Lewis J. A., Zajac E. E.* A two-gyro, gravity-gradient satellite attitude control system // *Bell Syst. Techn. J.* — 1964. — **43**, N 6. — P. 2705–2765.
17. *Lips K. W., Graham W. B., Vigneron F. R., Hunter D. G.* Dynamics and control characteristics for the WISP 300 m dipole antenna/shuttle configuration // *AAS Paper 85-365*. — 1985. — N 8.

18. *Lips K. W., Modi V. J.* Three-dimensional response characteristics for spacecraft with deploying flexible appendages // *J. Guidance and Control*. — 1981. **4**, N 5. — P. 650—656.
19. *Steindl A., Steiner W., Troger H.* Optimal control of retrieval of a tethered subsatellite // *Solid mechanics and its applications* / Ed. by G. Rega, F. Vestroni. — IUTAM; Springer-Verlag, 2005. — P. 441—450.
20. *Steindl A., Troger H.* Optimal Control of Deployment of a Tethered Subsattelite // *Nonlinear Dynamics*. — 2003. — **31**. — P. 257—274.
21. *Tabarrok B., Leech C. M., Kim Y. I.* On the dynamics of an axially moving beam // *J. Franklin Inst.* — 1974. — **297**, N 3. — P. 201—220.
22. *Tsuchiya K.* Dynamics of a spacecraft during extension of flexible appendages // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. — 1983. — **6**, N 2. — P. 100—103.
23. *Zakrzhevskii A. E.* Slewing of flexible spacecraft with minimal relative flexible acceleration // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. — 2008. — **31**, N 3. — P. 563—570.
24. *Zakrzhevskii A. E., Matarazzo G., Khoroshilov V. S.* Dynamics of systems of bodies with configuration changing by a program // *Int. Appl. Mechanics*. — 2004. — **40**, N 3. — P. 345—350.
25. *Zakrzhevskii A. E., Tkachenko V. F., Khoroshylov V. S.* Eigen-modes and eigen-frequencies of plane oscillations of a flexible ring fixed in one point // *Int. Appl. Mechanics*. — 2010. — **46**, N 12. — P. 124—136.
26. *Timoshenko S. P.* *Vibrations problems in engineering*. — Toronto, New York London: D. Van Nostrand company, Inc., 1955.

Надійшла до редакції 04.07.11

A. E. Zakrzhevskii, V. S. Khoroshilov

THE DYNAMICS OF THE SPACECRAFT WITH GYRO-GRAVITY STABILIZATION IN THE DEPLOYMENT OF A FLEXIBLE RING ANTENNA

We constructed a generalized mathematical model and performed a numerical simulation of the dynamics of a stabilized spacecraft which carries a body of changeable geometry. This model describes the deployment of a compact body into a flexible ring antenna.