

УДК 551.509

**Г. В. Лизунов, А. Ю. Леонтьев**Институт космічних досліджень Національної академії наук України  
та Національного космічного агентства України, Київ**ПРИБЛИЖЁННОЕ ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ  
ДЛЯ АТМОСФЕРНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН***Отримано і проаналізовано наближене дисперсійне рівняння для атмосферних гравітаційних хвиль, що продуктивне при проведенні аналітичних розрахунків. Продемонстровано його застосування для аналізу фазової швидкості, групової швидкості, а також поляризаційних властивостей хвиль.*

1. Атмосферные гравитационные волны (АГВ) играют важную роль в динамике верхней атмосферы Земли. Теоретическая интерпретация наблюдений и результатов численного моделирования этих волн в значительной степени основывается на использовании дисперсионного соотношения [5]

$$\omega^4 - \omega^2 c_s^2 (k_x^2 + k_z^2) + (\gamma - 1) g^2 k_x^2 - \omega^2 \frac{\gamma^2 g^2}{4c_s^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\omega$  — частота,  $k_x$  и  $k_z$  — горизонтальная и вертикальная составляющие волнового вектора,  $g$  — ускорение свободного падения,  $c_s$  — скорость звука,  $\gamma$  — показатель адиабаты. Предполагается, что ось  $OZ$  декартовой системы координат направлена вертикально, ось  $OX$  — в направлении горизонтальной составляющей волнового вектора  $\mathbf{k} = \{k_x, 0, k_z\}$ .

Хотя решение уравнения (1) элементарно записывается относительно волновых чисел  $k_x$  и  $k_z$ , во многих приложениях необходимо оперировать прямой зависимостью  $\omega = \omega(k_x, k_z)$ . Биквадратное уравнение (1) имеет решение

$$\omega = \omega_g \cdot \sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}, \quad (2)$$

где  $\omega_g = \sqrt{\gamma - 1} g / c_s$  — частота Брента-Вяйсяля,  $p = -\alpha^{-2} ((k/k_g)^2 + 1)$ ,  $q = \alpha^{-2} (k_x/k_g)^2$ ,  $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ ,  $\alpha = \omega_g / \omega_a < 1$ ,  $\omega_a = \gamma g / 2c_s$  — частота акустичес-

кой отсечки,  $k_g = (2H)^{-1}$ ,  $H$  — высота однородной атмосферы. В силу громоздкости решение (2) неудобно для дальнейших аналитических расчётов. В данной работе представлено более эффективное приближённое решение.

2. Введём функцию

$$\xi = \xi(k_x, k_z) = 4 \frac{q}{p^2} = 4\alpha^2 \frac{(k_x/k_g)^2}{(1 + (k/k_g)^2)^2},$$

максимум которой  $\xi|_{\max} = \alpha^2 < 1$  достигается при  $\{k_x = k_g, k_z = 0\}$ . По мере удаления волнового вектора от этой точки  $\xi \rightarrow 0$ . Используя  $\xi$  как малый параметр и раскладывая решение (2) по  $\xi$ , находим  $\omega = \omega_g \sqrt{-p/q}$ , что в явном виде даёт

$$\omega = \frac{c_g k_x}{\sqrt{1 + (k/k_g)^2}}, \quad (3)$$

где коэффициент  $c_g = (\omega_g / \omega_a) c_s = 2H\omega_g$ . Таким образом,  $c_g$  имеет смысл максимальной скорости АГВ, численно очень близкой к скорости звука (в нижней и средней атмосфере  $c_g = 0.9c_s$ , в термосфере  $c_g = 0.98c_s$ ).

На рис. 1 представлены точные дисперсионные кривые АГВ и построенные по формуле (3) приближённые решения. Расчёт выполнен при  $\alpha^2 = 0.81$ , что соответствует условиям нижней и средней атмосферы. Наибольшая погрешность решения (3) составляет около 20% в точке  $\{k_x = k_g, k_z = 0\}$ , где  $\xi$  максимально. С изменением длины волны и с увеличением угла распространения АГВ  $\theta = \arctg(k_z/k_x)$  точность выражения (3) быстро увеличивается.

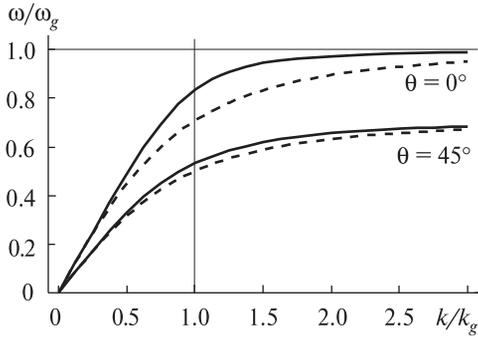


Рис. 1. Точные (сплошные кривые) и приближённые (штрихи) дисперсионные ветви АГВ

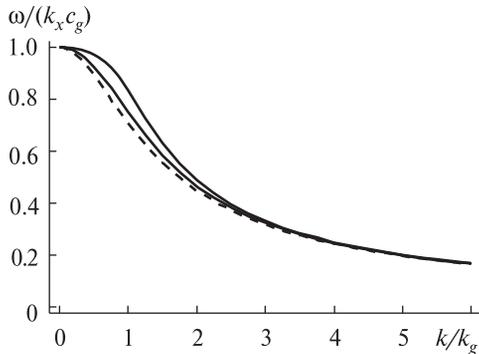


Рис. 2. Горизонтальная фазовая скорость АГВ. Сверху вниз: точные зависимости при  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$  и приближённое решение

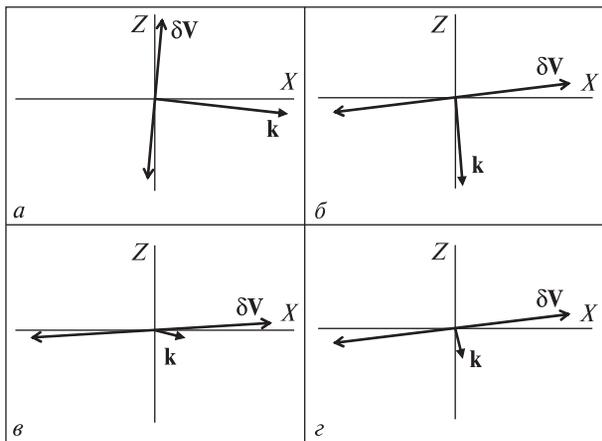


Рис. 3. Направление колебаний частиц в АГВ в зависимости от волнового вектора: а, б — короткие волны, в, г — длинные волны

Из полученной формулы следует, что характер дисперсии АГВ существенно зависит от соотношения между длиной волны  $\lambda$  и волновым масштабом  $\lambda_g = 2\pi/k_g = 4\pi H$  (численное значение которого составляет  $\lambda_g = 90$  км на высотах нижней и средней атмосферы и  $\lambda_g = 400...600$  км в термосфере). В областях коротких и длинных волн закон дисперсии (3) переходит в известные в литературе предельные случаи:  $\omega = k_x c_g$  при  $\lambda \gg \lambda_g$  и  $\omega = \omega_g \cos\theta$  при  $\lambda \ll \lambda_g$  [5, 1].

3. В качестве применения уравнения (3) найдём горизонтальную фазовую скорость АГВ:

$$\frac{\omega}{k_x} = \frac{c_g}{\sqrt{1+k^2/k_g^2}} = \frac{c_g}{\sqrt{1+\lambda_g^2/\lambda^2}}. \quad (4)$$

Данное выражение обнаруживает особые свойства АГВ: 1) монотонную зависимость горизонтальной фазовой скорости от длины волны, 2) ограничение максимальной величины фазовой скорости  $\omega/k_x|_{\max} = c_g$  (рис. 2).

4. Рассмотрим поляризацию АГВ, под которой будем понимать направление колебаний частиц относительно направления распространения волны. Поляризационное соотношение имеет вид [5]

$$\frac{\delta V_z}{\delta V_x} = \frac{Z(\omega, \mathbf{k})}{X(\omega, \mathbf{k})}, \quad (5)$$

где  $\delta \mathbf{V}$  — вектор осцилляций скорости частиц воздуха,  $X = \omega k_x c_s^2 (k_z - i\kappa)$ ,  $Z = \omega(\omega^2 - k_x^2 c_s^2)$  — поляризационные коэффициенты,  $\kappa = (1 - \gamma/2) \times \omega / c_s^2$ .

Для упрощения выражения (5) учтём, что входящий в  $X$  параметр  $\kappa$  численно очень мал. Соответствующий ему вертикальный масштаб  $2\pi/\kappa \sim 2000$  км превышает высоту всей атмосферы Земли, а следовательно, и вертикальные длины распространяющихся в атмосфере волн:  $k_z \gg \kappa$ . Пренебрегая членом  $i\kappa$ , полагая в (5)  $c_g \approx c_s$  и используя приближённое дисперсионное уравнение (3), находим

$$\frac{\delta V_z}{\delta V_x} = -\frac{(k/k_g)^2 k_x}{1 + (k/k_g)^2 k_z}. \quad (6)$$

В коротковолновом пределе ( $k/k_g \gg 1$ )  $\delta V_z/\delta V_x = -k_x/k_z$  или  $\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{V} = 0$  — колебания среды происходят перпендикулярно к направлению распространения АГВ, поляризация попе-

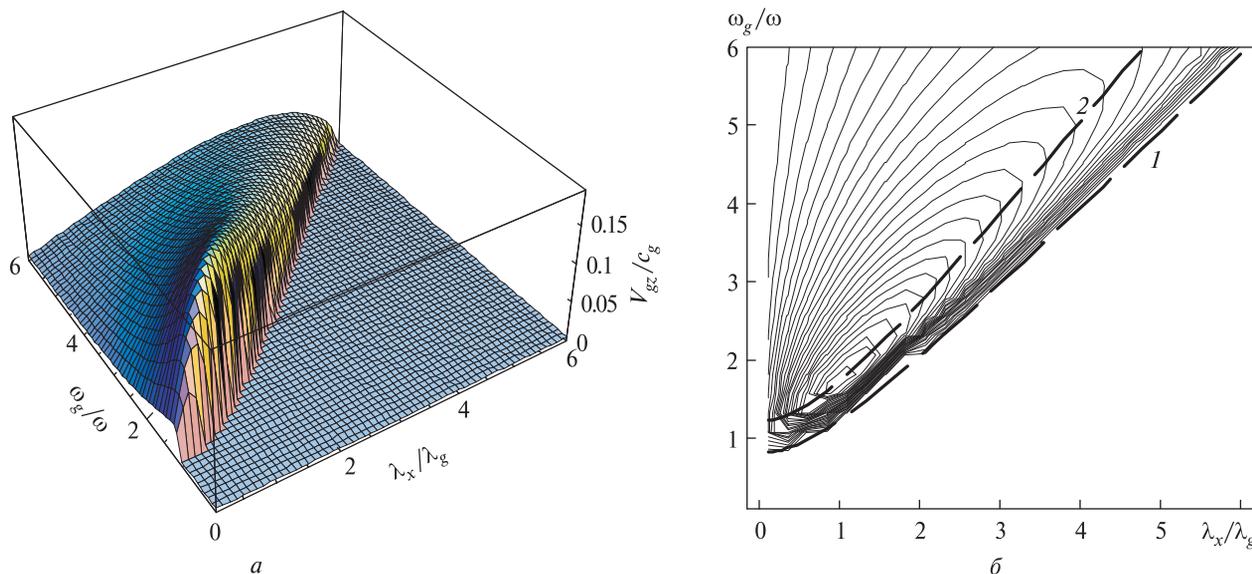


Рис. 4. Трёхмерное распределение (а) и изолинии этого распределения (б) вертикальной групповой скорости АГВ (по  $OX$  — нормированная горизонтальная длина волны  $\lambda_x/\lambda_g = k_x/k_x$ , по оси  $OY$  — нормированный период  $\omega_g/\omega$ , по оси  $OZ$  — нормированная скорость  $V_{gz}/c_g$ ). Кривая 1 — условие отсечки АГВ, кривая 2 — положение гребня (локального максимума) скорости

речная (рис. 3, а, б). С увеличением длины волны возникает продольная составляющая АГВ, причём при  $k/k_g \ll 1$  частицы колеблются почти горизонтально ( $\delta V_z/\delta V_x \rightarrow 0$ ) вне зависимости от направления  $\mathbf{k}$ , как показано на рис. 3, в, г (а с учётом мнимого члена  $ik$  в  $X$  — по чрезвычайно вытянутым эллипсам). При  $\theta \rightarrow 0$  вектора  $\delta \mathbf{V}$  и  $\mathbf{k}$  стремятся к оси  $OX$  с разных сторон, поэтому в двойном пределе  $\theta \rightarrow 0, k \rightarrow 0$  АГВ становится продольной волной.

5. В заключение проанализируем вертикальную групповую скорость АГВ. Согласно (3)

$$V_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = -c_g \frac{(k_x k_z / k_g^2)}{(1 + k^2 / k_g^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

Максимум этого выражения  $V_{gz}|_{\max} = 3^{-3/2} c_g$  достигается при  $k_x = k_z = k_g$ ,  $\omega = \omega_g / \sqrt{3}$  ( $V_{gz}|_{\max} = 50$  м/с в нижней и средней атмосфере,  $V_{gz}|_{\max} = 135 \dots 170$  м/с в верхней термосфере).

Таким образом, минимальное время распространения АГВ от поверхности Земли до высот  $E$ -области ионосферы составляет около получаса, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [3].

На рис. 4 вертикальная групповая скорость АГВ (7) представлена в зависимости от переменных  $\{k_x, \omega\}$ . Обратим внимание, что поверхность групповой скорости имеет вид острого гребня, локальный максимум скорости достигается на линии 2:  $\omega_2 = \omega_2(k_x) = \sqrt{2/3} \cdot \omega_1(k_x)$ , где  $\omega_1 = c_g k_x / \sqrt{1 + (k_x/k_g)^2}$  — отсечка АГВ при  $k_z = 0$ .

6. В данной работе получено и проанализировано приближённое дисперсионное уравнение для АГВ. Максимальное отклонение точных и приближённых дисперсионных кривых АГВ (около 20 %) достигается в точке  $\{k_x = k_g, k_z = 0\}$  и быстро уменьшается с изменением волнового числа и направления распространения АГВ. Для интерпретации большинства ионосферных наблюдений [4, 6, 2], а также результатов численного моделирования [7] такая вычислительная точность достаточна, поскольку более существенным источником расхождений теории и эксперимента является неидеальность, неоднородность и нестационарность атмосферы.

Во избежание накопления численных ошибок в расчётных схемах компьютерного модели-

рования и для количественных оценок следует использовать строгие соотношения теории АГВ. Приближенное дисперсионное уравнение (3) продуктивно на стадии аналитического исследования, что продемонстрировано в данной работе на примерах анализа горизонтальной фазовой скорости, вертикальной групповой скорости и поляризации АГВ.

1. Брюнелли Б. Е., Намгаладзе А. А. Физика ионосферы. — М.: Наука, 1988. — 528 с.
2. Федоренко А. К. Энергетический баланс акустико-гравитационных волн над полярными шапками по данным спутниковых измерений // Геомагнетизм и аэронавигация. — 2010. — **50**, № 1. — С. 111—122.
3. Ямпольский Ю. М., Зализовский А. В., Литвиненко Л. Н. и др. Вариации магнитного поля в Антарктике и сопряженном регионе (Новая Англия), стимулированные циклонической активностью // Радиофизика и радиоастрономия. — 2004. — **9**, № 2. — С. 130—151.

4. Francis S. H. Global propagation of atmospheric gravity waves: a review // J. Atmos. and Terr. Phys. — 1975. — **37**. — P. 1011—1054
5. Hines C. O. Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights // Can. J. Phys. — 1960. — **38**. — P. 1441—1481.
6. Hocke K., Schlegel K. A review of atmospheric gravity waves and travelling ionospheric disturbances: 1982—1995 // Ann. Geophys. — 1996. — **14**. — P. 917—940.
7. Mayr H. G., Harris I., Herrero F. A., et al. Thermospheric gravity waves: observations and interpretation using the transfer function model (TFM) // Space Sci. Revs. — 1990. — **54**. — P. 297—375.

Надійшла до редакції 17.12.10

G. V. Lizunov, A. Yu. Leontiev

#### AN APPROXIMATE DISPERSION EQUATION FOR ATMOSPHERE GRAVITY WAVES

An approximate dispersion equation for atmosphere gravity waves is deduced and analyzed. The equation is productive in analytical calculating. Its application to the analysis of phase velocity, group velocity, and polarization properties of the atmosphere gravity waves is shown.