

УДК 533.951; 550.38

Ю. П. Ладиков-Роев, С. О. ЧеремныхИнститут космічних досліджень Національної академії наук України
та Національного космічного агентства України, Київ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛАЗМЕННОГО ДАВЛЕНИЯ В ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

Одержано аналітичний розв'язок для розподілу тиску в екваторіальній області магнітосфери Землі. Розв'язок якісно збігається з даними спостережень.

1. Время жизни магнитосферной плазмы в спокойном состоянии много больше характерных времён возмущений в ней. В обычных условиях эта разница достигает 7–8 порядков величин. Следовательно, плазма в магнитосфере должна находиться либо в стационарном состоянии с установившейся конвекцией, либо в состоянии магнитостатического равновесия. Вопрос о наличии стационарных конвективных движений и их роли в удержании магнитосферной плазмы до сих пор остаётся до конца не исследованным. Однако с точки зрения длительного существования магнитосферы стационарная конвекция играет второстепенную роль. Учёт конвекции имеет характер поправок к основному магнитостатическому состоянию плазмы. Поэтому для описания равновесия магнитосферной плазмы в первом приближении можно использовать систему уравнений магнитостатики.

Известно, что в магнитосфере Земли протекают кольцевые токи [1]. Они лежат в экваториальной области и имеют противоположное направление. Их наличие приводит к смещению силовых линий магнитного поля. Считается, что от двух до приблизительно трёх радиусов Земли ток течёт в положительном направлении, а от трёх до десяти – в отрицательном. С другой стороны, из наблюдений на космических аппаратах известно, что плазменное давление на участке от двух до трёх радиусов Земли нарастает, а затем плавно спадает.

При изучении магнитосферы предлагались различные модели для описания кольцевого тока и давления. Например, в работе [2] решалось уравнение равновесия магнитосферной плазмы с давлением как функцией магнитной поверхности в следующем виде:

$$P(\psi) = P_0 \left[\frac{(\psi_2 - \psi)}{\gamma} \right]^\gamma \left[\frac{(\psi - \psi_1)}{\delta} \right]^\delta \times \left[\frac{(\gamma + \delta)}{(\psi_2 - \psi_1)} \right]^{\gamma + \delta}.$$

Здесь γ и δ — некоторые константы, ψ_1 и ψ_2 — функции внешней и внутренней поверхности магнитного потока. В результате численного решения уравнения магнитостатики был получено распределение давления на участке от двух до десяти радиусов Земли.

В данной работе, в отличие от [2], получено аналитическое решение этой проблемы. Принципиальное отличие от [2] состоит в том, что априори задано распределение кольцевых токов, которое позволяет однозначно найти давление.

2. Для получения исходных уравнений воспользуемся уравнением магнитостатического равновесия магнитосферной плазмы в сферической системе координат (r, θ, φ) :

$$\nabla P = \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

где P — давление, $\mathbf{j} = j \cdot \mathbf{e}_\varphi$ — кольцевой ток, $\mathbf{B} = B_r \mathbf{e}_r + B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ — напряжённость магнитного поля. Умножая обе части выражения (1) скалярно на \mathbf{B} , получаем

$$\mathbf{B} \cdot \nabla P = 0. \quad (2)$$

Магнитное поле считаем далее осесимметричным ($\partial/\partial\varphi = 0$). С учётом этого обстоятельства

уравнение $\text{div}\mathbf{B} = 0$ в рассматриваемой системе координат принимает вид

$$\text{div}\mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(r^2 \sin \theta \cdot B_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta \cdot B_\theta)}{\partial \theta} \right] = 0.$$

Введём в рассмотрение функцию $\psi(r, \theta)$, причём

$$B_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad B_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3)$$

При этом уравнение $\text{div}\mathbf{B} = 0$ удовлетворяется тождественно. Легко убедиться, что функция ψ имеет смысл полоидального магнитного потока. Подставляя (3) в (2), получаем равенство

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \{P, \psi\}_{r, \theta} = 0, \quad (4)$$

где $\{P, \psi\}_{r, \theta}$ — скобка Пуассона. Из общих свойств этих скобок следует, что давление является произвольной функцией ψ , т. е.

$$P = P(\psi). \quad (5)$$

Тогда с учётом (5) уравнение (1) можно представить в виде

$$\nabla P = \frac{dP}{d\psi} \nabla \psi = -j B_\theta \vec{e}_r + j B_r \vec{e}_\theta,$$

или

$$\begin{aligned} \nabla P &= \frac{dP}{d\psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right) = \\ &= j \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right]. \end{aligned}$$

Сравнивая левые и правые части полученного уравнения, находим, что оно удовлетворяется при условии

$$j = r \sin \theta \frac{dP}{d\psi}. \quad (6)$$

С другой стороны, из уравнения Максвелла следует, что

$$j = \frac{c}{4\pi r} \left[\frac{\partial r B_\theta}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right]. \quad (7)$$

Подставляя (3) в (7), получаем

$$\frac{c}{4\pi r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -j. \quad (8)$$

В результате имеем для определения давления следующую нелинейную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} j &= r \sin \theta \frac{dP}{d\psi}, \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= -j. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} j &= r \sin \theta \frac{dP}{d\psi}, \\ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= -j. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

3. Как отмечалось выше, в магнитосферной плазме в экваториальной области ток течёт в положительном направлении при $2R_0 \leq r \leq 3R_0$, и в отрицательном — при $3R_0 \leq r \leq 10R_0$. Удобно для дальнейшего анализа представить этот ток в виде

$$j = A \sin k(\eta - \varphi), \quad (11)$$

где $\eta = \frac{r}{3R_0} \sin \theta$, k — произвольный волновой вектор, φ — фазовый сдвиг. Параметры A , k и φ будем выбирать, исходя из значений тока на концах интервала. При $r = 2R_E$ и при $r = 3R_E$ положительный ток обращается в ноль, откуда видно, что $k = 3\pi$, $\varphi = \frac{2}{3} \sin \theta$. В результате выражение (11) примет вид

$$j = A_1 \sin 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) \sin \theta, \quad \rho = \frac{r}{3R_0}. \quad (12)$$

Для нахождения решения уравнения (10) положим $\psi = F(\eta)$, $j = \eta \Phi(\eta)$, где $\eta = \rho \sin \theta$, и после подстановки этих выражений в (10) получим уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial F}{\partial \eta} = -A_1 \eta \sin 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right). \quad (13)$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{d^2 F}{d\eta^2} - \frac{1}{\eta} \frac{dF}{d\eta} = 0. \quad (14)$$

Его решение имеет вид

$$F = C_1 \frac{\eta}{2} + C_2. \quad (15)$$

Для нахождения общего решения уравнения (13) считаем, что C_1 и C_2 являются функциями η . Используя метод вариации постоянных, получаем

$$C_1 = \frac{A_1}{3\pi} \cos 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right) + M,$$

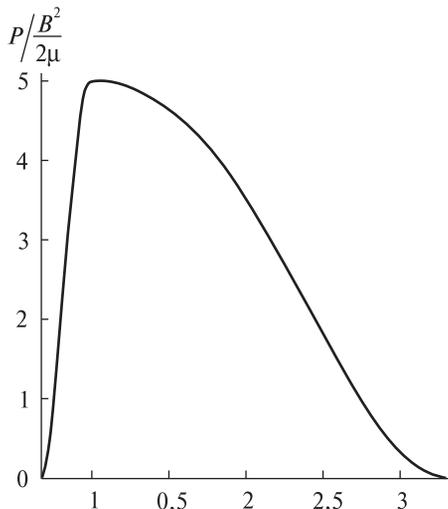


Рис. 1. Результирующее распределение давления на интервале $\frac{2}{3} < \rho < \frac{10}{3}$ ($2R_E \leq r \leq 10R_E$)

$$C_2 = \frac{A_1}{6\pi} \left\{ \begin{aligned} & \frac{2\eta}{3\pi} \sin 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right) + \\ & + \left(\frac{2}{(3\pi)^2} - \eta^2 \right) \cos 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right) \end{aligned} \right\} + N, \quad (16)$$

Здесь M и N — произвольные постоянные. Тогда общее решение для функции $\psi = F(\eta)$ имеет вид

$$\psi(\eta) = F(\eta) = \frac{A_1}{6\pi} \left[\begin{aligned} & \frac{2\eta}{3\pi} \sin 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right) + \\ & + \frac{2}{(3\pi)^2} \cos 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right) \end{aligned} \right] + M \frac{\eta^2}{2}. \quad (17)$$

Поскольку функция ψ определяется с точностью до константы, без ограничения общности можно положить $N = 0$.

Из уравнения (9) следует

$$\frac{\partial P}{\partial \psi} = \frac{1}{\eta} j = \frac{1}{\eta} A_1 \sin 3\pi \left(\eta - \frac{2}{3} \right). \quad (18)$$

Легко видеть, что на экваторе $P(\rho)$ будет иметь вид

$$\frac{\partial P}{\partial \psi} = \frac{dP}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \psi} = \frac{A_1}{\rho} \sin 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right), \quad (19)$$

откуда следует

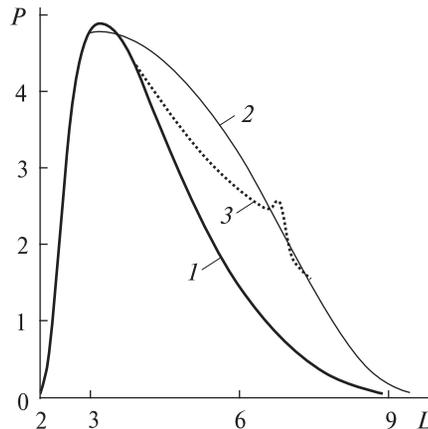


Рис. 2. Распределение давления в магнитосфере. Кривая 1 — результат С. З. Ченга [2], кривая 2 — зависимость, полученная в данной работе, кривая 3 — наблюдательные данные с КА AMPTE/CSE [3]

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{A_1}{\rho} \sin 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \quad (20)$$

Частную производную $\frac{\partial \psi}{\partial \rho}$ можно получить из (17):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \left[\frac{A_1}{3\pi} \cos k \left(\rho - \frac{2}{3} \right) + M \right] \rho. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20), находим

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = A_1 \sin 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) \left[\frac{A_1}{3\pi} \cos k \left(\rho - \frac{2}{3} \right) + M \right]. \quad (22)$$

На интервале $(\rho_0, \rho_1) = \left(\frac{2}{3}, 1 \right)$ справедливо нера-

венство $\sin 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) \geq 0$, а $\cos 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right)$ на этом

же интервале $\left(\frac{2}{3}, 1 \right)$ меняет знак, поскольку

условие $\cos 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) < 0$ выполняется при

$$\rho - \frac{2}{3} > \frac{1}{6}.$$

Если произвольную постоянную M выбрать большую, чем $\frac{A_1}{k} = \frac{A_1}{3\pi}$, то величина $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ будет положительной на всём интервале, что соответствует положительному значению тока. Заметим,

что $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ обратится в ноль на конце интервала,

т. е. давление там достигнет максимума.

Для нахождения давления проинтегрируем уравнение (22), в результате получим

$$P = -\frac{A_1^2}{(3\pi)^2} \cos^2 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) - \frac{A_1 M}{3\pi} \cos 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) + P_0. \quad (23)$$

Поскольку рассматривается экваториальная область, то $\sin \theta \approx 1$. Для удобства дальнейших расчетов положим $M = \frac{A_1}{3\pi}$, тогда давление на участке

$(\rho_0, \rho_1) = \left(\frac{2}{3}, 1 \right)$ зависит только от одной произвольной постоянной A_1 .

$$P = -\frac{A_1^2}{9\pi^2} \left[\frac{1}{2} \cos^2 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) + \cos 3\pi \left(\rho - \frac{2}{3} \right) + 1 \right] + P_0. \quad (24)$$

4. Определим давление на интервале $3R_E \leq r \leq 10R_E$ (или в безразмерных переменных при $1 \leq \rho \leq \frac{10}{3}$). Будем использовать то же самое выражение (11) для тока $j_\phi(r)$, которое теперь будем рассматривать на интервале $(\pi, 2\pi)$. После перерасчёта k и ϕ , как было сделано выше, получаем

$$j = A_2 \sin \frac{3}{7} \pi \left(\eta + \frac{4}{3} \right). \quad (25)$$

Аналогично предыдущему случаю, находим выражения

$$\psi = \frac{A_2}{\frac{6}{7}\pi} \left[\frac{14\eta}{3\pi} \sin \frac{3}{7} \pi \left(\eta + \frac{4}{3} \right) + \frac{2}{\left(\frac{3}{7}\pi \right)^2} \cos \frac{3}{7} \pi \left(\eta + \frac{4}{3} \right) \right] + \frac{Q\eta^2}{2}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \left[\frac{A_2}{\frac{3}{7}\pi} \cos \frac{3}{7} \pi \left(\eta + \frac{4}{3} \right) + Q \right] \rho,$$

где Q — положительная постоянная;

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = A_2 \sin \frac{3}{7} \pi \left(\rho + \frac{4}{3} \right) \left[\frac{B}{\frac{3}{7}\pi} \cos \frac{3}{7} \pi \left(\rho + \frac{4}{3} \right) + Q \right]. \quad (27)$$

Используя (26) и (27), находим давление на исследуемом интервале

$$P = \frac{A_2^2}{\left(\frac{3}{7}\pi \right)^2} \left[\sin^2 \frac{3\pi}{7} \left(\rho + \frac{4}{3} \right) - \cos \frac{3\pi}{7} \left(\rho + \frac{4}{3} \right) + 1 \right] + P_0. \quad (28)$$

Для сшивки решений на обох интервалах положим $A_1^2 = (7A_2)^2$ при $\rho = 1$ и $P = P_0$ при $\rho = 10/3$. Таким образом искомое давление описывается уравнениями (24) и (28) на интервале от $2R_E$ до $10R_E$ и имеет вид, изображённый на рис. 1.

5. Сравним полученное решение (24) и (28) с наблюдаемыми данными, а также с результатом работы [2]. На рис. 2 представлены зависимости давления от параметра Мак-Илвайна L . Сплошная линия соответствует результату, полученному в [2]. Штриховой кривой отмечены экспериментальные данные [3], полученные на КА АМРТЕ/ССЕ 6 сентября 1984 года. Сплошной тонкой линией отмечена зависимость, полученная в данной работе.

Видно, что на участке от $2R_E$ до $3R_E$ все три зависимости практически совпадают. На расстояниях $3R_E \leq r \leq 10R_E$ экспериментальная зависимость проходит выше зависимости, полученной в [2] и ниже зависимости, полученной в настоящей работе.

Из изложенного следует, что аналитическое решение (24) и (28) удовлетворительно описывает распределение давления в магнитосфере Земли.

1. *Космическая геофизика* / Под ред. А. Эгеланда, О. Холтера, А. Омхольта. — М.: Мир, 1976. — 179 с.
2. Cheng C. Z. Magnetospheric equilibrium with anisotropic pressure // *J. Geophys. Res.* — 1992. — **97A**, N 2. — P. 1497—1510.
3. Lui A. T. Y., McEntire R. W., Krimigis S. M. Evolution of the ring current during two geomagnetic storms // *J. Geophys. Res.* — 1987. — **92A**, N 7. — P. 7459—7470.

Надійшла до редакції 01.10.09

Y. P. Ladikov-Roev, S. O. Cheremnykh

ON THE PLASMA PRESSURE DISTRIBUTION IN THE EQUATORIAL REGION OF THE EARTH'S MAGNETOSPHERE

An analytical solution for pressure distribution in the equatorial region is obtained. The solution is in quality correspondence with observational data.