ISSN 1561-8889. *Космічна наука і технологія. 2010. Т. 16. № 1. С. 61–67.*

УДК 533.951; 533.951.8; 550.38

О. К. Черемных

Інститут космічних досліджень Національної академії наук України
та Національного космічного агентства України, Київ

К ВОПРОСУ О РЕЗОНАНСНЫХ МГД-ВОЗМУЩЕНИЯХ В МАГНИТОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

В рамках ідеальної магнітогідродинаміки аналізується проблема генерації резонансних збурень у магнітосфері Землі. Показано, що новий тип резонансів із переважним компонентом вектора зміщення елементарного об'єму плазми, який лежить у площині, перпендикулярній до магнітної поверхні. Отримані рівняння малих коливань для цих резонансів. Встановлено, що у магнітосферній плазмі можуть реалізовуватися специфічні альвенівські резонанси, обумовлені стисливістю середовища.

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучен вопрос о новом типе МГД-резонансов в неоднородной трехмерной плазме с магнитными поверхностями, а полученные результаты применены к магнитосферной плазме. Общий подход для описания альвеновских волн с конечным давлением в сложных магнитных системах был заложен в работах [1] и [5], результаты которых мы будем использовать ниже при формулировке исходных уравнений. В свое время было показано [4, 6], что в одномерно-неоднородной плазме, помещенной в магнитное поле с прямыми силовыми линиями, поступающий извне магнитный звук может генерировать альвеновскую волну на магнитной поверхности, на которой реализуется условие равенства локальной альвеновской частоты и частоты магнитного звука. Именно это явление было позднее названо альвеновским резонансом, который является одним из ключевых эффектов в физике магнитосферы. Позднее оно было обобщено на случай двумерно-неоднородных плазменных конфигураций [2, 6]. Важный для теории магнитосферных резонансов результат был получен в работе [3], где было показано, что альвеновский и магнитозвуковой резонансы возможны в произвольных трехмерных плазменных конфигурациях с магнитными поверхностями. Ниже будет показано, что помимо резонансов, полученных в работе [3], есть другие виды резонансов, отличающиеся направлением вектора смещения. Будет также показано, что при определенных условиях могут реализоваться специфические альвеновские резонансы, обусловленные сжимаемостью среды.

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исходим из уравнения малых колебаний для МГД-возмущений в идеальной плазме с магнитными поверхностями:

$$\rho\frac{\nabla a}{|\nabla a|^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\rho\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\rho\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}=$$

$$=\nabla a\Big[\alpha_s(\nabla a\cdot\nabla T_3)+\frac{\nabla a\cdot\nabla T_0}{|\nabla a|^2}-2p'T_3+$$

$$+T_2(s-\gamma_s)+\mathbf{B}\cdot\nabla T_1+K\xi\Big]+\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\nabla a|^2}\times$$

$$\times\left[\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}\cdot\nabla T_0+\mathbf{B}\cdot\nabla T_2+[\mathbf{B}\times\nabla a]\cdot\nabla T_3\right]+$$

$$+\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\left[(\mathbf{B}\cdot\nabla)T_0\right]. \qquad (1)$$

Это уравнение вытекает из результатов работы [1]. Здесь использованы следующие обозначения:

$$\boldsymbol{\xi}=\xi\frac{\nabla a}{|\nabla a|^2}+\eta\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}+\frac{\tau\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2},\ a_s=\frac{|\mathbf{B}|^2}{|\nabla a|^2},$$

$$\gamma_s=\frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{B}}{|\nabla a|^2},\ s=\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\nabla a|^2}\cdot\mathrm{rot}\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\nabla a|^2},$$

$$T_0=\gamma p\,\mathrm{div}\xi,\ T_1=\frac{\mathbf{B}\cdot\nabla\xi}{|\nabla a|^2},$$

$$T_2=\frac{1}{a_s}\left[\mathbf{B}\cdot\nabla\eta+(\gamma_s-s)\xi\right],$$

$$T_3=\frac{\nabla a\cdot\nabla\xi}{|\nabla a|^2}+\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}\nabla\eta+ \tag{2}$$

$$+\frac{\xi}{|\mathbf{B}|^2}\left(2p'+\mathrm{div}[a_s\cdot\nabla a]\right)=$$

$$=\frac{T_0}{\gamma p}-\mathrm{div}\left(\frac{\tau\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\right)+2\chi\cdot\xi=\mathrm{div}\xi_\perp+2\chi\cdot\xi_\perp,$$

$$K=\frac{\gamma_s}{a_s}(\gamma_s-s)+\frac{p'}{|\mathbf{B}|^2}\frac{\nabla a\cdot\nabla(2p+|\mathbf{B}|^2)}{|\nabla a|^2}=$$

$$=\frac{\gamma_s}{a_s}(\gamma_s-s)+2p'\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}.$$

Фигурирующая в (1) и (2) величина a называется меткой магнитных поверхностей и удовлетворяет геометрическим уравнениям

$$\mathbf{B}\cdot\nabla a=0,\ \mathbf{j}\cdot\nabla a=0\,.$$

Под магнитными поверхностями, как обычно, мы понимаем поверхности, содержащие силовые линии магнитного поля и линии тока. Остальные обозначения в (1) и (2) общепринятые: ρ — плотность плазмы, $\mathbf{j}$ — плотность тока, $\mathbf{B}$ — напряженность магнитного поля, $\xi_\perp$ — вектор поперечного смещения (по отношению к направлению магнитного поля) элементарного объема плазмы. При получении (1) было учтено, что направления ∇a, $[\mathbf{B}\times\nabla a]$ и $\mathbf{B}$ являются взаимно ортогональными на магнитной поверхности.

Уравнение (1) для дальнейшего анализа удобно представить в виде

$$\nabla a\left\{\frac{1}{|\nabla a|^2}[\nabla a\cdot\nabla(T_0+|\mathbf{B}|^2T_3)]-\frac{T_3}{|\nabla a|^2}\nabla a\cdot\nabla|\mathbf{B}|^2-\right.$$

$$\left.-2p'T_3+T_2(s-\gamma_s)+K\xi+\mathbf{B}\cdot\nabla T_1\right\}+\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\nabla a|^2}\times$$

$$\times\left\{\mathbf{B}\cdot\nabla T_2+[\mathbf{B}\times\nabla a]\cdot\nabla\frac{(T_0+|\mathbf{B}|^2T_3)}{|\mathbf{B}|^2}+(T_0+|\mathbf{B}|^2T_3)\times\right.$$

$$\left.\times[\mathbf{B}\times\nabla a]\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{B}|^2}\right)-T_0[\mathbf{B}\times\nabla a]\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{B}|^2}\right)\right\}+$$

$$+\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\{\mathbf{B}\cdot\nabla T_0\}=\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Фигурирующая в уравнении (3) величина $(T_0+|\mathbf{B}|^2T_3)$ пропорциональна возмущенному полному давлению плазмы δp. Легко убедиться прямыми расчетами, что

$$\delta p=-(T_0+|\mathbf{B}|^2T_3)=-[\gamma p\,\mathrm{div}\xi+|\mathbf{B}|^2(\mathrm{div}\xi_\perp+2\chi\cdot\xi_\perp)]. \tag{4}$$

Используя (2), перепишем (1) и (4) в виде

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\nabla a\left\{\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\nabla a|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\xi\right)-\frac{\nabla a\cdot\nabla\delta p}{|\nabla a|^2}+\right.$$

$$+2\delta p\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}+2(p'\xi+T_0)\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}+(\mathbf{B}\cdot\nabla\eta)\frac{(s-\gamma_s)}{\alpha_s}+$$

$$\left.+\frac{s}{\alpha_s}(\gamma_s-s)\xi\right\}+\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\nabla a|^2}\left\{\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\alpha_s}\mathbf{B}\cdot\nabla\eta\right)-\right.$$

$$-\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{s}{\alpha_s}\xi\right)+\frac{\gamma_s}{\alpha_s}\mathbf{B}\cdot\nabla\xi+2(p'\xi+T_0)\frac{\chi\cdot[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}-$$

$$\left.-\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]\cdot\nabla\delta p}{|\mathbf{B}|^2}+2\delta p\frac{\chi\cdot[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}\right\}+\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}\{\mathbf{B}\cdot\nabla T_0\}, \tag{5}$$

$$\left(1+\frac{\gamma p}{|\mathbf{B}|^2}\right)\mathrm{div}\xi-\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\tau}{|\mathbf{B}|^2}\right)+$$

$$+2\chi\cdot\left\{\frac{\xi\nabla a}{|\nabla a|^2}+\eta\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}\right\}=-\frac{\delta p}{|\mathbf{B}|^2}\,. \tag{6}$$

Исключим из этих уравнений продольную составляющую τ вектора смещения, выбрав в качестве неизвестных переменных величины $\xi,\eta,\mathrm{div}\xi,\delta p$.

Используя равенство

$$\tau = -\frac{1}{\rho\omega^2}\mathbf{B}\cdot\nabla T_0\,, \qquad (7)$$

вытекающее из продольной составляющей (5), и подставляя его в уравнение

$$\mathrm{div}\xi = \frac{\nabla a\cdot\nabla\xi}{|\nabla a|^2} + \xi\mathrm{div}\left(\frac{\nabla a}{|\nabla a|^2}\right) + \frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}\cdot\nabla\eta -$$

$$-2\eta\chi\cdot\mathbf{B}\left(\frac{\tau}{|\mathbf{B}|^2}\right) + 2\chi\cdot\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2} + \mathbf{B}\cdot\nabla\frac{\tau}{|\mathbf{B}|^2}, \qquad (8)$$

получаем уравнение для $\mathrm{div}\xi$. С помощью (7) можно также исключить τ из (6). Окончательно получаем систему уравнений малых колебаний

$$\frac{\nabla a\cdot\nabla\delta p}{|\nabla a|^2} = \left\{\frac{\rho\omega^2\xi}{|\nabla a|^2} + \mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\nabla a|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\xi\right) + \frac{s}{\alpha_s}(\gamma_s - s)\xi + \right.$$

$$\left. + 2p'\xi\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}\right\} + 2\delta p\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2} + \frac{(s-\gamma_s)}{\alpha_s}\mathbf{B}\cdot\nabla\eta + 2T_0\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}, \qquad (9)$$

$$\frac{\rho\omega^2}{\alpha_s}\eta + \mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\alpha_s}\mathbf{B}\cdot\nabla\eta\right) + 2T_0\frac{\chi\cdot[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2} =$$

$$= \vec{B}\cdot\nabla\left(\frac{s}{\alpha_s}\xi\right) - 2p'\xi\frac{\chi\cdot[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2} - \frac{\gamma_s}{\alpha_s}\mathbf{B}\cdot\nabla\xi +$$

$$+\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]\cdot\nabla\delta p}{|\mathbf{B}|^2} - \frac{2\delta p\chi\cdot[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}, \qquad (10)$$

$$\left(1+\frac{\gamma p}{|\mathbf{B}|^2}\right)\mathrm{div}\xi - \mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\rho|\mathbf{B}|^2\omega^2}\mathbf{B}\cdot\nabla T_0\right) +$$

$$+2\eta\frac{\chi\cdot[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2} = -2\xi\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2} - \frac{\delta p}{|\mathbf{B}|^2}, \qquad (11)$$

$$\frac{\nabla a\cdot\nabla\xi}{|\nabla a|^2} = -\xi\mathrm{div}\left(\frac{\nabla a}{|\nabla a|^2}\right) + 2\eta\frac{\chi\cdot[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2} -$$

$$-\frac{[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}\cdot\nabla\eta + \mathrm{div}\xi + \mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{\rho|\mathbf{B}|^2\omega^2}\mathbf{B}\cdot\nabla T_0\right), \qquad (12)$$

ранее полученную в работе [3] другим способом. Там уравнения (9)—(12) использовались для нахождения сингулярных решений вида

$$\eta,\ \mathrm{div}\xi \sim \ln(a-a_0),\ \xi,\ \delta p \sim \frac{1}{(a-a_0)}$$

вблизи резонансной магнитной поверхности с меткой a_0. Ниже мы приведем еще одно резонансное решение.

РЕЗОНАНСНЫЕ МГД-ВОЗМУЩЕНИЯ

Выше отмечалось, что на выбранной магнитной поверхности с меткой a_0 направления ∇a, $[\mathbf{B}\times\nabla a]$ и $\mathbf{B}$ являются взаимно ортогональными. Поэтому на этой поверхности можно ввести систему координат (x,y,z) с единичными ортами $\mathbf{e}_x = \frac{\nabla x}{|\nabla x|}$, $\mathbf{e}_y = [\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_x]$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$, где $x = a - a_0$, начало которой можно связать с какой-либо силовой линией.

Для дальнейшего анализа запишем уравнения малых колебаний (9)—(12) символически в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\delta p\\ \eta\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\delta p\\ \eta\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}\xi\\ \mathrm{div}\xi\end{pmatrix}, \qquad (13)$$

$$C\begin{pmatrix}\xi\\ \mathrm{div}\xi\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}\delta p\\ \eta\end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Матричные коэффициенты A, B, C и D в этих уравнениях имеют вид

$$A = \frac{|\mathbf{B}|}{|\nabla a|}\begin{pmatrix}\dfrac{2\chi\cdot[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}; & \dfrac{\rho\omega^2}{\alpha_s} + \mathbf{B}\cdot\nabla\left(\dfrac{1}{\alpha_s}\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\\ 0; & \dfrac{2\chi\cdot[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}\end{pmatrix},$$

$$B = \frac{|\mathbf{B}|}{|\nabla a|}\begin{pmatrix}\dfrac{2p'\chi\cdot[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2} + \dfrac{\gamma_s}{\alpha_s}\mathbf{B}\cdot\nabla - \mathbf{B}\cdot\nabla\left(\dfrac{s}{\alpha_s}\right) - \dfrac{s}{\alpha_s}\mathbf{B}\cdot\nabla; & \dfrac{2\gamma p\chi\cdot[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}\\ -\dfrac{\nabla a\cdot\nabla}{|\nabla a|^2} - \xi\mathrm{div}\left(\dfrac{\nabla a}{|\nabla a|^2}\right); & 1 + \mathbf{B}\cdot\nabla\left(\dfrac{\gamma p}{\rho\omega^2|\mathbf{B}|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\right)\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} \frac{\rho\omega^2}{|\nabla a|^2}+\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\nabla a|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\right)+\frac{s}{\alpha_s}(\gamma_s-s)+2p'\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}; & 2\gamma p\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2} \\ \frac{2\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}; & \left(1+\frac{\gamma p}{|\mathbf{B}|^2}\right)+\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\gamma p}{\rho\omega^2|\mathbf{B}|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\right) \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} \frac{\nabla a\cdot\nabla}{|\nabla a|^2}-\frac{2\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}, & \frac{(\gamma_s-s)\mathbf{B}\cdot\nabla}{\alpha_s} \\ -\frac{1}{|\mathbf{B}|^2} & \frac{2\chi\cdot[\mathbf{B}\times\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2} \end{pmatrix}.$$

Слагаемое $\partial/\partial y$, соответствующее производной в направлении, перпендикулярном к силовой линии, и одновременно вдоль магнитной поверхности, в уравнении (13) выделено, поскольку как показано ниже, именно оно приводит к новым сингулярным решениям или резонансам.

Для заданного равновесия уравнения (13) и (14) сводятся к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\delta p\\ \eta\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\delta p\\ \eta\end{pmatrix}+BC^{-1}D\begin{pmatrix}\delta p\\ \eta\end{pmatrix}, \qquad (15)$$

которое с соответствующими граничными условиями определяет спектр собственных частот. Переход от (13), (14) к (15) будет невозможен, если на магнитной силовой линии оператор C^{-1}, обратный C, отсутствует. Если такая ситуация реализовалась, то решения уравнения (15) имеют вид

$$\delta p\sim\ln y,\ \ \eta\sim\ln y,\ \ \xi\sim\frac{1}{y},\ \ \mathrm{div}\xi\sim\frac{1}{y}. \qquad (16)$$

Ниже будет показано, что сингулярные решения вида (16) реализуются в магнитосферной плазме, если уравнения

$$C\begin{pmatrix}\xi\\ \mathrm{div}\xi\end{pmatrix}=0 \qquad (17)$$

имеют нетривиальные решения. В развернутом виде уравнения (17) имеют вид

$$\frac{\rho\omega^2}{|\nabla a|^2}\xi+\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\nabla a|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\xi\right)+\frac{s}{\alpha_s}(\gamma_s-s)\xi+$$
$$+2p'\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}\xi+\frac{2\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}T_0=0, \qquad (18)$$

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\gamma p}{\rho\omega^2|\mathbf{B}|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla T_0\right)+\left(1+\frac{\gamma p}{|\mathbf{B}|^2}\right)T_0+\frac{2\gamma p\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}\xi=0. \qquad (19)$$

Ввиду сингулярной природы решений (16) рассматриваемая силовая линия находится в резонансе с внешними возмущениями на частотах, удовлетворяющих уравнениям (18) и (19).

СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ВБЛИЗИ РЕЗОНАНСНОЙ СИЛОВОЙ ЛИНИИ

Покажем, что уравнения (18) и (19) приводят к резонансным решениям. Эти уравнения не содержит никаких особенностей по координатам x и y. Поэтому для произвольной замкнутой силовой линии в магнитосфере, ограниченной при $z = z_1$ и $z = z_2$ проводящими ионосферами, они имеют решения в виде набора дискретных собственных функций $\{\hat{\xi}_n,\hat{T}_{0n}\}$ с собственными частотами $\{\omega_n\}$, где $n = 1, 2$.

Умножим (18) на $\frac{\gamma p}{|\mathbf{B}|}\xi_n$ и проинтегрируем вдоль силовой лини магнитного поля от z_1 до z_2, учитывая что $\mathbf{B}\cdot\nabla=|\mathbf{B}|\frac{\partial}{\partial z}$. В результате получаем

$$\int_{z_1}^{z_2}dz\frac{\gamma p}{|\mathbf{B}|}\left[\left(\frac{\rho\omega^2}{|\nabla a|^2}+\frac{2p'}{|\nabla a|^2}(\chi\cdot\nabla a)+\frac{s}{\alpha_s}(\gamma_s-s)\right)\xi\xi_n-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{|\nabla a|^2}(\mathbf{B}\cdot\nabla\xi)(\mathbf{B}\cdot\nabla\xi_n)+\frac{2\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}T_0\xi_n\right]=0. \qquad (20)$$

Аналогично, умножая уравнение (19), записанное в терминах собственных частот и собственных функций ω_n,ξ_n,T_{0n},

$$\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\frac{\gamma p}{\rho\omega_n^2|\mathbf{B}|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla T_{0n}\right)+\left(1+\frac{\gamma p}{|\mathbf{B}|^2}\right)T_{0n}+\frac{2\gamma p\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}\xi_n=0$$

на $T_0/|\mathbf{B}|$, и проинтегрировав вдоль силовой линии, получаем

$$\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{|\mathbf{B}|}\left[(1+\beta)T_0T_{0n}-\frac{\rho\omega^2}{\gamma p}|\mathbf{B}|^2 YY_n+\right.$$

$$\left.+\frac{2\gamma p}{|\nabla a|^2}(\chi\cdot\nabla a)T_0\xi_n\right]=0, \qquad (21)$$

где

$$Y=\frac{\gamma p(\mathbf{B}\cdot\nabla T_0)}{\rho\omega^2|\mathbf{B}|^2},\ Y_n=\frac{\gamma p(\mathbf{B}\cdot\nabla T_{0n})}{\rho\omega_n^2|\mathbf{B}|^2}. \qquad (22)$$

Вычитая (22) из (20), находим

$$\rho\omega^2\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{|\mathbf{B}|}\left[\frac{\gamma p}{|\nabla a|^2}\xi\xi_n+\frac{|\mathbf{B}|^2}{\gamma p}YY_n\right]=A, \qquad (23)$$

$$A=\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{|\mathbf{B}|}\left[\gamma p(\mathbf{B}\cdot\nabla\xi)(\mathbf{B}\cdot\nabla\xi_n)-\frac{2p'}{|\nabla a|^2}\times\right.$$

$$\left.\times(\chi\cdot\nabla a)\xi\xi_n-\frac{s}{\alpha_s}(\gamma_s-s)\xi\xi_n+(1+\beta)T_0T_{0n}\right]. \qquad (24)$$

Точно также, умножим уравнение (18), записанное в терминах собственных частот и собственных функций ω_n,ξ_n,T_{0n}, на $\frac{\gamma p}{|\mathbf{B}|}\xi$, проинтегрируем по z. Далее вычтем из него уравнение (19), умноженное на $T_{0n}/|\mathbf{B}|$ и проинтегрированное вдоль силовой линии. В результате получим

$$\rho\omega^2\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{|\mathbf{B}|}\left[\frac{\gamma p}{|\nabla a|^2}\xi\xi_n+\frac{|\mathbf{B}|^2}{\gamma p}YY_n\right]=A\,. \qquad (25)$$

Из (23) и (25) следует

$$\rho(\omega^2-\omega_n^2)\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{|\mathbf{B}|}\left[\frac{\gamma p}{|\nabla a|^2}\xi\xi_n+\frac{|\mathbf{B}|^2}{\gamma p}YY_n\right]=0\,. \qquad (26)$$

Тогда, если $\omega^2\neq\omega_n^2$, то получаем

$$\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{|\mathbf{B}|}\left[\frac{\gamma p}{|\nabla a|^2}\xi\xi_n+\frac{|\mathbf{B}|^2}{\gamma p}YY_n\right]=0, \qquad (27)$$

и одновременно —

$$\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{|\mathbf{B}|}\left[\frac{\gamma p}{|\nabla a|^2}(\mathbf{B}\cdot\nabla\xi)(\mathbf{B}\cdot\nabla\xi_n)-\frac{2p'}{|\nabla a|^2}(\chi\cdot\nabla a)\xi\xi_n-\right.$$

$$\left.-\frac{s}{\alpha_s}(\gamma_s-s)\xi\xi_n+(1+\beta)T_0T_{0n}\right]=0. \qquad (28)$$

Таким образом, собственные функции $\{\hat{\xi}_n,\hat{T}_{0n}\}$ для различных собственных значений $\{\omega_n\}$ являются ортогональными в смысле, определенном уравнениями (26)—(28).

Поскольку левая часть (14) обладает набором собственных функций $\{\hat{\xi}_n,\hat{T}_{0n}\}$ и собственных значений $\{\omega_n\}$, удовлетворяющих выражениям (18), (19), то указанное уравнение может быть решено тогда и только тогда, если его правая часть удовлетворяет условию ортогональности. Для получения этого условия умножим (14) на $(\xi_n,T_{0n})/|\mathbf{B}|$ и проинтегрируем вдоль силовой линии, учитывая (26)—(28). В результате получим

$$\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{|\mathbf{B}|}(\xi_n,T_{0n})D\begin{pmatrix}\delta p\\ \eta\end{pmatrix}=0\,. \qquad (29)$$

Для выделения из общего решения уравнений (13) и (14) сингулярной части считаем, что амплитуды возмущений $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ изменяются в направлении y быстрее, чем фигурирующие в этих уравнениях операторы. Решение уравнений (13) и (14) ищем в виде

$$\begin{pmatrix}\delta p\\ \eta\end{pmatrix}=f(y)\left[\begin{pmatrix}\delta p_0\\ \eta_0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}\delta p_1\\ \eta_1\end{pmatrix}+\ldots\right],$$

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \mathrm{div}\xi\end{pmatrix}=g(y)\left[\begin{pmatrix}\xi_0\\ (\mathrm{div}\xi)_0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}\xi_1\\ (\mathrm{div}\xi)_1\end{pmatrix}+\ldots\right], \qquad (30)$$

а операторы, например A, представляем в виде

$$A=A_0+yA_1+\ldots\,. \qquad (31)$$

Подставляя (30), (31) в (13), находим

$$g\sim f'(y). \qquad (32)$$

Тогда с необходимой точностью (14) можно записать в виде

$$(C_0+yC_1)f'(y)\left[\begin{pmatrix}\xi_0\\ (\mathrm{div}\xi)_0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}\xi_1\\ (\mathrm{div}\xi)_1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=(D_0+yD_1)f(y)\left[\begin{pmatrix}\delta p_0\\ \eta_0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}\delta p_1\\ \eta_1\end{pmatrix}\right]. \qquad (33)$$

Уравнение (33) при $y\to 0$ должно переходить в (17) или, что тоже самое,

$$C_0\begin{pmatrix}\xi_0\\ (\mathrm{div}\xi)_0\end{pmatrix}=0\,,$$

что реализуется при условии

$$\lim_{y\to 0}\frac{f}{f'}\to 0\,. \qquad (34)$$

Это предположение ниже будет подтверждено полученным решением. В следующем приближении из (33) следует

$$yf'\left[C_0\begin{pmatrix}\xi_1\\ (\mathrm{div}\xi)_1\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}\xi_0\\ (\mathrm{div}\xi)_0\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\left(D_0+yD_1\right)f\left(y\right)\left[\begin{pmatrix}\delta p_0\\ \eta_0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}\delta p_1\\ \eta_1\end{pmatrix}\right]. \qquad (35)$$

Продифференцировав (35) по y, умножив получившееся уравнение на $\left(\xi_n,\, T_{0n}\right)/|\mathbf{B}|$ и проинтегрировав вдоль силовой линии, с учетом (29) получаем

$$\left(yf'\right)'\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{|\mathbf{B}|}\left(\xi_n,\, T_{0n}\right)\left(C_0\begin{pmatrix}\xi_1\\ (\mathrm{div}\xi)_1\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}\xi_0\\ (\mathrm{div}\xi)_0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=f\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{|\mathbf{B}|}\left(\xi_n,\, T_{0n}\right)\left(D_1\begin{pmatrix}\delta p_0\\ \eta_0\end{pmatrix}+D_0\begin{pmatrix}\delta p_1\\ \eta_1\end{pmatrix}\right). \qquad (36)$$

Вблизи $y=0$ из (34) и (36) находим

$$\left(yf'\right)'=0\,. \qquad (37)$$

Отсюда следует

$$f\sim \ln y,\;\; g\sim\frac{1}{y}\,. \qquad (38)$$

Из (38) и (30) получаем сингулярные решения вида (16). При этом частоты резонансных возмущений определяются уравнениями (18), (19).

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе показано, что ввиду сингулярной природы МГД-возмущений силовые линии магнитного поля Земли могут находиться в резонансе с внешними возмущениями на частотах, удовлетворяющих уравнениям (18) и (19). Природа внешних возмущений не имеет принципиального значения. Важным фактором, влияющим на возможность появления резонанса, является направление вектора поперечного смещения элементарного объема плазмы. Если вектор смещения лежит в плоскости, перпендикулярной к магнитной поверхности, то в этом случае реализуются резонансные возмущения с частотами, удовлетворяющими уравнениям (18) и (19).

В случае дипольного магнитного поля уравнения (18) и (19) можно идентифицировать с полоидальными альвеновскими возмущениями, «зацепленными» с ионно-звуковыми возмущениями через радиальную кривизну силовых линий магнитного поля.

Из (18) и (19) также следует, что в магнитосферной плазме могут реализовываться специфические альвеновские резонансы, обусловленные сжимаемостью среды $\mathrm{div}\hat{\xi}\neq 0$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим возмущения, удовлетворяющие условию

$$\mathrm{div}\xi+2\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}\xi=0\,. \qquad (39)$$

В этом случае из (19) получаем уравнение

$$\rho\omega^2\mathrm{div}\xi+|\mathbf{B}|^2\,\mathbf{B}\cdot\nabla\left[\frac{1}{|\mathbf{B}|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\mathrm{div}\xi\right)\right]=0 \qquad (40)$$

для альвеновских волн, существующих только в сжимаемой среде. Уравнение (18) для возмущений, удовлетворяющих (35), принимает вид

$$\rho\frac{\omega^2}{|\nabla a|^2}\xi+2\left(p'-2\gamma p\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}\right)\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}\xi+$$

$$+\mathbf{B}\cdot\nabla\left[\frac{1}{|\nabla a|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\xi\right]+\frac{s}{\alpha_s}(\gamma_s-s)\xi=0 \qquad (41)$$

и описывает «обычные» альвеновские волны, модифицированные давлением. Решения уравнений (40) и (41) должны удовлетворять условию (39).

Уравнения (18) и (19) описывает не только альвеновские волны, но также и ионно-звуковые. Для получения уравнения для ионно-звуковых волн положим, что для возмущений справедливы равенства

$$\beta\mathrm{div}\xi+2\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}\xi=0\,. \qquad (42)$$

При выполнении условия (42) из (19) следует уравнение

$$\rho\omega^2\mathrm{div}\xi+\mathbf{B}\cdot\nabla\left[\beta\mathbf{B}\cdot\nabla\left(\mathrm{div}\xi\right)\right]=0\,, \qquad (43)$$

описывающее ионно-звуковые волны. Уравнение (18) для рассматриваемого случая приводится к виду

$$\rho\frac{\omega^2}{|\nabla a|^2}\xi+2\left(p'-2|\mathbf{B}|^2\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}\right)\frac{\chi\cdot\nabla a}{|\nabla a|^2}\xi+$$

$$+\mathbf{B}\cdot\nabla\left[\frac{1}{|\nabla a|^2}\mathbf{B}\cdot\nabla\xi\right]+\frac{s}{\alpha_s}(\gamma_s-s)\xi=0 \qquad (44)$$

и описывает еще один тип альвеновских волн, модифицированных давлением. Уравнения (43) и (44) должны решаться совместно с (42).

Вопрос о реализации рассмотренных волн в конкретных магнитных системах может быть проанализирован, по-видимому, только с использованием численных методов.

1. *Пустовитов В. Д., Шафранов В. Д.* Равновесие и устойчивость плазмы в стеллараторах // Вопросы теории плазмы / Под ред. Б. Б. Кадомцева. — М: Энергоиздат, 1987. — Вып. 15. — С. 146—291.
2. *Федоров Е. Н., Мазур Н. Г., Пилипенко В. А.* К теории альвеновского резонанса в двумерно-неоднородной плазме // Физика плазмы. — 1995. — **21**, № 4. — С. 333—338.
3. *Cheng C. Z., Chang T. C., Lin C. A., Tsai W. H.* Magnetohydrodynamic theory of field line resonances in the magnetosphere // J. Geophys. Res. — 1993. — **98A**, N 7. — P. 11339—11347.
4. *Chen L., Hasegawa A.* A theory of long-period magnetic pulsation // J. Geophys. Res. — 1974. — **79**. — P. 1024—1032.
5. *Dewar R. L., Glasser A. H.* Ballooning mode spectrum in general toroidal systems // Phys. Fluids. — 1983. — **26**. — P. 3038—3052.
6. *Southwood D.* Some features of field line resonances in the magnetosphere // J. Planet. Space. Sci. — 1974. — **22**. — P. 483—491.

Надійшла до редакції 01.10.09

O. K. Cheremnykh

ON THE PROBLEM OF RESONANT MHD-PERTURBATIONS IN THE MAGNETOSPHERIC PLASMA

The problem of the generation of resonant perturbations in the Earth's magnetosphere is analyzed within the framework of ideal MHD. It is shown that a new type of resonances exist with the dominant component of displacement vector which lies in the plane normal to a magnetic surface. Equations of small oscillations for the frequencies of these resonances are obtained. It is established that in the magnetospheric plasma specific Alfvén resonances may exist determined by the environment compressibility.