

УДК 531.13

**А. Е. Закржевский<sup>1</sup>, В. Ф. Ткаченко<sup>1</sup>, В. С. Хорошилов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка Національної академії наук України, Київ

<sup>2</sup> Державне підприємство «Конструкторське бюро «Південне»» ім. М. К. Янгеля, Дніпропетровськ

## **ДИНАМИКА РАЗВЕРТЫВАНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ АНТЕННЫ НА НЕСТАБИЛИЗИРОВАННОМ КОСМИЧЕСКОМ АППАРАТЕ**

---

*Побудовано узагальнену математичну модель і розроблено комп'ютерну модель динаміки нестабілізованого космічного апарата, що несе тіло змінної геометрії, обумовленої розгортанням по заданій програмі компактно сформованої системи в кільцевий елемент типу антени.*

---

### **ВВЕДЕНИЕ**

Одними из основных составляющих современных космических систем являются конструкции, формируемые на орбите из элементов, доставляемых на орбиту в компактном виде. Несмотря на большие достижения в области динамики систем тел, такие конструкции не могут быть изучены в рамках этой классической теории. Кольцевая антенна, штанга гравитационного стабилизатора в составе космического аппарата (КА) переменной конфигурации, которые формируются на орбите из компактно смотанной ленты, равно как и синтезируемая ферма, не укладываются в рамки классических математических моделей динамики систем тел даже с учетом их упругих свойств, поскольку в процессе развертывания они изменяют свою форму, а также упругие и инерционные характеристики.

Таким образом, в этой области появились проблемы, которые раньше не разрабатывались по разным причинам. В ряде случаев это было связано с отсутствием предпосылок для постановки задач. Так, разработчиков КА часто не интересовало воздействие процесса развертывания кольцевых антенн, смотанных предварительно в рулон, на ориентацию КА, поскольку относительная масса всего узла была небольшой.

С началом широких исследований в области микро- и малых спутников, для которых выдвигаемые элементы соизмеримы по массе со всей системой, эта проблема оказалась недостаточно исследованной. Она имеет разные аспекты в связи с разнообразием новых конструктивных решений для выдвигаемых космических конструкций.

Целью настоящего исследования является построение обобщенной математической модели и компьютерное моделирование динамики КА с отключенной системой стабилизации, несущего тело переменной формы, определяемой развертыванием по заданной программе компактно смотанной ленты в кольцевой элемент типа антенны.

### **ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ**

Здесь рассматривается малый космический аппарат с массой порядка 100 кг, с которого после его выхода на орбиту и ликвидации режима беспорядочного вращения развертывается кольцевая антенна диаметром 30 м. Антенна образуется из упругой ленты с памятью формы, смотанной предварительно на барабан. Наружный конец ленты фиксируется вблизи точки выхода ленты с барабана, которая по мере сматывания ленты приближается к поверхности барабана.

При развертывании на таких аппаратах описанных трансформируемых конструкций в динамику движения вокруг центра масс вносятся

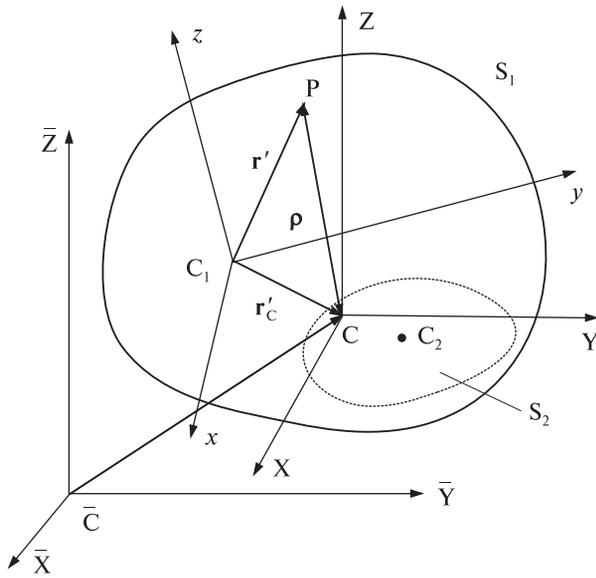


Рис. 1. Обобщенная механическая модель КА, содержащего элементы изменяемой конфигурации

существенные возмущения, описать которые в рамках математических моделей, известных в теории систем тел [3], не представляется возможным.

### МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Применительно к случаю разворачивания кольцевой антенны на круговой орбите механическая модель может быть представлена в виде несущего твердого тела и системы разворачивания, показанной на рис. 1.

Здесь  $\bar{C} \bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$  — абсолютный базис,  $C_1 x y z$  — базис, связанный с несущим телом, с началом в его центре масс  $C_1$ . Под несущим телом  $S_1$  здесь понимаем всю гиростатическую часть системы, под несомым телом  $S_2$  — разворачиваемую часть с центром масс в точке  $C_2$  без ее гиростатических составляющих (например, без массы барабана для намотки ленты; вращение барабана учтем при вычислении относительного кинетического момента системы). Движение несущего тела будем определять вектором  $v_{C_1}$  скорости полюса, в качестве которого выберем точку  $C_1$ , и вектором его абсолютной угловой скорости  $\omega$ . Положение носимой материальной точки  $M_i$  относительно инерциальной координатной системы  $\bar{C} \bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$

будем определять радиусом-вектором  $r_i$ , а относительно системы  $C_1 x y z$ , связанной с несущим телом, — радиусом-вектором  $r'_i$ . Далее будем предполагать, что

$$r'_i = r'_i(t). \quad (1)$$

Барабан с разматываемой лентой можно рассматривать как несомый маховик с переменным моментом инерции, а все тело  $S_2$  — как тело с подвижным относительно точки  $C_1$  центром масс и переменным тензором инерции.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Будем считать процесс разворачивания настолько медленным, что упругими колебаниями кольцевой антенны можно пренебречь как в процессе разворачивания, так и по его завершению. В результате для описания динамики рассматриваемой системы в рамках ограниченной постановки задачи нужно составить уравнения Эйлера — Лагранжа, которые в силу зависимости (1) будут иметь переменные коэффициенты.

Уравнение Эйлера — Лагранжа в векторной форме достаточно просто получить, если использовать теорему об изменении кинетического момента всей системы. Полный кинетический момент рассматриваемой системы имеет вид

$$K^C = \Theta^C \cdot \omega + K_r^C, \quad (2)$$

где  $K_r^C$  — кинетический момент относительного движения носимых тел, определенный в точке  $C$ ,  $\Theta^C$  — тензор инерции системы также относительно полюса  $C$ ,  $\omega$  — вектор абсолютной угловой скорости несущего тела.

В результате применения указанной теоремы получаем уравнение Эйлера — Лагранжа в виде

$$\Theta^C \cdot \dot{\omega} + \dot{\Theta}^C \cdot \omega + \omega \times (\Theta^C \cdot \omega) + \omega \times K_r^C = m^C, \quad (3)$$

который совпадает с известной записью [4], где  $m^C$  обозначает момент внешних сил относительно точки  $C$ . Поскольку равнодействующая внешних сил здесь может быть положена равной нулю, полюс приведения для внешнего момента не имеет значения.

Если дополнить систему уравнений (3) кинематическими уравнениями, получим замкнутую

систему уравнений движения, для которой можно сформулировать задачу Коши с целью изучить поведение системы при изменении ее геометрии.

Чтобы конкретизировать задачу исследования, введем дополнительно орбитальную систему координат, относительно которой в дальнейшем будем рассматривать поведение КА. Эта система координат вводится традиционным способом [4] и связана с центром масс  $C$  всей системы.

На рис. 2 орбитальная система координат показана так, что ось  $Cx^{or}$  направлена по вектору скорости КА, ось  $Cy^{or}$  направлена по бинормали к орбите, ось  $Cz^{or}$  направлена вдоль местной вертикали. Система координат  $\bar{C}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  как и выше — абсолютная, связанная с Землей так, что ось  $\bar{C}\bar{Y}$  направлена вдоль оси вращения Земли, ось  $\bar{C}\bar{Z}$  направлена в точку весеннего равноденствия, ось  $\bar{C}\bar{X}$  дополняет систему до правой. Величина  $\Omega$  обозначает долготу восходящего узла от точки весны,  $i$  — наклонение орбиты,  $u$  — аргумент широты,  $\omega^{or}$  — вектор орбитальной угловой скорости. Пренебрегая прецессией орбиты применительно к рассматриваемому процессу, в дальнейшем будем считать абсолютную угловую скорость орбитального базиса равной  $\omega^{or}$ .

К выбору кинематических параметров, определяющих ориентацию несущего тела в орбитальных осях, здесь следует отнестись с осторожностью. В рассматриваемом случае мы имеем дело с режимом движения, при котором возможны существенные нарушения ориентации КА, вплоть до изменения ее на обратную. Поэтому остановим свой выбор на параметрах Родрига — Гамильтона. Кинематические уравнения, записанные в этих параметрах, не вырождаются ни при каких их значениях, что особенно важно для численного моделирования. В скалярном виде эти уравнения можно записать следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\tilde{\omega}_1\lambda_1 - \tilde{\omega}_2\lambda_2 - \tilde{\omega}_3\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \tilde{\omega}_1\lambda_0 + \tilde{\omega}_3\lambda_2 - \tilde{\omega}_2\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \tilde{\omega}_2\lambda_0 + \tilde{\omega}_1\lambda_3 - \tilde{\omega}_3\lambda_1, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \tilde{\omega}_3\lambda_0 + \tilde{\omega}_2\lambda_1 - \tilde{\omega}_1\lambda_2. \end{aligned} \quad (4)$$

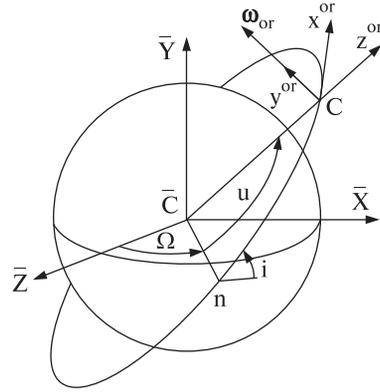


Рис. 2. Системы координат, определяющих положение КА

Здесь  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — компоненты кватерниона, осуществляющего преобразование орбитального базиса в связанный,  $\tilde{\omega}_i = \omega_i - \omega'_{oi}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\omega_i$  — проекции вектора абсолютной угловой скорости несущего тела на оси связанного с ним базиса,  $\omega'_{oi}$  — проекции вектора орбитальной угловой скорости также на связанный базис. Поскольку вектор орбитальной угловой скорости коллинеарен оси  $Cy^{or}$ , его проекции на оси связанного базиса определяются с помощью матрицы соответствующих направляющих косинусов, записанной в компонентах кватерниона [4]. В результате

$$\begin{aligned} \omega'_{o1} &= 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)\omega_o, \\ \omega'_{o2} &= (\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2)\omega_o, \\ \omega'_{o3} &= 2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)\omega_o. \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку более привычными для иллюстрации положения в пространстве связанного координатного базиса являются все же углы ориентации типа углов Крылова [4], воспользуемся последовательностью поворотов, показанных на рис. 3, для введения углов ориентации  $\varphi, \vartheta, \psi$ , где  $\varphi$  — угол крена,  $\vartheta$  — угол тангажа,  $\psi$  — угол курса.

Поставим в соответствие каждому из поворотов отдельный собственный кватернион:

$$\begin{aligned} M &= \cos \vartheta / 2 + \mathbf{i}_2 \sin \vartheta / 2, \\ N &= \cos \varphi / 2 + \mathbf{i}_1 \sin \varphi / 2, \\ P &= \cos \psi / 2 + \mathbf{i}_3 \sin \psi / 2, \end{aligned}$$

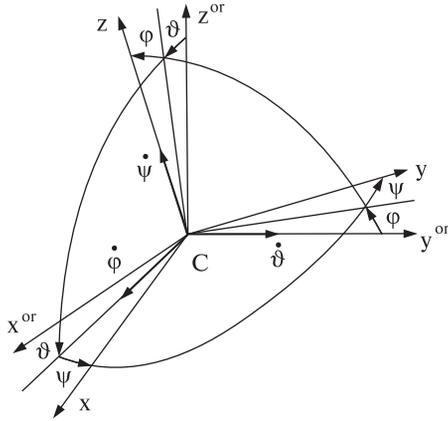


Рис. 3. Ориентация связанного базиса в орбитальном

где  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  — орты гиперкомплексного пространства  $H$ , формально совпадающие с осями осей поворотов. Используя правило умножения собственных кватернионов  $\Lambda = M \circ N \circ P$ , где символ  $\circ$  определяет операцию умножения кватернионов [2], получим для компонентов собственного кватерниона результирующего поворота следующие выражения через углы Крылова:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\varphi}{2}, \\ \lambda_1 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, \\ \lambda_2 &= \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\varphi}{2}, \\ \lambda_3 &= \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эти зависимости удобно использовать, например, при формулировании начальных условий в привычных переменных и при вычислении начальных значений компонентов кватерниона.

Разрешая зависимости (6) относительно углов Крылова, можно получить следующие выражения:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1)}{\sqrt{1 - [2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1)]^2}},$$

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}, \quad (7)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3)}{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}.$$

Они удобны для построения графиков в привычных переменных. Вырождение аргументов арктангенсов при значениях углов  $\pm(2k+1)\pi/2$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) легко обходится в вычислительной программе.

При численном интегрировании системы уравнений (3), (4) следует проводить коррекцию нормы кватерниона. В соответствии с [2] для этого достаточно вместо интегрирования уравнения (4), которое в обозначениях алгебры кватернионов имеет вид  $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}_E$ , интегриро-

вать уравнение  $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \circ \boldsymbol{\omega}_E - k\Lambda(\tilde{\Lambda}^2 - 1)$ , которое превращается в исходное при  $\tilde{\Lambda}^2 = 1$ . Здесь  $\Lambda$  — кватернион,  $\tilde{\Lambda}$  — его норма. Максимальная скорость сходимости нормы кватерниона к единице обеспечивается при  $k = 1/2$ .

Поскольку компьютер оперирует только с главными значениями арктангенсов, в вычислительной программе должен быть заложен алгоритм восстановления полных значений углов ориентации, что реализуется достаточно просто.

Поскольку компьютер оперирует только с главными значениями арктангенсов, в вычислительной программе должен быть заложен алгоритм восстановления полных значений углов ориентации, что реализуется достаточно просто.

### ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

В качестве иллюстрации рассмотрим поведение на орбите микроспутника общей массой около 70 кг, содержащего устройство для развертывания кольцевой антенны, схема которого приведена на рис. 4. Здесь  $C_rxyz$  — связанный базис КА, точка  $O'$  — центр кольца переменного радиуса  $r_k(t)$ .

Для определенности рассмотрим среднюю линию ленты, намотанной на барабан, как правую спираль Архимеда  $\rho = \frac{\delta}{2\pi} \varphi, \varphi \in [0, \Phi]$ , где  $\delta$  — толщина ленты. Часть этой спирали с  $\varphi \in [0, \varphi_B]$  образует тело самого барабана (на рисунке эта область затемнена, а спираль в ней показана пунктиром). Собственно лента до начала развертывания соответствует значениям

$\varphi \in [\varphi_B, \Phi]$ . На рис. 4 точка  $A$  — точка схода ленты с барабана и одновременно точка закрепления свободного конца ленты. Точка  $G$  — произвольная точка спирали. В начальный момент вся лента находится на барабане и каждая точка ее срединной поверхности лежит на спирали. Точка  $B$  — начало ленты на барабане. Ей соответствует угловая координата спирали  $\varphi_B$ . Если  $r_0$  — расстояние от точки  $B$  до центра барабана  $D$ , то  $\varphi_B = \frac{2\pi R_0}{\delta}$ . Длина части спирали, занятой барабаном, равна

$$L_{DB} = \frac{\delta}{4\pi} \left[ \varphi_B \sqrt{1 + \varphi_B^2} + \ln(\varphi_B + \sqrt{1 + \varphi_B^2}) \right]. \quad (8)$$

В начальный момент точка  $A$  находится на конце спирали. Значение  $\varphi_A$  может быть найдено численно по известной полной длине ленты, образующей кольцевую антенну в конце развертывания из условия

$$L_{AB} = \frac{\delta}{4\pi} \left[ \varphi_A \sqrt{1 + \varphi_A^2} + \ln(\varphi_A + \sqrt{1 + \varphi_A^2}) \right] - \frac{\delta}{4\pi} \left[ \varphi_B \sqrt{1 + \varphi_B^2} + \ln(\varphi_B + \sqrt{1 + \varphi_B^2}) \right] = 2\pi R_k, \quad (9)$$

где  $R_k$  — радиус развернутой антенны.

Даже до начала развертывания наружный виток спирали уже является исходным состоянием кольцевой антенны. Следовательно, начальная длина ленты, образующей кольцо, может быть вычислена по формуле

$$s_0 = \frac{\delta}{4\pi} \left[ \varphi_A \sqrt{1 + \varphi_A^2} + \ln(\varphi_A + \sqrt{1 + \varphi_A^2}) \right] - \frac{\delta}{4\pi} \left[ (\varphi_A - 2\pi) \sqrt{1 + (\varphi_A - 2\pi)^2} + \ln((\varphi_A - 2\pi) + \sqrt{1 + (\varphi_A - 2\pi)^2}) \right]. \quad (10)$$

Полный угол намотки ленты на барабан  $\Phi = \varphi_A - \varphi_B$ . Для того чтобы точка  $B$  совместилась с точкой  $A$  и стала концом развернутого кольца, барабан нужно повернуть на угол  $\Psi = (\varphi_A - 2\pi) - \varphi_B = \Phi - 2\pi$ . Длина ленты  $s$ , образующей кольцо радиуса  $r_k$  при повороте барабана на произвольный угол  $\psi$ , составит

$$s = \frac{\delta}{4\pi} \left[ \varphi_A \sqrt{1 + \varphi_A^2} + \ln(\varphi_A + \sqrt{1 + \varphi_A^2}) \right] -$$

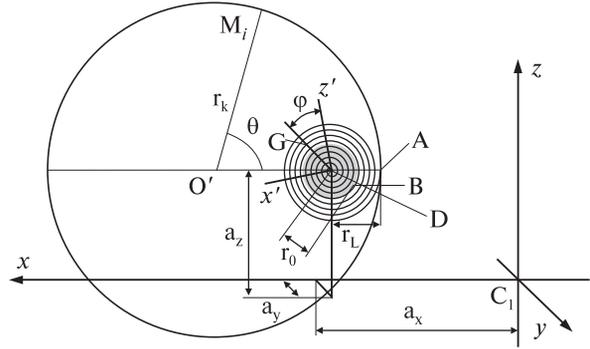


Рис. 4. Схема устройства для развертывания кольцевой антенны

$$- \frac{\delta}{4\pi} \left[ (\varphi_A - 2\pi - \psi) \sqrt{1 + (\varphi_A - 2\pi - \psi)^2} + \ln((\varphi_A - 2\pi - \psi) + \sqrt{1 + (\varphi_A - 2\pi - \psi)^2}) \right]. \quad (11)$$

При  $\psi = 0$ , т. е. до начала развертывания, это выражение совпадает с (10). Продифференцировав дважды выражение (11) по времени, можно получить выражения для  $\dot{s}$  и  $\ddot{s}$ , которые необходимы для вычисления коэффициентов уравнений движения.

Приведем выражения для основных величин, определяющих коэффициенты уравнений движения применительно к схеме системы развертывания кольцевой антенны, используя следующие обозначения:  $\mathbf{r}'_{O'} = \{a_x - r_L + r_k, a_y, a_z\}$  — радиус-вектор центра кольца,  $\mathbf{r}_D = \{a_x, a_y, a_z\}$  — радиус-вектор центра масс барабана,  $m_{dl} = m_l(L_{AB} - s)$  — текущая масса ленты на барабане,  $r_L = r_0 + \kappa(\Phi - \alpha)$  — наружный радиус намотки ленты на барабан,  $\kappa = \delta/2\pi$ ,  $\delta$  — толщина ленты,  $m_l$  — погонная масса ленты.

Компоненты тензора инерции  $\Theta^{C_1}$  в связанном базисе записываются следующим образом:

$$\Theta_{xx}^{C_1} = J_{xx} + m_{dl}(3r_L^2 + 3r_0^2 + b_L^2)/12 + m_{dl}(a_y^2 + a_z^2) + m_{kl}(6r_k^2 + 3\delta^2/2 + b_L^2)/12 + m_{kl}(a_y^2 + a_z^2),$$

$$\Theta_{yy}^{C_1} = J_{yy} + m_{dl}(r_L^2 + r_0^2)/2 + m_{dl}(a_x^2 + a_z^2) + m_{kl}(r_k^2 + \delta^2/4) + m_{kl}(r_{O'_x}^2 + a_z^2),$$

$$\Theta_{zz}^{C_1} = J_{zz} + m_{dl}(3r_L^2 + 3r_0^2 + b_L^2)/12 + m_{dl}(a_x^2 + a_y^2) + m_{kl}(6r_k^2 + 3\delta^2/2 + b_L^2)/12 + m_{kl}(a_{xr}^2 + a_y^2),$$

$$\Theta_{xy}^{C_1} = m_{kl} a_{xr} a_y, \quad \Theta_{xz}^{C_1} = m_{kl} a_{xr} a_z, \quad \Theta_{yz}^{C_1} = m_{kl} a_y a_z. \quad (12)$$

Здесь  $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}$  — компоненты диагонального тензора инерции всей негиростатической части системы,  $m_{dl}$  — масса ленты на барабане,  $m_{kl}$  — масса ленты в кольце,  $b_L$  — ширина ленты,  $a_x, a_y, a_z$  — координаты центра масс барабана в связанном базисе,  $a_{xr} = a_x - r_L + r_k$ .

Составляющие кинетического момента относительного движения определяются вращением барабана, движением части ленты вместе с барабаном и движением ленты, формирующей кольцевую антенну. Остановимся более подробно на определении скоростей материальных точек ленты, принадлежащих кольцу.

В процессе развертывания точки ленты совершают сложное движение.

С одной стороны, они все время находятся на кольце переменного радиуса, центр которого смещается в связанном базисе (его положение в связанном базисе можно однозначно определить тремя координатами  $a_{xr}(t), a_y, a_z$ , из которых первая является известной функцией времени, а остальные две постоянны). С другой стороны, каждая частица ленты на кольце, выйдя из точки  $A$ , изменяет свою угловую координату  $\vartheta$  (см. рис. 4), описывающую положение произвольной точки кольцевой траектории движения ленты, от нуля до некоторой конечной величины.

Координату  $\vartheta$  по аналогии с механикой сплошной среды можно рассматривать как эйлерову координату. Каждой материальной точке по длине ленты можно поставить в однозначное соответствие ее удаление  $l$  от зафиксированного в точке  $A$  конца ленты (на рис. 4 зафиксирован правый край нижней ветви ленты). Эту величину можно рассматривать как лагранжеву координату частиц ленты. Очевидно, что угловая координата любой точки ленты теперь может быть определена как  $\sigma(t) = 2\pi - l/r_k(t)$ . Очевидно также, что  $l \in [0, s(t)]$ , где  $s(t)$  — текущая длина кольца. Переменная  $\sigma(t)$  имеет такой же геометрический смысл, как и угол  $\vartheta$ , однако для конкретной материальной точки ленты ее значение перемененно во времени, поскольку она зависит от  $r_k(t)$ .

В результате можно записать следующие выражения для проекций радиуса-вектора произвольной материальной точки  $M_l$  ленты в пределах кольца в связанном базисе  $O_1xyz$ :

$$\begin{aligned} r'_x &= a_{xr}(t) - \cos(2\pi - l/r_k(t)) r_k(t), \\ r'_y &= a_y + q_{w1}(t) w1(\vartheta), \\ r'_z &= a_z + \sin(2\pi - l/r_k(t)) r_k(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Дифференцирование выражений (13) по времени в связанной системе координат дает относительные скорости движения материальных точек ленты в функции времени и координат  $\vartheta$  и  $l$ :

$$\begin{aligned} \dot{r}'_x &= \dot{a}_{xr}(t) + \sin(2\pi - l/r_k(t)) \frac{l\dot{r}_k(t)}{r_k(t)} - \\ &\quad - \cos(2\pi - l/r_k(t)) \dot{r}_k(t); \\ \dot{r}'_y &= 0; \\ \dot{r}'_z &= \cos(2\pi - l/r_k(t)) \frac{l\dot{r}_k(t)}{r_k(t)} + \\ &\quad + \dot{r}_k(t) \sin(2\pi - l/r_k(t)). \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая, что начало связанного базиса выбрано в центре масс гиростатической части КА (т. е. в данном случае это КА без ленты), выражение для радиуса-вектора центра масс всей системы может быть записано в виде

$$\mathbf{r}'_C = \left( \int_{m_{KL}} \mathbf{r}'_i dm_{KL} + m_{DL} \mathbf{r}'_D \right) / M. \quad (15)$$

Аналогично выражение для относительной скорости радиуса-вектора центра масс всей системы с учетом правила дифференцирования интеграла по переменной во времени области может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}'_C &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_{m_{KL}} \mathbf{r}'_i dm_{KL} + m_{DL} \dot{\mathbf{r}}'_D \right) / M = \\ &= \left( \mu \int_0^{s(t)} \dot{\mathbf{r}}'_i dl + \dot{s}(t) \mu \mathbf{r}'_i|_{l=s(t)} + \dot{m}_{DL} \mathbf{r}'_D \right) / M. \end{aligned} \quad (16)$$

Полученные выше выражения для  $\mathbf{r}'_i$  и  $\dot{\mathbf{r}}'_i$  пригодны для определения  $\mathbf{r}'_C$  и  $\dot{\mathbf{r}}'_C$ , но они неудобны для вычисления таких величин, как  $\mathbf{K}_r^{C_1}, \Theta^{C_1}$  и их производных по времени в связанном базисе. Удобнее рассматривать мгновенное положение материальной точки ленты на кольцевой

траектории переменного радиуса, вдоль которой точки ленты смещаются. В каждый момент времени через произвольную точку кольца  $M_i$  с угловой координатой  $\vartheta_i$  движется точка ленты. Если знать относительную скорость точки  $M_i$  кольца и скорость смещения ленты относительно этой точки, можно определить необходимые для составления уравнений движения выражения значительно проще.

Движение ленты по кольцу происходит с переменной по угловой координате скоростью и, как легко понять из рис. 5, линейно зависит от координаты  $\vartheta$ . Если в точке схода ленты с барабана она имеет скорость  $\dot{s}(t)$  относительно точки кольца с угловой координатой  $\vartheta = 0$ , то в точке кольца с угловой координатой  $\vartheta = \pi$  эта скорость уже в два раза меньше, а в точке  $\vartheta = 2\pi$  равна нулю. В результате скорость произвольной материальной точки ленты, проходящей в данный момент через произвольную точку  $M_i$  кольцевой траектории, относительно этой точки в проекциях на связанный с КА базис можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}'_x &= (2\pi - \vartheta) \sin(\vartheta) \dot{r}'_k, \\ \tilde{v}'_y &= 0, \\ \tilde{v}'_z &= (2\pi - \vartheta) \cos(\vartheta) \dot{r}'_k. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь выражения (13) можно записать иначе:

$$\begin{aligned} r'_{x'} &= a_{xr}(t) - \cos(\vartheta) r_k(t), \\ r'_{y'} &= a_y, \\ r'_{z'} &= a_z + \sin(\vartheta) r_k(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, что при  $l = (2\pi - \vartheta)r_k(t)$  выражения (13) совпадают с (18). Тем не менее дифференцирование (18) по времени в связанном базисе не даст выражение для полной относительной скорости произвольной точки ленты. Оно даст лишь скорости относительного движения точек кольца, имеющих угловую координату  $\vartheta$ . Чтобы получить такое выражение, нужно рассматривать движение точек кольца как дополнительное переносное движение. Тогда можно записать

$$\mathbf{v}'_i = \tilde{\mathbf{v}}'_i + \dot{\mathbf{r}}'_i, \quad (19)$$

где последнее слагаемое получено в результате дифференцирования по времени выражения

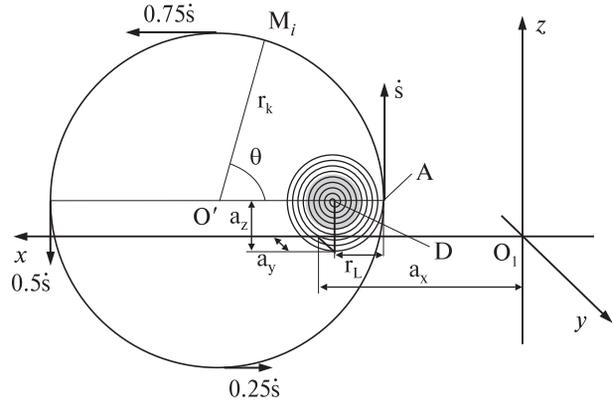


Рис. 5. Относительные скорости точек ленты при развертывании антенны

(18) в связанном базисе. Нетрудно убедиться, что выражения для проекций этого вектора на связанный базис совпадают с выражениями (14) при  $l = (2\pi - \vartheta)r_k(t)$ .

Выражение для радиуса-вектора центра масс  $S$  теперь выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_C &= \left( \int_{m_{KL}} \mathbf{r}'_i dm_{KL} + m_{DL} \mathbf{r}'_D \right) / M = \\ &= \left( \mu r_k(t) \int_0^{2\pi} \mathbf{r}'_i d\vartheta + m_{DL} \mathbf{r}'_D \right) / M. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично выражение для вектора относительной скорости центра масс может быть получено в результате дифференцирования (20):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_C &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_{m_{KL}} \mathbf{r}'_i dm_{KL} + m_{DL} \dot{\mathbf{r}}'_D \right) / M = \\ &= \left( \mu \dot{r}_k(t) \int_0^{2\pi} \mathbf{r}'_i d\vartheta + \mu \dot{r}_k(t) \int_0^{2\pi} \mathbf{r}'_i d\vartheta + \dot{m}_{DL} \mathbf{r}'_D \right) / M. \end{aligned} \quad (21)$$

Кинетический момент относительного движения ленты, как образующей кольцо, так и сматывающейся с барабана, может быть вычислен как сумма моментов элементарных количеств относительного движения точек ленты по формуле  $\mathbf{K}'_{rL} = \int_{m_L} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i dm_L$ , где  $m_L$  — полная масса ленты,  $\mathbf{v}'_i$  — вектор относительной скорости произвольной точки ленты, для кольца соответствующий представлению (19). Подставив сюда

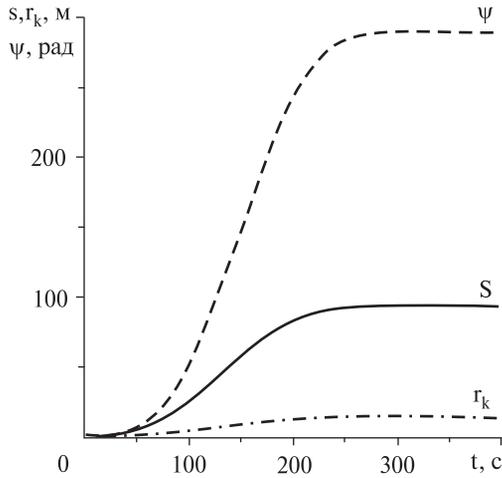


Рис. 6. Изменение длины ленты в кольце  $s$ , угла поворота барабана  $\psi$  и радиуса кольца  $r_k$  во времени

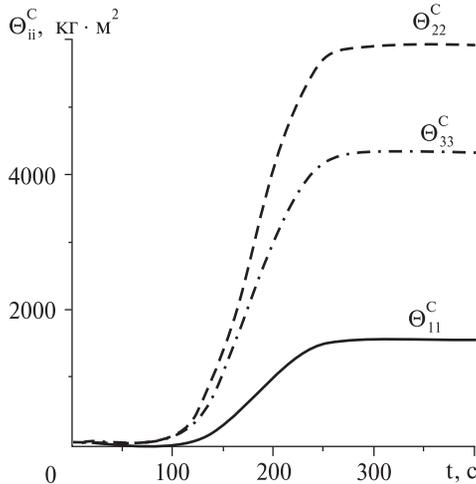


Рис. 7. Поведение во времени диагональных компонентов тензора инерции КА

необходимые выражения, после интегрирования получим компоненты вектора  $\mathbf{K}_{rL}^C$  в проекциях на оси связанного базиса. Теперь кинетический момент относительного движения ленты может быть определен относительно мгновенного положения центра масс  $C$  всей системы. В результате

$$\mathbf{K}_{rL}^C = \mathbf{K}_{rL}^C - M\mathbf{r}'_C \times \mathbf{v}'_C. \quad (22)$$

Компоненты этого вектора могут быть получены после подстановки сюда выражений (20) и (21).

При дальнейших операциях дифференцирования по времени в связанном базисе достаточно дифференцировать компоненты полученных векторов и тензоров как скалярные величины.

Выражение для кинетического момента относительного движения подвижных частей рассматриваемой системы после интегрирования по массе всех подвижных элементов можно представить в виде

$$\mathbf{K}_r^C = \{0, J_d + m_{dL}(r_0^2 + r_L^2)/2\dot{\psi} + m_{kL}((2a_z + \pi r_k)\dot{r}_k - a_z\dot{r}_L), m_{kL}a_y(2\dot{r}_k - \dot{r}_L)\}. \quad (23)$$

Используя выражения (12) и (23) и их производные по времени, при заданных численных значениях массово-геометрических параметров рассматриваемого объекта можно получить значения коэффициентов уравнений движения в любой момент времени.

При численном моделировании зададимся следующими базовыми значениями основных параметров системы: масса несущего тела  $m_1 = 55$  кг, масса одного метра ленты  $\mu_L = 0.148$  кг, толщина ленты  $\delta = 0.002$  м, радиус полностью развернутой антенны  $r_k = 15$  м, начальные отклонения по углам ориентации – нулевые, значения компонентов вектора угловой скорости КА в орбитальной системе координат в момент начала развертывания составляют  $0.0-0.05$  с<sup>-1</sup>. Длительность развертывания  $T_f - T_0 = 300$  с, закон развертывания во времени соответствует плавному выходу на постоянную скорость в течение 50 с и такой же остановке процесса. На рис. 6 показаны законы изменения во времени угла поворота барабана  $\psi$ , длины  $s$  развернутой ленты и радиуса  $r_k$  кругового кольца. Момент инерции барабана для ленты равен  $J_{dr} = 0.01$  кг·м<sup>2</sup>, диагональные компоненты тензора инерции несущего тела  $J_{xx} = 4$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_{yy} = 4$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_{zz} = 6$  кг·м<sup>2</sup>,  $r_0 = 0.2$  м,  $a_x = 1.0$  м,  $a_y = a_z = 0.2$  м. Моментами внешних сил, действующих на систему в течение времени моделирования ее поведения, будем пренебрегать, высоту круговой орбиты выберем равной 600 км, наклонение  $i = 1.0$ , долготу восходящего узла  $\Omega = 0.0$ . Хотя здесь и не рассматривается движение КА по орбите, параметры орбиты требуются

для вычисления проекций полного кинетического момента КА в проекциях на оси абсолютного базиса для контроля погрешностей решения задачи Коши. В качестве закона изменения угла поворота барабана во времени примем достаточно гладкий закон, соответствующий оптимальному развороту упругого КА с минимальными динамическими перегрузками упругих элементов в относительном движении, описанному в работе [5]. В рассматриваемом случае он также будет создавать минимально возможные на выбранном интервале времени развертывания возмущения, способствующие возникновению упругих колебаний.

Соответствующий закон изменения для длительности развертывания антенны 300 с показан на рис. 6. Здесь для выбранного закона  $\psi(t)$  показаны также законы изменения  $s(t)$  и  $r_k(t)$ . Отличие от нуля  $s(0)$  связано с тем, что в начальный момент времени наружный слой ленты на барабане рассматривается как исходное состояние кольца. Поведение во времени диагональных компонентов тензора инерции КА показано на рис. 7. Видно, что в результате развертывания антенны эти величины существенно увеличиваются. Больше всего возрастает компонент  $\Theta_{22}^c$ .

Численное решение задачи Коши проводится методом Рунге — Кутты четвертого порядка с постоянным шагом интегрирования, равным 0.001 с.

На рис. 8, 9 показано поведение во времени углов ориентации и проекций абсолютных угловых скоростей несущего тела на оси связанного базиса. Видно, что в процессе развертывания антенны КА совершает почти полный оборот вокруг оси  $S_y$ . Вращения вокруг других осей сравнительно невелики и обусловлены гироскопической связанностью соответствующих каналов. Поскольку мы предположили, что в начальный момент времени развертывания связанный базис совпадает с орбитальным, составляющая  $\omega_2(0)$  равна орбитальной скорости КА для выбранной орбиты (рис. 9). После завершения развертывания антенны, когда компоненты тензора инерции возрастают на порядки, все компоненты вектора угловой скорости практически

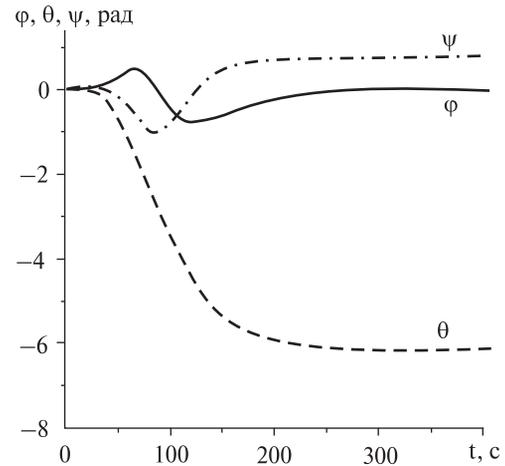


Рис. 8. Изменение углов ориентации КА

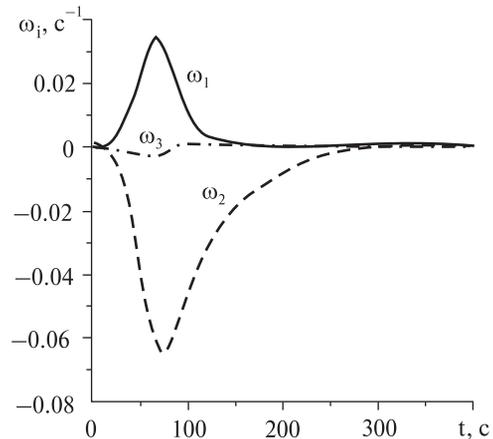


Рис. 9. Изменение проекций вектора угловой скорости КА на оси связанного базиса

обращаются в нуль, и ориентация КА в орбитальной системе координат нарушается.

Численное моделирование проводилось под контролем выполнения теоремы об изменении суммарного кинетического момента системы. В результате отсутствия внешних моментов, действующих в рассматриваемой постановке на КА, проекции вектора суммарного кинетического момента на оси абсолютного базиса  $\bar{C} \bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$  в процессе моделирования отличались от начальных значений не более чем на  $4 \cdot 10^{-10}$  кг·м<sup>2</sup>/с, в то время как модуль вектора кинетического момента подвижных частей КА при движении КА вокруг центра масс превышал 35 кг·м<sup>2</sup>/с.

Полученные результаты демонстрируют метод математического описания динамики системы с программно изменяемой геометрией и поведение реального малого космического аппарата в процессе развертывания кольцевой антенны большого радиуса.

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965. — 416 с.
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973. — 320 с.
3. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. — М.: Мир, 1980. — 292 с.
4. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.

5. *Zakrzhevskii A. E.* Slewing of flexible spacecraft with minimal relative flexible acceleration // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. — 2008. — **31**, N 3. — P. 563–570. DOI: 10.2514/1.32215

*Надійшла до редакції 19.10.09*

*A. E. Zakrzhevskii, V. F. Tkachenko, V. S. Khoroshilov*

THE DYNAMICS OF DEPLOYMENT  
OF THE RING ANTENNAE  
ON THE SPACECRAFT WITHOUT STABILIZATION

There are carried out a construction of a generalized mathematical model and a numerical modelling of the dynamics of a spacecraft with a carried body of changeable geometry. This model describes a deployment of a compact body in a ring antennae.