

УДК 629.7.054

В. М. Мельник

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ

Коливання і хвилі поліагрегатного підвісу гіроскопа

Надійшла до редакції 20.04.06

Будується математична модель пружної взаємодії підвісу поплавкового гіроскопа із зовнішнім акустичним випромінюванням. Узагальнюється теорія шляхом опису оболонкової частини довільної геометричної форми і діючими чинниками загального виду.

Розвиток ракетно-космічної техніки та досягнення практичної космонавтики змусили суттєво переглянути наявні відомості щодо відповідності паспортних характеристик поплавкових гіроскопів інерціальної навігації їхнім характеристикам у натурних умовах [3, 5, 6]. Справа в тому, що рівень акустичного тиску біля реактивного струменя РН може сягати 180 дБ і вище. Проникаючи усередину фюзеляжу, звукові збурення такого рівня, особливо антисиметрична складова надлишкового тиску, здатні розгойдати механічні системи приладів.

При цьому рідинностатичний підвіс гіроскопа стає чудовим ретранслятором акустичного випромінювання. Суттєво важливим є те, що ці поля мають просторовий характер на відміну від силового збурення, яке надходить усередину приладу крізь опори. Генеруючи у поплавковому підвісі акустичну вібрацію, звукові хвилі призводять до пружних деформацій поплавця, котрі в своїй сукупності сприймаються приладом як хибна кутова швидкість основи [1, 2].

Конкретизуючи наукову задачу, оберемо за об'єкт досліджень двостепеневий поплавковий гіроскоп серії ДУСУ2-6АС, що виготовляється серійно для літальних апаратів тривалої дії. Прилад складається із двох коаксіальних циліндрів, розділених важкою рідиною. У внутрішньому циліндрі розміщено гіроагрегат.

Проникне акустичне випромінювання генерує на поверхні поплавця пружні деформації. Най-

чутливішими до цього впливу є радіальні складові, що пояснюється меншою жорсткістю оболонки у площині шпангоута порівняно з двома іншими — повздовжньою та коловою. Проаналізуємо можливість зменшення цього впливу шляхом відмови від класичної форми колового циліндра на користь більш загальної геометрії оболонки обертання з ненульовою гауссовою кривиною бічної поверхні — опуклою чи угнутою (рисунок). Тоді випадок колового циліндра отримується при значеннях сталих Ламе $A_1 = 1$, $A_2 = R = \text{const}$.

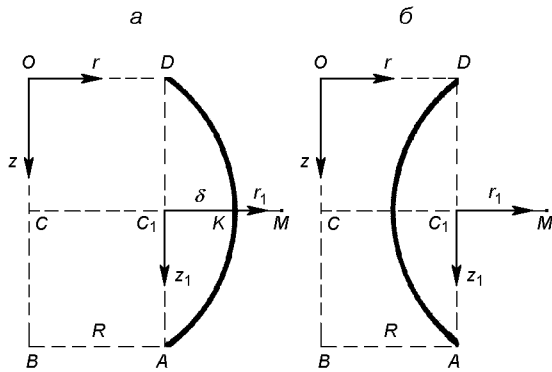
Особливістю такого підходу є можливість узагальнення теорії поплавкового гіроскопа з наступним розв'язанням питань оптимізації конструкції, маючи на меті зменшення похибок вимірювань пасивними методами ізоляції імпедансної структури підвісу.

На рисунку в обох випадках прийнято, що $OD = AB = R$, а крива $f(z)$, яка утворює оболонку обертання, симетрична відносно лінії CM , котра перетинає вісь обертання посередині ($OC = CB = l/2$). Приймаємо також, що $f(0) = f(l) = R = \text{const}$.

Лінію меридіана задамо виразом $r_1 = \pm f_1(z_1)$, причому клас функцій $f_1(z_1)$, для котрих виконуються умови

$$f_1(-z_1) = f_1(z_1), \quad f_1(\pm l/2) = 0,$$

окреслимо наступним чином:



Дві форми бокової поверхні поплавця: *a* — опукла оболонка обертання, *b* — угнута

— функції $[+ f_1(z_1)]$ — тільки опуклі, а функції $[- f_1(z_1)]$ — угнуті;

— точка з координатою $z_1 = 0$ є точкою екстремуму для функції $\pm f_1(z_1)$;

— функція $f_1(z_1)$ вважається спадною, коли $z_1 \in (0; l/2)$ (рисунок *a*) та зростаючою за умови $z_1 \in (0; l/2)$ (рисунок *b*).

Позначимо величину підйому параболи C_1K у точці $z_1 = 0$ як δ (рисунок *a*). Тоді

$$f_1(z_1) = \delta - \frac{4\delta}{l^2} z_1^2 = \delta \left(1 - 4 \frac{z_1^2}{l^2} \right).$$

Рівняння лінії меридіана оболонки в опорній системі координат Ozr буде мати вигляд

$$r = f(z) = R + \delta \left[l - \frac{4}{l^2} \left(z - \frac{l}{2} \right)^2 \right].$$

Припустимо, що оболонка поплавця відноситься до криволінійних ортогональних координат α_1 і α_2 . Їх будемо вважати за лінії кривини з радіусами R_1 та R_2 .

Якщо A_1 і A_2 — параметри Ламе серединної поверхні π оболонки, тоді, додавши сили інерції, можна скористатися рівняннями рівноваги, котрі матимуть такий розгорнутий вигляд [4, 7]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 S}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_2 + \\ & + \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1} H \right) + \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} H = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = - A_1 A_2 q_1 + \rho A_1 A_2 h \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, \\ & \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2^2 S}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_1 + \\ & + \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2^2 H}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2} H \right) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} H = \\ & = - A_1 A_2 q_2 + \rho A_1 A_2 h \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2^2 H}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_1 \right) \right] = \\ & = q_n + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

де

$$q_1 = p_1 + \frac{m_1}{R_1} \approx p_1,$$

$$q_2 = p_2 + \frac{m_2}{R_2} \approx p_2,$$

$$q_n = p_n + \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 m_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 m_2}{\partial \alpha_2} \right) \approx p_n,$$

T_1, T_2 та S — нормальні та дотична складові зусиль, M_1, M_2 — згинні моменти, H — обертаючий момент, ρ — щільність матеріалу, h — товщина, U_1 — пружні переміщення точок поверхні π у напрямку відповідної координати α_1 .

Після математичних перетворень рівняння приймають форму, зручну для інтегрування:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} - a_1(2z - 1) \frac{\partial U_z}{\partial z} - \\ & - a_2 U_z + a_3 \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z \partial \varphi} - a_4 \frac{\partial W}{\partial z} = \\ & = - [1 + \alpha_1(2z - 1)^2] q_1^* + [1 + \alpha_1(2z - 1)^2] \alpha_1^* l \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial \varphi^2} + b_1 [1 - \beta_1 (2z - 1)^2] \frac{\partial^2 U_z}{\partial z \partial \varphi} - \\ & - b_2 [1 - 2\beta_1 (2z - 1)^2] \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z^2} - b_3 (2z - 1) \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} - \\ & - b_4 (2z - 1) \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} + b_5 U_\varphi - b_6 \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \\ & = - [1 - \beta_3 (2z - 1)^2] q_2^* + \beta^{*2} [1 - \beta_3 (2z - 1)^2] \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & [-1 + \beta_4 (2z - 1)^2] \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} - c_1 \frac{\partial^4 W}{\partial z^2 \partial \varphi^2} - c_2 \frac{\partial^4 W}{\partial \varphi^4} + \\ & + c_3 (2z - 1) \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} - c_4 \frac{\partial^3 W}{\partial z \partial \varphi^2} + \\ & + c_5 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - c_6 \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} - c_7 (2z - 1) \frac{\partial W}{\partial z} - \\ & - c_8 \frac{\partial^3 U_\varphi}{\partial \varphi^3} - c_9 \frac{\partial^3 U_\varphi}{\partial z^2 \partial \varphi} - c_{10} \frac{\partial^3 U_z}{\partial z \partial \varphi^2} + \\ & + c_{11} (2z - 1) \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + c_{12} (2z - 1) \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z \partial \varphi} + \\ & + c_{13} \frac{\partial U_z}{\partial z} + c_{14} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - c_{15} (2z - 1) U_z = \\ & = [1 - \beta_5 (2z - 1)] q_3^* + \gamma^{*2} [1 - \beta_5 (2z - 1)] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Оскільки поплавець являє собою замкнену оболонку обертання, у коловому напрямку (вздовж паралелі) слід очікувати періодичності силових та кінематичних полів. Зовнішнє навантаження, хоча б формально, можна навести у вигляді рядів Фур'є за координатою φ :

$$\begin{aligned} q^* &= q^*(z, \varphi, t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[q_{ik}^{(1)}(z, t) \cos k\varphi + q_{ik}^{(2)}(z, t) \sin k\varphi \right], \\ & i = 1, 2, 3; \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Аналогічно записуються пружні переміщення поверхні у трьох напрямках:

$$\begin{aligned} U_z &= U_z(z, \varphi, t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[U_{z,k}^{(1)}(z, t) \cos k\varphi + U_{z,k}^{(2)}(z, t) \sin k\varphi \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_\varphi &= U_\varphi(z, \varphi, t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[U_{\varphi,k}^{(1)}(z, t) \sin k\varphi + U_{\varphi,k}^{(2)}(z, t) \cos k\varphi \right], \\ W &= W(z, \varphi, t) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[W_k^{(1)}(z, t) \cos k\varphi + W_k^{(2)}(z, t) \sin k\varphi \right], \end{aligned}$$

де U_z , U_φ , W — відповідно повздовжні, колові та радіальні пружні переміщення.

Найцікавішим випадком виявляється випадок неосесиметричної деформації, тобто $k = 1$.

Тоді рівняння (1) запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_{z,1}^{(1)}}{\partial z^2} - a_1 (2z - 1) \frac{\partial U_{z,1}^{(1)}}{\partial z} - a_2 U_{z,1}^{(1)} + a_3 \frac{\partial U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial z} - \\ & - a_4 \frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial z} = - [1 + \alpha_1 (2z - 1)^2] q_{1,1}^{(1)}(z, t) + \\ & + \alpha^{*2} [1 + \alpha_1 (2z - 1)^2] \frac{\partial^2 U_{z,1}^{(1)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_{z,1}^{(2)}}{\partial z^2} - a_1 (2z - 1) \frac{\partial U_{z,1}^{(2)}}{\partial z} - a_2 U_{z,1}^{(2)} - a_3 \frac{\partial U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z} - \\ & - a_4 \frac{\partial W_1^{(2)}}{\partial z} = - [1 + \alpha_1 (2z - 1)^2] q_{1,1}^{(2)}(z, t) + \\ & + \alpha^{*2} [1 + \alpha_1 (2z - 1)^2] \frac{\partial^2 U_{z,1}^{(2)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$a_1 = 4(1 + 2\nu) \frac{\delta}{R(1 + \zeta)}, \quad a_2 = 8\nu \frac{\delta}{R(1 + \zeta)},$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \frac{1 + \nu}{1 + \zeta} \frac{l}{R}, \quad a_4 = \frac{\mu + \nu}{1 + \zeta} \frac{h}{R},$$

$$q_1^* = (1 - \nu^2) \frac{q_1 l^2}{Eh^2},$$

$$\alpha^{*2} = (1 - \nu^2) \frac{\rho \omega_0^2 l^2}{Eh^2}, \quad \alpha_1 = \frac{2\mu \delta}{R(1 + \zeta)},$$

$$q_1^* = q_{1,1}^{(1)} \cos \varphi + q_{1,1}^{(2)} \sin \varphi.$$

Доповнимо рівняння (4) і (5) відповідними граничними умовами на краях $z = 0$ і $z = 1$.

Для рівняння (4) матимемо відповідно

$$L_{11} U_{z,1}^{(1)} \Big|_{z=0} + L_{12} U_{\varphi,1}^{(1)} \Big|_{z=0} - L_{13} W_1^{(1)} \Big|_{z=0} = 0,$$

де

$$L_{11} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{4\nu}{1 + \xi} \left(\frac{\delta}{R} \right),$$

$$L_{12}^{(k)} = \frac{\nu}{1 + \xi} \left(\frac{l}{R} \right) k,$$

$$L_{13} = \frac{\mu + \nu}{1 + \xi} \left(\frac{l}{R} \right);$$

$$N_{11}U_{z,1}^{(1)}|_{z=1} + N_{12}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(1)}|_{z=1} - N_{13}W_1^{(1)}|_{z=1} = 0,$$

де

$$N_{11} = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{4\nu}{1 + \xi} \left(\frac{\delta}{R} \right),$$

$$N_{12}^{(k)} = \frac{\nu}{1 + \xi} \left(\frac{l}{R} \right) k,$$

$$N_{13} = \frac{\mu + \nu}{1 + \xi} \left(\frac{l}{R} \right).$$

Для рівняння (5) маємо

$$L_{11}U_{z,1}^{(2)}|_{z=0} - L_{12}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(2)}|_{z=0} - L_{13}W_1^{(2)}|_{z=0} = 0,$$

$$N_{11}U_{z,1}^{(2)}|_{z=1} - N_{12}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(2)}|_{z=1} - N_{13}W_1^{(2)}|_{z=1} = 0.$$

Рівняння (2) запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} & -U_{\varphi,1}^{(1)} - b_1[1 - \beta_1(2z - 1)^2] \frac{\partial U_{z,1}^{(1)}}{\partial z} - \\ & - b_2[1 - 2\beta_1(2z - 1)^2] \frac{\partial^2 U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial z^2} - \\ & - b_3(2z - 1) \frac{\partial U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial z} + b_4(2z - 1)U_{z,1}^{(1)} + \\ & + b_5U_{\varphi,1}^{(1)} + b_6W_1^{(1)} = - [1 - \beta_3(2z - 1)^2]q_{2,1}^{(2)}(z, t) + \\ & + \beta^{*2}[1 - 2\beta_3(2z - 1)^2] \frac{\partial^2 U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial t^2} - \\ & - U_{\varphi,1}^{(2)} + b_1[1 - \beta_1(2z - 1)^2] \frac{\partial U_{z,1}^{(2)}}{\partial z} - \\ & - b_2[1 - 2\beta_1(2z - 1)^2] \frac{\partial^2 U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z^2} - \\ & - b_3(2z - 1) \frac{\partial U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z} - \\ & - b_4(2z - 1)U_{z,1}^{(2)} + b_5U_{\varphi,1}^{(2)} - b_6W_1^{(2)} = \\ & = - [1 - \beta_3(2z - 1)^2]q_{2,1}^{(1)} + \\ & + \beta^{*2}[1 - \beta_3(2z - 1)^2] \frac{\partial^2 U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$b_1 = \frac{1}{2}(1 + \nu)(1 + \xi) \left(\frac{R}{l} \right),$$

$$b_2 = \frac{1}{2}(1 - \nu)(1 + \xi)^2 \left(\frac{R}{l} \right),$$

$$b_3 = 2(1 - \nu)(1 + \mu)(1 + \xi) \frac{\delta R}{l^2},$$

$$b_4 = 2(3 - \nu) \frac{\delta}{l},$$

$$b_5 = 4(1 - \nu)(1 + \xi) \frac{\delta R}{l^2},$$

$$b_6 = 1 + \nu\mu,$$

$$\beta_1 = \frac{1 + \mu}{1 + \xi} \frac{\delta}{R}, \quad \beta_2 = 2 \frac{1 + \mu}{1 + \xi} \frac{\delta}{R}, \quad \beta_3 = \frac{1}{1 + \xi} \frac{\delta}{R},$$

$$q_2^* = (1 - \nu^2) \frac{R^2(1 + \xi)^2}{Eh^2} q_2,$$

$$\beta^{*2} = (1 - \nu^2) \frac{\rho\omega_0^2}{E} R^2(1 + \xi)^2,$$

$$q_2^* = q_{2,1}^{(1)} \sin\varphi + q_{2,1}^{(2)} \cos\varphi.$$

Відповідні граничні умови для рівняння (6):

$$-L_{21}^{(k)}U_{z,1}^{(1)}|_{z=0} + L_{22}U_{\varphi,1}^{(1)}|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{\partial U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial z}|_{z=1} - \frac{1}{1 + \xi} \left(\frac{l}{R} \right) kU_{z,1}^{(1)}|_{z=1} +$$

$$+ \frac{4}{1 + \xi} \left(\frac{\delta}{R} \right) U_{\varphi,1}^{(1)}|_{z=1} = 0,$$

де

$$L_{21}^{(k)} = \frac{1}{1 + \xi} \left(\frac{l}{R} \right) k, \quad L_{22} = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{4}{1 + \xi} \left(\frac{\delta}{R} \right),$$

а для рівняння (7) —

$$\frac{\partial U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z}|_{z=0} + \frac{1}{1 + \xi} \left(\frac{l}{R} \right) kU_{z,1}^{(2)}|_{z=0} -$$

$$- \frac{4}{1 + \xi} \left(\frac{\delta}{R} \right) U_{\varphi,1}^{(2)}|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{\partial U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z}|_{z=1} + \frac{1}{1 + \xi} \left(\frac{l}{R} \right) kU_{z,1}^{(2)}|_{z=1} +$$

$$+ \frac{4}{1 + \xi} \left(\frac{\delta}{R} \right) U_{\varphi,1}^{(2)}|_{z=1} = 0.$$

Рівняння (3) записуються у вигляді

$$\begin{aligned}
& [-1 + \beta_4(2z-1)^2] \frac{\partial^4 W_1^{(1)}}{\partial z^4} + c_1 \frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial z^2} - c_2 W_1^{(1)} + \\
& + c_3 (2z-1) \frac{\partial^3 W_1^{(1)}}{\partial z^3} + c_4 \frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial z^2} + c_5 \frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial z^2} + \\
& + c_6 W_1^{(1)} - c_7 (2z-1) \frac{\partial W_1^{(1)}}{\partial z} + c_8 U_{\varphi,1}^{(1)} - c_9 \frac{\partial^2 U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial z^2} + \\
& + c_{10} \frac{\partial U_{z,1}^{(1)}}{\partial z} + c_{11} (2z-1) \frac{\partial^2 U_{z,1}^{(1)}}{\partial z^2} + c_{12} (2z-1) \frac{\partial U_{\varphi,1}^{(1)}}{\partial z} + \\
& + c_{13} \frac{\partial U_{z,1}^{(1)}}{\partial z} + c_{14} U_{\varphi,1}^{(1)} - c_{15} (2z-1) U_{z,1}^{(1)} = \\
& = [1 - \beta_5(2z-1)] q_{3,1}^{(1)}(z, t) + \gamma^{*2} [1 - \beta_5(2z-1)] \frac{\partial^2 W_1^{(1)}}{\partial t^2}, \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [-1 + \beta_4(2z-1)^2] \frac{\partial^4 W_1^{(2)}}{\partial z^4} + c_1 \frac{\partial^2 W_1^{(2)}}{\partial z^2} - c_2 W_1^{(2)} + \\
& + c_3 (2z-1) \frac{\partial^3 W_1^{(2)}}{\partial z^3} + c_4 \frac{\partial W_1^{(2)}}{\partial z} + c_5 \frac{\partial^2 W_1^{(2)}}{\partial z^2} + c_6 W_1^{(2)} - \\
& - c_7 (2z-1) \frac{\partial W_1^{(2)}}{\partial z} - c_8 U_{\varphi,1}^{(2)} + c_9 \frac{\partial^2 U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z^2} + c_{10} \frac{\partial U_{z,1}^{(2)}}{\partial z} + \\
& + c_{11} (2z-1) \frac{\partial^2 U_{z,1}^{(2)}}{\partial z^2} - c_{12} (2z-1) \frac{\partial U_{\varphi,1}^{(2)}}{\partial z} + c_{13} \frac{\partial U_{z,1}^{(2)}}{\partial z} - \\
& - c_{14} U_{\varphi,1}^{(2)} - c_{15} (2z-1) U_{z,1}^{(2)} = \\
& = [1 - \beta_5(2z-1)] q_{3,1}^{(2)}(z, t) + \gamma^{*2} [1 - \beta_5(2z-1)] \frac{\partial^2 W_1^{(2)}}{\partial t^2}, \tag{9}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{2}{(1+\xi)^2} \left(\frac{l}{R}\right)^2, \\
c_2 &= \frac{1}{(1+\xi)^4} \left(\frac{l}{R}\right)^4, \\
c_3 &= 8 \frac{1+3\mu}{1+\xi} \frac{\delta}{R}, \\
c_4 &= 4 \frac{(1-\nu)(3-\mu)}{(1+\xi)^3} \frac{\delta}{R} \left(\frac{l}{R}\right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_5 &= 8 \frac{(1+\nu+4\mu)}{1+\xi} \left(\frac{\delta}{R}\right), \\
c_6 &= 16 \frac{1-\nu}{(1+\xi)^3} \frac{\delta}{R} \left(\frac{l}{R}\right)^2, \\
c_7 &= \frac{32\mu(\nu+\mu)}{(1+\xi)^2} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2, \\
c_8 &= \frac{1}{(1+\xi)^4} \left(\frac{l}{R}\right)^4, \\
c_9 &= \frac{1-\nu}{(1+\xi)^2} \left(\frac{l}{R}\right)^2, \\
c_{10} &= \frac{\nu\mu}{(1+\xi)^3} \left(\frac{l}{R}\right)^3, \\
c_{11} &= \frac{4\mu^2}{(1+\xi)^2} \left(\frac{\delta}{R}\right) \left(\frac{l}{R}\right), \\
c_{12} &= \frac{4\mu(1-\nu)(3-\mu)}{(1+\xi)^3} \frac{\delta}{R} \left(\frac{l}{R}\right)^2, \\
c_{13} &= 12(\nu+\mu) \frac{l^3}{Rh^2}, \\
c_{14} &= 12 \frac{1+\nu\mu}{(1+\xi)^2} \frac{l^4}{R^2 h^2}, \\
c_{15} &= \frac{4(1+\nu\mu)}{(1+\xi)^2} \frac{\delta}{R} \frac{12l^3}{Rh^2}, \\
\beta_4 &= \frac{1+2\mu}{1+\xi} \left(\frac{\delta}{R}\right), \quad \beta_5 = \frac{1-\mu}{1+\xi} \frac{\delta}{R}.
\end{aligned}$$

Граничні умови для рівняння (8) матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
& L_{31} U_{z,1}^{(1)} \Big|_{z=0} + L_{32}^{(k)} U_{\varphi,1}^{(1)} \Big|_{z=0} + L_{33}^{(k)} W_1^{(1)} \Big|_{z=0} = 0, \\
& - L_{41} U_{z,1}^{(1)} \Big|_{z=0} - L_{42}^{(k)} U_{\varphi,1}^{(1)} \Big|_{z=0} + L_{43}^{(k)} W_1^{(1)} \Big|_{z=0} = 0, \\
& N_{31} U_{z,1}^{(1)} \Big|_{z=1} + N_{32}^{(k)} U_{\varphi,1}^{(1)} \Big|_{z=1} + N_{33}^{(k)} W_1^{(1)} \Big|_{z=1} = 0, \\
& - N_{41} U_{z,1}^{(1)} \Big|_{z=1} - N_{42}^{(k)} U_{\varphi,1}^{(1)} \Big|_{z=1} + N_{43}^{(k)} W_1^{(1)} \Big|_{z=1} = 0,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
L_{31} &= \frac{\mu}{1+\xi} \left(\frac{l}{R}\right) \frac{\partial}{\partial z}, \\
L_{32}^{(k)} &= \frac{\nu}{(1+\xi)^2} \left(\frac{l}{R}\right)^2 k,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{33}^{(k)} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{4(\nu + \mu)}{1 + \zeta} \left(\frac{\partial}{R} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\nu}{(1 + \zeta)^2} \left(\frac{l}{R} \right)^2 k^2, \\
L_{41} &= \frac{\mu}{1 + \zeta} \left(\frac{l}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\
L_{42}^{(k)} &= \frac{2 - \nu}{(1 + \zeta)^2} \left(\frac{l}{R} \right)^2 k \frac{\partial}{\partial z}, \\
L_{43}^{(k)} &= - \frac{\partial^3}{\partial z^3} - \frac{16\mu + 4\nu}{1 + \zeta} \left(\frac{\partial}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \\
&+ \left[\frac{8(\nu + \mu)}{1 + \zeta} \left(\frac{\partial}{R} \right) + \frac{2 - \nu}{(1 + \zeta)^2} k^2 \left(\frac{l}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial z} - \\
&- \frac{8(1 - \nu)}{(1 + \zeta)^3} \left(\frac{l}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial}{R} \right) k^2, \\
N_{31} &= \frac{\mu}{1 + \zeta} \left(\frac{l}{R} \right) \frac{\partial}{\partial z}, \\
N_{32}^{(k)} &= \frac{\nu}{(1 + \zeta)^2} \left(\frac{l}{R} \right)^2 k, \\
N_{33}^{(k)} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{4(\nu + \mu)}{1 + \zeta} \left(\frac{\partial}{R} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\nu}{(1 + \zeta)^2} \left(\frac{l}{R} \right)^2 k^2, \\
N_{41} &= \frac{\mu}{1 + \zeta} \left(\frac{l}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\
N_{42}^{(k)} &= \frac{2 - \nu}{(1 + \zeta)^2} \left(\frac{l}{R} \right)^2 k \frac{\partial}{\partial z}, \\
N_{43}^{(k)} &= - \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \frac{16\mu + 4\nu}{1 + \zeta} \left(\frac{\partial}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \\
&+ \left[\frac{2 - \nu}{(1 + \zeta)^2} \left(\frac{l}{R} \right)^2 k^2 + \frac{8(\nu + \mu)}{1 + \zeta} \left(\frac{\partial}{R} \right) \right] \frac{\partial}{\partial z} + \\
&+ \frac{8(1 - \nu)}{(1 + \zeta)^3} \left(\frac{l}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial}{R} \right) k^2.
\end{aligned}$$

Граничні умови для рівняння (9) у тих же позначеннях матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
L_{31}U_{z,1}^{(2)}|_{z=0} - L_{32}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(2)}|_{z=0} + L_{33}^{(k)}W_1^{(2)}|_{z=0} &= 0, \\
- L_{41}U_{z,1}^{(2)}|_{z=0} - L_{42}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(2)}|_{z=0} + L_{43}^{(k)}W_1^{(2)}|_{z=0} &= 0; \\
N_{31}U_{z,1}^{(2)}|_{z=1} - N_{32}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(2)}|_{z=0} + N_{33}^{(k)}W_1^{(2)}|_{z=0} &= 0, \\
- N_{41}U_{z,1}^{(2)}|_{z=1} + N_{42}^{(k)}U_{\varphi,1}^{(2)}|_{z=1} + N_{43}^{(k)}W_1^{(2)}|_{z=1} &= 0.
\end{aligned}$$

Прийmemo, що

$$\begin{aligned}
U_{z,1}^{(1)} &= \omega_1(z)A_1^{(1)}(t)\varphi_1^{(1)}(z), \\
U_{z,1}^{(2)} &= \omega_1(z)A_1^{(2)}(t)\varphi_1^{(2)}(z), \\
U_{\varphi,1}^{(1)} &= \omega_1(z)B_1^{(1)}(t)\psi_1^{(1)}(z), \\
U_{\varphi,1}^{(2)} &= \omega_1(z)B_1^{(2)}(t)\psi_1^{(2)}(z), \\
W_1^{(1)} &= \omega_2(z)C_1^{(1)}(t)\gamma_1^{(1)}(z), \\
W_1^{(2)} &= \omega_2(z)C_1^{(2)}(t)\gamma_1^{(2)}(z),
\end{aligned} \tag{10}$$

де $\omega_1(z) = z^2(1 - z)^2$, $\omega_2(z) = z^4(1 - z)^4$ — функції Кравчука.

Проінтегруємо рівняння (1)–(3) за допомогою методу Бубнова—Гальоркіна, приймаючи до уваги співвідношення (10). Отримуємо звичайні диференціальні рівняння для знаходження функцій A_i :

$$a_{z1}^{(1)}\ddot{A}_1^{(1)} + a_{z2}^{(1)}\dot{A}_1^{(1)} + a_{z3}^{(1)}B_1^{(1)} + a_{z4}^{(1)}C_1^{(1)} = Q^{(1)}(t), \tag{11}$$

де

$$\begin{aligned}
a_{z1}^{(1)} &= -\alpha^{*2} \int_0^1 [1 + \alpha_1(2z - 1)^2] \omega_1^2(z) \varphi_1^{2(1)} \partial z, \\
a_{z2}^{(1)} &= \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\omega_1(z) \varphi_1^{(1)}(z)] - \right. \\
&- a_1(2z - 1) \frac{\partial}{\partial z} [\omega_1(z) \varphi_1^{(1)}(z)] - a_2 \omega_1(z) \varphi_1^{(1)}(z) \left. \right\} \times \\
&\quad \times \omega_1(z) \varphi_1^{(1)}(z) \partial z, \\
a_{z3}^{(1)} &= a_3 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} [\omega_1(z) \psi_1^{(1)}(z)] \omega_1(z) \varphi_1^{(1)}(z) \partial z, \\
a_{z4}^{(1)} &= -a_4 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} [\omega_2(z) \gamma_1^{(1)}(z)] \omega_1(z) \varphi_1^{(1)}(z) \partial z, \\
Q^{(1)}(t) &= -\int_0^1 [1 + \alpha_1(2z - 1)^2] q_{1,1}^{(1)}(z, t) \omega_1(z) \varphi_1^{(1)}(z) \partial z.
\end{aligned}$$

Друге рівняння для знаходження величини $A_1^{(2)}(t)$ складаємо, використовуючи ту ж процедуру над рівнянням (5). Отримуємо

$$a_{z1}^{(2)}\ddot{A}_1^{(2)} + a_{z2}^{(2)}\dot{A}_1^{(2)} + a_{z3}^{(2)}B_1^{(2)} + a_{z4}^{(2)}C_1^{(2)} = Q^{(2)}(t), \tag{12}$$

де

$$a_{z1}^{(2)} = -\alpha^{*2} \int_0^1 [1 + \alpha_1(2z - 1)^2] \omega_1(z) \varphi_1^{(2)} \partial z,$$

$$\begin{aligned}
a_{z_2}^{(2)} &= \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)] - \right. \\
&\quad - a_1(2z-1) \frac{\partial}{\partial z} [\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)] - \\
&\quad \left. - a_2\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z) \right\} \times \omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z) dz, \\
a_{z_3}^{(2)} &= -a_3 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} [\omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z)] \omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z) dz, \\
a_{z_4}^{(2)} &= -a_4 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} [\omega_2(z)\gamma_1^{(1)}(z)] \omega_1(z)\varphi_1^{(2)}(z) dz.
\end{aligned}$$

Аналогічно для B_i, C_i :

$$b_{\varphi_1}^{(1)} \ddot{B}_1^{(1)} - b_{\varphi_2}^{(1)} B_1^{(1)} + b_{\varphi_3}^{(1)} A_1^{(1)} + b_{\varphi_4}^{(1)} C_1^{(1)} = Q_{\varphi}^{(1)}(t), \quad (13)$$

$$b_{\varphi_1}^{(2)} \ddot{B}_1^{(2)} - b_{\varphi_2}^{(2)} B_1^{(2)} + b_{\varphi_3}^{(2)} A_1^{(2)} + b_{\varphi_4}^{(2)} C_1^{(2)} = Q_{\varphi}^{(2)}(t), \quad (14)$$

$$c_{w_1}^{(1)} \ddot{C}_1^{(1)} - c_{w_2}^{(1)} C_1^{(1)} + c_{w_3}^{(1)} B_1^{(1)} + c_{w_4}^{(1)} A_1^{(1)} = Q_w^{(1)}(t), \quad (15)$$

$$c_{w_1}^{(2)} \ddot{C}_1^{(2)} - c_{w_2}^{(2)} C_1^{(2)} + c_{w_3}^{(2)} B_1^{(2)} + c_{w_4}^{(2)} A_1^{(2)} = Q_w^{(2)}(t). \quad (16)$$

Пари рівнянь (11) і (12), (13) і (14), (15) і (16) записано у вигляді, що дозволяє за першими двома доданками визначити парціальні частоти. Очевидно, що коливальні процеси на поверхні поплавця певним чином впливають один на одного. Ступінь їхнього впливу можна оцінити для конкретних масогабаритних модифікацій ДУСУ.

Таким чином, закладені наукові засади для глибокого аналізу динаміки поплавкового гіроскопа у натурних умовах, з одного боку, та виявлено можливість для аргументованого порівняльного аналізу з класичною циліндричною модифікацією поплавця — з другого; з'явилася можливість для вирішення задач оптимізації

масогабаритних характеристик приладу. Будуються теоретичні засади розв'язання задач підвищення точності і надійності поплавкових приладів (і систем інерціальної навігації в цілому) на основі пасивних методів звукоізоляції та їхнього поєднання з іншими методами — активними, автокомпенсаційними тощо.

1. Карачун В. В., Мельник В. Н., Саверченко В. Г. Некоторые аспекты влияния проникающего акустического излучения на приборы и системы инерциальной навигации // *Космічна наука і технологія*.—2004.—10, № 4.—С. 50—59.
2. Мельник В. М. Нелінійні коливання рухомої частини поплавкового гіроскопа внаслідок неоднорідності рідиннофазної частини підвису // *Доп. НАН України*.—2003.—№ 8.—С. 54—58.
3. Мельник В. М., Карачун В. В. Инжекция акустической энергии РН и її вплив на похибки гіроскопа // *Вісник ЖДТУ. Технічні науки*.—2004.—1, № 4(31).—С. 135—138.
4. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек: В 2-х ч. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962.
5. Mel'nick V. N., Karachun V. V. Determining gyroscopic integrator errors to diffraction of sound waves // *Int. Appl. Mech.*—2004.—40, N 3.—P. 328—336.
6. Mel'nick V. N., Karachun V. V. Influence of acoustic radiation on the sensors of a gyrostabilization platform // *Int. Appl. Mech.*—2004.—40, N 10.—P. 122—130.
7. Rayleigh (Strutt) J. W. On the vibrations of a cylindrical vessel containing Liquid // *Phil. Mag.*—1883.—15.

OSCILLATION AND SURGES OF THE POLYMODULAR SUSPEND OF THE GYRO

V. N. Mel'nick

The mathematical model for elastic interplay of the barrel of a suspend gyroscope with external acoustic radiation is under construction. The theory is extended by the description of a shell part as surfaces with an arbitrary geometrical lineament and operational factors of a general view.