

УДК 681.511.22

А. В. Новиков, В. А. Яценко

Державне конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля, Дніпропетровськ

Новый подход к проблеме стохастической оптимизации линейных динамических систем с параметрическими неопределенностями

Надійшла до редакції 10.06.05

Пропонується новий підхід до розв'язування ряду задач оптимізації лінійних динамічних систем з параметричними невизначеностями різного типу. Він заснований на застосуванні формалізму тензорного аналізу для побудови моделі параметричної невизначеності. В рамках запропонованого підходу розглядаються задачі прогнозування і обробки даних, оптимального стохастичного управління та ін. Ефективність запропонованих рішень ілюструється результатами числового моделювання.

Большинству процессов управления и/или многошаговых процедур принятия решений в технических, экономических, биологических и т. д. системах свойственны различные неопределенности. Эти неопределенности не позволяют точно оценить влияние всех факторов и использовать теорию детерминированных систем. Неопределенности, присущие как самой исследуемой системе, так и системе измерений (наблюдений), во многих случаях могут быть представлены в виде стохастических процессов, и для анализа таких систем и синтеза управлений применимы методы стохастической оптимизации.

Целью настоящей работы является изложение нового подхода к решению задач стохастической оптимизации для линейных динамических систем (ЛДС) с параметрической неопределенностью (ПН). Эти решения обладают теоретической прозрачностью и вычислительной эффективностью. С использованием предлагаемых моделей ПН можно с высокой степенью точности описать следующие процессы и явления:

- разброс значений параметров в производственной серии;

- изменение значений параметров в процессе эксплуатации системы;
- воздействие на параметры трудно прогнозируемых и/или случайных факторов;
- ошибки линеаризации модели системы.

Большинство методов стохастической оптимизации систем с ПН используют отображение состояний и неточно известных параметров системы в некоторое пространство расширенного состояния. Однако в этом случае математическая модель ЛДС трансформируется в нелинейную систему, что существенно затрудняет получение аналитических решений и проведение их анализа. Как следствие, широко применяемые в настоящее время адаптивные методы синтеза систем управления (например, построенные на базе нейронных сетей или нечетких систем) используют в своем составе «идентификатор», с помощью которого оцениваются неизвестные параметры объекта управления, и собственно схема управления, спроектированная на основе гипотезы о «достоверной эквивалентности». При этом предполагается, что оценки параметров совпадают с их истинными значениями [16, 17]. Как будет далее показано, использование дан-

ной эвристики для рассматриваемого случая ЛДС с ПН приводит к существенному снижению эффективности проектируемых систем.

Для сохранения описываемой моделью ЛДС метода (структурьи) взаимодействия состояний системы и ее параметров предлагается использовать иной подход. Основная идея предлагаемого подхода заключается в использовании формализма тензорного исчисления для построения математического описания статистических характеристик ПН ЛДС. Поскольку для описания неточно известных параметров ЛДС обычно используются случайные матрицы, то необходимо определить их статистические характеристики, а именно математическое ожидание и второй центральный момент. По аналогии с общеизвестными определениями многомерного статистического анализа (математическое ожидание случайного вектора — вектор, второй центральный момент — матрица) математическим ожиданием случайной матрицы является матрица, а второй центральный момент предлагается описывать математическим объектом с четырьмя индексами, или тензором.

Эта идея рассматривается в начале работы. Вводятся определения тензоров, которые являются вторым центральным моментом случайной квадратной матрицы (случайного тензора ранга 2) и ковариацией случайных вектора и квадратной матрицы. Далее, поскольку тензорный анализ не оперирует с математическими объектами, аналогичным прямоугольным матрицам, вводится понятие дуального тензора, или тензора, определенного в двух различных метрических пространствах. Вводятся определения случайного дуального тензора, его математического ожидания и второго центрального момента, ковариации случайных вектора и дуального тензора, а также ковариации случайных обычного и дуального тензоров.

К сожалению, объем журнальной статьи не дает возможности привести полный вывод решений для рассматриваемых в рамках предлагаемого подхода задач. Поэтому далее приводятся только сводки формул для следующих задач:

- прогнозирование состояний в линейных динамических системах с параметрической неопределенностью;
- обработка измерений в линейных динамических системах с параметрической неопреде-

ленностью (проблемы фильтрации и идентификации);

- оптимальное стохастическое управление в линейных динамических системах с параметрической неопределенностью.

Работа завершается описанием результатов проведенного численного моделирования предлагаемых алгоритмов обработки измерительных данных и законов оптимального управления.

ТЕНЗОРНАЯ МОДЕЛЬ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В рамках настоящего рассмотрения под линейными динамическими системами (ЛДС) будут пониматься математические объекты, описываемые с помощью системы дискретных уравнений

$$x(k+1) = F(k)x(k) + G(k)u(k) + w(k), \quad (1)$$

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k), \quad (2)$$

где $x(k) \in R_x^N$ — вектор состояний системы; $u(k) \in R_u^M$ — вектор управляющих воздействий; $F(k)$ и $G(k)$ — матрицы неточно известных параметров системы соответствующих размерностей; $w(k) \in R_x^N$ — вектор входного шума; $z(k) \in R_z^L$ — вектор измерений (наблюдений); $H(k)$ — матрица параметров системы соответствующей размерности; $v(k) \in R_z^L$ — вектор помехи измерений. Шумы $w(k)$ и $v(k)$ полагаются некоррелированными белыми нормальными случайными процессами с нулевым математическим ожиданием и $\text{var}(w(k)) = Q(k)$, $\text{var}(v(k)) = R(k)$, где $Q(k)$ — положительно полуопределенная и $R(k)$ — положительно определенная симметрическая матрицы, k — время.

Везде далее будет предполагаться, что совокупность оценок состояний системы и ее неточно известных параметров $\{x(\cdot), F(\cdot), G(\cdot)\}$ распределена по нормальному закону. Известно, что нормальное распределение набора случайных величин однозначно определяется математическим ожиданием и вторым центральным моментом (ковариационной матрицей) этого набора. Поэтому, задав математические объекты, однозначно определяющие математическое ожидание и второй центральный момент случайной

совокупности $\{x(\cdot), F(\cdot), G(\cdot)\}$, мы тем самым задаем нормальное распределение этой совокупности.

Как уже упоминалось, предлагаемый подход основан на использовании аппарата тензорного анализа [2, 11] для построения статистического описания характеристик ПН. Ниже будут введены формальные определения набора математических объектов, описывающих математическое ожидание и второй центральный момент $\{x(\cdot), F(\cdot), G(\cdot)\}$.

Пусть задано евклидово пространство R_x^N , $x(\cdot) \in R_x^N$ с метрическим тензором $g_{ij} = \delta_{ij}$ (ассоциированный тензор $g^{ij} = \delta^{ij}$). Полученные далее соотношения верны и для однородных метрик, т. е. для случая $g_{ij}(x) = g_{ij}$ ($g^{ij}(x) = g^{ij}$).

Введем следующие определения.

Определение 1. Случайным вектором $x(\cdot)$ (ковектором) называется вектор (ковектор), элементами которого являются случайные величины.

Определение 2. Вектор (ковектор) $\bar{x}(\cdot)$ является математическим ожиданием случайного вектора (ковектора) $x(\cdot)$, если их компоненты связаны соотношением

$$\bar{x}^i(\cdot) = M\{x^i(\cdot)\},$$

$$\bar{x}_i(\cdot) = M\{x_i(\cdot)\}.$$

Определение 3. Матрица $\alpha(\cdot)$ (тензор ранга 2, типа $(1, 1)$) называется ковариационной матрицей случайного вектора $x(\cdot)$, если их компоненты связаны соотношением

$$\begin{aligned} \alpha_j^i(\cdot) &= \text{var}\{x^i(\cdot)\} = \\ &= M\{(x^i(\cdot) - \bar{x}^i(\cdot))g_{jk}(x^k(\cdot) - \bar{x}^k(\cdot))\}. \end{aligned}$$

Для ковектора $x_j(\cdot)$ ковариационная матрица $\tilde{\alpha}(\cdot)$ определяется как

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_j^i(\cdot) &= \text{var}\{x_j(\cdot)\} = \\ &= M\{(x_j(\cdot) - \bar{x}_j(\cdot))g_{ik}(x_k(\cdot) - \bar{x}_k(\cdot))\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что выполняется равенство $\alpha(\cdot) = \tilde{\alpha}(\cdot)$.

Определение 4. Случайной матрицей (тензор ранга 2, типа $(1, 1)$) называется матрица (тензор ранга 2, типа $(1, 1)$), элементы которой являются случайными величинами. При этом не обязательно все элементы матрицы являются случайными величинами, предлагаемый подход

включает и случай, когда часть параметров модели системы известна точно априори, т. е. когда совокупность параметров системы подчиняется вырожденному нормальному распределению.

Определение 5. Матрица $\bar{F}(\cdot)$ (тензор ранга 2, типа $(1, 1)$) называется математическим ожиданием случайной матрицы $F(\cdot)$, если их элементы связаны соотношением

$$\bar{F}_j^i(\cdot) = M\{F_j^i(\cdot)\}.$$

Пусть в пространстве R_x^N определена случайная матрица $F(\cdot)$ с математическим ожиданием $\bar{F}(\cdot)$ (тензоры ранга 2, типа $(1, 1)$ соответственно) и случайный вектор $x(\cdot)$ с математическим ожиданием $\bar{x}(\cdot)$ (тензоры ранга 1, типа $(1, 0)$ соответственно).

Приведенные пять определений носят формальный характер, и в сущности являются известными определениями теории вероятностей, сформулированными в терминах тензорного анализа.

Определение 6. Вторым центральным моментом случайной матрицы $F(\cdot)$ (случайного тензора ранга 2 и типа $(1, 1)$) является тензор $\beta(\cdot)$ ранга 4 типа $(2, 2)$, компоненты которого задаются соотношением

$$\begin{aligned} \beta_{kl}^{ij}(\cdot) &= [\text{var}(F(\cdot))]_{kl}^{ij} = \\ &= M\{(F_k^i(\cdot) - \bar{F}_k^i(\cdot))g_{ml}g^{nj}(F_n^m(\cdot) - \bar{F}_n^m(\cdot))\}. \end{aligned}$$

Определение 7. Первым смешанным центральным моментом случайной матрицы $F(\cdot)$ и случайного вектора $x(\cdot)$ называется тензор $\varphi(\cdot)$ ранга 3 типа $(1, 2)$, компоненты которого задаются соотношением

$$\begin{aligned} \varphi_{jk}^i(\cdot) &= [\text{cov}(F(\cdot), x(\cdot))]_{jk}^i = \\ &= M\{(F_j^i(\cdot) - \bar{F}_j^i(\cdot))g_{mk}(x^m(\cdot) - \bar{x}^m(\cdot))\}. \end{aligned}$$

Определение 8. Первым смешанным центральным моментом случайного вектора $x(\cdot)$ и случайной матрицы $F(\cdot)$ называется тензор $\bar{\varphi}(\cdot)$ ранга 3 типа $(2, 1)$ компоненты которого задаются соотношением

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_k^{ij}(\cdot) &= [\text{cov}(x(\cdot), F(\cdot))]_k^{ij} = \\ &= M\{(x^i(\cdot) - \bar{x}^i(\cdot))g_{mk}g^{nj}(F_n^m(\cdot) - \bar{F}_n^m(\cdot))\}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что тензоры $\varphi(\cdot)$ и $\bar{\varphi}(\cdot)$ связаны уравнением $\varphi_{jk}^i(\cdot) = g^{ij}g_{km}g_{jn}\bar{\varphi}_l^{mn}(\cdot)$.

Тензорный анализ не оперирует с математическими объектами, аналогичными прямоугольным матрицам. Этот факт обуславливает необходимость введения следующих понятий.

Пусть заданы два римановы пространства: пространство R_x^N , $x(\cdot) \in R_x^N$ и пространство R_u^M , $u(\cdot) \in R_u^M$ с метрическими тензорами g_{ij} и h_{ij} соответственно (ассоциированные тензоры g^{ij} и h^{ij}). Математический объект $x(\cdot)$, являющийся вектором пространства R_x^N , относительно пространства R_u^M можно рассматривать как некий скаляр, поскольку $x(\cdot)$ не изменяется при допустимых преобразованиях этого пространства. И наоборот, математический объект $u(\cdot)$, являющийся вектором пространства R_u^M , относительно пространства R_x^N можно также рассматривать как некий скаляр. Пусть векторы $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$ связаны соотношением $x(\cdot) = G(\cdot)u(\cdot)$, где $G(\cdot)$ — прямоугольная матрица соответствующей размерности. Тогда при всех допустимых преобразованиях T_x и T_u пространств R_x^N и R_u^M выполняется соотношение

$$T_x x(\cdot) = T_x G(\cdot) T_u^{-1} T_u u(\cdot).$$

Из этого следует, что прямоугольную матрицу $G(\cdot)$ можно рассматривать как некоторый дуальный математический объект, который представляет собой вектор относительно пространства R_x^N (тензор ранга 1, типа $(1, 0)$), а относительно пространства R_u^M является некоторым ковектором (тензором ранга 1, типа $(0, 1)$).

Дальнейшее рассмотрение приведет к необходимости введения дуальных тензоров более сложной структуры, для определения которых будут использоваться следующие обозначения: дуальный тензор ранга (n_x, n_u) типа $((k_x, l_x), (k_u, l_u))$, где n_x и (k_x, l_x) ранг и тип тензора относительно пространства R_x^N , а n_u и (k_u, l_u) — ранг и тип тензора относительно пространства R_u^M .

Тогда можно ввести формальные определения — аналоги определений 4—8 — для случайных дуальных тензоров.

Определение 9. Прямоугольная матрица $G(\cdot)$ (дуальный тензор пространств R_x^N и R_u^M ранга $(1, 1)$ типа $((1, 0), (0, 1))$) называется случайной,

если ее элементы являются случайными величинами.

Определение 10. Прямоугольная матрица $\bar{G}(\cdot)$ (дуальный тензор пространств R_x^N и R_u^M ранга $(1, 1)$ типа $((1, 0), (0, 1))$) называется математическим ожиданием случайной прямоугольной матрицы $G(\cdot)$, если их элементы связаны соотношением

$$\bar{G}_j^i(\cdot) = M\{G_j^i(\cdot)\}.$$

Определение 11. Второй центральный момент случайного дуального тензора $G(\cdot)$ пространств R_x^N и R_u^M ранга $(1, 1)$ типа $((1, 0), (0, 1))$ определяется как дуальный тензор ранга $(2, 2)$ типа $((1, 1), (1, 1))$, компоненты которого определяются соотношением

$$\begin{aligned} \gamma_{kl}^{ij}(\cdot) &= \{\text{var}(G(\cdot))\}_{kl}^{ij} = \\ &= M\{(G_k^i(\cdot) - \bar{G}_k^i(\cdot))g_{lm}h^{jn}(G_n^m(\cdot) - \bar{G}_n^m(\cdot))\}. \end{aligned}$$

Определение 12. Первый смешанный центральный момент случайного дуального тензора $G(\cdot)$ и случайного вектора $x(\cdot)$ является дуальный тензор $\psi(\cdot)$ ранга $(2, 1)$ типа $((1, 1), (0, 1))$, компоненты которого определяются соотношением

$$\begin{aligned} \psi_{jk}^i(\cdot) &= \{\text{cov}(G(\cdot), x(\cdot))\}_{jk}^i = \\ &= M\{(G_j^i(\cdot) - \bar{G}_j^i(\cdot))g_{mk}(x^m(\cdot) - \bar{x}^m(\cdot))\}. \end{aligned}$$

Определение 13. Первый смешанный центральный момент случайного вектора $x(\cdot)$ и случайного дуального тензора $G(\cdot)$ будет называться дуальный тензор $\bar{\psi}(\cdot)$ ранга $(2, 1)$ типа $((1, 1), (1, 0))$, компоненты которого определяются соотношением

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_k^{ij}(\cdot) &= \{\text{cov}(x(\cdot), G(\cdot))\}_k^{ij} = \\ &= M\{(x^i(\cdot) - \bar{x}^i(\cdot))g_{mk}h^{nj}(G_n^m(\cdot) - \bar{G}_n^m(\cdot))\}. \end{aligned}$$

Можно показать, что, как и для случая квадратных матриц, дуальные тензоры $\psi(\cdot)$ и $\bar{\psi}(\cdot)$ связаны соотношением $\psi_{jk}^i(\cdot) = g^{il}h_{jn}g_{km}\bar{\psi}_l^{mn}(\cdot)$.

Определение 14. Первый смешанный центральный момент случайных квадратной и прямоугольной матриц $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \nu_{kl}^{ij}(\cdot) &= \{\text{cov}(F(\cdot), G(\cdot))\}_{kl}^{ij} = \\ &= M\{(F_k^i(\cdot) - \bar{F}_k^i(\cdot))g_{ml}h^{nj}(G_n^m(\cdot) - \bar{G}_n^m(\cdot))\}. \end{aligned}$$

Из этого определения следует, что $\nu(\cdot)$ является дуальным тензором ранга (3, 1) типа ((1, 2), (1, 0)).

Аналогичным способом можно определить первый смешанный центральный момент прямоугольной и квадратной матриц $\bar{\nu}(\cdot)$, который будет дуальным тензором ранга (3, 1) типа ((2, 1), (0, 1)).

Таким образом, введены определения для всех математических ожиданий, первых смешанных и вторых центральных моментов элементов случайной совокупности $\{x(\cdot), F(\cdot), G(\cdot)\}$. При этом важен сам факт, что совокупность $P(\cdot) = \{\bar{x}(\cdot), \bar{F}(\cdot), \bar{G}(\cdot), \alpha(\cdot), \beta(\cdot), \gamma(\cdot), \nu(\cdot), \varphi(\cdot), \psi(\cdot)\}$ однозначно определяет нормальное распределение случайной совокупности $\{x(\cdot), F(\cdot), G(\cdot)\}$. Здесь и далее используются обозначения

$$\begin{aligned}\bar{x}(\cdot) &= M\{x(\cdot)\}, & \bar{F}(\cdot) &= M\{F(\cdot)\}, \\ \bar{G}(\cdot) &= M\{G(\cdot)\}, & \alpha(\cdot) &= \text{var}\{x(\cdot)\}, \\ \beta(\cdot) &= \text{var}\{F(\cdot)\}, & \gamma(\cdot) &= \text{var}\{G(\cdot)\}, \\ \nu(\cdot) &= \text{cov}\{F(\cdot), G(\cdot)\}, \\ \varphi(\cdot) &= \text{cov}\{F(\cdot), x(\cdot)\}, \\ \psi(\cdot) &= \text{cov}\{G(\cdot), x(\cdot)\}.\end{aligned}$$

При проведении дальнейших выкладок в уравнениях могут появиться следующие обозначения для сопряженных смешанных моментов:

$$\begin{aligned}\bar{\nu}(\cdot) &= \text{cov}\{G(\cdot), F(\cdot)\}, \\ \bar{\varphi}(\cdot) &= \text{cov}\{x(\cdot), F(\cdot)\}, \\ \bar{\psi}(\cdot) &= \text{cov}\{x(\cdot), G(\cdot)\}.\end{aligned}$$

Следует отметить, что введенные математические объекты (тензоры, дуальные тензоры), обладают свойством инвариантности относительно группы допустимых преобразований пространств R_x^N и R_u^M . Из этого следует, что корректные уравнения, составленные с использованием введенных математических объектов, будут также обладать свойством инвариантности относительно группы допустимых преобразований этих пространств.

В рамках проводимого рассмотрения предполагается, что матрица параметров $H(\cdot)$ известна точно — это предположение правомерно для многих приложений. При необходимости можно обобщить рассмотрение и для случая неопределенности

ленности в элементах матрицы $H(\cdot)$. В этом случае потребуется введение понятия «тройственного» тензора, или тензора, определенного уже в трех пространствах R_x , R_u и R_z . При этом должны быть определены соответствующие случайные тензоры и их математические ожидания, вторые центральные моменты и все необходимые ковариации, т. е. определено полное статистическое описание случайной совокупности $\{x(\cdot), F(\cdot), G(\cdot), H(\cdot)\}$. Далее можно получить требуемые соотношения для систем с такого рода ПН.

В дальнейшем будут рассматриваться два типа параметрической неопределенности — устранимая и неустранимая.

Неустранимая ПН характеризуется воздействием на параметры системы трудно прогнозируемых и/или случайных факторов, которые могут быть описаны с помощью математической модели флюктуаций или случайных блужданий. В этом случае параметры системы можно представить в виде выборок из некоторых случайных процессов типа белого шума, характеризуемыми известными априори набором математических ожиданий, дисперсий и коэффициентов корреляций, т. е. совокупностью $\{F(\cdot), \bar{G}(\cdot), \beta(\cdot), \gamma(\cdot), \nu(\cdot)\}$; при этом предполагается, что оценки состояний системы и ее параметров являются некоррелированными величинами. Поэтому при выводе соотношений в качестве информационного состояния ЛДС с неустранимой ПН была использована совокупность вида $P_i(\cdot) = \{\bar{x}(\cdot), \alpha(\cdot)\}$.

Под устранимой ПН будет пониматься неопределенность, которую можно уменьшить путем проведения экспериментальной отработки системы, т. е. путем проведения испытаний и соответствующей обработки их результатов. Этот тип ПН характеризует априорное незнание точных значений параметров системы. Это требует учета того факта, что параметры системы имеют вполне определенные стационарные значения, что можно описать с помощью системы уравнений

$$\begin{aligned}F(k+1) &= F(k), \\ G(k+1) &= G(k).\end{aligned}$$

Для статистического описания ЛДС с устранимой ПН будет использоваться информационное состояние $P_R(\cdot) = \{\bar{x}(\cdot), \bar{F}(\cdot), \bar{G}(\cdot), \alpha(\cdot), \beta(\cdot), \gamma(\cdot), \nu(\cdot), \varphi(\cdot), \psi(\cdot)\}$. При этом в обоих моделях

ПН предполагается, что параметры системы $\{F(k), G(k)\}$ и шумы $w(k)$ и $v(k)$ являются некоррелированными величинами.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Компоненты прогнозируемого информационного состояния линейных динамических систем с неустранимой параметрической неопределенностью

$$P_i(k+1|k) = \{\bar{x}(k+1|k), \alpha(k+1|k)\}$$

задается соотношениями

$$\bar{x}(k+1|k) = M\{x(k+1|P_i(k)\} =$$

$$= \bar{F}(k)\bar{x}(k) + \bar{G}(k)u(k),$$

$$\alpha(k+1|k) = \text{var}(x(k) | P_i(k)) =$$

$$= \bar{F}(k)\alpha(k)\bar{F}^T(k) + Q(k) + A + A^T +$$

$$+ \{\beta_{lj}^{ik}(k)(\alpha_k^l(k) + \bar{x}_k^l(k)\bar{x}_l(k)) + \gamma_{lj}^{ik}(k)u_l^l(k)u_k(k)\},$$

$$A = \{\nu_{lj}^{ik}(k)\bar{x}_l^i(k)u_k(k)\}.$$

Здесь и далее для сокращения объема формул наряду с тензорными обозначениями используется и матричная форма записи. При этом используется контекстная форма — если основная запись формулы использует тензорные обозначения, то фигурные скобки выделяют ее часть, записанную в матричной форме. И наоборот — если основная запись формулы выполнена с использованием матричных обозначений, то фигурные скобки выделяют ее часть, записанную в тензорной форме. В отдельных случаях может использоваться вложенная форма этого правила, например, для обозначения операции транспонирования матрицы.

После проведения громоздких, но сравнительно несложных выкладок можно получить следующие соотношения для составляющих информационного состояния ЛДС с устранимой ПН:

$$\bar{x}(k+1|k) = M\{x(k+1) | P_R(k)\} =$$

$$= \bar{F}(k)\bar{x}(k) + \bar{G}(k)u(k) + \{\varphi_{jk}^i(k)g^{ik}\},$$

$$\bar{F}(k+1|k) = M[\bar{F}(k+1) | P_R(k)] = \bar{F}(k),$$

$$\bar{G}(k+1|k) = M[\bar{G}(k+1) | P_R(k)] = \bar{G}(k),$$

$$\alpha(k+1|k) = \text{var}(x(k+1) | P_R(k)) =$$

$$= \bar{F}(k)\alpha(k)\bar{F}^T(k) + Q(k) + A + A^T +$$

$$+ \{\beta_{lj}^{ik}(k)(\alpha_k^l(k) + \bar{x}_k^l(k)\bar{x}_l(k)) +$$

$$+ \gamma_{lj}^{ik}(k)u_l^l(k)u_k(k) + \varphi_{kl}^i(k)\bar{\varphi}_j^{kl}(k)\},$$

$$\beta_{jk}^{il}(k+1|k) =$$

$$= \{\text{var}(F(k+1) | P_R(k)\}_{jk}^{il} = \beta_{jk}^{il}(k),$$

$$\gamma_{jl}^{ik}(k+1|k) =$$

$$= \{\text{var}(G(k+1) | P_R(k)\}_{jl}^{ik} = \gamma_{jl}^{ik}(k),$$

$$\nu_{jl}^{ik}(k+1|k) =$$

$$= \{\text{cov}(F(k+1), G(k+1) | P_R(k)\}_{jl}^{ik} = \nu_{jl}^{ik}(k),$$

$$\varphi_{jk}^i(k+1|k) =$$

$$= \{\text{cov}(F(k+1), x(k+1) | P_R(k)\}_{jk}^i =$$

$$= [\bar{F}^T(k)]_k^l \varphi_{jl}^i(k) + \beta_{jk}^{il}(k)\bar{x}_l(k) + \nu_{jk}^{il}(k)u_l(k),$$

$$\psi_{jk}^i(k+1|k) =$$

$$= \{\text{cov}(G(k+1), x(k+1) | P_R(k)\}_{jk}^i =$$

$$= [\bar{F}^T(k)]_k^l \psi_{jl}^i(k) + \bar{\nu}_{jk}^{il}(k)\bar{x}_l(k) + \gamma_{jk}^{il}(k)u_l(k).$$

Здесь использовались обозначения

$$\bar{x}_i(k) = g_{ij}\bar{x}_j(k), \quad u_i(k) = h_{ij}u_j(k)$$

(данные обозначения будут использоваться и в дальнейшем), и

$$A = \{\nu_{lj}^{ik}(k)\bar{x}_l^i(k)u_k(k) + \bar{F}_k^i(k)\bar{\varphi}_j^{kl}(k)\bar{x}_l(k) +$$

$$+ \bar{F}_k^i(k)\bar{\varphi}_j^{kl}(k)u_l(k)\}.$$

Нетрудно заметить, что приведенные выше соотношения для ковариационной матрицы состояний $\alpha(k+1|k)$ по своей форме совпадают с аналогичным соотношением для прогноза фильтра Калмана — отличие заключается в появлении дополнительных членов, пропорциональных второму центральному моменту параметров системы, т. е. $\{\beta(\cdot), \gamma(\cdot), \nu(\cdot)\}$. Это может иметь принципиальное значение, поскольку тензор $\beta(k)$ является положительно полуопределенным (это положение использует матричные анало-

гии), то даже в случае $\bar{x}(k) = 0$, $u(k) = 0$ и устойчивой матрицы $F(k)$ уравнение для прогноза оценки $\alpha(k+1|k)$ может быть неустойчивым, и игнорирование фактора ПН может привести к существенным смещениям прогнозируемых оценок.

ОБРАБОТКА ИЗМЕРЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Для составляющих информационного состояния

$$P_I(k+1|k+1) = P_I(k+1|k, z(k+1))$$

выполняются соотношения, в точности совпадающие с уравнениями фильтра Калмана

$$\bar{x}(k+1|k+1) =$$

$$\bar{x}(k+1|k) + \alpha(k+1|k)B(k+1),$$

$$\alpha(k+1|k+1) =$$

$$\alpha(k+1|k) - \alpha(k+1|k)A(k+1)\alpha(k+1|k).$$

Компоненты информационного состояния $P_R(k+1|k+1)$ задаются соотношениями

$$\bar{x}(k+1|k+1) =$$

$$= \bar{x}(k+1|k) + \alpha(k+1|k)B(k+1),$$

$$\bar{F}_j^i(k+1|k+1) =$$

$$= \bar{F}_j^i(k+1|k) + \varphi_{jk}^i(k+1|k)B^k(k+1),$$

$$\bar{G}_j^i(k+1|k+1) =$$

$$= \bar{G}_j^i(k+1|k) + \psi_{jk}^i(k+1|k)B^k(k+1),$$

$$\alpha(k+1|k+1) =$$

$$= \alpha(k+1|k) - \alpha(k+1|k)A(k+1)\alpha(k+1|k),$$

$$\beta_{jl}^{ik}(k+1|k+1) = \beta_{jl}^{ik}(k+1|k) -$$

$$- \varphi_{jm}^i(k+1|k)A_n^m(k+1)\varphi_l^{nk}(k+1|k),$$

$$\gamma_{jl}^{ik}(k+1|k+1) = \gamma_{jl}^{ik}(k+1|k) -$$

$$- \psi_{jm}^i(k+1|k)A_n^m(k+1)\psi_l^{nk}(k+1|k),$$

$$\nu_{jl}^{ik}(k+1|k+1) = \nu_{jl}^{ik}(k+1|k) -$$

$$- \varphi_{jm}^i(k+1|k)A_n^m(k+1)\psi_l^{nk}(k+1|k),$$

$$\begin{aligned} \varphi_{jk}^i(k+1|k+1) &= \varphi_{jk}^i(k+1|k) - \\ &- \varphi_{jm}^i(k+1|k)A_n^m(k+1)[\alpha^T(k+1|k)]_k^n, \\ \psi_{jk}^i(k+1|k+1) &= \psi_{jk}^i(k+1|k) - \\ &- \psi_{jm}^i(k+1|k)A_n^m(k+1)[\alpha^T(k+1|k)]_k^n. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A(k+1) &= \\ &= H^T(k+1)(H(k+1)\alpha(k+1|k)H^T(k+1) + \\ &\quad + R(k+1))^{-1}H(k+1), \\ B(k+1) &= \\ &= H^T(k+1)(H(k+1)\alpha(k+1|k)H^T(k+1) + \\ &\quad + R(k+1))^{-1}(z(k+1) - H(k+1)\bar{x}(k+1|k)). \end{aligned}$$

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Пусть качество функционирования системы (стоимость управления) задается квадратичным функционалом

$$J(U_0^{N-1}) = \frac{1}{2} M \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (x(k+1)^T A(k+1)x(k+1) + u^T(k)B(k)u(k)) \right\},$$

где $A(\cdot)$ — положительно полуопределенная и $B(\cdot)$ — положительно определенная матрицы соответствующих размерностей.

Задача заключается в определении траектории управлений $\tilde{U}_0^{N-1} = \{\tilde{u}(0), \dots, \tilde{u}(N-1)\}$, минимизирующих функционал (3) на системе уравнений (1), (2).

Для решения этого класса задач была использована процедура, по своей сути являющаяся разновидностью метода инвариантного погружения [6]. В методе инвариантного погружения вместо решения исходной задачи рассматривается другая, более общая задача. При этом отыскиваемое решение оказывается погруженным в решение рассматриваемой общей задачи, которое в ряде случаев можно достаточно легко получить.

**ОПТИМАЛЬНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ
С НЕУСТРАНИМОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ**

Оптимальные управление отыскивались с использованием метода стохастического динамического программирования [2—4, 11], который для рассматриваемого случая можно записать в виде

$$J^*(k) = \min_{u(k)} M \left\{ \frac{1}{2} (x(k+1)^T A(k+1) x(k+1) + u^T(k) B(k) u(k)) + J^*(k+1) + P_1(k) \right\},$$

где решение начинается с рассмотрения следующей задачи минимизации:

$$J^*(N-1) = \min_{u(N-1)} M \left\{ \frac{1}{2} (x(N)^T A(N) x(N) + u^T(N-1) B(N-1) u(N-1)) + P_1(N-1) \right\}.$$

Для этой задачи было получено следующее решение. Оптимальное управление задается соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{u}(k) &= -C(k)\bar{x}(k+k), \\ C(k) &= T^{-1}(k)\tilde{C}(k), \\ T(k) &= \bar{G}^T(k)A(k+1+k+1)\bar{G}(k) + \\ &+ B(k) + \left\{ \gamma_{jl}^{ki}(k)(A_k^l(k+1+k+1) + K_k^l(k+1+k+1)) \right\}, \\ \tilde{C}(k) &= \bar{G}^T(k)A(k+1+k+1)\bar{F}(k) + \\ &+ \left\{ \nu_{jl}^{ki}(k)(A_k^l(k+1+k+1) + K_k^l(k+1+k+1)) \right\}. \end{aligned}$$

При этих управлениях функционал имел следующую воспроизводящую форму:

$$\begin{aligned} V(k) &= \frac{1}{2} \left\{ M(x(k+1)^T A(k+1+k+1) x(k+1) + \right. \\ &\quad \left. + u^T(k) B(k) u(k)) + P_1(k) \right\} + \\ &+ \text{Sp}K(k+1+k+1)\Delta\alpha(k+1+k) + J_0^*(k+1), \\ J_0^*(N) &= 0. \end{aligned}$$

Для $A(k+k)$ и $K(k+k)$ выполняются обратные рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} A(k+k) &= \bar{F}^T(k)A(k+1+k+1)\bar{F}(k) + \\ &+ \left[\beta_{jl}^{ki}(k)(A_k^l(k+1+k+1) + K_k^l(k+1+k+1)) \right] \\ &- C^T(k)T(k)C(k) + A(k), \\ A(N+N) &= A(N), \\ K(k+k+1) &= \bar{F}^T(k)K(k+1+k+1)\bar{F}(k) + \\ &+ C^T(k)T(k)C(k), \\ K(k+k) &= D^T(k)K(k+k+1)D(k), \\ K(N+N) &= 0. \end{aligned}$$

Для средней стоимости этих оптимальных управлений верна формула

$$\begin{aligned} \bar{J}_0^*(0) &= \frac{1}{2} [\bar{x}^T(0)A(0+1)\bar{x}(0) + \text{Sp}A(0+0)\alpha(0) + \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} [\text{Sp}A(i+1+i+1)Q(i) + \\ &+ C^T(i)T(i)C(i)\alpha^*(i+i)]]. \end{aligned}$$

В приведенных выше соотношениях $\alpha^*(k+k)$ — траектория ковариационной матрицы состояний системы с точно известными параметрами при $F(k) = \bar{F}(k)$ и $G(k) = \bar{G}(k)$, $k = 0, \dots, N-1$. Траектория $\alpha^*(k+k)$ и траектория прогноза $\alpha^*(k+k-1)$ определяли номинальные траектории по отношению к траекториям ковариационных матриц $\alpha(k+k)$ и $\alpha(k+k-1)$. Матрица $\Delta\alpha(k+k) = \alpha(k+k) - \alpha^*(k+k)$ задавала вариацию $\alpha(k+k)$ относительно номинальной траектории $\alpha^*(k+k)$. Матрица $D(k)$ задается соотношением

$$\begin{aligned} D(k) &= \alpha^*(k+k)(\alpha^*(k+k-1))^{-1} = \\ &= (I + \alpha^*(k+k-1)H^T(k)R^{-1}(k)H(k))^{-1}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что полученное решение по своей форме очень похоже на известные соотношения для достоверно эквивалентного закона управления. Уравнения для оптимальных управлений при уменьшении степени параметрической неопределенности (т. е. при $\Theta(k) = \{\beta(k), \gamma(k), \nu(k)\} \rightarrow 0$) стремятся к аналогичным соотношениям достоверно эквивалентного закона управления. Основным отличием являются необходимость рекурсивного решения не одного уравнения Риккати для $A(k+k)$, а совместное

решение двух уравнений типа Риккати для $A(k+k)$ и $K(k+k)$. Появление дополнительного уравнения типа Риккати в явной форме описывает «предосторожность» полученных управлений.

ОПТИМАЛЬНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С УСТРАНИМОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Как и в случае ЛДС с неустранимой ПН, оптимальные управления отыскивались с использованием метода стохастического динамического программирования. При этом для оптимальных управлений были получены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(k) &= -C(k)\bar{x}(k+k), \\ C(k) &= T^{-1}(k)\tilde{C}(k), \\ T(k) &= \bar{G}^T(0)A(k+1+k+1)\bar{G}(0) + B(k) + \\ &+ \left\{ \gamma_{jl}^{ki}(0)(A_k^l(k+1+k+1) + K_k^l(k+1+k+1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda(k+1)}{L} S_k^l(k+1)) \right\}, \\ \tilde{C}(k) &= \bar{G}^T(0)A(k+1+k+1)\bar{F}(0) + \\ &+ \left\{ \nu_{jl}^{ki}(0)(A_k^l(k+1+k+1) + K_k^l(k+1+k+1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda(k+1)}{L} S_k^l(k+1)) \right\}, \\ S(k+1) &= \\ &= H^T(k+1)(H(k+1)\alpha^*(k+1+k)H^T(k+1) + \\ &\quad + R(k+1))^{-1}H(k+1), \\ A(k+k) &= \bar{F}^T(0)A(k+1+k+1)\bar{F}(0) + \\ &+ \left\{ \beta_{jl}^{ki}(k)(A_k^l(k+1+k+1) + K_k^l(k+1+k+1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda(k+1)}{L} S_k^l(k+1)) \right\} - C^T(k)T(k)C(k) + A(k), \\ A(N+N) &= A(N), \\ K(k+k+1) &= \\ &= \bar{F}^T(0)K(k+1+k+1)\bar{F}(0) + C^T(k)T(k)C(k), \\ K(k+k) &= D^T(k)K(k+k+1)D(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(N+N) &= 0, \\ \lambda(k) &= \frac{\partial J_0^*(k)}{\partial I_\Sigma(k)} = \lambda(k+1) - \\ &- \frac{1}{2P} \text{Sp}(\dot{C}^T(k)C(k) + C^T(k)\dot{C}(k) - \\ &- C^T(k)\dot{T}(k)C(k))\alpha^*(k+k), \\ \lambda(N) &= 0, \\ \dot{T}(k)_j^i &= \gamma_{jl}^{ki}(0)(A_k^l(k+1+k+1) + \\ &+ K_k^l(k+1+k+1) + \frac{\lambda(K+1)}{L} S_k^l(k+1)), \\ \dot{C}(k)_j^i &= \nu_{jl}^{ki}(0)(A_k^l(k+1+k+1) + \\ &+ K_k^l(k+1+k+1) + \frac{\lambda(k+1)}{L} S_k^l(k+1)), \\ S(k+1) &= \\ &= H^T(k+1)(H(k+1)\alpha^*(k+1+k)H^T(k+1) + \\ &\quad + R(k+1))^{-1}H(k+1). \end{aligned}$$

При этих управлениях функционал имеет воспроизводящую форму

$$\begin{aligned} V(k) &= \frac{1}{2} \left\{ M \left\{ (x(k+1)^T A(k+1+k+1) x(k+1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + u^T(k)B(k)u(k)) + P_R(k) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \text{Sp}K(k+1+k+1)\Delta\alpha(k+1+k) \right\} + \\ &\quad + \lambda(k+1)I_\Sigma(k+1) + J_0^*(k+1). \end{aligned}$$

Здесь $I_\Sigma(k)$ — прогноз количества информации о неточно известных параметрах системы, которое будет получено к моменту времени k , L — размерность вектора измерений, P — количество неточно известных параметров системы. Выражения для $D(k)$, $\alpha^*(k+k)$ и средней стоимости оптимальных управлений совпадает с приведенными выше формулами для ЛДС с неустранимой ПН.

К объекту управления должна применяться не вся полученная последовательность управлений $\tilde{U}_0^{N-1} = (\tilde{u}(0), \dots, \tilde{u}(N-1))$, а только $\tilde{u}(0)$. После приложения к системе управляющего воздействия $\tilde{u}(0)$ на вход поступает измерение $z(1)$. Это измерение обрабатывается в соответствии с описанным в выше алгоритмом, и вычисляются

новые значения составных информационного состояния $P_R(1) = \{\bar{x}(1), \bar{F}(1), G(1), \alpha(1), \beta(1), \gamma(1), v(1), \varphi(1), \psi(1)\}$. А это означает, что для определения значения управления $\tilde{u}(1)$ необходимо заново рассчитывать номинальную траекторию $\alpha^*(k|k)$ и решать обратные рекуррентные соотношения для $A(k|k)$, $K(k|k)$ и $\lambda(k)$.

Сравнение полученных соотношений для оптимальных управлений ЛДС с неустранимой и устранимой ПН показывает, что отличие заключается в появлении в уравнениях для оптимальных управлений члена, пропорционального $\lambda(k)S(k)$. Можно показать, что $S(k)$ является положительно полуопределенной матрицей, и $\lambda(k) < 0$. Поэтому этот член описывает эффект «обучения», присущего дуального управления [2, 4, 11–13], и который в определенной степени компенсирует влияние фактора «предосторожности», описываемого членом, пропорциональным $K(k|k)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для проверки работоспособности предлагаемых алгоритмов и получения оценок их характеристик было проведено численное моделирование. При этом за основу был принят пример моделирования Бар-Шалома и Ци [11, 13], в которой рассматривалась линейная система третьего порядка с шестью неизвестными параметрами вида

$$\begin{aligned} x(k) &= F(\theta)x(k) + G(\theta)u(k) + w(k), \\ z(k) &= Hx(k) + v(k), \end{aligned}$$

где

$$F(\theta) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{vmatrix}, \quad G(\theta) = \begin{vmatrix} \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{vmatrix},$$

$$H = 10, 0, 11.$$

По ряду причин значения априорных оценок параметров (а также некоторые параметры рассматриваемых функционалов) были изменены по сравнению с примером моделирования Бар-Шалома и Ци. Использовались следующие оценки $\bar{\theta}_i = (1.51, -0.89, 0.3, 0.22, 0.57, 0.77)$ и $\sigma_\theta^2 = \text{diag}(0.1, 0.1, 0.1, 0.01, 0.01, 0.1)$. При этом истинные значения параметров системы принимали значения $\theta = (1.8, -1.01, 0.58, 0.3, 0.5,$

1.0). Оценки начального состояния также считались нормально распределенными со следующими характеристиками: $\bar{x}(0) = x(0) = 0$, $\sigma_x^2 = \text{diag}[10, 10, 10]$. Шумы $\{w(k)\}_{i=1}^3$ и $v(k)$ считались независимыми и нормально распределенными с нулевым средним и единичной дисперсией.

При моделировании выполнялось сравнение характеристик решений как при использовании различных алгоритмов обработки измерений, так и различных алгоритмов оптимальных управлений. Далее для определения алгоритмов применяются следующие условные обозначения.

Для алгоритмов обработки измерений:

- SYS = 0 — алгоритм классического фильтра Калмана;
- SYS = 1 — алгоритм фильтрации для ЛДС с неустранимой ПН;
- SYS = 2 — алгоритм оценки состояний и параметров для ЛДС с устранимой ПН (решение задачи идентификации).

Для алгоритмов оптимального управления:

- CONT = 0 — алгоритм достоверно эквивалентного закона управления;
- CONT = 1 — алгоритм управлений ЛДС с неустранимой ПН;
- CONT = 2 — алгоритм управлений ЛДС с устранимой ПН.

Для оценки недостижимой нижней грани значений функционала было проведено моделирование оптимального управления системой с точно известными параметрами. Моделирование включало в свой состав три группы прогонов по 1000 реализаций в каждом для программы-имитатора и соответствующих алгоритмов обработки измерений и управлений по методу Монте-Карло (три группы прогонов использовались для проверки статистической устойчивости получаемых результатов).

Как уже ранее упоминалось, современные методы адаптивного управления, основанные на теориях нейронных сетей и нечетких систем [16, 17], используют следующую структуру: аппроксиматор (идентификатор), применяемый для получения оценок неточно известных параметров, и достоверно эквивалентный закон управления, с использованием предположения, что оценки параметров совпадают с их истинным значением. Из этого следует, что вариант SYS = 2/CONT = 0 может рассматриваться как не-

Таблица 1. Результаты моделирования для задачи перехвата

Алгоритм	Средняя стоимость	Дисперсия стоимости	Максимальная стоимость	Средний промах	Дисперсия промаха	Максимальный промах
Точные параметры	5.888059 5.383179 5.850405	7.484635 7.402981 8.114829	45.81559 59.77968 61.18062	11.73652 10.72696 11.66232	14.96861 14.80701 16.22958	91.59195 119.5427 122.3254
SYS = 0	1026.427	1448.565	9939.457	2042.248	2886.615	19807.14
CONT = 0	1087.65 1040.9	1565.135 1462.184	13051.15 10505.17	2164.438 2070.508	3120.213 2912.873	26022.58 20989.19
SYS = 1	119.4912	155.7593	1147.966	230.0467	306.8111	2279.334
CONT = 0	117.7874 130.0427	168.3559 165.914	1596.886 1209.182	226.7912 251.0845	331.228 326.5649	3147.399 2345.901
SYS = 2	28.74616	49.61717	553.5978	56.91493	99.22476	1106.92
CONT = 0	25.56459 26.54427	37.66148 43.07641	362.8829 507.1032	50.55733 52.55798	75.33169 86.12724	724.9382 1013.301
SYS = 1	14.69206	18.2488	143.8312	28.88613	36.43652	284.5043
CONT = 1	14.20943 14.99088	17.50404 19.59168	127.342 149.6159	27.93525 29.47868	34.94536 39.11218	253.1635 298.1324
SYS = 2	8.93055	12.6449	137.1522	17.50837	25.30189	273.6835
CONT = 1	9.450505 9.838187	13.96352 13.90041	148.3363 115.709	18.54674 19.329	27.94484 27.81682	296.5401 230.9664
SYS = 2	17.8494	20.94684	244.0217	11.68999	15.79062	131.2081
CONT = 2	16.32223 16.70631	22.80032 19.11658	332.1621 204.1003	10.22481 11.93092	13.49113 16.53112	114.6434 118.0493

кий эквивалент используемым в настоящее время методам адаптивного управления.

Задача перехвата. В данном примере необходимо привести третью составляющую вектора состояний к заданному состоянию. Это можно выразить с использованием функционала

$$J = \frac{1}{2} M \left[[x_3(N) - \rho]^2 + \sum_{i=0}^N \lambda u^2(i) \right].$$

В процессе моделирования использовались следующие значения переменных: $N = 25$, $\rho = 20$, $\lambda = 0.0001$. Результаты моделирования представлены в табл. 1.

В процессе моделирования было выявлено следующее свойство предлагаемого алгоритма управления системами с устранимой параметрической неопределенностью — на начальной фазе вычислительная процедура в 100 % случаев приводила к вырожденной матрице $T(k)$, т. е. управления становились сингулярными. Поэтому алгоритм управлений для случая $CONT = 2$ был модифицирован: в случае, если вычисления приводили к сингулярным управлениям, использовались пробные (обучающие) управлении, представляющие собой выборки из белого шума с нулевым средним и $\sigma_u = 40$ (значение дисперсии было подобрано экспериментально по крите-

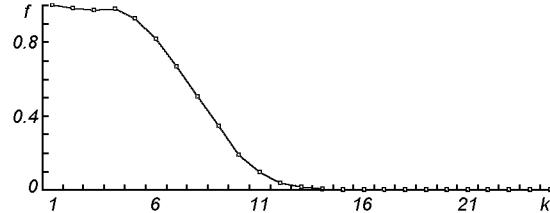


Рис. 1. Относительная частота f появления сингулярных управлений для задачи перехвата (k — параметр времени)

рию минимума получаемых значений функционала). Модифицированный алгоритм продемонстрировал достаточно хорошие характеристики.

На рис. 1 представлена нормализованная частота f появления сингулярных управлений для модифицированного варианта $SYS = 2/CONT = 2$.

Пример мягкой посадки. В этом примере вместо приведения к требуемому значению только третьей компоненты вектора состояний рассматривается задача совмещения конечного вектора состояния с определенной точкой в пространстве состояний. Данной задаче соответствует следующее выражение для функции стоимости

$$J = \frac{1}{2} M \left[(x(N) - \rho)^T (x(N) - \rho) + \sum_{i=0}^N \lambda u^2(i) \right],$$

Таблица 2. Результаты моделирования для задачи мягкой посадки

Алгоритм	Средняя стоимость	Дисперсия стоимости	Максимальная стоимость	Средний промах	Дисперсия промаха	Максимальный промах
Точные параметры	15.51027 14.94398 15.96678	13.38199 12.55293 14.29496	105.4067 89.83703 102.9345	30.85448 29.72488 31.76713	26.76252 25.10282 28.58542	210.5442 179.486 205.6381
SYS = 0	346.4404	259.1054	1610.78	691.805	517.4676	3217.353
CONT = 0	342.5964	259.7556	1896.751	684.1271	518.7756	3787.964
	346.7325	254.2953	1779.128	692.3976	507.8647	3553.189
SYS = 1	156.5742	153.5712	1228.505	312.4046	306.6053	2451.252
CONT = 0	170.0257	170.0793	1244.285	339.2673	339.5878	2484.11
	168.341	160.7243	1053.697	335.9233	320.9179	2103.867
SYS = 2	28.28068	32.14616	418.2113	56.15731	64.25007	834.2893
CONT = 0	26.24313	26.34425	203.956	52.0931	52.67868	407.6686
	27.38011	26.59816	188.1399	54.35755	53.18868	376.2076
SYS = 1	215.64	199.1483	1256.395	430.6497	397.8292	2509.844
CONT = 1	201.6579	188.013	1374.553	402.7142	375.5729	2745.214
	197.0601	197.3259	1554.117	393.5267	394.1835	3103.439
SYS = 2	23.54357	21.64384	188.8178	46.70776	43.296	377.4093
CONT = 1	24.95453	23.73557	189.8572	49.53861	47.47787	379.2981
	24.0663	21.03832	150.4909	47.74397	42.08541	300.6429
SYS = 2	20.58895	18.16012	230.6452	34.73497	32.00234	290.5604
CONT = 2	20.3554	17.60179	251.6055	34.05008	30.64774	201.0259
	20.28283	16.56067	140.6904	34.33234	31.37584	274.5954

где ρ — точка в R^3 , $\lambda = 0.0001$ и $N = 25$, как и в предыдущем примере. Данную задачу можно рассматривать как задачу обеспечения мягкой посадки с конечным состоянием $\rho = \{0, 0, 20\}$.

Методика проведения моделирования аналогична используемой при моделировании задачи перехвата. Результаты моделирования представлены в табл. 2.

В случае SYS = 2/CONT = 2, как и в случае моделирования задачи перехвата, появлялись сингулярные управления. В этом случае тоже использовались обучающие управление, являющиеся белым шумом с нулевым средним и $\sigma_u = 10$ (это значение также было подобрано экспериментально). Данное управление продемонстрировало наилучшие характеристики. Поэтому для обеспечения понимания происходящих при этом типа управления процессов, помимо зависимости относительной частоты появления сингулярных управлений (рис. 2, а) мы приводим также траектории среднего значения и дисперсии параметра $-\lambda(k)$, который с термодинамической точки зрения может рассматриваться как обобщенная температура процесса управления (рис. 2, б); траектории среднего значения и дисперсии взвешенных затрат на управление (рис. 2, в); траектории для реально полученного

количества информации о неточно известных параметрах системы (рис. 2, г).

Анализ. Задача перехвата более проста, чем задача мягкой посадки, однако требует высокой степени предосторожности, поскольку в этом случае наилучшие характеристики обеспечил алгоритм обработки данных/управления типа SYS = 2/CONT = 1. Приемлемые характеристики продемонстрировал алгоритм типа SYS = 1/CONT = 1 (лучшие по сравнению с алгоритмами типа SYS = 2/CONT = 0 и SYS = 2/CONT = 2). Очень плохие результаты алгоритма типа SYS = 0, CONT = 0, по всей видимости, обусловлены выбросами значений стоимости (и/или промаха) большой амплитуды, которые сместили среднее значение и дисперсию стоимости. Алгоритм типа SYS = 2/CONT = 2 обеспечил наилучшие характеристики по промаху, однако в этом случае, по всей видимости, произошло определенное перерегулирование, которое существенно повысило стоимость этого типа управления.

Ситуация радикально изменяется в случае задачи мягкой посадки, для которой значение фактора «обучения» превалирует над фактором «предосторожности». В этом случае наилучшие характеристики по всем параметрам обеспечил алгоритм SYS = 2/CONT = 2, алгоритм SYS =

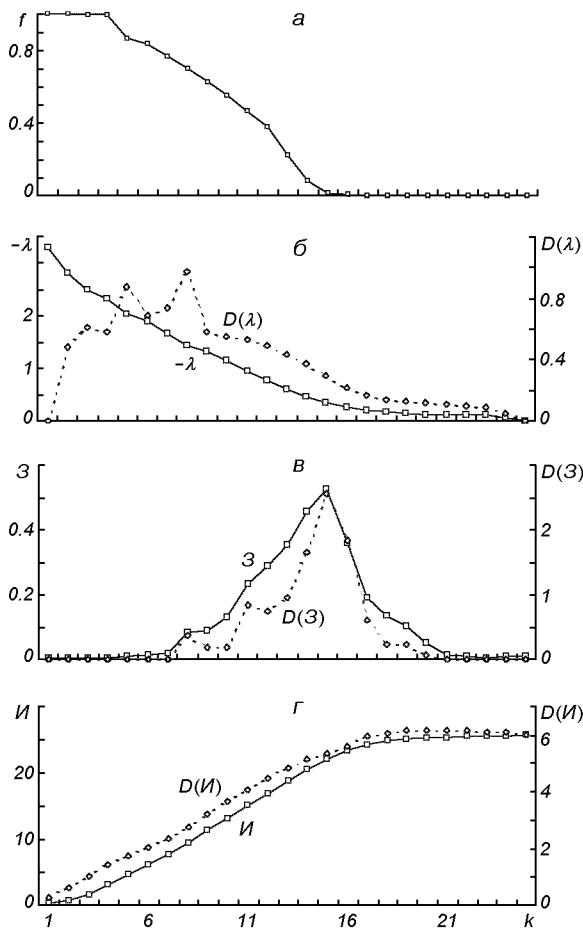


Рис. 2. Задача мягкой посадки: *а* — относительная частота f появления сингулярных управлений, *б*, *в*, *г* — эволюция средних значений параметров $-\lambda$, взвешенных затрат \mathcal{Z} на управление, количества информации I о неточно известных параметрах, а также их дисперсий D

$= 2/\text{CONT} = 1$ продемонстрировал заметно худшие результаты. Помимо этого поменялись местами рейтинги алгоритмов типа $\text{SYS} = 1/\text{CONT} = 1$ и $\text{SYS} = 2/\text{CONT} = 0$, а также существенно улучшились (по сравнению с задачей перехвата) характеристики алгоритма $\text{SYS} = 0/\text{CONT} = 0$, что является дополнительным подтверждением высокого значения фактора обучения для эффективного решения данной проблемы.

Наиболее интересным со всех точек зрения является используемый модифицированный алгоритм типа $\text{SYS} = 2/\text{CONT} = 2$, поэтому на примере решения задачи мягкой посадки рас-

смотрим процессы, происходящие при этом типе управления.

Для этого алгоритма обработки данных/управления можно условно выделить три фазы: фаза обучения (или «турбулентная» фаза) ($0 \leq k \leq 5$), фаза переходных процессов ($5 < k \leq 21$) и фаза собственно мягкой посадки (или «ламинарная» фаза) ($k > 21$).

На первой фазе в подавляющем большинстве случаев использовались обучающие управлении (рис. 2, *а*) сравнительно небольшой амплитуды (рис. 2, *в*). Эта фаза характеризуется большими значениями параметра $-\lambda(k)$ (или, используя термодинамические аналогии, высокими температурами) (рис. 2, *б*), а также высокими темпами накопления информации о неточно известных параметрах системы (рис. 2, *г*). Все это говорит о высокой степени хаотичности происходящих процессов, что и обуславливает применение к этой фазе определения «турбулентная».

На промежуточной фазе определяющими являются переходные процессы, вызванные сменой типа используемых управлений. Фаза обучения никак не привязана к общей задаче терминалного управления, и применение обучающих управлений приводит к существенным отклонениям состояний системы от оптимальной траектории. Переход от обучающих к оптимальным управленим обуславливает появление управляющих воздействий большой амплитуды (рис. 2, *в*), обеспечивающих компенсацию возможных значительных отклонений в состояниях системы. Большие амплитуды управляющих воздействий обеспечивают сохранение высоких темпов накопления информации о неточно известных параметрах системы. При этом сохраняется высокая скорость падения температуры происходящих процессов (уменьшения значений параметра $-\lambda(k)$).

На третьей («ламинарной») фазе обеспечивается решение собственно термиального управления (мягкой посадки). Эта фаза характеризуется малыми амплитудами управляющих воздействий и незначительной температурой, а также практически неизменной энтропией распределения оценок параметров (не происходит накопления информации о параметрах системы).

Данная модель дает описание процессов, происходящих на микроуровне, и характеризует каждую отдельную реализацию процесса обра-

ботки данных/управления. На макроуровне, если применима эргодическая гипотеза (среднее по реализациям равно среднему по времени), возможно использование другой модели, которая включает следующие фазы (рис. 2, а, в, г):

- фаза «детства» (совпадает с «турбулентной» фазой). Действия (управления) носят хаотический характер и не являются целенаправленными, их интенсивность сравнительно невелика; при этом происходит интенсивное накопление информации;
- фаза «юношества» ($5 < k \leq 15$). Действия начинают носить целенаправленный характер; происходит бурный рост их интенсивности и целенаправленности; высокий темп накопления информации сохраняется. В конце фазы «юношества» интенсивность действий принимает максимальное значение;
- фаза «зрелости» ($15 < k \leq 21$). Действия практически в 100 % случаев носят целенаправленный характер, и начинается спад их интенсивности. В начале фазы «зрелости» сохраняется сравнительно высокая скорость накопления информации, однако в конце этой фазы темп накопления информации падает практически до нуля;
- фаза «старости» (совпадает с «ламинарной» фазой). Действия носят полностью целенаправленный характер, их интенсивность минимальна; скорость накопления информации равна нулю.

Безусловно, применение такого рода аналогий носит явно выраженный механистический характер, однако представляется, что с использованием данной модели можно на качественном уровне достаточно адекватно описать эволюцию факторов интенсивности и целенаправленности действий, а также скорости накопления информации для широкого класса природных и социально-экономических объектов/явлений.

Резюмируя все вышеизложенное, можно сказать:

- проблемы стохастического оптимального управления можно подразделить на два класса: простые и сложные, однако в настоящее время нет четкого критерия определения этих классов;
- в сравнительно простых случаях (типа задачи перехвата) наиболее эффективными является

алгоритмы управления системами с неустойчивой ПН. Если это приемлемо с точки зрения эффективности, предпочтительным является использование алгоритма типа $SYS = 1/CONT = 1$, реализация которого является наиболее простой. Более того, моделирование показало, что в этом случае при достаточно больших k матрица $C(k)$ имеет устойчивые состояния, т. е. при решении задач стабилизации данный алгоритм управления может быть реализован в виде некоторого регулятора;

- в сложных случаях (типа задачи мягкой посадки) риски, связанные с «обучением», могут оказаться оправданными, и наиболее эффективным будет являться алгоритм типа $SYS = 2/CONT = 2$. Однако этот тип управления может приводить к появлению сингулярных режимов, и, как следствие, требовать использования обучающих (пробных) управлений, для которых в настоящее время нет общих правил выбора их параметров. Тем не менее такого рода модель действий присуща многим реальным объектам/явлениям, что обуславливает необходимость дальнейшего изучения данного типа управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новый подход к решению задач стохастической оптимизации ЛДС с ПН основан на использовании формализма тензорного анализа для определения математических объектов, описывающих все статистические характеристики оценок неточно известных параметров и состояний системы (математические ожидания и набор вторых центральных моментов). Введенные математические объекты, описывающие статистические характеристики ПН (тензоры, дуальные тензоры), согласованы по своей структуре с широко используемыми в теории и практике статистическими характеристиками случайных векторов. Это дает возможность сравнительно просто получить новые аналитические решения для следующих классов задач:

- прогнозирование состояний линейных динамических систем с различными типами параметрической неопределенности.;
- обработка измерений в линейных динамических системах с параметрической неопреде-

- ленностью (задачи фильтрации и идентификации);
- оптимальное стохастическое управление линейных динамических систем с различными типами параметрической неопределенности.

Полученные решения являются линейными по характеристикам параметрической неопределенности (тензоры, описывающие дисперсии и ковариации оценок параметров) и квадратичными по оценкам состояний системы и управлениям, что обеспечивает возможность проведения всестороннего анализа влияния фактора параметрической неопределенности на свойства этих решений. Эффективность предлагаемых решений иллюстрируется результатами проведенного моделирования.

Предлагаемые решения можно рассматривать в качестве альтернативы широко используемым в настоящее время адаптивным методам оптимального управления. С другой стороны, комбинация предлагаемого подхода и методов адаптивного управления, основанных на нейронных сетях и нечетких системах, может стать основой для создания новых эффективных методов решения нелинейных стохастических проблем.

Настоящая работа выполнена в рамках подготовки к реализации проекта НТЦУ № 2549 «Методы и программы по стохастической оптимизации динамических систем с параметрической неопределенностью». Этот проект поддержали Председатель координационного комитета по методам проектирования IFAC проф. Рут Барс, проф. Джорж Саридис (США), специалисты компаний SeaLaunch и Boeing (США), и проф. Айдан Эркмен (Турция), заинтересованность в результатах этого проекта проявил проф. Джон Байллиуэл (США).

1. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. — М.: Физматгиз, 1963.—500 с.
2. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. — М.: Наука, 1971.—424 с.
3. Атанас М., Фалб П. Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968.—764 с.
4. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. — М.: Наука, 1964.—360 с.

5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969.—368 с.
6. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. — М.: Мир, 1968.—184 с.
7. Бобриков Э. П., Яценко В. А. Локальное прогнозирование, фильтрация и идентификация линейных динамических систем в условиях априорной параметрической неопределенности // Приборы и методы автоматизации экспериментальных исследований. — Днепропетровск, 1984.—С. 53—57.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966.—576 с.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974.—832 с.
10. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.—664 с.
11. Саридис Дж. Самоорганизующиеся стохастические системы управления. — М.: Наука, 1980.—400 с.
12. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. — М.: Физматгиз, 1963.—623 с.
13. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К. Т. Леондеса. — М.: Мир, 1980.—350 с.
14. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающихся систем. — М.: Наука, 1970.—252 с.
15. Яценко В. А. Информационное прогнозирование решений задачи идентификации // Приборы и методы автоматизации экспериментальных исследований. — Днепропетровск, 1985.—С. 6—12.
16. Spooner J. T., Maggiore M., Ordóñez R., Passino K. M. Stable Adaptive Control and Estimation for Nonlinear Systems: Neural and Fuzzy Approximator Techniques. — John Wiley & Sons, Inc., 2002.—509 p.
17. Tanaka K., Wang H. O. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach. — John Wiley & Sons, Inc., 2001.—305 p.

A NEW APPROACH TO PROBLEM OF STOCHASTIC OPTIMIZATION OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH PARAMETRIC UNCERTAINTIES

A. V. Novikov, V. A. Yatsenko

We propose a new approach to solving a number of optimization problems of linear dynamic systems with parametric uncertainties. The approach is based on application of tensor formalism for construction of mathematical models of parametric uncertainties. Within the framework of the approach the following problems are considered: states prediction and data processing, optimal control etc. The efficiency of the methods proposed is illustrated by the results of computational simulation.