

УДК 533.951

**А. С. Парновский, О. К. Черемных**

Институт космических исследований Национальной академии наук та Национального космического агентства Украины, Київ

**Спектр баллонных возмущений с произвольной поляризацией во внутренней магнитосфере Земли**

Надійшла до редакції 12.01.06

В дипольній геометрії геомагнітного поля виведено рівняння малих коливань для власних МГД-збурень балонного типу з довільною поляризацією у внутрішній магнітосфері Землі. Ці збурення поширюються вздовж силових ліній, що упираються в іоносферу. Досліджено спектри цих збурень у наближенні ідеально провідної іоносфери. Встановлено, що поблизу іоносфери амплітуда поздовжнього зміщення суттєво перевищує відповідну амплітуду в приекваторіальній області силових ліній. Отримано аналітичний вираз для амплітуди поздовжнього зміщення поблизу іоносфери.

**ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Ранее в работах [1, 5] было показано, что баллонные возмущения являются собственными МГД-возмущениями внутренней магнитосферной плазмы. Уравнения, описывающие эти возмущения, получаются из уравнений идеальной одножидкостной МГД

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + [\mathbf{j}\mathbf{B}],$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\rho\mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) \frac{p}{\rho^\gamma} = 0,$$

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mathbf{j}, \quad \text{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E} = -[\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

где  $\rho$  — плотность плазмы,  $\mathbf{v}$  — скорость элементарного объема плазмы,  $\gamma$  — показатель адиабаты. Символы  $p$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  обозначают давление плазмы, плотность тока и напряженности электрического и магнитного поля. Уравнения (1) записаны в системе единиц, в которой коэффициенты в уравнениях Максвелла равны 1. Эти уравнения можно выразить через вектор смещения  $\xi$  ( $\mathbf{v} = \partial\xi/\partial t$ ) элементарного объема

плазмы:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \nabla(\xi \cdot \nabla p) + \nabla(\gamma p \text{div}\xi) + \frac{1}{c} [\tilde{\mathbf{j}}\mathbf{B}] + \frac{1}{c} [\tilde{\mathbf{j}}\tilde{\mathbf{B}}]. \quad (2)$$

Будем использовать условие статического МГД-равновесия магнитосферной плазмы:

$$\nabla p = [\mathbf{j}\mathbf{B}]. \quad (3)$$

Введем вектор

$$\mathbf{T} \equiv \text{rot}[\xi \mathbf{B}] + \frac{[\mathbf{j}\nabla a]}{|\nabla a|^2} \xi \cdot \nabla a,$$

где  $a$  — метка магнитной поверхности.

С помощью разложений

$$\mathbf{T} = T_1 \nabla a + T_2 \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} - T_3 \mathbf{B},$$

$$\xi = \xi \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} + \eta \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2} + \tau \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} \quad (4)$$

из выражения (2) получаем

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \nabla a \left[ \alpha_s \nabla a \cdot \nabla T_3 + \frac{\nabla a \cdot \nabla T_0}{|\nabla a|^2} - \right]$$

$$\begin{aligned}
& -2p'T_3 + T_2(S - \gamma_s) + \mathbf{B} \cdot \nabla T_1 + K\xi \Big] + \\
& + \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} \left[ \frac{[\mathbf{B}\nabla a] \cdot \nabla T_0}{|\mathbf{B}|^2} + \mathbf{B} \cdot \nabla T_2 + [\mathbf{B}\nabla a] \nabla T_3 \right] + \\
& + \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla) T_0, \quad (5)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
T_0 &= \gamma p \operatorname{div} \xi, \\
K &= \frac{\gamma_s}{\alpha_s} (\gamma_s - S) + \frac{p'}{|\mathbf{B}|^2} \frac{\nabla a \cdot \nabla (2p + |\mathbf{B}|^2)}{|\nabla a|^2}, \\
S &= \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} \cdot \operatorname{rot} \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2}, \\
\alpha_s &= \frac{|\mathbf{B}|^2}{|\nabla a|^2}, \quad \gamma_s = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{|\nabla a|^2}, \quad p' = \frac{dp}{da}.
\end{aligned}$$

Уравнение (5) описывает произвольные МГД-возмущения статического МГД-равновесия (3) с произвольной геометрией магнитного поля. Применим к этому уравнению баллонное приближение, т. е. будем считать, что фигурирующие в нем амплитуды возмущений удовлетворяют неравенствам:

$$\frac{\nabla a \cdot \nabla \xi}{|\nabla a|}, \quad \frac{[\mathbf{B}\nabla a] \cdot \nabla \xi}{|\mathbf{B}| |\nabla a|} \gg \frac{|\xi|}{L}, \quad \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \xi}{|\mathbf{B}|}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\xi(\mathbf{r}, t) &= \hat{\xi}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t + i\chi/\varepsilon), \\
T_1(\mathbf{r}, t) &= \hat{T}_1(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t + i\chi/\varepsilon), \quad (6)
\end{aligned}$$

где  $L$  — параметр Мак-Илвайна, задающий характерный масштаб системы,  $\varepsilon \ll 1$  — характерный поперечный масштаб,  $\chi$  — эйкональная функция, удовлетворяющая условию

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \chi = 0. \quad (7)$$

В результате получаем уравнения Дьюара — Глассера [4, 6]:

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{|\mathbf{k}_\perp|^2}{k_{\perp\beta}^2 |\mathbf{B}|^2} \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial t^2} = \\
& = 2(\hat{T}_0 + p'\hat{\xi}) \frac{\kappa \cdot [\mathbf{k}_\perp \mathbf{B}]}{\mathbf{k}_\perp \cdot [\mathbf{B}\nabla a]} + \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{|\mathbf{k}_\perp|^2}{k_{\perp\beta}^2 |\mathbf{B}|^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \hat{\xi} \right), \\
& \rho \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = \mathbf{B} \cdot \nabla \hat{T}_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{T}_0 &= \frac{\gamma p |\mathbf{B}|^2}{\gamma p + |\mathbf{B}|^2} \times \\
& \times \left[ \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\tau}}{|\mathbf{B}|^2} \right) - 2\hat{\xi} \frac{\mathbf{k}_\perp \cdot [\mathbf{B}\kappa]}{k_{\perp\beta} |\mathbf{B}|^2} \right], \quad (8)
\end{aligned}$$

где

$$k_{\perp\beta} = \frac{\mathbf{k}_\perp \cdot [\mathbf{B}\nabla a]}{|\mathbf{B}|^2}.$$

Заметим, что уравнения (8) не зависят от геометрии магнитного поля. Теперь введем дипольное поле  $\mathbf{B} = [\nabla\psi\nabla\varphi]$ , где  $\psi = M\cos^2\theta/r$  — полоидальный магнитный поток, играющий роль метки магнитной поверхности, т. е.  $a = \psi$ ,  $M$  — магнитный дипольный момент Земли,  $\varphi$  — тороидальный угол (геомагнитная долгота). Компоненты и норма этого поля равны

$$B_r = -\frac{2M}{r^3} \sin\theta,$$

$$B_\theta = \frac{M\cos\theta}{r^3},$$

$$B = \frac{M\sqrt{b(\theta)}}{r^3},$$

где  $b(\theta) = 1 + 3\sin^2\theta$ . Уравнение силовых линий имеет вид  $r = L\cos^2\theta$ .

Градиент эйкональной функции  $\chi$  удовлетворяет соотношениям (6), (7):

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \cdot \nabla \chi &= \hat{\xi}_\perp \cdot \nabla \chi = \\
& = \left( \hat{\xi} \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} + \hat{\eta} \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{B^2} \right) \cdot \nabla \chi = 0, \quad (9)
\end{aligned}$$

Согласно (9) вектор  $\nabla \chi$  лежит в плоскости, перпендикулярной к магнитным силовым линиям и образует произвольный угол с взаимно перпендикулярными векторами  $\nabla a$  и  $[\mathbf{B}\nabla a]$ , лежащими в той же плоскости. Таким образом, мы можем разложить указанный вектор  $\nabla \chi$  по базису, образованному этими векторами:

$$\nabla \chi \left( \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} + \hat{\lambda} \nabla a \right). \quad (10)$$

Поясним физический смысл величины  $\hat{\lambda}$ , постоянной на силовой линии. Из выражений (9), (10), а также выражения для электрического поля  $\mathbf{E} = i\omega [\hat{\xi}_\perp \mathbf{B}]$  возмущений в плазме в виде

$$\hat{\xi}_{\perp} = \frac{i}{\omega} \frac{[\mathbf{E}\mathbf{B}]}{B^2}$$

следует, что с точностью до величин порядка  $\varepsilon$

$$\nabla\chi \cdot \hat{\xi} = \frac{i}{\omega} \frac{\mathbf{B} \cdot [\nabla\chi\mathbf{E}]}{B^2} = 0.$$

В силу (7) последнее равенство требует выполнения условия  $[\nabla\chi\mathbf{E}] = 0$ .

Таким образом, из (9) при  $\hat{\lambda} = 0$  получаем  $\mathbf{E} \parallel [\mathbf{B}\nabla a]$ ,  $\hat{\xi}_{\perp} \parallel \nabla a$  (полоидальная поляризация альвеновских мод), а при  $\hat{\lambda} \rightarrow \pm\infty$  —  $\mathbf{E} \parallel \pm\nabla a$ ,  $\hat{\xi}_{\perp} \parallel \mp [\mathbf{B}\nabla a]$  (тороидальная поляризация). В работах [1, 5] были рассмотрены лишь эти два случая. В данной же работе мы проанализируем промежуточные значения  $\lambda$ , при которых вектор  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости, задаваемой векторами  $[\mathbf{B}\nabla a]$  и  $\nabla a$ . Таким образом, величина  $\lambda$  характеризует поляризацию возмущений.

Из выражений (9) и (10) получаем соотношения

$$\hat{\eta} + \hat{\lambda} \hat{\xi} = 0, \quad (11)$$

и

$$\hat{\lambda} = \frac{\nabla a \cdot \nabla\chi}{[\mathbf{B}\nabla a] \cdot \nabla\chi} \frac{B^2}{|\nabla a|^2}. \quad (12)$$

Теперь система уравнений (8) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{|\nabla\psi|^2} \left( 1 + \hat{\lambda}^2 \frac{|\nabla\psi|^2}{|\nabla\varphi|^2} \right) \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial t^2} &= \\ &= \frac{2(\kappa \cdot \nabla\psi)}{|\nabla\psi|^2} (\hat{T}_0 + p' \hat{\xi}) + \\ &+ \mathbf{B} \cdot \nabla \left[ \left( 1 + \hat{\lambda}^2 \frac{|\nabla\psi|^2}{|\nabla\varphi|^2} \right) \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \hat{\xi}}{|\nabla\psi|^2} \right], \\ \rho \frac{\partial^2 \hat{\tau}}{\partial t^2} &= \mathbf{B} \cdot \nabla \hat{T}_0, \\ \hat{T}_0 &= \gamma p \left[ \mathbf{B} \cdot \nabla \left( \frac{\hat{\tau}}{|\mathbf{B}|^2} \right) - \frac{2(\kappa \cdot \nabla\psi)}{|\nabla\psi|^2} \hat{\xi} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Если перейти к производным вдоль силовой линии, выразить фигурирующие в уравнениях (13) величины через их значения на силовой линии

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) = |\mathbf{B}| \frac{d}{dl} = \frac{M}{L^4 \cos^7 \theta} \frac{d}{d\theta},$$

$$|\nabla\psi|^2 = \frac{M^2 b}{L^4 \cos^6 \theta}, \quad |\nabla\varphi|^2 = \frac{1}{L^2 \cos^6 \theta},$$

$$|\mathbf{B}|^2 = \frac{M^2 b}{L^6 \cos^{12} \theta}, \quad \frac{2\kappa \cdot \nabla\psi}{|\nabla\psi|^2} = \frac{4L \cos^2 \theta}{M b^2},$$

и ввести обезразмеренные переменные

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_A^2}, \quad \omega_A^2 = \frac{M^2}{L^8 \rho},$$

$$\alpha = -\frac{L}{p} \frac{dp}{dL}, \quad \beta = \frac{\gamma p L^6}{M^2},$$

$$\xi = \hat{\xi} \frac{L}{M}, \quad \eta = \hat{\eta}, \quad \tau = \hat{\tau} \frac{L^2}{M},$$

$$\lambda = \hat{\lambda} \frac{M}{L}, \quad T_0 = \hat{T}_0 \frac{L^6}{M^2},$$

можно получить окончательную систему уравнений

$$\begin{aligned} \Omega^2 \xi (1 + \lambda^2 b(\theta)) + \frac{4}{b(\theta) \cos^4 \theta} \left( T_0 + \frac{\alpha \beta}{\gamma} \xi \right) + \\ + \frac{b(\theta)}{\cos^{13} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1 + \lambda^2 b(\theta)}{b(\theta) \cos \theta} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\eta + \lambda \xi = 0, \quad (15)$$

$$\Omega^2 \tau + \frac{1}{\cos^7 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} T_0 = 0, \quad (16)$$

$$T_0 = \beta \left[ \frac{1}{\cos^7 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\tau \cos^{12} \theta}{b(\theta)} \right) - \frac{4 \cos^2 \theta}{(b(\theta))^2} \xi \right]. \quad (17)$$

Уравнения (14) и (16) «зацеплены» между собой и описывают взаимодействие альвеновских и медленных магнитозвуковых мод. Уравнение (15) описывает тороидальные альвеновские моды. Переходя к новой переменной  $x = \sin \theta$ , мы исключаем из системы (14)–(17) тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} \Omega^2 \frac{1 + \lambda^2 b}{b} c^6 \xi + \frac{4c^4}{b^2} \left( T_0 + \frac{\alpha \beta}{\gamma} \xi \right) + \\ + \left( \frac{1 + \lambda^2 b}{b} \xi \right)' = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\eta + \lambda \xi = 0, \quad (19)$$

$$\Omega^2 c^3 \tau + T_0' = 0, \quad (20)$$

$$T_0 = \beta \left[ \frac{1}{c^3} \left( \frac{c^6}{b} \tau \right)' - \frac{4c}{b^2} \xi \right], \quad (21)$$

где  $b = 1 + 3x^2$ ,  $c = 1 - x^2$ , а штрих означает производную по  $x$ .

В данной работе мы ограничимся рассмотрением «жестких» граничных условий, соответствующих обращению в ноль возмущений на бесконечно проводящей ионосфере:

$$\xi = \eta = \tau = 0 \quad (22)$$

при  $x = \pm x_0 = \pm \sqrt{1 - L^{-1}}$ ,

где  $x_0$  — значение переменной  $x$  в точке пересечения силовой линии с идеально проводящей ионосферой. Граничные условия, учитывающие конечную проводимость ионосферы, будут рассмотрены в следующей статье.

### СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Уравнения (18)—(21) интересуют нас с точки зрения анализа спектра собственных баллонных возмущений магнитосферной плазмы. Напомним, что эти уравнения были тождественно получены из уравнений МГД в баллонном приближении. Следовательно, спектр их собственных частот совпадает со спектром частот собственных баллонных возмущений плазмы во внутренней магнитосфере Земли. Выражение для границы устойчивости рассматриваемых возмущений с указанными граничными условиями (22) было приведено в работе [1]. Как видно из уравнения (18), значения частоты  $\Omega$  собственных мод с произвольной поляризацией  $\lambda$  лежат между частотами мод с полоидальной и тороидальной поляризациями, что подтверждается прямыми численными расчетами. Вследствие этого мы, в основном, ограничимся рассмотрением спектров для двух крайних значений поляризации.

В случае тороидальной поляризации ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) уравнение (18) сводится к уравнению

$$\Omega^2 c^6 \eta + \eta'' = 0, \quad \xi = 0, \quad (23)$$

уравнение (20) остается в силе, а  $T_0 = T_0$  ( $\xi = 0$ ). Уравнение (23) было впервые получено в работе [2]. Легко заметить, что уравнение (23) не содержит  $\tau$ , и спектр системы в этом случае состоит из двух независимых типов ветвей. Первый тип определяется уравнением (23) и зависит лишь от граничных условий (22) (в данном

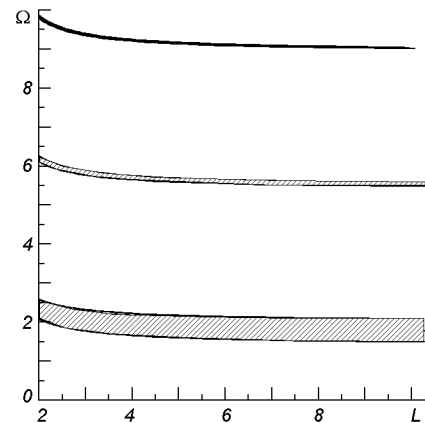


Рис. 1. Спектр трех нижних альвеновских мод при  $\beta = 0$  с различными поляризациями

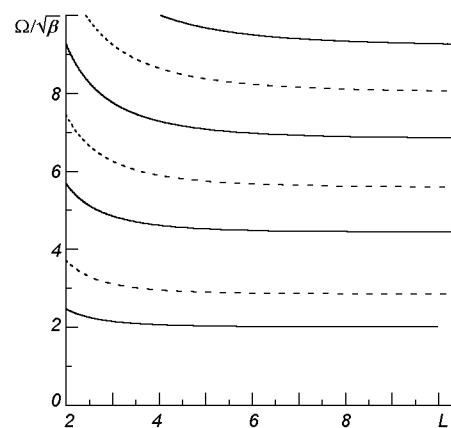


Рис. 2. Спектр медленных магнитозвуковых мод при тороидальной поляризации альвеновских мод. Сплошные линии — четные моды, штрихи — нечетные

случае — от параметра Мак-Илвайна  $L$ ) и номера моды. Второй тип определяется уравнениями (20), (21) и зависит также от плазменного параметра  $\beta$ , причем  $\Omega \propto \sqrt{\beta}$ . Несколько нижних мод спектра первого типа показаны на рис. 1 в координатах  $(\Omega, L)$ , а второго — на рис. 2 в координатах  $(\Omega/\sqrt{\beta}, L)$ . В координатах  $(\Omega^2, \beta)$  при заданом  $L$  спектр представляет собой набор горизонтальных прямых, соответствующих первому типу, и наклонных прямых, проходящих через начало координат, соответствующих второму типу.

В случае полоидальной поляризации ( $\lambda = 0$ ) уравнения (18), (19) принимают вид

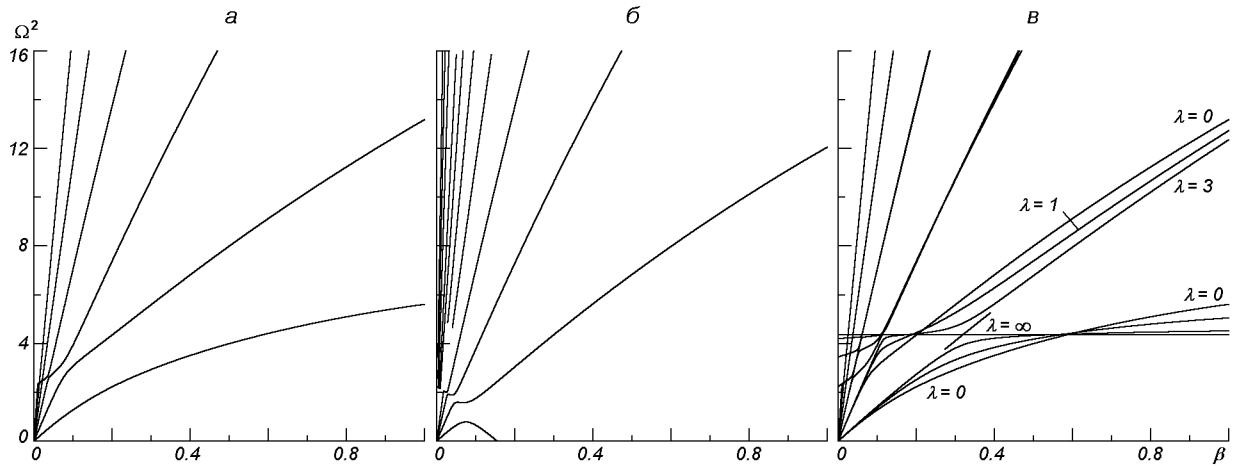


Рис. 3. Спектр связанных альвеновских и медленных магнитозвуковых мод при  $L = 10$ ,  $\lambda = 0$ :  $a$  —  $\alpha = 1$ ,  $б$  —  $\alpha = 10$ ,  $в$  —  $\alpha = 1$  для разных значений поляризации  $\lambda$  (спектр для  $\lambda = 0$  совпадает с рис. 3,  $a$ )

$$\Omega^2 \frac{c^6}{b} \xi + \frac{4c^4}{b^2} \left( T_0 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \xi \right) + \left( \frac{\xi'}{b} \right)' = 0, \quad \eta = 0, \quad (24)$$

а уравнения (20), (21) остаются в силе.

Спектр системы в этом случае похож на предыдущий. В точках пересечения ветвей первого и второго типа есть вырождение, снимаемое за счет наличия в уравнении (24) возмущающего члена (21), содержащего  $\tau$ . Внешне это проявляется в виде «перезамыкания» ветвей спектра, отчетливо заметном на зависимостях  $(\Omega^2, \beta)$  при фиксированных значениях  $L = 10$  и  $\alpha = 1$  (рис. 3,  $a$ ) и  $\alpha = 10$  (рис. 3,  $б$ ). Вид этих кривых не сводится к известным специальным функциям и может быть рассчитан только численно. Отметим, что «перезамыкаются» лишь спектры мод с одинаковой четностью. Спектры мод с разной четностью пересекаются обычным образом, поскольку взаимодействия между такими модами нет.

Значение частоты полоидальных альвеновских мод при  $\beta = 0$  ниже, чем в случае тороидальных (рис. 4). Наклон этих линий при малых  $\beta$  определяется параметром  $\alpha$ , изменяясь от положительных значений при малых  $\alpha$  до отрицательных при больших  $\alpha$ . Нулевой наклон для нижней моды реализуется при  $\alpha \approx 4$ . Точка пересечения нижней моды на рис. 3,  $б$  соответствует границе устойчивости, значение  $\beta$  при этом

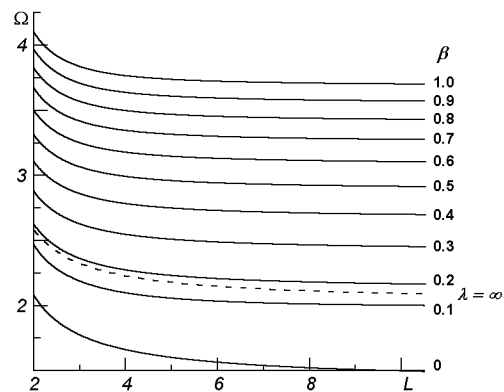


Рис. 4. Спектр первой полоидальной альвеновской моды при различных значениях  $\beta$ . Пунктир — спектр первой тороидальной альвеновской моды

практически совпадает с рассчитанным по формуле  $\beta = 0.95/(\alpha - 4.7) \approx 0.18$  в работах [3, 5].

На рис. 3,  $в$  приведен спектр мод с произвольной поляризацией, подтверждающий, что спектры мод с промежуточной поляризацией лежат между спектрами мод с экстремальными значениями поляризации. Интересной особенностью этого графика является наличие трех точек, в которых частота не зависит от параметра поляризации  $\lambda$ . Эти точки приблизительно соответствуют значениям  $\beta = 0.1, 0.2, 0.6$ , однако смысл данного явления нами не исследовался. Зависи-

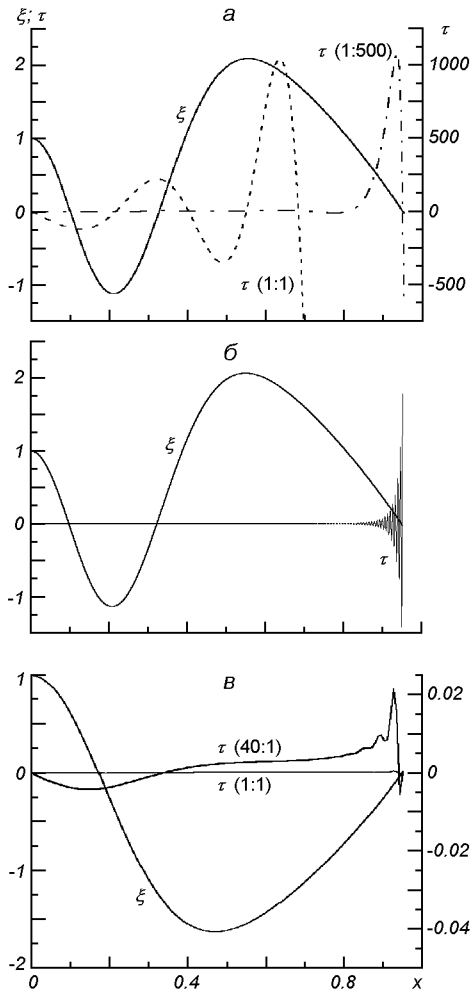


Рис. 5. Собственные функции  $\xi$ ,  $\tau$  третьей четной моды для  $L = 10$ . Сплошная и штриховая линия — шкала слева, штрихпунктир — шкала справа. В скобках указан масштаб кривой ( $a - \alpha = 10, \beta = 1, \Omega \approx 16$ ;  $б - \alpha = 10, \beta = 0.01, \Omega \approx 16$ ;  $в - \alpha = 1, \beta = 0.01, \Omega \approx 9$ )

мость частоты при  $\beta = 0$  от параметра Мак-Илвайна приведена на рис. 1. Штриховкой обозначена область собственных частот альфвеновских мод, ограниченная линией  $\lambda = 0$  снизу и  $\lambda = \infty$  сверху. Это означает, что внешний источник с фиксированной частотой  $\Omega$  может генерировать колебания на определенных магнитных оболочках [7]. Аналогично данная магнитная оболочка  $L = \text{const}$  может входить в резонанс с внешними источниками возбуждений, если их частоты лежат в определенном фиксированном интервале частот [8].

#### АПРОКСИМАЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Помимо спектров, нас интересовал и вид собственных функций. Они также рассчитывались численно. Функции  $\xi$  и  $\eta$  не имели особенностей, а функция  $\tau$  демонстрировала интересное поведение вблизи границы. При малых значениях величины  $F = 2\beta^{-1/2}\Omega$  проявлялся значительный пик (рис. 5,  $a$ ), при больших значениях одиночный пик сменялся серией чередующихся положительных и отрицательных пиков с нарастающей по мере приближения к границе амплитудой (рис. 5,  $б$ ). Это было проверено для ряда точек с одним значением  $F$ , в том числе и соответствующим разным модам. Наиболее сильно этот эффект проявлялся при больших значениях параметра Мак-Илвайна, когда величина  $\delta = x - 1$  становится малым (отрицательным) параметром. Для оценки положения и формы этого пика мы разложили уравнение (18) в ряд по  $\delta$ . В результате мы получили одну из классических форм уравнения Бесселя

$$\delta^2 \tau'' + 9\delta \tau' + (12 + \delta^2 F^2) \tau = \frac{1}{4} \left( \xi' + \frac{\xi}{\delta} \right), \quad (25)$$

решение которого имеет вид

$$\tau = \tau_1 + \tau_2, \quad (26)$$

$$\tau_1 = C\delta^{-4} [Y_2(F\delta) - AJ_2(F\delta)], \quad (27)$$

$$\tau_2 = \frac{\pi}{8\delta^4} \left[ Y_2(F\delta) \int_{x_0-1}^{\delta} \xi^4 (\xi \xi' + \xi) J_2(F\xi) d\xi - J_2(F\delta) \int_{x_0-1}^{\delta} \xi^4 (\xi \xi' + \xi) Y_2(F\xi) d\xi \right], \quad (28)$$

где  $J_2, Y_2$  — функции Бесселя второго порядка первого и второго рода соответственно,  $C, A$  — константы. Так как в большинстве случаев

$$\tau_1 \gg \tau_2, \quad (29)$$

константа  $A$  определяется из граничных условий (22) при  $x = x_0$ :

$$A = \frac{Y_2[F(x_0 - 1)]}{J_2[F(x_0 - 1)]}. \quad (30)$$

При изменении параметра  $\alpha$  с 10 до 1 на рис. 5, а, б функция  $\xi$  не изменится, а функция  $\tau$  будет отличаться лишь амплитудой — на рис. 5, а в 5 раз, а на рис. 5, б — в 4.8 раза. Во всех случаях эти функции прекрасно совпадают с аппроксимацией (27), откуда мы можем сделать вывод о том, что коэффициент  $C$  существенно зависит от  $\alpha$  как для одиночного пика, так и для чередующихся пиков.

В принципе при фиксированном масштабе функции  $\xi$ , константа  $C$  определяется из граничного условия (22) при  $x = -x_0$ . Однако решение (27) справедливо только при  $|x| \sim 1$ , и нельзя ожидать, чтобы оно удовлетворяло второму граничному условию. Поэтому конкретное значение константы  $C$  определить невозможно. Численные расчеты показывают, что величина  $C$  изменяется вдоль линий спектра и принимает как положительные, так и отрицательные значения. При  $C = 0$  соотношение (29) перестает выполняться, и вид функции  $\tau$  определяется членом  $\tau_2$  (рис. 5, в), причем для его вычисления нам достаточно разложить  $\xi$  вблизи границы и ограничиться первым членом  $\xi \sim (x - x_0)$ . При этом  $\xi \gg \tau$ . Во всех остальных случаях точность решения (27) оказывается вполне достаточной.

Воспользовавшись найденным решением, мы можем определить положение  $x_{\max}$  главного максимума продольного смещения  $\tau$ . Для этого продифференцируем (27) и приравняем производную нулю при  $x = x_{\max}$ . В результате получим

$$A = \frac{Fx_{\max}Y_3(Fx_{\max}) + 2Y_2(Fx_{\max})}{Fx_{\max}J_3(Fx_{\max}) + 2J_2(Fx_{\max})}. \quad (31)$$

Приравнявая (30) и (31), получим зависимость  $x_{\max}$  от  $x_0$  и  $F$ . Выбрав значения  $F$ , соответствующие наклонным линиям спектра, определим значения  $x_{\max}$  для магнитных поверхностей с параметрами Мак-Илвайна 2...10. На рис. 6 показаны пространственные положения этих максимумов в магнито-меридиональном сечении внутренней магнитосферы в координатах GSM. В этих областях плазма с замороженным в нее полем испытывают сильные продольные колебания с разными частотами, накладывающиеся друг на друга. В результате следует ожидать развития нелинейных эффектов, приводящих к возбуждению колебаний высших гармоник. Этот

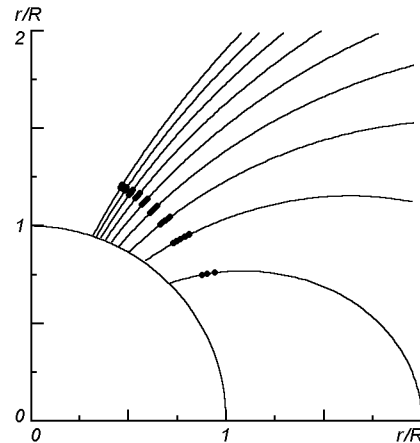


Рис. 6. Магнитомеридиональная диаграмма положения максимального продольного смещения пяти первых медленных магнитозвуковых мод на магнитных оболочках с целым значением параметра Мак-Илвайна в координатах GSM. По осям отложено расстояние в радиусах Земли. Вертикальная ось параллельна магнитному моменту Земли

эффект особенно ярко выражен при больших числах Мак-Илвайна, с чем могут быть связаны располагающиеся в данной области источники километрового радиоизлучения Земли, обладающие большой мощностью.

Необычное поведение функции  $\tau$  практически не влияет на функцию  $\xi$ , поскольку в уравнении (18) члены, содержащие  $\tau$ , умножаются на малую вблизи границы величину  $c^7$ .

## ВЫВОДЫ

Спектр собственных баллонных возмущений магнитосферной плазмы представляет собой сложную комбинацию спектров альвеновских и медленных магнитозвуковых мод. Он состоит из двух подсистем с различной четностью, не взаимодействующих друг с другом, каждая из которых является результатом наложения спектров альвеновских и медленных магнитозвуковых мод с «перезамыканием».

Предложено приближенное аналитическое выражение (27) для функции  $\tau$ , справедливое для любой поляризации при больших значениях параметра Мак-Илвайна вблизи ионосферы, где ее амплитуда максимальна. В тех немногих случаях, когда входящая в (27) константа  $C$  мала,

можно использовать выражения (26)—(28). Однако в этом случае амплитуда  $\tau$  существенно меньше амплитуды  $\xi$ , и потому эти случаи не представляют практического интереса.

1. Черемных О. К., Бурдо О. С., Кременецкий И. А., Парновский А. С. К теории МГД-волн во внутренней магнитосфере Земли // *Космічна наука і технологія*.—2001.—7, № 5/6.—С. 44—63.
2. Cheng C. Z., Chang T. C., Lin C. A., Tsai W. H. Magnetohydrodynamic theory of field line resonances in the magnetosphere // *J. Geophys. Res.*—1993.—98 A, N 7.—P. 11339—11347.
3. Cheremnykh O. K., Parnowski A. S. The theory of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth // *Adv. Space Res.*—2004.—33, N 5.—P. 769—773.
4. Cheremnykh O. K., Parnowski A. S. Alfvén and ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth: stability, structure and influence of the ionospheric conductivity // *Space science: New research* / Ed. by N. Maravell. — New York: Nova Sci. Publ., 2006.—P. 71—108.
5. Cheremnykh O. K., Parnowski A. S., Burdo O. S. Ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth // *Planet. Space Sci.*—2004.—55, N 13.—P. 1217—1229.
6. Dewar R. L., Glasser A. H. Ballooning mode spectrum in

general toroidal system // *Phys. Fluids*.—1983.—26, N 10.—P. 3038—3052.

7. Leonovich A. S., Mazur V. A. Standing Alfvén waves with  $m > 1$  in an axisymmetrical magnetosphere excited by a stochastic source // *Ann. Geophysicae*.—1998.—16.—P. 900—913.
8. Mager P. N., Klimushkin D. Yu. Theory of azimuthally small-scale Alfvén waves in an axisymmetric magnetosphere with small but finite plasma pressure // *J. Geophys. Res.*—2002.—107 A, N 11.

---

#### SPECTRUM OF BALLOONING PERTURBATIONS WITH ARBITRARY POLARIZATION IN THE INNER MAGNETOSPHERE OF THE EARTH

A. S. Parnowski, O. K. Cheremnykh

The MHD ballooning eigenperturbations with arbitrary polarization in the inner magnetosphere of the Earth is considered. We assume the geomagnetic field to have dipolar geometry and consider the ionosphere as a perfect conductor. An approximated analytical expression for the longitudinal plasma displacement near the ionosphere is derived. The displacement is much larger than that in the equatorial magnetosphere.