Для нахождения установившихся ошибок ориентации воспользуемся теоремой о предельном значении оригинала

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{S\to 0} SQ^{-1}V = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{12}/c_{11} \end{vmatrix}, \qquad (19)$$

где $x(t)$ — оригинал вектора $\mathbf{X}(S)$.

С учетом выражения (12) установившаяся ошибка ориентации по курсу для случая 1 определяется выражением

$$\Delta\varphi_z = \frac{1.414\delta_4^{(1)} - \delta_3^{(1)}}{1 - \delta_3^{(2)} - \delta_4^{(1)} + 1.414(\delta_4^{(2)} - \delta_2^{(1)})},$$

а в случаях 2—4 — выражением

$$\Delta\varphi_z = \delta_1^{(2)}. \qquad (20)$$

Используя выражение (13), получим установившее значение угловой ошибки ориентации по курсу для случая 5:

$$\Delta\varphi_z = \frac{0.875\delta_1^{(2)} - 0.125\delta_3^{(1)} + 0.177\delta_4^{(1)}}{1 - 0.177\delta_2^{(1)} - 0.125\delta_3^{(2)} - 0.125\delta_4^{(1)} + 0.177\delta_4^{(2)}}.$$

Согласно выражению (19) наличие ошибок положения ИУС или ДМ в рассматриваемом случае приводит лишь к появлению установившейся ошибки по курсу. Для случаев 2—4 на основании выражения (20) эта ошибка не превысит $\pm 10'$, если принять, что $\delta_i^{(1)} \le \pm 10'$, $\delta_i^{(2)} \le \pm 10'$.

Таким образом, для случая, когда ДМ рассматриваются как источники только управляющего момента, приведены соотношения, позволяющие оценить влияние их перекосов на характеристики СУОС. Если ДМ также используются как источники угловой скорости КА, то погрешности установки положения приводят к появлению установившейся угловой ошибки ориентации по курсу. Для рассмотренной избыточной схемы установки ДМ, учитывая различные комбинаций работающих ДМ, приведены аналитические выражения для определения установившейся ошибки ориентации КА.

1. Белоусов К., Меланченко А., Салтыков Ю. Оптимизация пространственной конфигурации маховиков в задачах управления ориентацией спутника // II междунар. конф.-выставка «Малые спутники. Новые технологии, миниатюризация. Области эффективного применения в XXI веке.» — Королев, 2000.—С. 1—6.
2. Раушенбах Б. В. Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. — М.: Наука, 1974.—598 с.

INFLUENCE ESTIMATION OF REACTION WHEEL POSITION ERRORS OF SPACECRAFT ATTITUDE CONTROL SYSTEM ON ITS ATTITUDE CONTROL ACCURACY

E. V. Khoroshilov, S. V. Khoroshilov

Different reaction wheel installation schemes of the spacecraft attitude control system are considered. The influence of the reaction wheel position errors on the spacecraft attitude control accuracy is investigated. The relations which allow one to evaluate the influence of these errors on the accuracy characteristic of the attitude control system are derived. Our results of numerical evaluations for possible operational cases of the reaction wheel installation schemes under consideration are presented.

УДК 531.38

© А. В. Гладун[1], А. М. Ковалев[2]

[1]Донецький державний інститут штучного інтелекту
[2]Інститут прикладної математики та механіки НАН України

ЧАСТИЧНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА С ГИРОДИНАМИ

Досліджується задача часткової стабілізації динамічної системи, що описує рух супутника, який несе один чи два гіродини. Отримано керування, яким відповідають стаціонарні розв'язки системи, що є положеннями відносної рівноваги і рівномірними обертаннями супутника. Виділено випадки керованості системи по частині змінних у лінійному наближенні в околі знайдених стаціонарних рухів. Побудовано керування стабілізації рівномірного обертання супутника.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим задачу активной стабилизации спутника, осуществляемой при помощи гиродинов. Гиродин — двухстепенная гироскопическая система, состоящая из ротора и гирокамеры. Ротор закреплен внутри гирокамеры и вращается с постоянной угловой скоростью.

Будем использовать уравнения движения твердого тела с s гиродинами, полученные в работе [4].

Запишем их в предположении, что ротор является шаровым, а гирокамера динамически симметрична относительно своей оси вращения:

$$\boldsymbol{\theta}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}_0\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_0\dot{\mathbf{q}}\mathbf{cosq} - \mathbf{N}_0\dot{\mathbf{q}}\mathbf{sinq})\mathbf{h} + \\ + \boldsymbol{\omega}\times[\mathbf{L}_0\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_0\mathbf{sinq} + \mathbf{N}_0\mathbf{cosq})\mathbf{h}] = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{J}(\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}_0^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\omega}}) - (\mathbf{K}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{cosq} - \mathbf{N}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{sinq})\mathbf{h} = \mathbf{Q}_{\mathrm{y}}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\theta}$ — матрица тензора инерции системы носитель-гиродины, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости носителя, $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_s)$ — вектор углов поворота гирокамер относительно носителя, $\mathbf{sinq} = \mathrm{diag}(\sin q_1, ..., \sin q_s)$, $\mathbf{cosq} = \mathrm{diag}(\cos q_1, ..., \cos q_s)$, $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(J_1, ..., J_s)$, $\mathbf{h} = (h_1, ..., h_s)^m$, $\mathbf{K}_0 = (\mathbf{k}_{01}, ..., \mathbf{k}_{0s})$, $\mathbf{L}_0 = (\mathbf{l}_{01}, ..., \mathbf{l}_{0s})$, $\mathbf{N}_0 = (\mathbf{n}_{01}, ..., \mathbf{n}_{0s})$, $\mathbf{k}_{0i})$, $\mathbf{l}_{0i}$, $\mathbf{n}_{0i}$ — орты, задающие положение i-го гиродина в теле носителе, $\mathbf{Q}_{\mathrm{y}}$ — вектор управлений, индекс «т» — символ транспонирования.

Преобразуем уравнения (1), (2), введя переменные [5]

$$\xi_j = J_j(\mathbf{l}_{0j}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\omega}) + J_j\dot{q}_j, \qquad j = 1, ..., s,$$

и запишем уравнения в системе координат $Oxyz$, жестко связанной с носителем. Система $Oxyz$ выбрана таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\omega} - \sum_{j=1}^{s} J_j(\mathbf{l}_{0j}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\omega})\mathbf{l}_{0j} = (A_1\omega_1, A_2\omega_2, A_3\omega_3)^m,$$

где A_1, A_2, A_3 — обобщенные моменты инерции.

Система уравнений (1), (2) принимает вид

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \\ + \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{1}{J_j}h_j\xi_j[\sin q_j n_{0j}^1 - \cos q_j k_{0j}^1] - \right. \\ \left. - \omega_2\xi_j l_{0j}^3 + \omega_3\xi_j l_{0j}^2 - l_{0j}^1 u_j\right), \\ \dot{q}_j = \frac{1}{J_j}\xi_j - (\mathbf{l}_{0j}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\omega}), \tag{3} \\ \dot{\xi}_j = h_j[(\mathbf{k}_{0j}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\omega})\cos q_j - (\mathbf{n}_{0j}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\omega})\sin q_j] + u_j.$$

Запишем уравнения (3) для различных случаев.

Случай 1. Пусть на спутнике установлен один гиродин, и орты $\mathbf{k}_0 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{l}_0 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{n}_0 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, задают его начальное расположение. Ось вращения гирокамеры направлена по оси Ox. Тогда движение динамической системы носитель-гиродин описывается системой уравнений

$$\dot{\omega}_1 = [(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 - u]/A_1, \\ \dot{\omega}_2 = [(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \omega_3\xi + h\xi\sin q/J]A_2, \\ \dot{\omega}_3 = [(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \omega_2\xi - h\xi\cos q/J]A_3, \tag{4} \\ \dot{q} = \xi/J - \omega_1, \\ \dot{\xi} = h(\omega_3\cos q - \omega_2\sin q) + u.$$

Случай 2. Расположим на носителе два гиродина так, чтобы ось вращения гирокамеры первого была направлена по оси Ox, а ось вращения гирокамеры второго — по оси Oy; имеем

$$\dot{\omega}_1 = [(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \omega_3\xi_2 - \\ - h_2\xi_2\cos q_2/h_2\xi_2\cos q_2/J_2 - u_1]/A_1, \\ \dot{\omega}_2 = [(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \omega_3\xi_1 + h_1\xi_1\sin q_1/J_1 - u_2]/A_2, \\ \dot{\omega}_3 = [(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \omega_2\xi_1 - \omega_1\xi_2 - \\ - h_1\xi_1\cos q_1/J_1 + h_2\xi_2\sin q_2/J_2]/A_3, \\ \dot{q}_1 = \xi_1/J_1 - \omega_1, \tag{5} \\ \dot{q}_2 = \xi_2/J_2 - \omega_2, \\ \dot{\xi}_1 = h_1(\omega_3\cos q_1 - \omega_2\sin q_1) + u_1, \\ \dot{\xi}_2 = h_2(\omega_1 cos q_2 - \omega_3\sin q_2) + u_2.$$

Случай 3. Пусть на спутнике установлено два гиродина, и ось вращения одного из них не совпадает ни с одной из координатных осей. В качестве ортов примем векторы

$$\mathbf{k}_{01} = (6/35, 6/7, -17/35)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{l}_{01} = (2/7, 3/7, 6/7)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{n}_{01} = (33/35, -2/7, -6/35)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{k}_{02} = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{l}_{02} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{n}_{02} = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда получаем уравнения движения в форме

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{A_1}\left[(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \frac{3}{7}\omega_3\xi_1 - \right. \\ \left. - \frac{6}{7}\omega_2\xi_1 + \frac{1}{35J_1}h_1\xi_1(33\sin q_1 - 6\cos q_1) - \frac{2}{7}u_1 - u_2\right],$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{A_2}\left[(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \omega_3\xi_2 - \right. \\ - \frac{2}{7}\omega_3\xi_1 + \frac{6}{7}\omega_1\xi_1 - \frac{2}{7J_1}h_1\xi_1(\sin q_1 + 3\cos q_1) + \\ \left. + \frac{h_2}{J_2}\sin q_2\xi_2 - \frac{3}{7}u_1\right],$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{1}{A_3}\left[(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \frac{2}{7}\omega_2\xi_1 - \frac{3}{7}\omega_1\xi_1 + \right.$$

$$+\omega_2\xi_2 - \frac{1}{35J_1}h_1\xi_1(6\sin q_1 - 17\cos q_1) -$$

$$\left. - \frac{1}{J_2}h_2\xi_2\cos q_2 - \frac{6}{7}u_1 \right], \tag{6}$$

$$\dot q_1 = \xi_1/J_1 - (2\omega_1 + 3\omega_2 + 6\omega_3)/7,$$

$$\dot q_2 = \xi_2/J_2 - \omega_1,$$

$$\dot\xi_1 = h_1[(6\cos q_1 - 33\sin q_1)\omega_1 +$$

$$+10(3\cos q_1 + \sin q_1)\omega_2 +$$

$$+(6\sin q_1 - 17\cos q_1)\omega_3]/35 + u_1,$$

$$\dot\xi_2 = h_2(\omega_3\cos q_2 - \omega_2\sin q_2) + u_2.$$

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Системы уравнений (4)—(6) представляют собой автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{7}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ — фазовый вектор системы, $\mathbf{u} \in R^m$ — вектор управления. Обозначим через $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{u}(t))$ решение системы (7) при управляющем воздействии $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$. Решение $\mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{u}(t))$ [3] называется стационарным движением системы (7), если $\varphi(t, \mathbf{u}(t)) \equiv \mathbf{a}$, где $\mathbf{a} \in R^n$ — некоторый постоянный вектор.

Для того чтобы у системы (7) существовали стационарные движения, необходимо и достаточно, чтобы фазовая скорость $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ системы в точке $(a_1, \ldots, a_n)$ была равна нулю. Таким образом, для нахождения всех стационарных движений системы (7) нужно решить систему уравнений

$$f_i((a_1, \ldots, a_n), u) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Запишем уравнения стационарных движений для $\mathbf{u} = 0$ и решим их для каждого из приведенных выше случаев.

Случай 1.

$$(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 = 0,$$

$$(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \omega_3\xi + h\xi\sin q/J = 0,$$

$$(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \omega_2\xi - h\xi\cos q/J = 0,$$

$$\xi/J - \omega_1 = 0,$$

$$h(\omega_3\cos q - \omega_2\sin q) = 0.$$

Из первого уравнения следует $\omega_2 = 0$ или $\omega_3 = 0$, а из четвертого $\xi = J\omega_1$. Если $\omega_2 = 0$, то

$$\omega_1[(A_3 - A_1 - J)\omega_3 + h\sin q] = 0,$$

$$h\omega_1\cos(q) = 0,$$

$$h\omega_3\cos(q) = 0,$$

откуда имеем равномерные вращения

$$\left(0, 0, \omega_3^0, \frac{\pi}{2} + \pi n, 0\right), \quad n \in Z, \quad \omega_3^0 \equiv \text{const}, \tag{8}$$

$$\left(\omega_1^0, 0, \frac{(-1)^{m+1}h}{A_3 - A_1 - J}, \pi m, J\omega_1^0\right),$$

$$m \in Z, \quad \omega_1^0 \equiv \text{const}. \tag{9}$$

Если $\omega_3 = 0$, то

$$h\omega_1\sin(q) = 0,$$

$$\omega_1[(A_1 - A_2 + J)\omega_2 - h\cos q] = 0,$$

$$\omega_2\sin(q) = 0,$$

и получаем следующие равномерные вращения:

$$(0, \omega_2^0, 0, \pi k, 0), \quad k \in Z, \quad \omega_2^0 \equiv \text{const}, \tag{10}$$

$$\left(\omega_1^0, \frac{(-1)^l h}{A_1 - A_2 + J}, 0, \pi l, J\omega_1^0\right),$$

$$l \in Z, \quad \omega_1^0 \equiv \text{const}. \tag{11}$$

Если же $\omega_2 = \omega_3 = 0$, то из второго и третьего уравнений получаем $h\omega_1\sin(q) = 0$ и $h\omega_1\cos(q) = 0$, откуда следует положение равновесия:

$$(0, 0, 0, q^0, 0), \quad q^0 \equiv \text{const}. \tag{12}$$

Случай 2. Имеем систему уравнений

$$(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \omega_3\xi_2 - h_2\xi_2\cos q_2/J_2 - u_1 = 0,$$

$$(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \omega_3\xi_1 + h_1\xi_1\sin q_1/J_1 - u_2 = 0,$$

$$(A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \omega_2\xi_1 - \omega_1\xi_2 -$$

$$- h_1\xi_1\cos q_1/J_1 + h_2\xi_2\sin q_2/J_2 = 0,$$

$$\xi_1/J_1 - \omega_1 = 0, \qquad \xi_2/J_2 - \omega_1 = 0,$$

$$h_1(\omega_3\cos q_1 - \omega_2\sin q_1) + u_1 = 0,$$

$$h_2(\omega_1\cos q_2 - \omega_3\sin q_2) + u_2 = 0.$$

Из четвертого и пятого уравнений $\xi_1 = J_1\omega_1$, $\xi_2 = J_2\omega_2$, тогда

$$\omega_2[(A_2 - A_3 + J_2)\omega_3 - h_2\cos q_2] = 0,$$

$$\omega_1[(A_3 - A_1 - J_1)\omega_3 + h_1\sin q_1] = 0,$$

$$(A_1 - A_2 + J_1 + J_2)\omega_1\omega_2 - h_1\omega_1\cos q_1 + h_2\omega_2\sin q_2 = 0,$$

$$\omega_3\cos q_1 - \omega_2\sin q_1 = 0,$$

$$\omega_1\cos q_2 - \omega_3\sin q_2 = 0.$$

Далее, если $\omega_2 = 0$, то получаем следующие равномерные вращения

$$\left(\omega_1^0, 0, \frac{(-1)^{m+1}h}{A_3 - A_1 - J_1}, \frac{\pi}{2} + \pi m,\right.$$

$$\left.\mathrm{arctg}\frac{(A_3 - A_1 - J_1)\omega_1^0}{(-1)^{m+1}h}, J_1\omega_1^0, 0\right),$$

$$m \in Z, \quad \omega_1^0 \equiv \mathrm{const},$$

$$\left(\frac{(-1)^{m+1}h_1\mathrm{tg}q_2^0}{A_3 - A_1 - J_1}, 0, \frac{(-1)^{m+1}h_1}{A_3 - A_1 + J_1}, \frac{\pi}{2} + \pi m,\right.$$

$$\left.q_2^0, \frac{J_1(-1)^{m+1}h_1\mathrm{tg}q_2^0}{A_3 - A_1 - J_1}, 0\right), \quad m \in Z, \quad q_2^0 \equiv \mathrm{const},$$

а при $\omega_1 = 0$ —

$$\left(0, \omega_2^0, \frac{(-1)^k h_2}{A_2 - A_3 + J_2}, \mathrm{arctg}\left(\frac{(-1)^k h_2}{(A_2 - A_3 + J_2)\omega_2^0}\right),\right.$$

$$\left.\pi k, 0, J_2\omega_2^0\right), \quad k \in Z, \quad \omega_2^0 \equiv \mathrm{const},$$

$$\left(0, \frac{(-1)^n h_2\mathrm{ctg}q_1^0}{A_2 - A_3 - J_2}, \frac{(-1)^n h_2}{A_2 - A_3 + J_2}, q_1^0, \pi n, 0,\right.$$

$$\left.\frac{J_2(-1)^n h_2\mathrm{ctg}q_1^0}{A_2 - A_3 - J_2}\right), \quad n \in Z, \quad q_1^0 \equiv \mathrm{const}.$$

При $\omega_1 = \omega_2 = 0$ получаем равномерное вращение

$$(0, 0, \omega_3^0, \pi/2 + \pi n, \pi k, 0, 0), \quad n, k \in Z, \quad \omega_3^0 \equiv \mathrm{const}$$

и положение равновесия

$$(0, 0, 0, q_1^0, q_2^0, 0, 0), \quad q_1^0, q_2^0 \equiv \mathrm{const}.$$

Случай 3. Для этого случая получаем систему уравнений вида

$$(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 +$$

$$+ J_1\left[\frac{3}{7}\omega_3 - \frac{6}{7}\omega_2 + \frac{1}{35J_1}h_1(33\sin q_1 - 6\cos q_1)\right] \times$$

$$\times\left[\frac{2}{7}\omega_1 + \frac{3}{7}\omega_2 + \frac{6}{7}\omega_3\right] = 0,$$

$$(A_3 - A_1 - J_2)\omega_1\omega_3 -$$

$$-J_1\left[\frac{2}{7}\omega_3 - \frac{6}{7}\omega_1 - \frac{2}{7J_1}h_1(\sin q_1 + 3\cos q_1)\right] \times$$

$$\times\left[\frac{2}{7}\omega_1 + \frac{3}{7}\omega_2 + \frac{6}{7}\omega_3\right] + h_2\omega_1\sin q_2 = 0,$$

$$(A_1 - A_2 + J_2)\omega_1\omega_2 +$$

$$+ J_1\left[\frac{2}{7}\omega_2 - \frac{3}{7}\omega_1 - \frac{1}{35J_1}h_1(6\sin q_1 - 17\cos q_1)\right] \times$$

$$\times\left[\frac{2}{7}\omega_1 + \frac{3}{7}\omega_2 + \frac{6}{7}\omega_3\right] - h_2\omega_1\cos q_2 = 0,$$

$$(6\cos q_1 - 33\sin q_1)\omega_1 + 10(3\cos q_1 + \sin q_1)\omega_2 +$$

$$+ (6\sin q_1 - 17\cos q_1)\omega_3 = 0,$$

$$\omega_3\cos q_2 - \omega_2\sin q_2 = 0,$$

где $\xi_1 = J_1(2\omega_1 + 3\omega_2 + 6\omega_3)/7$ и $\xi_2 = J_2\omega_1$.

Полагая $\omega_2 = \omega_3 = 0$, получаем такие равномерные вращения:

$$(\omega_1^0, 0, 0, \mathrm{arctg}(2/11) - \pi n, \mathrm{arctg}2 - \pi n,$$

$$2J_1\omega_1^0/7, J_2\omega_1^0),$$

$$n \in Z, \quad \omega_1^0 \equiv \mathrm{const},$$

если $h_1 = \sqrt{5}\,[(-1)^n 6J_1\omega_1^0 + 49h_2/\sqrt{5}\,]/14$.

Полагая $\omega_1 = \omega_3 = 0$, получим

$$(0, \omega_2^0, 0, -\mathrm{arctg}3 + \pi k, 2\pi k, 3J_1\omega_2^0/7, 0),$$

$$k \in Z, \quad \omega_2^0 \equiv \mathrm{const},$$

если $h_1 = 2(-1)^k J_1\omega_2^0/7$.

Полагая $\omega_1 = \omega_2 = 0$, имеем

$$(0, 0, \omega_3^0, \mathrm{arctg}(17/6) - \pi m, \pi/2 + 2\pi m, 6J_1\omega_3^0/7, 0),$$

$$m \in Z, \quad \omega_3^0 \equiv \mathrm{const},$$

если $h_1 = \sqrt{13}(-1)^m J_1\omega_3^0/7$.

Можно еще указать такие равномерные вращения:

$$(-3\omega_3^0, 0, \omega_3^0, \mathrm{arctg}(1/3), -\pi/2 + \pi n, 0, -3J_2\omega_3^0),$$

$$n \in Z, \quad \omega_3^0 \equiv \mathrm{const},$$

если $h_2 = (-1)^n(A_3 - A_1 - J_2)\omega_3^0$,

$$(-3\omega_2^0/2, \omega_2^0, 0, -\mathrm{arctg}(6/17), \pi m, 0, -3J_2\omega_2^0/2),$$

$$m \in Z, \quad \omega_2^0 \equiv \mathrm{const},$$

если $h_2 = (-1)^m(A_1 - A_2 + J_2)\omega_2^0$,
и положение равновесия

$$(0, 0, 0, q_1^0, q_2^0, 0, 0), \quad q_1^0, q_2^0 \equiv \mathrm{const}. \tag{13}$$

СТАБИЛИЗАЦИЯ РАВНОВЕСИЯ

Под положением равновесия будем понимать такое состояние спутника, при котором его угловая скорость вращения равна нулю ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$) и остается таковой в течение всего промежутка времени.

Так как у каждой из систем (4)—(6) существует интеграл (модуль вектора кинетического момента системы есть величина постоянная), то указанные системы не являются управляемыми по всем переменным. Однако для стабилизации равновесия достаточно свойства управляемости по ω и по ξ.

Видно, что система (4), линеаризованная в окрестности положения равновесия (12), и система (5), линеаризованная в окрестности равновесия (13), не обладают свойством управляемости по переменным ω_1, ω_2, ω_3 [1]. Это приводит к невозможности построения управления, стабилизирующего положение равновесия по линейному приближению для систем (4) и (5).

Если же ось вращения гирокамеры одного из гиродинов не лежит ни в одной из координатных плоскостей системы координат $Oxyz$ (случай 3), то система линейного приближения управляема по переменным ω_1, ω_2, ω_3, ξ_1, ξ_2. Построим стабилизирующее управление для этого случая.

Сделаем замену $x_1 = \omega_1$, $x_2 = \omega_2$, $x_3 = \omega_3$, $x_4 = \xi_1$, $x_5 = \xi_2$, $x_6 = q_1 - q_1^0$, $x_7 = q_2 - q_2^0$ и рассмотрим систему (6), линеаризованную в положении равновесия (13). Первые три и последние два уравнения системы линейного приближения не содержат переменных q_1, q_2, а значит, уравнения для $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ могут быть отброшены. Полученная таким образом система пяти обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A_1\dot{x}_1 = \frac{1}{35J_1}h_1x_4(33\sin q_1^0 - 6\cos q_1^0) - \frac{2}{7}u_1 - u_2,$$

$$A_2\dot{x}_2 = -\frac{2}{7J_1}h_1x_4(\sin q_1^0 + 3\cos q_1^0) + \frac{h_2}{J_2}\sin q_2^0 x_5 - \frac{3}{7}u_1,$$

$$A_3\dot{x}_3 = -\frac{1}{35J_1}h_1x_4(6\sin q_1^0 - 17\cos q_1^0) -$$

$$-\frac{1}{J_2}h_2x_5\cos q_2 - \frac{6}{7}u_1, \qquad (14)$$

$$\dot{x}_4 = h_1[(6\cos q_1^0 - 33\sin q_1^0)x_1 + 10(3\cos q_1^0 + \sin q_1^0)x_2 +$$

$$+(6\sin q_1^0 - 17\cos q_1^0)x_3]/35 + u_1,$$

$$\dot{x}_5 = h_2(x_3\cos q_2^0 - x_2\sin q_2^0) + u_2.$$

описывает поведение переменных ω_1, ω_2, ω_3, ξ_1, ξ_2. Выберем следующие значения параметров:

$$A_1 = 230,\ A_2 = 310,\ A_3 = 210, \qquad (15)$$

$$J_1 = 3, \quad J_2 = 2, \quad w = 500, \quad h_1 = J_1 w \quad , h_2 = J_2 w,$$

$$q_1^0 = \pi/6, \quad q_2^0 = \pi/3. \qquad (16)$$

Пусть $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ есть система (14), записанная в матричном виде. При заданных значениях и

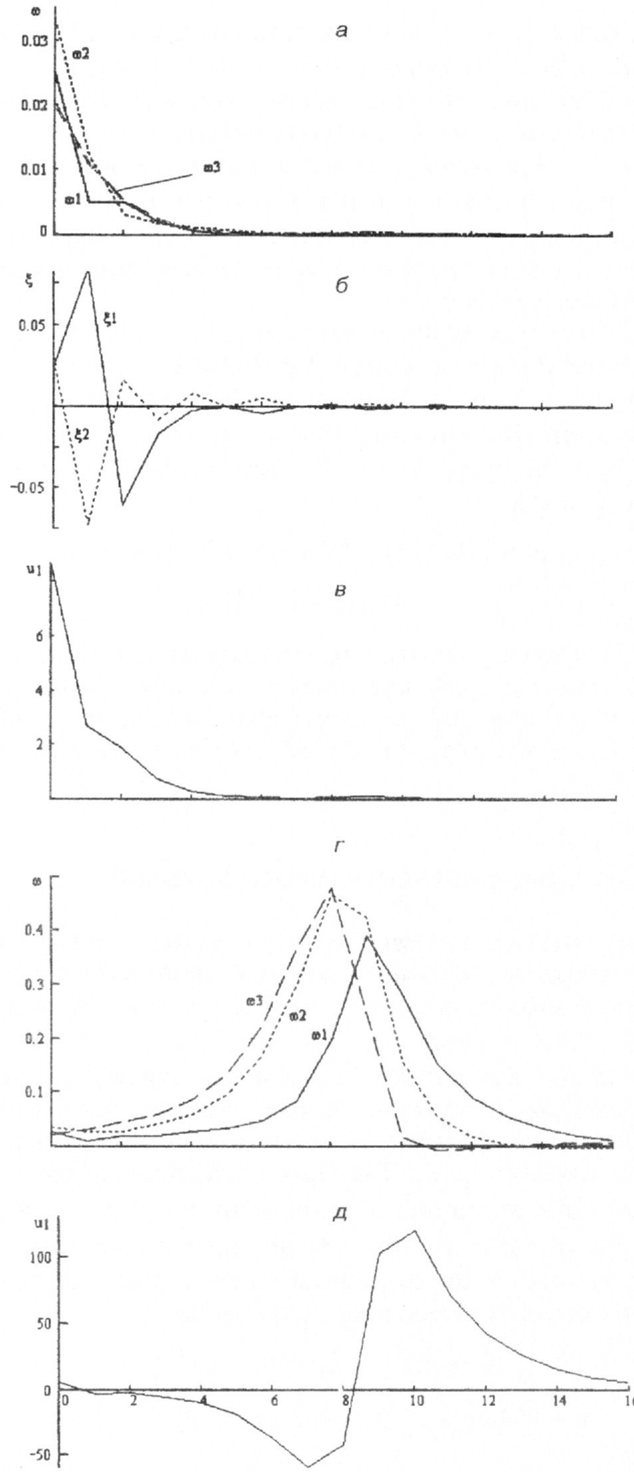

Рис. 1. Модель управления (17) для стабилизации системы (6) (*а*: $\omega_1(0) = 0.025$, $\omega_2(0) = 0.033$, $\omega_3(0) = 0.02$, $\omega_1(16) = -6.426\cdot10^{-6}$, $\omega_2(16) = 4.126\cdot10^{-6}$, $\omega_3(16) = 1.24\cdot10^{-6}$; *б*: $\xi_1(0) = 0.024$, $\xi_2(0) = 0.027$, $\xi_1(16) = -37.82\cdot10^{-6}$, $\xi_2(16) = -48.63\cdot10^{-6}$; *в*: $u_1(0) = 8.624$, $u_1(16) = -3.767\cdot10^{-4}$), а также модель управления не оптимизированного управления для системы (6) (*г*: $\omega_1(0) = 0.025$, $\omega_1(16) = 0.01$, $\omega_2(0) = 0.033$, $\omega_2(16) = -4.056\cdot10^{-3}$, $\omega_3(0) = 0.02$, $\omega_3(16) = 2.636\cdot10^{-3}$, *д*: $u_1(0) = 5.036$, $u_1(16) = 4.521$, $u_1(20) = 0.477$)

условии $u_2 = 0$ определитель матрицы {**B**, **AB**, **A**^{2}**B**, **A**^{3}**B**, **A**^{4}**B**} равен $0.188 \cdot 10^{11} \neq 0$. Следовательно, ранг этой маторицы равен пяти, и система (14) управляема даже с помощью одного управления $u = u_1$. В этом случае, как известно из [2], мы можем выбрать линейное управление $u_1 = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ так, чтобы коэффициенты характеристического уравнения для системы (14) принимали наперед заданные произвольные значения.

Пусть характеристическое уравнение имеет один действительный и четыре комплексных корня $\alpha_1 \pm \beta_1 i$, $\alpha_2 \pm \beta_2 i$ и α_3, тогда для обеспечения асимптотической устойчивости достаточно положить $\alpha = \alpha_1 = = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$. В этом случае получаем управление

$$u_1 = 160.83\omega_1 + 69.9\omega_2 + 120.32\omega_3 - -4.21\xi_1 - 1.23\xi_2. \quad (17)$$

Результаты численного моделирования применения построенного управления (17) для стабилизации системы (6) с начальным условием (1/40, 1/30, 1/50, $\pi/6$, $\pi/3$, 1/42, 1/37) приведены на рис. 1.

СТАБИЛИЗАЦИЯ РАВНОМЕРНОГО ВРАЩЕНИЯ

Равномерным вращением будем называть вращение спутника с постоянной угловой скоростью вокруг какой-либо из осей, т. е. $\omega_1 = \omega_1^0$, $\omega_2 = \omega_2^0$, $\omega_3 = \omega_3^0$, $\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0 \equiv \mathrm{const}$.

Изучая для случая 1 уравнения линейного приближения в окрестности равномерных вращений, устанавливаем неуправляемость системы по переменным ω_1, ω_2, ω_3. Так, для стационарного движения (8) в результате линеаризации получаем $\dot{\omega}_3 = 0$, следовательно, система (4) не управляется по ω_3. В то же время по оставшимся переменным система линейного приближения управляема:

$$\dot{x}_1 = [(A_2 - A_3)\omega_3^0 x_2 - u]/A_1,$$
$$\dot{x}_2 = [(A_3 - A_1)\omega_3^0 x_1 - \omega_3^0 x_5 + h(-1)^n x_5/J]/A_2,$$
$$\dot{x}_4 = x_5/J - x_1,$$
$$\dot{x}_5 = h(-1)^{n+1}[\omega_3^0(q - (\pi/2 + \pi n)) + \omega_2] + u.$$

Здесь

$$x_1 = \omega_1, \quad x_2 = \omega_2, \quad x_3 = \omega_3 - \omega_3^0,$$
$$x_4 = q - (\pi/2 + \pi n), \quad x_5 = \xi.$$

Это позволяет построить управление, стабилизирующее равномерное вращение вида (8), где скорость ω_3 после стабилизации принимает значение, близкое к начальному состоянию системы, и не может быть задана заранее. Так, при выполнении равенств (15) и $J = 3$, $w = 500$, $h = Jw$, $n = 2$ построено управление

$$u = 46.546\omega_1 + 2997.41\omega_2 + + 99.9642(q - (5\pi/2) - 1.976\xi,$$

переводящее начальное состояние системы $\omega_1^0 = = 1/20$, $\omega_2^0 = 1/30$, $\omega_3^0 = 30$, $q^0 = 5\pi/2 + \pi/30$, $\xi^0 = = 1/40$ в следующее равномерное вращение $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 29.967$, $q = 5\pi/2$, $\xi = 0$.

Аналогичным образом можно охарактеризовать равномерное вращение (10). Для равномерных вращений (9), (11) при линеаризации исходной системы (6) получаем системы, в которых не удается отделить переменные ω_1, ω_2, ω_3, требующие стабилизации, от остальных переменных. В то же время, как уже отмечалось, эти системы неуправляемы по всем переменным.

Рассмотрим случай 2. Для него возможно достичь равномерного вращения вокруг координатной оси Ox с заданной угловой скоростью ω_1^0 при ненулевом управлении. Полагая

$$u_1 = 0, \; u_2 = (-1)^n h_1 \omega_1^0 \text{ и } h_1 = h_2, \quad (18)$$

получим равномерное вращение вида

$$(\omega_1^0, 0, 0, J_1\omega_1^0, 0, \pi/2 + \pi n, \pi + \pi n),$$
$$n \in Z, \quad \omega_1^0 \equiv \mathrm{const}.$$

Линеаризуя систему (5) в окрестности этого стационарного движения, получаем систему, в которой первые шесть уравнений не зависят от q_2. Сделаем замену

$$x_1 = \omega_1 - \omega_1^0, \quad x_2 = \omega_2, \quad x_3 = \omega_3, \quad x_4 = \xi_1 - J_1\omega_1^0,$$
$$x_5 = \xi_2, \quad x_6 = q_1 - (\pi/2 + \pi n), \quad x_7 = q_2 - (\pi + \pi n),$$

тогда линеаризованную систему можно записать в виде

$$A_1\dot{x}_1 = (-1)^n h_2 x_5/J_2 - u_1,$$
$$A_2\dot{x}_2 = (A_3 - A_1 - J_1)\omega_1^0 x_3 + (-1)^n h_1 x_4/J_1 - u_2,$$
$$A_3 x_3 = (A_1 - A_2 + J_1)\omega_1^0 x_2 - \omega_1^0 x_5 + (-1)^n h_1 \omega_1^0 x_6,$$
$$\dot{x}_4 = (-1)^{n+1} h_1 x_2 + u_1, \quad (19)$$
$$\dot{x}_5 = (-1)^{n+1} h_2 x_1 + u_2,$$
$$\dot{x}_6 = x_4/J_1 - x_1.$$

Система (19) управляема по всем переменным. Пусть справедливы равенства (15) и

$$n=0, \quad J_1=J_2=1 \quad , w=250,$$
$$h_1=J_1w, \quad h_1=J_1w,$$

тогда управление, стабилизирующее вращение спутника вокруг оси Ox, есть

$$u_1=14.09(\omega_1-\omega_1^0)+3.73\omega_2-$$
$$-134.096\omega_3-5.94(\xi_1-J_1\omega_1^0)-$$
$$-64.4\xi_2+3.34\,(q_1-\pi/2)$$

при условии, что управление u_2 определяется из формул (18). Аналогично можно построить управление, обеспечивающее стабилизацию равномерного вращения вокруг оси Oy.

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Во всех приведенных случаях по известному алгоритму [2] строилось стабилизирующее управление, обеспечивающее наперед заданные коэффициенты характеристического уравнения для системы линейного приближения. Коэффициенты выбирались так, чтобы минимизировать норму управления и достичь достаточно быстрой стабилизации. Так, характеристическое уравнение системы (14) $\lambda^5+a_1\lambda^4+a_2\lambda^3+a_3\lambda^2+a_4\lambda+a_5=0$ имеет пять корней $\alpha_1\pm\beta_1 i$, $\alpha_2\pm\beta_2 i$, α_3. Независимо от значения мнимых частей этих корней, управление будет стабилизирующим, если $\alpha=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=-1$. В то же время мнимые части оказывают существенное влияние на величину управления $u_1=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, так как вектор **с** зависит от β_1, β_2. Для минимизации $u_1=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ ищем такие β_1 и β_2, чтобы евклидова норма вектора **с** была минимальна, т. е. чтобы функция $g(\beta_1,\beta_2)=c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2+c_5^2$ принимала свое минимальное значение. В рассматриваемом случае (13)—(16) компоненты вектора **с** суть

$$c_1=485.39-0.003\beta_1^2-0.003\beta_2^2-0.0005\beta_1^2\beta_2^2,$$
$$c_2=-2281.38+0.53\beta_1^2+0.53\beta_2^2+0.0001\beta_1^2\beta_2^2,$$
$$c_3=1052.46-0.3\beta_1^2-0.03\beta_2^2+0.0006\beta_1^2\beta_2^2,$$
$$c_4=-3.26-0.0005\beta_1^2-0.0005\beta_2^2+0.2\cdot10^{-5}\beta_1^2\beta_2^2,$$
$$c_5=3.829-0.002\beta_1^2-0.002\beta_2^2+0.3\cdot10^{5}\beta_1^2\beta_2^2.$$

С помощью математического пакета находим, что функция $g(\beta_1,\beta_2)$ принимает минимальное значение при $\beta_1=-12.07245$ и $\beta_2=-64.64417$, а управление задается равенством (17). Если же положить, например, $\beta_1=-64.64417$, $\beta_2=0$ то получим управление $u_1=473.177\omega_1-67.072\omega_2-217.621\omega_3-5.393\xi_1-2.83\xi_2$, которое принимает гораздо большие значения по сравнению с оптимизированным управлением (17). Результаты численного моделирования применения не оптимизированного управления для стабилизации системы (6) с начальным условием (1/40, 1/30, 1/50, $\pi/6$, $\pi/3$, 1/42, 1/37) приведены на рисунках *г, д*.

Чтобы построить стабилизирующее управление для системы (19), рассматриваем характеристическое уравнение шестого порядка, которое имеет три пары комплексно сопряженных корней $\alpha_1\pm\beta_1 i$, $\alpha_2\pm\beta_2 i$, $\alpha_3\pm\beta_3 i$. Снова принимаем $\alpha=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=-1$, тогда функция $g(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ принимает минимальное значение при $\beta_1=1.39325$, $\beta_2=17.9884$, $\beta_3=14.042$, а управление задается равенством (20).

1. Гладун А. В. Об относительной управляемости динамических систем по линейному приближению // Тр. Ин-та прикл. мат. и мех.—1998.—2.—С. 21—31.
2. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.—476 с.
3. Понтрягин А. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.—332 с.
4. Смирнов Е. Я., Павлинов В. Ю., Щербаков П. П., Юрков А. В. Управление движением механических систем. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.—313 с.
5. Kharlamov P. V., Kovalev A. M. Invariant relations method in multibody dynamics // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications.—1997.—30, N 6.—P. 3817—3828.

PARTIAL STABILIZATION OF FIXED MOTIONS OF A SATELLITE WITH GYRODINS

A. V. Gladun, A. M. Kovalev

We consider the problem of stabilization of a rotatory movement of a satellite with one or two gyrodins. Present results touch upon the stability of dynamical systems with respect to part of the variables. The controls are obtained to which the fixed solutions of the system rigid body-gyrodins correspond. The solutions are positions of relative equilibriums and uniform rotations of a satellite. The cases of a controllability of a system are chosen on a linear approximation in a neighbourhood of the fixed motions derived. In this case we construct the controls to provide stabilization of angular velocity and stabilization of uniform rotation of a satellite.